Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 23–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:44:11

УДК 517.982.27

С. В. Асташкин

Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств

На шкале L_p -пространств ($1 < p < \infty$) вводится новый класс экстраполяционных функторов, позволяющий описать в качестве ее предельных пространств симметричные пространства, “близкие” к L_∞ и L_1 . Ключевыми при этом являются доказанные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалов Петре в банаховых парах $(L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$ и $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ соответственно ($\text{Exp } L^\beta$ и $L(\log L)^{1/\beta}$, $\beta > 0$, — пространства Зигмунда).

В работе используется вещественный метод интерполяции операторов.

Библиография: 22 названия.

Введение

Напомним классическую экстраполяционную теорему Яно (см. [1] или [2; гл. 12, теорема 4.41]), являющуюся в некотором смысле обращением теоремы Марцинкевича об интерполяции линейных операторов [2; гл. 12, теорема 4.6]. Предположим, что T — линейный оператор, ограниченный в пространствах $L_p = L_p[0, 1]$ для всех p из некоторой правой полуокрестности единицы, и $\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O((p-1)^{-\alpha})$ ($p \rightarrow 1+$) при некотором $\alpha > 0$. Тогда T можно определить на пространстве Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ (определения см. ниже) так, что он будет ограниченно действовать из этого пространства в L_1 . Верно и двойственное утверждение, относящееся к пространству $\text{Exp } L^{1/\alpha}$, сопряженному к $L(\log L)^\alpha$. Если линейный оператор T ограничен в L_p для всех достаточно больших p и при некотором $\alpha > 0$ $\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O(p^\alpha)$ ($p \rightarrow \infty$), то $T: L_\infty \rightarrow \text{Exp } L^{1/\alpha}$.

В 90-е годы прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная, прежде всего, с именами В. Яверса и М. Мильмана [3]–[5]. Ими было начато систематическое изучение естественных предельных пространств, ассоциированных с интерполяционными шкалами пространств, на основе которого можно получать оценки норм операторов, действующих в них. Библиографию многочисленных приложений теории экстраполяции к анализу см. также в [3]–[5].

Заметим, что в качестве конструкций (экстраполяционных функторов), приводящих к построению новых предельных пространств, В. Яверс и М. Мильман рассматривали сумму и пересечение семейств банаховых пространств (см., например, [4; § 2] или [5; гл. 2]). Это позволяет получать в качестве экстраполяционных лишь пространства вида $(X_0, X_1)_{l_1(1/\rho)}^{\mathcal{J}}$ и $(X_0, X_1)_{l_\infty(1/\rho)}^{\mathcal{K}}$, где (X_0, X_1) — произвольная банахова пара, а ρ — квазивогнутая функция. Определенная ограниченность такого подхода преодолевается в настоящей работе, где (по крайней мере на шкале L_p -пространств) вводится гораздо более широкий класс экстраполяционных функторов, тесно связанный с вещественным методом интерполяции. Благодаря этому в качестве предельных пространств этой шкалы мы получаем “почти

все” симметричные (или перестановочно инвариантные) пространства, “близкие” к L_∞ и L_1 . Ключевыми здесь являются доказанные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалов в парах $(L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$ и $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ соответственно.

Попутно для норм пространств указанного класса найдены новые достаточно простые эквивалентные выражения, использующие лишь L_p -нормы функции. Их следствием является целая “серия” экстраполяционных утверждений типа теоремы Яно.

В дальнейшем будут рассматриваться пространства функций, определенных на $[0, 1]$. Обобщения и усиления теоремы Яно в случае функций, заданных на пространстве с σ -конечной мерой, можно найти в работах [6], [7].

Изложим здесь же, во введении, соображения и факты, приводящие к мысли о существовании эквивалентного выражения для $\mathcal{H}$ -функционала пары пространств $(L_\infty, \text{Exp } L^2)$, зависящего только от L_p -норм соответствующей функции.

В 1923 году А. Я. Хинчин [8] доказал следующие ставшие классическими неравенства:

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где r_k ($k = 1, 2, \dots$) – функции Радемахера на отрезке $[0, 1]$, т.е.

$$r_k(t) = \text{sign} \sin(2^{k-1} \pi t) \quad (t \in [0, 1]),$$

$a_k \in \mathbb{R}$, а A_p и B_p – константы, зависящие только от $p \in [1, \infty)$. Эти неравенства явились исходным пунктом для множества исследований, они многократно обобщались и уточнялись. Для нас важно отметить, что константа B_p в правой части (1) стремится к бесконечности при $p \rightarrow \infty$. Точнее, $B_p \asymp \sqrt{p}$ при $p \rightarrow \infty$, т.е. для всех $p \geq 1$

$$C^{-1} \sqrt{p} \leq B_p \leq C \sqrt{p}$$

с некоторой константой $C > 0$.

В 1993 году П. Хитченко [9] доказал неравенства, аналогичные (1), но имеющие одно существенное преимущество: константы в них не зависят от p . При этом l_2 -норму последовательности коэффициентов $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ нужно заменить ее $\mathcal{H}$ -функционалом $\mathcal{H}_{1,2}(t, a) = \mathcal{H}(t, a; l_1, l_2)$ в паре пространств (l_1, l_2) . Приведем точную формулировку: существует константа $c > 0$ такая, что при всех $p \geq 1$ и $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$

$$c \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{p}, a) \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_p \leq \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{p}, a). \quad (2)$$

Здесь, как и всюду далее, $\|f\|_p = \|f\|_{L_p[0,1]}$.

Позднее автором настоящей работы было показано [10], [11], что

$$C_1^{-1} \mathcal{H}_{1,2}(t, a) \leq \mathcal{H} \left(t, \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k; L_\infty, \text{Exp } L^2 \right) \leq C_1 \mathcal{H}_{1,2}(t, a), \quad (3)$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$. Из соотношений (2) и (3) следует, что с некоторым $C > 0$ для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $p \geq 1$

$$C^{-1} \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_p \leq \mathcal{K} \left(\sqrt{p}, \sum_{k=1}^\infty a_k r_k; L_\infty, \text{Exp } L^2 \right) \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_p.$$

Если в последнее соотношение вместо суммы Радемахера подставить произвольную измеримую функцию f , то его правая часть перестает быть верной (см. замечание 1). Тем не менее если $\|f\|_p$ заменить некоторой более регулярной величиной относительно p , то мы получим верные неравенства:

$$C^{-1} \sqrt{p} \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}} \leq \mathcal{K}(\sqrt{p}, f; L_\infty, \text{Exp } L^2) \leq C \sqrt{p} \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}}.$$

Доказательство несколько более общих неравенств (для $\mathcal{K}(p, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$) составляет основное содержание §2 работы (в §1 приводятся необходимые в дальнейшем определения и обозначения). На их основе в §3 с помощью вещественного $\mathcal{K}$ -метода интерполяции для норм симметричных пространств, “близких” к L_∞ , найдены эквивалентные выражения, использующие лишь L_p -нормы функций (точнее, их асимптотику при $p \rightarrow \infty$). Наконец, в §4 получены двойственные результаты о $\mathcal{J}$ -функционале в паре $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ и пространствах, “близких” к другому “концу” шкалы симметричных пространств – пространству L_1 .

§1. Определения, обозначения, вспомогательные факты

Подробное изложение теории симметричных функциональных пространств и теории интерполяции операторов можно найти, например, в монографиях [12]–[15].

Большую роль в различных вопросах анализа играют пространства Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ и $\text{Exp } L^\beta$ (см., например, [16]). Они состоят из всех измеримых функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечны квазинормы

$$\|f\|_{L(\log L)^\alpha} = \int_0^1 \log_2^\alpha \left(\frac{2}{t} \right) f^*(t) dt \quad \text{и} \quad \|f\|_{\text{Exp } L^\beta} = \sup_{0 < t \leq 1} \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{t} \right) f^*(t)$$

соответственно. Здесь $\alpha, \beta > 0$, а $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(t)|$ [14; гл. 2, §2]. В каждом из этих пространств можно ввести норму так, что оно становится симметричным (или перестановочно инвариантным).

Напомним, что банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется *симметричным*, если выполнены следующие условия:

- а) если $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$, то $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;
- б) если $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) = y^*(t)$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Важный и наиболее простой пример симметричных пространств – L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$) с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{для } p < \infty$$

и

$$\|x\|_\infty = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \quad \text{для } p = \infty.$$

Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть $N(t)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $N(0) = 0$. Пространство Орлича L_N состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{L_N} = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leq 1 \right\}$$

конечна. В частности, если $N(t) = t^p$ ($1 \leq p < \infty$), мы получаем L_p -пространства.

Другие примеры симметричных пространств – пространства Лоренца и Марцинкевича. Если $\varphi(t)$ – вогнутая возрастающая функция на $[0, 1]$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < t \leq 1} \left(\varphi^{-1}(t) \int_0^t x^*(s) ds \right) < \infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ ($1 \leq p < \infty$) – из всех $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int_0^1 (x^*(s))^p d\varphi(s) \right)^{1/p} < \infty.$$

Заметим, что на пространстве $\text{Exp } L^\beta$ можно ввести эквивалентные нормы так, чтобы оно стало пространством Орлича и Марцинкевича: оно совпадает с пространством L_{N_β} , где $N_\beta(t) = e^{t^\beta} - 1$, если $\beta \geq 1$, и $N_\beta(t) = \exp(t + t_\beta^{1/\beta})^\beta - \exp t_\beta$, $t_\beta = 1/\beta - 1$, если $0 < \beta < 1$, а также с пространством $M(\varphi_\beta)$, где $\varphi_\beta(t) = t \log_2^{1/\beta}(e^{\frac{1+\beta}{\beta}}/t)$ (см. [17], [18], а также [14; теорема 5.3]). Аналогично, пространство $L(\log L)^\alpha$ является одновременно пространством Орлича L_{M_α} , где $M_\alpha(t)$ эквивалентна в бесконечности функции $t \log_2^\alpha t$, и пространством Лоренца $\Lambda_1(\varphi_{1/\alpha})$ [18]. Отсюда, в частности, ввиду двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича [14; теорема 5.2] следует, что $(L(\log L)^\alpha)^* = \text{Exp } L^{1/\alpha}$ и $L(\log L)^\alpha$ является подпространством в $(\text{Exp } L^{1/\alpha})^*$ (квазинормы эквивалентны).

Если (X_0, X_1) – банахова пара (т.е. X_0 и X_1 линейно и непрерывно вложены в некоторое отделимое линейное топологическое пространство), то естественным образом определяются пересечение $X_0 \cap X_1$ и сумма $X_0 + X_1$ с нормами

$$\|x\| = \max_{i=0,1} \|x\|_{X_i} \quad \text{и} \quad \|x\| = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1 \}$$

соответственно.

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) – банаховы пары. Тройка пространств (X_0, X_1, X) , $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, называется *интерполяционной* относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, если любой линейный оператор T , определенный на $X_0 + X_1$ и ограниченный из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , ограничен из X в Y . Если $X_i = Y_i$ ($i = 0, 1$) и $X = Y$, то говорят, что X – *интерполяционное пространство* относительно пары (X_0, X_1) .

Важным способом получения интерполяционных пространств является вещественный метод интерполяции, основанный на применении $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалов Петре:

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \}$$

и

$$\mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) = \max \{ \|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1} \}.$$

При фиксированном $t > 0$ первый из них является нормой на сумме пространств $X_0 + tX_1$, второй – на пересечении $X_0 \cap tX_1$ (если X – банахово пространство, а $a > 0$, то по составу элементов aX – то же пространство X , но с нормой $\|x\|_{aX} = a\|x\|_X$). Если же зафиксировать $x \in X_0 + X_1$ (соответственно $x \in X_0 \cap X_1$), то $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ (соответственно $\mathcal{J}(t, x; X_0, X_1)$) – возрастающая вогнутая функция относительно переменной t .

Напомним одно хорошо известное утверждение о двойственности $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалов [12; §3.7]. Пусть (X_0, X_1) – банахова пара такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и X_1 . Тогда если сумму $X_0 + X_1$ рассматривать с нормой $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ ($t > 0$), то сопряженное к ней пространство изометрически совпадает с пересечением $X_0^* \cap X_1^*$, рассматриваемым с нормой $\mathcal{J}(t^{-1}, x^*; X_0^*, X_1^*)$. Используя это обстоятельство, уже упоминавшуюся здесь двойственность пространств Лоренца и Марцинкевича, а также формулу для $\mathcal{J}$ -функционала на соответствующей паре пространств Лоренца [14; теорема 5.10], нетрудно получить следующее выражение для $\mathcal{K}$ -функционала на паре пространств Марцинкевича:

$$\mathcal{K}(t, x; M(\psi), M(\varphi)) \asymp \sup_{0 < u \leq 1} [\max(\psi(u), t^{-1}\varphi(u))]^{-1} \int_0^u x^*(s) ds \quad (4)$$

с константами, не зависящими от $x \in M(\psi) + M(\varphi)$ и $t > 0$ (см. также [19]). Здесь и всюду далее выражение вида $F_1 \asymp F_2$ означает, что для некоторых $c > 0$ и $C > 0$ $cF_1 \leq F_2 \leq CF_1$, причем константы c и C , как правило, не зависят от всех или части аргументов F_1 и F_2 .

Пусть E – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^\infty$. Если (X_0, X_1) – произвольная банахова пара, то пространство $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E < \infty.$$

В пространство $\mathcal{J}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ входят все $x \in X_0 + X_1$, допускающие представление

$$x = \sum_{j=-\infty}^\infty u_j \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1), \quad (5)$$

где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ полагается равной

$$\inf_{\{u_j\}} \|(\mathcal{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E,$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{u_j\}_{j=-\infty}^\infty$, для которых выполнено соотношение (5).

Если E – банахова решетка двусторонних последовательностей и $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^\infty$ – последовательность неотрицательных чисел, то пространство $E(\alpha_k)$ состоит из всех $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$ таких, что $(a_k \alpha_k)_{k=-\infty}^\infty \in E$ и $\|a\|_{E(\alpha_k)} = \|(a_k \alpha_k)\|_E$. Предположим, что $E \supset \Delta(\vec{l}_\infty) = l_\infty \cap l_\infty(2^{-k})$ (соответственно $\{0\} \neq E \subset \Sigma(\vec{l}_1) = l_1 + l_1(2^{-k})$). Тогда отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$) определяет интерполяционный функтор. Это означает, что для произвольных банаховых пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) тройка $(X_0, X_1, (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}})$ является интерполяционной относительно тройки $(Y_0, Y_1, (Y_0, Y_1)_E^{\mathcal{K}})$ (и аналогично для

$\mathcal{J}$ -метода). Совокупность всех таких функторов называется *вещественным $\mathcal{K}$ -методом* (соответственно $\mathcal{J}$ -методом интерполяции). Важно отметить, что в случае $\mathcal{K}$ - (соответственно $\mathcal{J}$ -) метода его параметр E можно всегда считать интерполяционным пространством относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ (соответственно $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$) [13; следствия 3.3.10 и 3.4.6].

В частности, для $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ получаем классические интерполяционные пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathcal{K}} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathcal{J}},$$

свойства которых подробно изучаются в монографии [12].

§ 2. О $\mathcal{K}$ -функционале пары $(L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$

ЛЕММА 1. Для произвольного $\beta > 0$ выполнено

$$\mathcal{K}(t, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) \asymp t \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-t\beta})} \left(f^*(u) \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \right)$$

с константами, не зависящими от $f \in \text{Exp } L^\beta$ и $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (4) и из того, что $L_\infty = M(\varphi_0)$, $\varphi_0(u) = u$, а $\text{Exp } L^\beta = M(\varphi_\beta)$, $\varphi_\beta(u) = t \log_2^{1/\beta} (e^{\frac{1+\beta}{\beta}}/u)$ (см. §1), следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) &\asymp \|f\|_{M(\psi_t)}, \\ \text{где } \psi_t(u) &= u \max \left\{ 1, t^{-1} \log_2^{1/\beta} \left(\frac{e^{(1+\beta)/\beta}}{u} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

с константами, зависящими только от $\beta > 0$.

Пусть $\mathcal{M}_\psi(s)$ — функция растяжения функции ψ , т.е.

$$\mathcal{M}_\psi(s) = \sup_{0 < u \leq \min(1, 1/s)} \frac{\psi(su)}{\psi(u)}.$$

Если $\chi_\beta(u) = \log_2^{1/\beta} (e^{(1+\beta)/\beta}/u)$, то прямые вычисления показывают, что

$$\mathcal{M}_{\chi_\beta} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{\beta \ln 2}{\beta + 1} + 1 \right)^{1/\beta} < 2. \quad (7)$$

Оценим $\mathcal{M}_{\psi_t}(1/2)$, используя равенство

$$\mathcal{M}_{\psi_t} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sup_{0 < u \leq 1} F_t(u), \quad \text{где } F_t(u) = \frac{\max(1, t^{-1} \chi_\beta(u/2))}{\max(1, t^{-1} \chi_\beta(u))}. \quad (8)$$

Рассмотрим три случая:

а) $\chi_\beta(u) \geq t$, тогда

$$F_t(u) = \frac{\chi_\beta(u/2)}{\chi_\beta(u)} \leq \mathcal{M}_{\chi_\beta}\left(\frac{1}{2}\right);$$

б) $\chi_\beta(u) < t \leq \chi_\beta(u/2)$, в этом случае снова

$$F_t(u) = \frac{\chi_\beta(u/2)}{t} \leq \frac{\chi_\beta(u/2)}{\chi_\beta(u)} \leq \mathcal{M}_{\chi_\beta}\left(\frac{1}{2}\right);$$

с) $\chi_\beta(u/2) < t$, тогда получаем $F_t(u) = 1 \leq \mathcal{M}_{\chi_\beta}(1/2)$.

В итоге ввиду (7) и (8) $\sup_{t>0} \mathcal{M}_{\psi_t}(1/2) \leq 2^{-1} \mathcal{M}_{\chi_\beta}(1/2) < 1$. Поэтому, действуя точно так же, как при доказательстве леммы 1.4 в [14], получаем, что при всех $0 < s \leq 1$

$$\int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u} du \leq C \psi_t(s),$$

где константа $C > 0$ зависит только от β . Отсюда по определению нормы в пространстве Марцинкевича

$$\begin{aligned} \|f\|_{M(\psi_t)} &\leq \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\psi_t(s)} \int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u} du \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \frac{u}{\psi_t(u)} \right\} \\ &\leq C \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \frac{u}{\psi_t(u)} \right\}. \end{aligned}$$

Так как противоположное неравенство

$$\|f\|_{M(\psi_t)} \geq \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \frac{u}{\psi_t(u)} \right\}$$

очевидно, то из (6) следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \frac{u}{\psi_t(u)} \right\} \\ &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \min \left(1, t \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \right) \right\} \\ &= t \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-t^\beta})} \left(f^*(u) \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \right) \end{aligned}$$

с константами, зависящими только от β .

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного $\beta > 0$

$$\mathcal{K}(p, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) \asymp p \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_{q^\beta}}{q} \quad (9)$$

с константами, не зависящими от $f \in \text{Exp } L^\beta$ и $p \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $k_\beta = \max(1, 2/\beta)$. Тогда для любого $q \geq 1$

$$\begin{aligned} \|f\|_q &= \left(\int_0^1 (f^*(s))^q ds \right)^{1/q} \leq \left(2^{k_\beta q - 1} \int_0^{2^{1-k_\beta q}} (f^*(s))^q ds \right)^{1/q} \\ &\leq 2^{k_\beta} \left(\int_0^{2^{1-k_\beta q}} \log_2^{q/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) du \right)^{1/q} \sup_{0 < u \leq 2^{1-q}} \left(f^*(u) \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Оценим сверху интеграл

$$I(\beta, q) = \int_0^{2^{1-k_\beta q}} \log_2^{q/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) du.$$

С помощью замены переменной получим:

$$I(\beta, q) = \frac{2\beta \ln 2}{q} \int_{(k_\beta q)^{q/\beta}}^\infty x^{\beta/q} 2^{-x^{\beta/q}} dx = 2 \ln 2 I_1(\beta, q), \quad (11)$$

где $I_1(\beta, q) = \int_{k_\beta q}^\infty v^{q/\beta} 2^{-v} dv$. Интегрируя по частям, оценим $I_1(\beta, q)$:

$$\begin{aligned} I_1(\beta, q) &= \frac{1}{\ln 2} \left((k_\beta q)^{q/\beta} 2^{-k_\beta q} + \frac{q}{\beta} \int_{k_\beta q}^\infty v^{q/\beta-1} 2^{-v} dv \right) \\ &\leq \frac{1}{\ln 2} \left[(k_\beta q)^{q/\beta} 2^{-k_\beta q} + \frac{1}{\beta k_\beta} I_1(\beta, q) \right] \leq \frac{1}{\ln 2} \left[(k_\beta q)^{q/\beta} 2^{-k_\beta q} + \frac{1}{2} I_1(\beta, q) \right], \end{aligned}$$

так как $\beta k_\beta \geq 2$. Отсюда

$$I_1(\beta, q) \leq \frac{2}{2 \ln 2 - 1} (k_\beta q)^{q/\beta} 2^{-k_\beta q}.$$

Поэтому из (11) следует

$$I(\beta, q) \leq \frac{4 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (k_\beta q)^{q/\beta} 2^{-k_\beta q},$$

и, значит, ввиду (10) существует $C(\beta) > 0$ такое, что при всех $q \geq 1$

$$\|f\|_q \leq C(\beta) q^{1/\beta} \sup_{0 < u \leq 2^{1-q}} \left(f^*(u) \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \right).$$

Но тогда по лемме 1

$$\|f\|_q \leq C(\beta) \mathcal{K}(q^{1/\beta}, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$$

с некоторой (возможно, другой) константой $C(\beta) > 0$, не зависящей от f и $q \geq 1$.

Если теперь $q \geq p$, то из последнего неравенства и вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала следует

$$\frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leq C(\beta) \frac{\mathcal{K}(q^{1/\beta}, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)}{q^{1/\beta}} \leq C(\beta) \frac{\mathcal{K}(p^{1/\beta}, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)}{p^{1/\beta}}.$$

Отсюда

$$p^{1/\beta} \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leq C(\beta) \mathcal{K}(p^{1/\beta}, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$$

или после замены переменной

$$p \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_{q^\beta}}{q} \leq C(\beta) \mathcal{K}(p, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta).$$

Для доказательства противоположного неравенства ввиду леммы 1 достаточно показать, что при всех $0 < u \leq 2^{1-p}$ ($p \geq 1$) выполнено:

$$f^*(u) \leq C_1(\beta) \sup_{q \geq p} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \log_2^{1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right), \quad (12)$$

где $C_1(\beta)$ зависит только от β .

Из описания пространства $\text{Exp } L^\beta$ как пространства Орлича (см. §1), а также из разложения функции $N_\beta(t) = e^{t^\beta} - 1$ в ряд Тейлора следует, что

$$\|f\|_{\text{Exp } L^\beta} \asymp \sup_{q \geq 1} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}}.$$

Отсюда

$$f^*(u) \leq C_2(\beta) \sup_{q \geq 1} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \log_2^{1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) \quad \text{при } 0 < u \leq 1. \quad (13)$$

Заметим, что при доказательстве (12) можно предполагать: $f = f^*$ и $\{s \in [0, 1] : f(s) \neq 0\} \subset [0, 2^{1-p}]$. Поэтому если $1 \leq q \leq p$, то по неравенству Гёльдера

$$\|f\|_q \leq 2^{\frac{(1-p)(p-q)}{pq}} \|f\|_p \leq 2^{-\frac{p}{q}} \|f\|_p. \quad (14)$$

Так как для $x \geq 1$ $x^{1/\beta} \leq C_3(\beta) 2^x$, то из (14) получаем, что при $1 \leq q \leq p$

$$\frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leq 2 \max_{1 \leq q \leq p} \frac{2^{-p/q} p^{1/\beta}}{q^{1/\beta}} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}} \leq 2C_3(\beta) \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Отсюда и из (13) следует (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В соотношении (9) правую часть нельзя заменить на $\|f\|_{p^\beta}$. Действительно, рассмотрим функции $h_u(t) = 1$, если $t \in [0, u]$, и $h_u(t) = 0$, если $t \notin [0, u]$ ($0 < u \leq 2^{1-p}$). Тогда $\|h_u\|_p = u^{1/p}$ и по лемме 1

$$\mathcal{K}(p^{1/\beta}, h_u; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) \asymp p^{1/\beta} \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right).$$

Поэтому

$$\sup_{0 < u \leq 2^{1-p}} \frac{\mathcal{K}(p^{1/\beta}, h_u; L_\infty, \text{Exp } L^\beta)}{\|h_u\|_p} \asymp p^{1/\beta} \sup_{0 < u \leq 2^{1-p}} \log_2^{-1/\beta} \left(\frac{2}{u} \right) u^{-1/p} = \infty.$$

Теорема 1 позволяет найти новое описание пространств, интерполяционных относительно банаховой пары $(L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$.

§ 3. Описание симметричных пространств, “близких” к L_∞

Далее через e^k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) будут обозначаться стандартные орты в пространстве двусторонних числовых последовательностей, т.е. $e^k = (e_j^k)$, $e_k^k = 1$, $e_j^k = 0$ ($j \neq k$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть банахова решетка F промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, что означает выполнение непрерывных вложений

$$\Delta(\vec{l}_\infty) \subset F \subset \Sigma(\vec{l}_\infty). \quad (15)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$ множество всех измеримых на $[0, 1]$ функций f таких, что последовательность

$$a_f = \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|_{2^{\beta k}} e^k$$

принадлежит F .

Из определения ясно, что $\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$ — симметричное пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}} = \|a_f\|_F.$$

В частности, $\mathcal{L}_{\beta, l_\infty}^{\mathcal{K}} = L_\infty$, а $\mathcal{L}_{\beta, l_\infty(2^{-k})}^{\mathcal{K}} = \text{Exp } L^\beta$ (последнее следует из разложения функции $N_\beta(u) = e^{u^\beta} - 1$ в ряд Тейлора). Поэтому

$$L_\infty \subset \mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}} \subset \text{Exp } L^\beta.$$

Более того, из теоремы 2, основного результата этого параграфа, будет следовать, что пространство $\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$ интерполяционно относительно пары $(L_\infty, \text{Exp } L^\beta)$ при условии, что решетка F интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty$.

Начнем со вспомогательного утверждения. Определим проекторы в пространствах двусторонних числовых последовательностей:

$$P_+ a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^j \quad \text{и} \quad P_- a = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j e^j, \quad \text{где} \quad a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}.$$

ЛЕММА 2. Предположим, что для банаховой решетки двусторонних числовых последовательностей F выполнено (15).

Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой последовательности $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $|a_j| \leq 2^j |a_0|$ ($j = -1, -2, \dots$), справедливо неравенство

$$\|a\|_F \leq C \|P_+ a\|_F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a = P_-a + P_+a$, то

$$\|a\|_F \leq \|P_-a\|_F + \|P_+a\|_F. \quad (16)$$

Ввиду условий леммы

$$\|P_-a\|_F \leq |a_0| \left\| \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^j e^j \right\|_F \leq C_1 |a_0| \left\| \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^j e^j \right\|_{\Delta(\vec{l}_\infty)} = C_1 |a_0|,$$

а также

$$\|P_+a\|_F \geq |a_0| \|e^0\|_F \geq |a_0| C_2^{-1} \|e^0\|_{\Sigma(\vec{l}_\infty)} = C_2^{-1} |a_0|,$$

где C_1 и C_2 – константы вложений (15). Отсюда и из (16) следует

$$\|a\|_F \leq (1 + C_1 C_2) \|P_+a\|_F,$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta > 0$ и банахова решетка F интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$. Тогда $\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}} = (L_\infty, \text{Exp } L^\beta)_F^{\mathcal{K}}$ (с эквивалентностью норм).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что с некоторыми константами, зависящими лишь от банаховой решетки F , для произвольной измеримой на $[0, 1]$ функции f выполнено:

$$\|a_f\|_F \asymp \|b_f\|_F, \quad (17)$$

где

$$a_f = \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|_{2^{\beta k}} e^k \quad \text{и} \quad b_f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(2^k, f; L_\infty, \text{Exp } L^\beta) e^k.$$

Прежде всего, так как $L_\infty \subset \text{Exp } L^\beta$ с константой 1, то при $k = -1, -2, \dots$ $(b_f)_k = 2^k (b_f)_0 = 2^k \|f\|_{\text{Exp } L^\beta}$. Поэтому по лемме 2

$$\|b_f\|_F \asymp \|P_+b_f\|_F. \quad (18)$$

Далее, хорошо известно [13; замечание 3.3.8], что при условии интерполяционности F относительно пары $\vec{l}_\infty$

$$\|a\|_F \asymp \|\bar{a}\|_F, \quad \text{где} \quad \bar{a} = (\bar{a}_k)_{k=-\infty}^{\infty}, \quad \bar{a}_k = \sup_{j=0, \pm 1, \dots} \{\min[1, 2^{k-j}] |a_j|\}.$$

Следовательно,

$$\|a_f\|_F \asymp \|\bar{a}_f\|_F,$$

откуда ввиду очевидных неравенств $\bar{a}_f \geq P_+\bar{a}_f \geq a_f$

$$\|a_f\|_F \asymp \|P_+\bar{a}_f\|_F. \quad (19)$$

Так как последовательность a_f возрастает, то

$$P_+\bar{a}_f = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sup_{j \geq k} \frac{\|f\|_{2^{\beta j}}}{2^j} e^k$$

и, значит, по теореме 1

$$\|P_+\bar{a}_f\|_F \asymp \|P_+b_f\|_F$$

с универсальными константами. Поэтому соотношение (17) следует из (18) и (19).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сохраняя обозначения теоремы 2, покажем, что вложение $X \subset \mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$ можно доказать и иначе, используя интерполяционные соображения. Действительно, пусть T – произвольный линейный оператор, ограниченный в каждом из пространств L_∞ и $\text{Ехр } L^\beta$. Тогда сублинейный оператор

$$Qf = \sum_{k=0}^{\infty} \|Tf\|_{2^{\beta k}} e^k$$

ограниченно действует из L_∞ в l_∞ и из $\text{Ехр } L^\beta$ в $l_\infty(2^{-k})$. Так как функторы вещественного метода интерполируют сублинейные операторы и $F = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))_F^{\mathcal{K}}$ [13; лемма 3.3.7], то Q ограничено действует из $X = (L_\infty, \text{Ехр } L^\beta)_F^{\mathcal{K}}$ в F , т.е. в наших обозначениях

$$\|Tf\|_{\mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}} = \|af\|_F \leq C\|f\|_X.$$

Таким образом, тройка пространств $(L_\infty, \text{Ехр } L^\beta, X)$ интерполяционна относительно тройки $(L_\infty, \text{Ехр } L^\beta, \mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}})$. Если, в частности, в качестве T взять тождественный оператор, то получим $X \subset \mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$.

Интерполяция в паре $(L_\infty, \text{Ехр } L^\beta)$ описывается вещественным $\mathcal{K}$ -методом [19] (см. также [10; предложение 1]). Это означает, что всякое пространство X , интерполяционное относительно нее, представимо в виде $X = (L_\infty, \text{Ехр } L^\beta)_F^{\mathcal{K}}$, где F – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей. При этом, как говорилось в § 1, можно считать, что F интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$. Поэтому мы получаем из теоремы 2

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\beta > 0$. Для любого пространства X , интерполяционного относительно пары $(L_\infty, \text{Ехр } L^\beta)$, существует банахова решетка F такая, что $X = \mathcal{L}_{\beta, F}^{\mathcal{K}}$ (с эквивалентностью норм).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в последнее время многие авторы при изучении функциональных пространств, “близких” к L_∞ , использовали асимптотику L_p -норм функции при $p \rightarrow \infty$. Так, например, в [20] изучается сходимость рядов Уолша в пространствах $G_{p, \alpha}$ ($p > 1$, $\alpha \geq 1$), одна из эквивалентных норм которых имеет вид:

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha} \right)^p dx \right)^{1/p}.$$

В работе [20], в частности, выясняется расположение этих пространств в шкале экспоненциальных пространств Орлича. А именно показано, что для $p > 1$, $q > 0$, $\alpha \geq 1$ таких, что $p^{-1} + q^{-1} = \alpha$, и любого $r > q$

$$L_{N_r} \subset G_{p, \alpha} \subset L_{N_q},$$

где, как и ранее, $N_r(t) = e^{t^r} - 1$ ($r \geq 1$) и $N_r(t) = \exp(t + t_r^{1/r})^r - \exp t_r$, $t_r = 1/r - 1$ ($0 < r < 1$).

Используя теорему 2 и результаты работы [10], нетрудно показать, что пространства $G_{p, \alpha}$ являются пространствами Лоренца. Действительно, для заданных $p > 1$ и $\alpha \geq 1$ возьмем любое $\beta \in (0, p/(\alpha p - 1))$. Тогда непосредственная

проверка показывает, что $G_{p,\alpha} = \mathcal{L}_{\beta, l_p(2^{-\theta k})}^{\mathcal{K}}$, где $\theta = \beta(\alpha p - 1)/p \in (0, 1)$. Так как пространство $l_p(2^{-\theta k})$ интерполяционно относительно пары $\vec{l}_\infty$ [12; теорема 5.6.1], то по теореме 2

$$G_{p,\alpha} = (L_\infty, \text{Exp } L^\beta)_{l_p(2^{-\theta k})}^{\mathcal{K}}.$$

Но последнее пространство (см. [10; пример 2]) совпадает (с эквивалентностью норм) с пространством Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, где $\varphi(s) = \log_2^{1-\alpha p}(2/s)$.

Из теоремы 2 можно вывести целую “серию” утверждений типа теоремы Яно. Пользуясь последним замечанием, приведем в качестве примера одно из них.

ТЕОРЕМА 3. Пусть линейный оператор T ограничен в пространстве L_p для каждого $p \geq 1$ и

$$\int_1^\infty \left(\frac{\|T\|_{L_x \rightarrow L_x}}{x^\alpha} \right)^q dx < \infty$$

для некоторых $\alpha \geq 1$ и $q > 1$.

Тогда T ограниченно действует из L_∞ в пространство Лоренца $\Lambda_q(\varphi)$, где $\varphi(s) = \log_2^{1-\alpha q}(2/s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 3 и условий теоремы

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\Lambda_q(\varphi)} &\asymp \left\{ \int_1^\infty \left(\frac{\|Tf\|_x}{x^\alpha} \right)^q dx \right\}^{1/q} \\ &\leq \left\{ \int_1^\infty \left(\frac{\|T\|_{L_x \rightarrow L_x}}{x^\alpha} \right)^q dx \right\}^{1/q} \sup_{x \geq 1} \|f\|_x = C \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

В последней части работы мы докажем двойственные результаты о симметричных пространствах, “близких” к L_1 . При этом ключевую роль будет играть $\mathcal{J}$ -метод вещественной интерполяции.

§ 4. Описание симметричных пространств, “близких” к L_1

Напомним определение пересечения и суммы счетного семейства банаховых пространств. Пусть X_k ($k = 1, 2, \dots$) – банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Тогда их пересечением называют банахово пространство $\Delta_{k=1}^\infty X_k$, состоящее из всех $x \in \bigcap_{k=1}^\infty X_k$, для которых $\|x\| = \sup_{k=1,2,\dots} \|x\|_{X_k} < \infty$. При построении суммы $\sum_{k=1}^\infty X_k$ сделаем дополнительное предположение о том, что существует банахово пространство X_0 , вложенное в $\mathcal{T}$ и такое, что $X_k \subset X_0$ с константой 1 для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда через $\sum_{k=1}^\infty X_k$ обозначим множество всех $x \in X_0$, представимых в виде

$$x = \sum_{k=1}^\infty x_k \quad (x_k \in X_k), \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k} < \infty. \quad (20)$$

Если теперь на линейном пространстве $\sum_{k=1}^\infty X_k$ ввести норму

$$\|x\| = \inf \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (20), то оно становится банаховым.

ЛЕММА 3. Если пересечение $\Delta_{k=1}^{\infty} X_k$ всюду плотно в X_k для любого $k = 1, 2, \dots$, то сопряженное к нему пространство $(\Delta_{k=1}^{\infty} X_k)^*$ совпадает с $\sum_{k=1}^{\infty} X_k^*$ (изометрически).

Так как последнее утверждение, по сути дела, известно (очень близко к нему, например, предложение 2.4.6 из монографии [13]), то доказательство его мы опускаем.

ЛЕММА 4. Для того чтобы банахова решетка G двусторонних числовых последовательностей была интерполяционной относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: существует $c > 0$ такое, что из

$$a \in \Sigma(\vec{l}_1), \quad a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \quad (\text{сходимость в } \Sigma(\vec{l}_1)), \quad a^k = (a_i^k) \in \Delta(\vec{l}_1)$$

следует:

$$\left\| \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \max(1, 2^{k-i}) |a_i^k| \right)_k \right\|_G \geq c \|a\|_G. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно [13; следствие 3.4.7], что интерполяционность G относительно пары $\vec{l}_1$ эквивалентна выполнению равенства

$$(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathcal{J}} = G. \quad (22)$$

Если выполнено (22), то для доказательства (21) достаточно воспользоваться определением нормы пространства $(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathcal{J}}$, а также тем, что

$$\mathcal{J}(t, b; l_1, l_1(2^{-k})) \asymp \sum_{i=-\infty}^{\infty} \max(1, t2^{-i}) |b_i| \quad (23)$$

с константами, не зависящими от $b = (b_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Delta(\vec{l}_1)$ и $t > 0$.

Покажем теперь, что из (21) следует (22). Заметим прежде всего, что вложение

$$(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathcal{J}} \supset G$$

выполнено для любой решетки G , промежуточной относительно пары $\vec{l}_1$. Действительно, если $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in G$, то представим: $a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^k$, где e^k — стандартные орты. Тогда $a_k e^k \in \Delta(\vec{l}_1)$ и $\mathcal{J}(2^k, a_k e^k; l_1, l_1(2^{-k})) = |a_k|$. Поэтому $\|a\|_{(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathcal{J}}} \leq \|a\|_G$. В заключение заметим, что ввиду соотношения (23) противоположное вложение в (22) является непосредственным следствием условия (21).

ТЕОРЕМА 4. Для произвольного $\beta > 0$ с константами, не зависящими от $g \in L(\log L)^{1/\beta}$ и $k = 1, 2, \dots$,

$$\mathcal{J}(2^{-k}, g; L_1, L(\log L)^{1/\beta}) \asymp \|g\|_{U_k}, \quad (24)$$

где $U_k = \sum_{j \geq k} 2^{j-k} L_{r_j}$, $r_j = 1 + 2^{-\beta j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1

$$\mathcal{K}(2^k, f; L_\infty, \text{Ехр } L^\beta) \asymp \|f\|_{V_k},$$

где $V_k = \Delta_{j \geq k} 2^{k-j} L_{2^{\beta j}}$. При этом константы последней эквивалентности не зависят от $k = 1, 2, \dots$ и $f \in \text{Ехр } L^\beta$. Следовательно, переходя к сопряженным пространствам, ввиду двойственности $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалов (см. §1) получаем

$$\mathcal{J}(2^{-k}, g; L_\infty^*, (\text{Ехр } L^\beta)^*) \asymp \|g\|_{V_k^*}$$

с константами, не зависящими от $k = 1, 2, \dots$ и $g \in (\text{Ехр } L^\beta)^*$. Так как $L(\log L)^{1/\beta}$ и L_1 – подпространства пространств $(\text{Ехр } L^\beta)^*$ и L_∞^* соответственно (см. §1), то отсюда по лемме 3 для всех $g \in L(\log L)^{1/\beta}$

$$\mathcal{J}(2^{-k}, g; L_1, L(\log L)^{1/\beta}) \asymp \|g\|_{U'_k}.$$

В последнем соотношении

$$U'_k = \sum_{j \geq k} 2^{j-k} L_{s_j},$$

где $k = 1, 2, \dots$ и $s_j = 1 + 1/(2^{\beta j} - 1)$.

Для любых $\beta > 0$ и $j = 1, 2, \dots$ выполнено:

$$u_\beta s_{j+1} < r_j < s_j, \quad \text{где } u_\beta = \frac{2^{2\beta} - 1}{2^\beta}.$$

Поэтому из определения U_k следует: $U'_k = U_k$ и $\|g\|_{U_k} \leq \|g\|_{U'_k} \leq u_\beta^{-1} \|g\|_{U_k}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть банахова решетка G промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$, что означает выполнение непрерывных вложений

$$\Delta(\vec{l}_1) \subset G \subset \Sigma(\vec{l}_1). \quad (25)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}$ множество всех измеримых на $[0, 1]$ функций g таких, что существует представление

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \quad (\text{сходимость в } L_1), \quad g_k \in L_{r_k}, \quad r_k = 1 + 2^{-\beta k}, \quad (26)$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \in G. \quad (27)$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}$ – симметричное пространство с нормой

$$\|g\|_{\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}} = \inf \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (26). Кроме того, $\mathcal{L}_{\beta, l_1}^{\mathcal{J}} = L_1$ и $\mathcal{L}_{\beta, l_1(2^{-k})}^{\mathcal{J}} = L(\log L)^{1/\beta}$. Следовательно, для любой банаховой решетки G со свойством (25)

$$L(\log L)^{1/\beta} \subset \mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}} \subset L_1.$$

Мы покажем, что, более того, пространство $\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}$ интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$, если G интерполяционна относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $\beta > 0$ и банахова решетка G интерполяционна относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$. Тогда $\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}} = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})_G^{\mathcal{J}}$ (с эквивалентностью норм).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть далее $Y = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})_G^{\mathcal{J}}$ и

$$\mathcal{J}(t, h) = \mathcal{J}(t, h; L_1, L(\log L)^{1/\beta})$$

для произвольных $h \in L(\log L)^{1/\beta}$ и $t > 0$.

Прежде всего, по определению пространств $\mathcal{J}$ -метода

$$\|f\|_Y = \inf \|(\mathcal{J}(2^k, f_k))_k\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \quad (\text{сходимость в } L_1), \quad f_k \in L(\log L)^{1/\beta}. \quad (28)$$

Если $g \in \mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}$, то имеет место представление (26) со свойством (27). Тогда по теореме 4 сразу получаем, что

$$g \in Y \quad \text{и} \quad \|g\|_Y \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G.$$

Поэтому $\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}} \subset Y$ и $\|g\|_Y \leq C_1 \|g\|_{\mathcal{L}_{\beta, G}^{\mathcal{J}}}$.

Для доказательства противоположного вложения покажем сначала, что при вычислении нормы в Y можно ограничиться (с точностью до эквивалентности) представлениями (28), в которых $f_k = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$.

Так как пространство $L(\log L)^{1/\beta} \subset L_1$ с константой 1, то для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{J}(2^k, g) = 2^k \|g\|_{L(\log L)^{1/\beta}}.$$

Поэтому если C_2 – константа вложения $G \subset \Sigma(\vec{l}_1)$, то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}(2^k, f_k) e^k \right\|_G &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} e^k \right\|_G \\ &\geq C_2^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} e^k \right\|_{l_1(2^{-k})} = C_2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим теперь вместо заданного представления (28) новое:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'_k, \quad f'_k = f_k \quad \text{для } k = -2, -3, \dots, \\ f'_{-1} &= \sum_{i=-1}^{\infty} f_i, \quad f'_k = 0 \quad \text{для } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Тогда ввиду (29) и в силу того, что G – банахова решетка, получим

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}(2^k, f'_k))_k\|_G &\leq \|(\mathcal{J}(2^k, f_k))_k\|_G + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} \|e^{-1}\|_G \\ &\leq (1 + 2C_2C_3) \|(\mathcal{J}(2^k, f_k))_k\|_G, \end{aligned}$$

где C_3 – константа вложения $\Delta(\vec{l}_1) \subset G$.

Пусть теперь $f \in Y$. Тогда, как показано ранее, существует представление (28) такое, что $f_k = 0$ для $k = 0, 1, \dots$ и

$$\|f\|_Y \geq C_4^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}(2^{-k}, f_{-k}) e^{-k} \right\|_G. \quad (30)$$

По теореме 4 для каждого $k = 1, 2, \dots$ можно найти представление

$$f_{-k} = \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,j}, \quad \text{где } g_{k,j} \in L_{r_j}, \quad (31)$$

причем

$$\mathcal{J}(2^{-k}, f_{-k}) \geq C_5^{-1} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j}. \quad (32)$$

Опять, так как $G \subset \Sigma(\vec{l}_1)$, из (30) и (32) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \|g_{k,j}\|_{r_j} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j} \leq C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}(2^{-k}, f_{-k}) \\ &\leq C_5 C_2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}(2^{-k}, f_{-k}) e^{-k} \right\|_G \leq C_5 C_2 C_4 \|f\|_Y < \infty. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда, в частности, следует, что двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,j}$$

абсолютно сходится в L_1 и его сумма равна сумме соответствующего повторного, т.е. f . Поэтому

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \quad (\text{сходимость в } L_1), \quad \text{где } g_j = \sum_{k=1}^j g_{k,j}.$$

При этом ввиду (31) $g_j \in L_{r_j}$ и

$$\|g_j\|_{r_j} \leq \sum_{k=1}^j \|g_{k,j}\|_{r_j}. \quad (34)$$

Рассмотрим последовательность

$$b_g = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-j}. \quad (35)$$

Учитывая (33), заключаем, что

$$b_g = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \quad (\text{сходимость в } \Sigma(\vec{l}_1)), \quad \text{где } b^k = \sum_{j=k}^{\infty} \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-j}.$$

Из (32) следует, что $b^k \in \Delta(\vec{l}_1)$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Значит, по лемме 4 ввиду интерполяционности G относительно пары $\vec{l}_1$

$$\begin{aligned} \|b_g\|_G &\leq C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \max(1, 2^{j-k}) \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-k} \right\|_G \\ &= C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-k} \right\|_G. \end{aligned}$$

Поэтому из (34), (35), (30) и (32) получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{r_j} e^{-j} \right\|_G \leq \|b_g\|_G \leq C_4 C_5 C_6 \|f\|_Y,$$

откуда $f \in \mathcal{L}_{\beta,G}^{\mathcal{J}}$ и $\|f\|_{\mathcal{L}_{\beta,G}^{\mathcal{J}}} \leq C_4 C_5 C_6 \|f\|_Y$.

Интерполяция в паре $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ описывается вещественным $\mathcal{H}$ -методом [21; следствие 5.10] (см. также [22]). Ввиду теорем о связи между $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -функторами [13] она описывается также $\mathcal{J}$ -методом. Иначе говоря, если Y интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$, то $Y = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})_G^{\mathcal{J}}$ для некоторой банаховой решетки G , интерполяционной относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$ (см. §1). Поэтому из теоремы 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\beta > 0$. Для любого пространства Y , интерполяционного относительно пары $(L_{\infty}, \text{Exp } L^{\beta})$, существует банахова решетка G такая, что $Y = \mathcal{L}_{\beta,G}^{\mathcal{J}}$ (с эквивалентностью норм).

Приведем теперь еще одну конкретную экстраполяционную теорему.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ такие, что при $1 < p < 1 + \varepsilon$ линейный оператор T ограничен в пространстве L_p и $\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq A \log_2(1/(p-1))$. Тогда T можно определить на пространстве Лоренца $\Lambda_1(\varphi)$, построенном по функции $\varphi(t) = t \log_2 \log_2(16/t)$ так, что он будет ограниченно действовать из $\Lambda_1(\varphi)$ в L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta > 0$. Тогда пространство $\Lambda_1(\varphi)$ интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$. Более того, можно доказать следующее равенство, понимаемое как изоморфизм, константа которого зависит от $\beta > 0$:

$$\Lambda_1(\varphi) = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})_{l_1(w_k)}^{\mathcal{J}}, \quad (36)$$

где “вес” $w_k = -k$, если $k < 0$, и $w_k = 1$, если $k \geq 0$.

Действительно, покажем, что совпадают (с точностью до изоморфизма) соответствующие сопряженные пространства. По теореме двойственности для вещественного метода интерполяции [13]

$$((L_1, L(\log L)^{1/\beta})_{l_1(w_k)}^{\mathcal{J}})^* = (L_\infty, \text{Exp } L^\beta)_{l_\infty(u_k)}^{\mathcal{K}},$$

где $u_k = 1/(k+1)$, если $k \geq 0$, и $u_k = 1$, если $k < 0$. Так как $(\Lambda_1(\varphi))^* = M(\varphi)$ [14; теорема 5.2], то (36) следует из равенства

$$M(\varphi) = (L_\infty, \text{Exp } L^\beta)_{l_\infty(u_k)}^{\mathcal{K}},$$

которое в случае $\beta = 2$ доказано в [10; пример 1]. Случай произвольного $\beta > 0$ рассматривается совершенно аналогично.

Выберем теперь β так, чтобы $2^{-\beta} < \varepsilon$. Тогда если $g \in \Lambda_1(\varphi)$, то ввиду (36) и теоремы 5 существует представление

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \quad (\text{сходимость в } L_1), \quad g_k \in L_{r_k}, \quad r_k = 1 + 2^{-\beta k},$$

такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} k < \infty.$$

По условию теоремы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Tg_k\|_{r_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|_{L_{r_k} \rightarrow L_{r_k}} \|g_k\|_{r_k} \leq A\beta \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} k.$$

Следовательно,

$$Tg = \sum_{k=1}^{\infty} Tg_k \quad (\text{сходимость в } L_1)$$

и ввиду равенства $L_1 = \mathcal{L}_{\beta, l_1}^{\mathcal{J}}$, а также определения 2 $\|Tg\|_1 \leq C\|g\|_{\Lambda_1(\varphi)}$ с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от β .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как известно [5; гл. 2], по значениям $F_\theta(X_0, X_1)$ достаточно широкого класса функторов $\{F_\theta\}_{0 < \theta < 1}$ на паре (X_0, X_1) можно восстановить $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалы этой пары. Теоремы 1 и 4 решают иную задачу: они позволяют (с точностью до эквивалентности) находить аналогичные функционалы для пар предельных пространств L_p -шкалы. Как очень частный случай соотношений (9) и (24) можно рассматривать приведенные, например, в [5] равенства (2.26) и (2.27), дающие описание “крайних” экстраполяционных пространств этой шкалы – $\text{Exp } L^\beta$ и $L(\log L)^{1/\beta}$ – в виде пересечения и суммы L_p -пространств соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Результаты работы естественным образом обобщаются на шкалы пространств, полученных вещественным методом из произвольной банаховой пары (X_0, X_1) такой, что $X_1 \subset X_0$. В частности, можно рассмотреть “экстремальные” шкалы $(X_0, X_1)_{\theta, 1}$ и $(X_0, X_1)_{\theta, \infty}$ ($0 < \theta < 1$).

Список литературы

1. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. P. 296–305.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
3. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation theory with applications // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. V. 440.
4. *Jawerth B., Milman M.* New results and applications of extrapolation theory // Israel Math. Conf. Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
5. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions: with applications to analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1994. (Lecture Notes in Math. V. 1580).
6. *Carro M. J.* New extrapolation estimates // J. Funct. Anal. 2000. V. 174. P. 155–166.
7. *Carro M. J., Martin J.* On embedding properties of some extrapolation spaces // Function spaces, interpolation theory and related topics. Proc. of the internat. conf. in honour of J. Peetre. Lund, Sweden, August 17–22, 2000. Berlin: Walter de Gruyter, 2002. P. 241–248.
8. *Khinchine A.* Über dyadische Brüche // Math. Z. 1923. V. 18. P. 109–116.
9. *Hitzchenko P.* Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence // Israel J. Math. 1993. V. 84. P. 161–178.
10. *Асташкин С. В.* Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. № 1. С. 18–35.
11. *Асташкин С. В.* О рядах по системе Радемахера, “близких” к L_∞ // Функци. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. № 3. С. 62–65.
12. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
13. *Brudnyi Yu. A., Krugljak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North-Holland, 1991.
14. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
15. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II: Function spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
16. *Bennett C., Rudnick K.* On Lorentz–Zygmund spaces // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1980. V. 175. P. 5–67.
17. *Рутецкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // УМН. 1965. Т. 20. № 4. С. 205–208.
18. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
19. *Cwikel M., Nilsson P.* Interpolation of Marcinkiewicz spaces // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 29–42.
20. *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_∞ // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 882–889.
21. *Kalton N. J.* Calderon couples of rearrangement invariant spaces // Studia Math. 1993. V. 106. № 3. P. 233–277.
22. *Асташкин С. В.* Коэффициенты Фурье–Радемахера функций из симметричных пространств // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41. № 4. С. 729–739.