Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О сходимости непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 43–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:26:17

УДК 517.524

В. И. Буслаев

О сходимости непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана

Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ – иррациональное число, и пусть R_q – радиус голоморфности функции Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(1-q) \cdots (1-q^n)}.$$

Известно, что $R_q \leq 1$ и для любого $\alpha \in [0, 1]$ существует $q = q(\alpha)$ такое, что $R_{q(\alpha)} = \alpha$. В работе доказано, что функция $H_q(z) = G_q(z)/G_q(qz)$ мероморфна не только в круге $= \{|z| < R_q\}$, но и в большем (при $R_q < 1$) круге $D = \{|z| < 1\}$ и непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции H_q равномерно на компактах, лежащих в $D \setminus \Omega_q$, где Ω_q – объединение окружностей с центром в точке $z = 0$, проходящих через полюсы функции H_q . Ранее сходимость непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана была доказана Д. Любински в области $\left\{|z| < \max\left(R_q, \frac{1}{2+|1+q|}\right)\right\} \setminus \Omega_q$.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

В последнее время значительно возрос интерес к свойствам сходимости непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана. Напомним, что непрерывной дробью Роджерса–Рамануджана называется правильная C -дробь

$$1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{1 + \cdots}}, \quad (1)$$

где параметр q – произвольное комплексное число. Рост интереса к непрерывной дроби (1) во многом инициирован работой Д. Любински [1], в которой показано, что при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ – иррациональное число, непрерывная дробь (1) сходится к функции H_q , мероморфной в круге

$$D_q = \left\{|z| < \max\left(R_q, \frac{1}{2+|1+q|}\right)\right\}, \quad R_q = \liminf_{n \rightarrow \infty} |1 - q^n|^{1/n},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1551.2003.1) и фонда INTAS (грант № 2000-272).

равномерно на каждом компакте, лежащем в множестве $D_q \setminus \Omega_q$, где Ω_q – объединение окружностей с центром в точке $z = 0$, проходящих через полюсы функции H_q . Кроме того, Д. Любински доказал, что, например, при $q = \exp\left(\frac{4\pi i}{99 + \sqrt{5}}\right)$ не существует никакой подпоследовательности подходящих дробей непрерывной дроби (1), сходящейся к функции H_q равномерно на каждом компакте, лежащем в D_q и не содержащем полюсов функции H_q . Так как подходящие дроби – это диагональные аппроксимации Паде функции H_q , то это утверждение означает, что Д. Любински предъявил функцию H_q , которая опровергает гипотезу Бейкера–Гаммеля–Уиллса [2] в ее общей постановке. Эта гипотеза, широко известная под названием Паде-гипотезы, долгое время (с 1961 года) оставалась открытой. Отметим, что контрпример Д. Любински не опровергает (ни при какой вариации параметра q) голоморфного варианта Паде-гипотезы, в котором приближаемая функция предполагается голоморфной в круге. Действительно, если функция H_q не имеет полюсов в некотором круге, то в этом круге нет и окружностей из множества Ω_q , на которых отсутствует сходимость непрерывной дроби (1). Контрпример к голоморфному варианту Паде-гипотезы, а одновременно и к гипотезе Шталя [3] (варианту Паде-гипотезы, в котором приближаемая функция предполагается гиперэллиптической в круге) предъявлен автором в работе [4].

В настоящей статье основное внимание будет уделено двум вопросам – вопросу отыскания области мероморфности функции H_q , а также вопросу нахождения области сходимости (к функции H_q) непрерывной дроби (1). В статье будут даны ответы на оба вопроса при всех $q \in \mathbb{C}$, точнее, при тех $q \in \mathbb{C}$, при которых ранее ответы были неизвестны. Перед формулировкой полученного результата напомним некоторые основные моменты, связанные с данным направлением исследований.

Важную роль при изучении вопросов сходимости непрерывной дроби (1) играет функция Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(q)_n}, \quad (2)$$

где $(q)_0 = 1$, $(q)_n = (1 - q) \cdots (1 - q^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через R_q радиус голоморфности функции G_q . Из формулы Коши–Адамара для радиуса круга сходимости степенного ряда следует, что

$$R_q = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \right|^{1/n} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Поэтому $R_q = \infty$, если $|q| < 1$, и $R_q = 0$, если $|q| > 1$. Более сложным и интересным является случай $|q| = 1$. В этом случае определяющую роль играет скорость приближения к единице степеней q^n . Сразу же следует отметить, что функция Роджерса–Рамануджана G_q не определена при $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$, так как в этом случае $q^m = 1$ и коэффициенты $1/(q)_n$ не определены при $n \geq m$. При $|q| = 1$ формулу (3) можно переписать в следующем виде: $R_q = \liminf_{n \rightarrow \infty} |(q)_n|^{1/n}$. Г. Харди и Д. Литтлвуд [5], пользуясь тождеством

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{(q)_n} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(1 - q^n)}\right)$$

и формулой Коши–Адамара для радиусов сходимости степенных рядов, стоящих в левой и правой частях этого тождества, показали, что $R_q = \liminf_{n \rightarrow \infty} |1 - q^n|^{1/n}$, если $|q| = 1$. Отсюда следует, в частности, что $R_q \leq 1$ при всех $|q| = 1$. Известно также [6], что $R_q = 1$ при почти всех $|q| = 1$. Кроме того, Д. Любински [1], опираясь на исследования Г. Петруски [7] величины $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\prod_{k=1}^n (A - q^k)|^{1/n}$, показал, что R_q может принимать любые значения из отрезка $[0, 1]$ при соответствующим образом подобранных $|q| = 1$. Таким образом, на окружности $\{|q| = 1\}$ имеется непустое (мощности континуума) множество E нулевой меры такое, что $R_q < 1$ при всех $q \in E$ и $R_q = 1$ при всех $q \notin E$.

Положим

$$H_q(z) = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)}. \quad (4)$$

Чуть ниже будет показано, что степенной ряд H_q имеет ненулевой радиус сходимости при всех $|q| \leq 1$, включая те $|q| = 1$, при которых $R_q = 0$. Однако в данный момент будем смотреть на H_q как на формальный степенной ряд, определенный равенствами (2) и (4). Из определения (2) ряда G_q следует легко проверяемое равенство формальных степенных рядов

$$G_q(z) = G_q(qz) + qzG_q(q^2z). \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует равенство

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)}, \quad (6)$$

а следовательно, и цепочка равенств

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} = 1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2z}{H_q(q^2z)}} = 1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^3z}{H_q(q^3z)}} = \dots$$

Из этой цепочки равенств стандартным образом следует утверждение о том, что H_q является формальным степенным рядом, соответствующим C -дроби (1) (подробнее о соответствии степенных рядов правильным C -дробям см., например, [8; с. 219]). В этой связи ряд H_q можно определить при всех $q \in \mathbb{C}$, включая $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ рационально, как степенной ряд, соответствующий непрерывной дроби (1).

Напомним, что если правильная C -дробь сходится в некоторой окрестности точки $z = 0$, то функция, к которой эта дробь сходится, голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и ее разложение в степенной ряд совпадает с рядом, соответствующим C -дроби. Таким образом, в случае сходимости правильной C -дроби соответствующий ей ряд является неформальным степенным рядом, определяющим функцию, к которой дробь сходится.

Известный критерий Ворпицкого [9] утверждает, что числовая непрерывная дробь

$$\frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots}}$$

сходится к конечному значению, если $|a_n| \leq 1/4$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что непрерывная дробь (1) сходится к голоморфной функции равномерно

на каждом компакте, лежащем в круге $\{|z| < 1/4\}$, если $|q| \leq 1$, и сходится к мероморфной функции равномерно на каждом компакте, лежащем в $\mathbb{C}$ и не содержащем полюсов предельной функции, если $|q| < 1$. Таким образом, ряд H_q , соответствующий непрерывной дроби (1), имеет ненулевой радиус сходимости при всех $|q| \leq 1$, включая те $|q| = 1$, для которых ряд $R_q = 0$ или $q^m = 1$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, и определяет мероморфную функцию H_q , к которой сходится непрерывная дробь (1). Эта функция H_q голоморфна по крайней мере в круге $\{|z| < 1/4\}$.

При $|q| < 1$ непрерывная дробь (1) была рассмотрена Роджерсом и Рамануджаном независимо друг от друга в начале XX столетия. Полученное в результате вышеприведенных рассуждений утверждение можно считать при $|q| < 1$ окончательным в том смысле, что найдена область сходимости непрерывной дроби (1) (совпадающая со всей комплексной плоскостью, если пользоваться сходимостью в сферической метрике) и найдена мероморфная в $\mathbb{C}$ функция H_q , к которой непрерывная дробь сходится.

Но при $|q| = 1$ полученное выше утверждение – это лишь первый шаг на пути отыскания как области мероморфности функции H_q , так и области сходимости непрерывной дроби (1). Обозначим через ρ_q радиус мероморфности функции H_q . Известно, что $\rho_q = 0$ при всех $|q| > 1$ и $\rho_q \leq 1$ при всех $|q| = 1$. Эти утверждения о радиусе мероморфности ρ_q (а также и более сильное утверждение, что при $|q| = 1$ функция H_q не может допускать мероморфного продолжения ни в какую область, строго содержащую круг $\{|z| < 1\}$) следуют, с одной стороны, из теоремы Поля [10] об оценке снизу трансфинитного диаметра множества особенностей мероморфной функции посредством ее ганкелевых определителей, а с другой стороны – из формул (см., например, [8; с. 221]), связывающих между собой коэффициенты произвольной C -дроби и ганкелевы определители соответствующего ей степенного ряда. Приведенная краткая схема доказательства отмечаемых утверждений о радиусе ρ_q более подробно изложена в [1], [11]. Таким образом, случай $|q| > 1$ тривиален с точки зрения поставленного выше вопроса об области мероморфности функции H_q , а в случае $|q| = 1$ имеем неравенство $1/4 \leq \rho_q \leq 1$. Более того, непосредственно из определений (2) и (4) функции H_q следует, что при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, выполняется неравенство

$$\max \left\{ R_q, \frac{1}{4} \right\} \leq \rho_q \leq 1. \quad (7)$$

Так как $R_q = 1$ при всех $q \notin E$, где, как отмечалось выше, множество E имеет на единичной окружности нулевую меру, то $\rho_q = 1$ при почти всех $|q| = 1$.

Сходимость непрерывной дроби (1) при $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, исследована в работе Д. Любински [1]. Отметим следующие два утверждения, доказанные Д. Любински в этой работе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (Любински). *При всех $|q| = 1$ непрерывная дробь (1) сходится к функции H_q , голоморфной в круге $\left\{ |z| < \frac{1}{2 + |1 + q|} \right\}$, равномерно на компактах, лежащих в этом круге.*

Из этого утверждения следует, в частности, что при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где

τ иррационально, справедливо следующее уточнение неравенства (7):

$$\max \left\{ R_q, \frac{1}{2 + |1 + q|} \right\} \leq \rho_q \leq 1.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (Любински). *При всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, непрерывная дробь (1) сходится к мероморфной функции H_q равномерно на каждом компакте, лежащем в множестве $\{|z| < R_q\} \setminus \Omega_q$, где $R_q = \liminf_{n \rightarrow \infty} |1 - q^n|^{1/n}$, Ω_q – объединение окружностей с центром в точке $z = 0$, проходящих через полюсы функции H_q .*

Утверждение 1 Д. Любински достаточно легко получил, воспользовавшись вместо критерия Ворпицкого другим общим критерием сходимости непрерывных дробей, связанным с фундаментальными неравенствами.

Утверждение 2 Д. Любински получил, опираясь на указанные М. Хиршхорном [12] явные формулы для числителя $P_{q,n}(z)$ и знаменателя $Q_{q,n}(z)$ n -й подходящей дроби непрерывной дроби (1):

$$P_{q,n}(z) = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} z^k q^{k^2} \frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k (q)_{n+1-2k}}, \quad (8)$$

$$Q_{q,n}(z) = P_{q,n-1}(qz). \quad (9)$$

Легко видеть, что при $|q| < 1$ из формулы (8) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{q,n}(z) = G_q(z)$ равномерно на любом компакте комплексной плоскости. Анализируя формулу (8) при $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, Д. Любински показал, что если Λ^β – подпоследовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n \in \Lambda^\beta} q^n = \beta$, то

$$\lim_{n \in \Lambda^\beta} P_{q,n}(z) = G_q(z) \overline{G_q(\beta \bar{q} z)} \quad (10)$$

равномерно на компактах, лежащих в круге $D_q = \{|z| < R_q\}$. Легко видеть, что утверждение 2 Любински является простым следствием равенств (9), (10) и (4), так как

$$\lim_{n \in \Lambda^\beta} \frac{P_{q,n}(z)}{Q_{q,n}(z)} = \lim_{n \in \Lambda^\beta} \frac{P_{q,n}(z)}{P_{q,n-1}(qz)} = \frac{G_q(z) \overline{G_q(\beta \bar{q} z)}}{G_q(qz) \overline{G_q(\beta \bar{q} z)}} = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)} = H_q(z)$$

равномерно на компактах, лежащих в $D_q \setminus (F_q \cup \overline{q^2 \beta F_q})$, где F_q – множество нулей функции $G_q(qz)$ (совпадающее, как нетрудно показать, пользуясь равенством (5), с множеством полюсов функции H_q). Так как числитель $P_{q,n}$ и знаменатель $Q_{q,n}$ n -й подходящей дроби непрерывной дроби (1) не имеют общих множителей (этот факт является общим фактом теории правильных C -дробей), то множество $F_q \cup \overline{q^2 \beta F_q}$ в последнем утверждении нельзя заменить никаким меньшим его подмножеством. Это свойство подходящих дробей непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, с одной стороны, легло в основу построения отмеченного в начале статьи контрпримера Любински к гипотезе Бейкера–Гаммея–Уиллса, а с другой стороны, показывает в силу произвольности числа β , что множество Ω_q

в утверждении 2 Любински нельзя заменить никаким меньшим замкнутым его подмножеством. Таким образом, в случае $R_q = 1$ областью мероморфности функции H_q является круг $D = \{|z| < 1\}$, а областью сходимости (к функции H_q) непрерывной дроби (1) – множество $D \setminus \Omega_q$.

Если $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$, то непрерывная дробь (1) является периодической с периодом m непрерывной дробью. Сходимость периодических C -дробей хорошо изучена (см., например, [8; гл. 3] или работу автора [11], посвященную изучению сходимости предельно периодических дробей). Как следствие приведенных в работе автора [4] утверждений о сходимости периодических непрерывных дробей применительно к периодической непрерывной дроби (1) можно сформулировать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $q = \exp(2\pi i k/m)$, $k, m \in \mathbb{Z}$ – взаимно простые числа, $\Gamma_m = \{z \in \mathbb{C} : z^m \in [-\infty, -1/4]\}$. Тогда степенной ряд H_q , соответствующий непрерывной дроби (1), определяет мероморфную в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ функцию

$$H_q(z) = \frac{P_{q,m-1}(z) - 1/2 + \sqrt{z^m + 1/4}}{Q_{q,m-1}(z)}. \quad (11)$$

Непрерывная дробь (1) сходится к функции H_q равномерно на каждом компакте, лежащем в $(\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \setminus \bigcup_{l=1}^m (F_q \cup \overline{q^l F_q})$, где F_q – множество полюсов функции H_q . (Точнее, при любом $l = 1, \dots, m$ последовательность $\left\{ \frac{P_{q, nm+l}(z)}{Q_{q, nm+l}(z)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции H_q равномерно на каждом компакте, лежащем в $(\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \setminus (F_q \cup \overline{q^{l+2} F_q})$.) Если $\tilde{H}_q(z)$ – другая ветвь гиперэллиптической функции $H_q(z)$, то $\tilde{H}_q(z) \neq H_q(z)$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ и для всякого $l = 1, \dots, m$ и всякой точки $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \cap \overline{q^{l+2} F_q}$ имеют место равенства

$$\frac{P_{q, nm+l}(z_0)}{Q_{q, nm+l}(z_0)} = \tilde{H}_q(z_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

В работе автора [4] отмечено, что при $q = \exp(2\pi i \tau)$, где τ – рациональное число, функция H_q , не являясь контрпримером к голоморфному варианту Паде-гипотезы, является при некоторых рациональных τ (в частности, при $\tau = 1/m$, где $m \geq 6$) контрпримером к Паде-гипотезе в ее общей постановке, а следовательно, и контрпримером к гипотезе Штала (в силу гиперэллиптичности функции H_q при рациональных τ). Так как точки ветвления гиперэллиптической функции (11) удовлетворяют равенству $z^m + 1/4 = 0$, то из утверждения 3 следует, в частности, что $\rho_q = 4^{-1/m}$, если $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$ – взаимно простые числа.

В настоящей статье рассматривается случай, когда $q = \exp(2\pi i \tau)$, где τ иррационально, и $R_q < 1$. В этом случае утверждение 2 Любински не носит окончательного характера (в отличие от случая $R_q = 1$) и может быть уточнено. А именно в статье будет показано, что в рассматриваемом случае, как и в случае $R_q = 1$, область мероморфности функции H_q – это круг $D = \{|z| < 1\}$, а область сходимости непрерывной дроби (1) – множество $D \setminus \Omega_q$.

Введем в рассмотрение степенной ряд

$$V_q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}. \quad (12)$$

В следующем параграфе будет показано, что $V_q(z) = G_q(z)G_{q^{-1}}(z)$. Отметим, что степенной ряд, стоящий в правой части равенства (12), в отличие от представляющего G_q ряда (2) определен при всех $q \in \mathbb{C}$, включая $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ рационально, так как при таких q отношение $\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}$ может быть определено по непрерывности. Легко видеть, что степенной ряд V_q инвариантен при замене $q \rightarrow q^{-1}$ и имеет нулевой радиус сходимости при всех $|q| < 1$ и всех $|q| > 1$. В статье будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие утверждения.*

1°. *При всех $q \in \mathbb{C}$ ряд $H_q(z)$, соответствующий непрерывной дроби (1), может быть записан в виде*

$$H_q(z) = \frac{V_q(z)}{V_q(z) + V_q(qz) - 1}, \quad (13)$$

где ряд $V_q(z)$ определен равенством (12).

2°. *Радиус сходимости степенного ряда V_q равен 1 при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, и равен $4^{-1/m}$ при $q = \exp(2\pi ik/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$ – взаимно простые числа.*

3°. *При $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, непрерывная дробь (1) сходится к мероморфной в круге $D = \{|z| < 1\}$ функции H_q равномерно на каждом компакте, лежащем в множестве $D \setminus \Omega_q$, где Ω_q – объединение окружностей с центром в точке $z = 0$, проходящих через полюсы функции H_q .*

Как уже отмечалось, из теоремы Поля следует, что функция H_q не допускает мероморфного продолжения ни в какую область, строго содержащую круг D . Отсюда и из утверждений 1° и 2° теоремы следует, что областью мероморфности функции H_q при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, является в точности круг D . Кроме того, можно показать, что, как и в утверждении 2 Любински, множество Ω_q в теореме нельзя заменить никаким меньшим замкнутым его подмножеством. Это означает, что областью сходимости (к функции H_q) непрерывной дроби (1) является множество $D \setminus \Omega_q$. Ниже будет показано, что множество Ω_q можно определить как множество окружностей с центром в точке $z = 0$, проходящих через нули функции $V_q(z)$ (или нули функции $V_q(z) + V_q(qz) - 1$).

§ 2. Схема доказательства теоремы

Покажем сначала, что при всех $q, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$G_q(\alpha z)G_{q^{-1}}(\beta z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \prod_{j=1}^n (\alpha - \beta q^{-2n+j}). \quad (14)$$

Действительно, замечая, что $(q^{-1})_j = (-1)^j q^{-\frac{j(j+1)}{2}} (q)_j$ и меняя по ходу дела

порядок суммирования в (14), имеем

$$\begin{aligned}
G_q(\alpha z)G_{q^{-1}}(\beta z) &= \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha z)^l \frac{q^{l^2}}{(q)_l} \sum_{j=0}^{\infty} (\beta z)^j \frac{q^{-j^2}}{(-1)^j q^{-\frac{j(j+1)}{2}} (q)_j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{(q)_{n-j} (q)_j} (\alpha)^{n-j} (-1)^j q^{(n-j)^2 - j^2 + \frac{j(j+1)}{2}} \beta^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \sum_{j=0}^n \frac{(q)_n}{(q)_{n-j} (q)_j} (\alpha)^{n-j} q^{\frac{j(j+1)}{2}} (-1)^j q^{-2nj} \beta^j \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \prod_{j=1}^n (\alpha - \beta q^{-2n+j}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке равенств – это частный случай при $b = \alpha$, $w = -\beta q^{-2n}$ общей q -биномиальной теоремы (см., например, монографию [13; с. 7, равенство 1.3.2]), которая утверждает, что при всех $q, b, w \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\prod_{j=1}^n (b + wq^j) = \sum_{j=0}^n \frac{(q)_n}{(q)_{n-j} (q)_j} b^{n-j} q^{\frac{j(j+1)}{2}} w^j. \quad (15)$$

Положим

$$V_{q,l}(z) = G_q(z)G_{q^{-1}}(q^l z). \quad (16)$$

Из определения (16) функций $V_{q,l}$ и определения (4) функции H_q следует, что при всех $q \in \mathbb{C}$ и всех $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\frac{V_{q,l+1}(z)}{V_{q,l}(qz)} = \frac{G_q(z)G_{q^{-1}}(q^{l+1}z)}{G_q(qz)G_{q^{-1}}(q^{l+1}z)} = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)} = H_q(z). \quad (17)$$

Из определения (16) функций $V_{q,l}$ и равенства (14) при $\alpha = 1$, $\beta = q^l$ следует, что

$$V_{q,l} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \prod_{j=1}^n (1 - q^{l-2n+j}). \quad (18)$$

Поэтому, замечая, что

$$q^{n^2} \prod_{j=1}^n (1 - q^{l-2n+j}) = (-1)^n q^{-\frac{n(n-2l-1)}{2}} \prod_{j=1}^n (1 - q^{n-l-1+j}),$$

получаем

$$V_{q,l}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (-1)^n \frac{q^{-\frac{n(n-2l-1)}{2}}}{(q)_n} \prod_{j=1}^n (1 - q^{n-l-1+j}). \quad (19)$$

Так как при $n \geq \max\{1, l+1\}$ имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^n (1 - q^{n-l-1+j}) = \frac{(q)_{2n-l-1}}{(q)_{n-l-1}}, \quad (20)$$

то из равенства (19) при $l = 0$ и определения (12) степенного ряда $V_q(z)$ следует, что

$$V_{q,0}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n} = V_q(z). \quad (21)$$

Аналогично, из равенств (19) и (20) при $l = -1$ следует, что

$$V_{q,-1}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (-1)^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(q)_{2n}}{(q)_n^2}. \quad (22)$$

Так как

$$\frac{(q)_{2n}}{(q)_n} = \frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}} (1 + q^n),$$

то из равенств (22) и (21) следует, что

$$V_{q,-1}(qz) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n} (1+q^n) = V_q(z) + V_q(qz) - 1. \quad (23)$$

Из равенств (21), (23) и равенства (17) при $l = -1$ следует, что

$$\frac{V_q(z)}{V_q(z) + V_q(qz) - 1} = \frac{V_{q,0}(z)}{V_{q,-1}(qz)} = H_q(z).$$

Таким образом, равенство (13), являющееся сутью утверждения 1° теоремы, доказано.

Заметим далее, что голоморфность в круге D функции $V_q(z)$, а также и голоморфность в круге D каждой из функций $V_{q,l}(z)$, $l \in \mathbb{Z}$, является простым следствием приводимой ниже леммы (которая будет доказана в следующем параграфе).

ЛЕММА 1. Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально. Тогда для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{n_1 + \dots + n_k = n} \left| \frac{(q)_n}{(q)_{n_1} \dots (q)_{n_k}} \right|^{1/n} = 1.$$

Действительно, из равенств (19) и (20) следует, что коэффициент при z^n функции $V_{q,l}$ при $n \geq \max\{1, l+1\}$ по модулю равен $\left| \frac{(q)_{2n-l-1}}{(q)_{n-l-1}(q)_n} \right|$, а по лемме 1 при $k = 2$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(q)_{2n-l-1}}{(q)_{n-l-1}(q)_n} \right|^{1/n} \leq 1.$$

Это означает, что при любом $l \in \mathbb{Z}$ радиус голоморфности функции $V_{q,l}$ и, в частности, функции $V_q = V_{q,0}$ не меньше единицы. С другой стороны, радиус голоморфности функции V_q не может быть строго больше единицы, так как иначе в силу уже доказанного равенства (13) выполнялось бы неравенство $\rho_q > 1$, что, как уже отмечалось, невозможно. Итак, радиус голоморфности функции V_q равен единице при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально.

Если $q = \exp(2\pi ik/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$, то $q^m = 1$ и

$$\frac{1 - q^{jm}}{1 - q^m} = 1 + q^m + \dots + q^{(j-1)m} = j.$$

Поэтому непосредственные вычисления, основанные на формуле Стирлинга для факториалов натуральных чисел, показывают, что радиус голоморфности функции V_q при $q = \exp(2\pi ik/m)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$ — взаимно простые числа, равен $4^{-1/m}$. Таким образом, утверждение 2° теоремы доказано при условии справедливости леммы 1.

Переходя к доказательству утверждения 3° теоремы о сходимости непрерывной дроби (1), выявим прежде всего связь между нулями функции $V_{q,l}$ и полюсами функции H_q . Заметим, что из равенства (17) следует, что всякий полюс функции $H_q(z)$ является нулем функции $V_{q,l}(qz)$, но обратное неверно. А верно следующее утверждение: модуль всякого нуля функции $V_{q,l}(z)$ равен модулю некоторого полюса функции $H_q(z)$, т.е. всякий нуль функции $V_{q,l}(z)$ принадлежит множеству Ω_q . Действительно, пусть $\omega_r = \{|z| = r\}$ — окружность, проходящая через нуль функции $V_{q,l}$. Покажем, что окружность ω_r проходит также и через некоторый полюс функции H_q . Очевидно, что $r > 0$, так как $V_{q,l}(0) = 1 \neq 0$. Рассмотрим множество $\{z_1, \dots, z_m\}$ всех нулей функции $V_{q,l}(z)$, лежащих на ω_r . Из определения (16) функции $V_{q,l}$ и легко проверяемого при $|q| = 1$ равенства $G_{q^{-1}}(z) = \overline{G_q(\bar{z})}$ следует, что $V_{q,l}(z) = G_q(z) \overline{G_q(q^l \bar{z})}$. Поэтому m — четное число, $m = 2k$, и при соответствующей нумерации множество $\{qz_1, \dots, qz_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}\}$ совпадает с множеством нулей функции $V_{q,l+1}(q^{-1}z) = G_q(q^{-1}z) \overline{G_q(q^l \bar{z})}$. Действительно, это очевидно для тех q , для которых функция $G_q(z)$ голоморфна в D , т.е. для почти всех $|q| = 1$. А для произвольного $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, в силу уже доказанной голоморфности функций $V_{q,l}$ в круге D возможен предельный переход $V_{q_n,l}(z) \rightarrow V_{q,l}(z)$, взятый по тем $q_n \rightarrow q$, для которых функции $G_{q_n}(z)$ голоморфны в D . Заметим далее, что среди точек $\{z_{k+1}, \dots, z_{2k}\}$ нет полюсов функции

$$H_q(q^{-1}z) = \frac{V_{q,l+1}(q^{-1}z)}{V_{q,l}(z)} = \frac{G_q(q^{-1}z) \overline{G_q(q^l \bar{z})}}{G_q(z) \overline{G_q(q^l \bar{z})}},$$

а вот по крайней мере одна из точек $z_1, \dots, z_k$ является полюсом функции $H_q(q^{-1}z)$. Это следует из того, что $\{z_1, \dots, z_k\} \neq \{qz_1, \dots, qz_k\}$, так как иначе, перемножив все элементы этих множеств, получили бы равенство $z_1 \dots z_k = q^k z_1 \dots z_k$, что невозможно, так как q не является корнем из единицы и $z_1 \dots z_k \neq 0$. Таким образом, на окружности ω_r имеется полюс функции $H_q(q^{-1}z)$, а следовательно, и полюс функции $H_q(z)$.

Утверждение 3° теоремы о сходимости непрерывной дроби (1) будет доказано в предположении, что $R_q < 1$, так как в случае $R_q = 1$ утверждение 3° теоремы совпадает с утверждением 2 Любински. Доказательство будет проведено в три этапа. Сначала будет доказана сходимость непрерывной дроби (1) в круге D по некоторой подпоследовательности $\Lambda_q \subset \mathbb{N}$. Затем будет доказана сходимость непрерывной дроби по подпоследовательности натуральных чисел, совпадающей с арифметической прогрессией $\{nk\}_{n=1}^\infty$, где $k \in \Lambda_q$ – некоторое фиксированное достаточно большое число, а уж затем – сходимость по всей последовательности натуральных чисел.

Сходимость по подпоследовательности $\Lambda_q \subset \mathbb{N}$ будет получена как следствие приводимой ниже леммы 2, утверждающей, что равенство (10) для специальным образом выбранной подпоследовательности Λ_q справедливо не только в круге D_q , но и в большем круге D .

ЛЕММА 2. Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, $R_q < 1$ и Λ_q – подпоследовательность натуральных чисел такая, что

$$\lim_{n \in \Lambda_q} |1 - q^n|^{1/n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} |1 - q^n|^{1/n} = R_q. \quad (24)$$

Тогда для всякого фиксированного $l \in \mathbb{Z}$ существует равномерный на каждом компакте, лежащем в круге D , предел $\lim_{n \in \Lambda_q} P_{q,n+l}(z) = V_{q,l+1}(z)$.

Лемма 2 будет доказана в §4 статьи. Из равенства (9), леммы 2 и равенства (17) следует, что

$$\lim_{n \in \Lambda_q} \frac{P_{q,n+l}(z)}{Q_{q,n+l}(z)} = \lim_{n \in \Lambda_q} \frac{P_{q,n+l}(z)}{P_{q,n+l-1}(qz)} = \frac{V_{q,l+1}(z)}{V_{q,l}(qz)} = H_q(z) \quad (25)$$

равномерно на каждом компакте, лежащем в D и не содержащем нулей функции $V_{q,l}(qz)$. Отсюда и из сделанного выше замечания о том, что все нули функций $V_{q,l}(z)$ принадлежат множеству Ω_q , следует сходимость непрерывной дроби (1) по любой подпоследовательности $\Lambda_{q,l} = \{n+l\}_{n \in \Lambda_q}$, где $l \in \mathbb{Z}$, равномерно на компактах, лежащих в $D \setminus \Omega_q$. Сформулируем теперь следующее промежуточное предложение, доказательство которого также приведем в §4 статьи.

ЛЕММА 3. Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально. Тогда для всякого компакта $K \subset D \setminus \Omega_q$ существует натуральное число k такое, что последовательность $\left\{ \frac{P_{nk}(z)}{Q_{nk}(z)} \right\}_{n=1}^\infty$ подходящих дробей непрерывной дроби (1) равномерно сходится на компакте K к функции $H_q(z)$.

Завершим, пользуясь леммой 3, доказательство теоремы, а именно покажем, что натуральное число k в лемме 3 можно взять равным единице. Действительно, заметим, что

$$\frac{P_{nk+1}(z)}{Q_{nk+1}(z)} = 1 + \frac{qz}{\frac{P_{nk}(qz)}{Q_{nk}(qz)}}.$$

Отсюда, из леммы 3, равенства (6) и из инвариантности множества Ω_q относительно поворотов вокруг точки $z = 0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{nk+1}(z)}{Q_{nk+1}(z)} = 1 + \frac{qz}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{nk}(qz)}{Q_{nk}(qz)}} = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} = H_q(z)$$

равномерно на компакте K . Аналогично доказывается сходимость к функции $H_q(z)$ каждой из подпоследовательностей $\left\{ \frac{P_{nk+l}(z)}{Q_{nk+l}(z)} \right\}_{n=1}^{\infty}$, $l = 1, \dots, k$. Это означает, что вся последовательность подходящих дробей $\left\{ \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывной дроби (1) равномерно сходится к функции $H_q(z)$ на компактах, лежащих в $D \setminus \Omega_q$. Таким образом, теорема доказана при условии справедливости лемм 1–3.

§ 3. Доказательство леммы 1

Лемма 1 будет получена как следствие приводимой ниже леммы 4, перед формулировкой которой введем следующие обозначения. Пусть иррациональное число $\tau \in (0, 1)$ разложено в непрерывную дробь

$$\tau = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad (26)$$

где $a_n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что такое разложение всегда существует. Обозначим через $\Lambda(\tau)$ подпоследовательность натуральных чисел, состоящую из знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби (26). Для всякого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $j(n, \tau)$ наибольшее из натуральных чисел, принадлежащих $\Lambda(\tau)$ и не превосходящих n , а через $J(n, \tau)$ – множество натуральных чисел, кратных $j(n, \tau)$ и не превосходящих n , т.е.

$$J(n, \tau) = \left\{ j(n, \tau), 2j(n, \tau), \dots, \left[\frac{n}{j(n, \tau)} \right] j(n, \tau) \right\}.$$

Г. Петруска [7] доказал, что при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где $\tau \in (0, 1)$ иррационально, справедливо предельное равенство

$$\lim_{n \in \Lambda(\tau)} |(q)_{n-1}|^{1/n} = 1. \quad (27)$$

В этом параграфе будет доказан усиленный вариант предельного равенства (27), который сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где иррациональное число $\tau \in (0, 1)$ разложено в непрерывную дробь (26). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \notin J(n, \tau)} \ln |1 - q^k| \right| = 0. \quad (28)$$

Легко видеть, что из (28) следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n, k \notin J(n, \tau)} \ln |1 - q^k| = 0,$$

частным случаем которого при $n \in \Lambda(\tau)$ является равенство (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Будем использовать в этом параграфе стандартное обозначение $\frac{p_l}{q_l}$ для l -й подходящей дроби непрерывной дроби (26). Это не приведет к недоразумениям, связанным с использованием числа q как параметра непрерывной дроби (1), так как всюду в этом параграфе число $q = \exp(2\pi i\tau)$ будет фиксировано и не будет иметь индекса. Хорошо известно, что числители p_l и знаменатели q_l подходящих дробей непрерывной дроби (26) удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям

$$p_l = a_l p_{l-1} + p_{l-2} \quad \text{и} \quad q_l = a_l q_{l-1} + q_{l-2}, \quad (29)$$

$l = 1, 2, \dots$, с соответствующими начальными условиями $p_{-1} = 1, p_0 = 0, q_{-1} = 0, q_0 = 1$, а следствием рекуррентных соотношений (29) являются равенства

$$p_l q_{l-1} - q_l p_{l-1} = (-1)^{l-1}, \quad \frac{p_l}{q_l} - \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} = \frac{(-1)^{l-1}}{q_{l-1} q_l} \quad (30)$$

и неравенство

$$\left| \tau - \frac{p_l}{q_l} \right| \leq \frac{1}{q_l q_{l+1}}. \quad (31)$$

Непосредственно из определения последовательности $\Lambda(\tau)$ следует, что $\Lambda(\tau) = \{q_l\}_{l=1}^\infty$, а из первого из равенств (30) следует, что числа p_l и q_l взаимно просты.

Так как

$$|1 - q^k| = |1 - \exp(2\pi i k \tau)| = |2 \sin(\pi k \tau)|, \quad (32)$$

то равенство (28) совпадает с равенством $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} A_n = 0$, где

$$A_n = \max_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \notin J(n, \tau)} \ln |2 \sin(\pi k \tau)| \right|.$$

Наряду с последовательностью $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ рассмотрим последовательности $\{B_l\}_{l=1}^\infty$ и $\{D_l\}_{l=1}^\infty$, где

$$B_l = \left| \sum_{k=1}^{q_l-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_l}{q_l} \right| \right|, \quad D_l = \max_{1 \leq m \leq q_l-1} \left| \sum_{k=1}^m \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_l}{q_l} \right| \right|. \quad (33)$$

Покажем сначала, что $\lim_{l \rightarrow \infty} B_l / q_l = 0$. Действительно, так как числа p_l и q_l взаимно просты, то множество чисел $\{k p_l \pmod{q_l}\}_{k=1}^{q_l-1}$ совпадает с множеством чисел $\{k\}_{k=1}^{q_l-1}$. Поэтому

$$B_l = \left| \sum_{k=1}^{q_l-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k}{q_l} \right| \right|.$$

Хорошо известно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right| = \int_0^1 \ln |2 \sin \pi x| dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{B_l}{q_l} = \lim_{N \in \Lambda(\tau)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right| = 0.$$

Докажем далее, что $\lim_{l \rightarrow \infty} D_l/q_l = 0$. Пусть m ($1 \leq m \leq q_l - 1$) – индекс, на котором достигается максимум величины D_l . Тогда, воспользовавшись вторым из равенств (30), имеем

$$D_l = \left| \sum_{k=1}^m \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} + \frac{(-1)^{l-1} \pi k}{q_{l-1} q_l} \right) \right| \right| \leq D_{l,1} + D_{l,2} + D_{l,3}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} D_{l,1} &= \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \equiv r \pmod{q_{l-1}}} \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} + \frac{(-1)^{l-1} \pi k}{q_{l-1} q_l} \right) \right| \right|, \\ D_{l,2} &= \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \not\equiv r \pmod{q_{l-1}}} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| \right|, \\ D_{l,3} &= \sum_{1 \leq k \leq m, k \not\equiv r \pmod{q_{l-1}}} \left| \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} + \frac{(-1)^{l-1} \pi k}{q_{l-1} q_l} \right) \right| - \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| \right|. \end{aligned}$$

Из определения $D_{l,1}$, неравенства

$$\frac{1}{q_l} \left\lfloor \frac{m}{q_{l-1}} \right\rfloor \leq \frac{1}{q_l} \left\lfloor \frac{q_l}{q_{l-1}} \right\rfloor \leq \frac{1}{q_{l-1}}$$

и формулы Стирлинга для факториалов натуральных чисел следует, что

$$\begin{aligned} D_{l,1} &= \left| \sum_{r=1}^{\lfloor m/q_{l-1} \rfloor} \ln \left| 2 \sin \left(\pi r p_{l-1} + \frac{(-1)^{l-1} \pi r}{q_l} \right) \right| \right| \\ &= \left| \sum_{r=1}^{\lfloor m/q_{l-1} \rfloor} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi r}{q_l} \right| \right| \leq \sum_{r=1}^{\lfloor q_l/q_{l-1} \rfloor} \ln \left(c_1 \frac{q_l}{r} \right) \\ &\leq \left\lfloor \frac{q_l}{q_{l-1}} \right\rfloor \left(c_2 + \ln q_l - \ln \left\lfloor \frac{q_l}{q_{l-1}} \right\rfloor \right) \leq \frac{q_l}{q_{l-1}} (c_3 + \ln q_{l-1}). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь и далее в доказательстве леммы 4 через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать возникающие по ходу дела положительные абсолютные постоянные, точное значение которых несущественно для доказательства леммы 4.

Непосредственно из определения $D_{l,2}$, B_{l-1} и D_{l-1} следует, что

$$\begin{aligned} D_{l,2} &= \left| \sum_{r=0}^{\lfloor m/q_{l-1} \rfloor - 1} \sum_{k=1}^{q_{l-1}-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(r q_{l-1} + k) p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m - \lfloor m/q_{l-1} \rfloor q_{l-1}} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(\lfloor m/q_{l-1} \rfloor q_{l-1} + k) p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| \\ &= \left| \left\lfloor \frac{m}{q_{l-1}} \right\rfloor \sum_{k=1}^{q_{l-1}-1} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| + \sum_{k=1}^{m - \lfloor m/q_{l-1} \rfloor q_{l-1}} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_{l-1}}{q_{l-1}} \right| \right| \\ &\leq \left\lfloor \frac{m}{q_{l-1}} \right\rfloor B_{l-1} + D_{l-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Переходя к оценке величины $D_{l,3}$, отметим, что в работе [7] в аналогичной ситуации для оценки каждого слагаемого, стоящего под знаком суммы в $D_{l,3}$, предлагается использовать следующее легко проверяемое утверждение (см. [7; с. 356]): если $|t| < \|x\|$, где $\|x\|$ – расстояние от вещественного числа x до ближайшего целого числа, то

$$|\sin \pi(x+t)| = |1 + \mu| |\sin \pi x|, \quad \text{где } |\mu| \leq \frac{\pi^2}{2} t^2 + \frac{\pi |t|}{2 \|x\|}. \quad (37)$$

Однако следует заметить, что утверждение (37) дает при $|t| < \|x\|$ только лишь верхнюю оценку разности $|\ln |\sin \pi(x+t)| - \ln |\sin \pi x||$, а в действительности же нужна и нижняя оценка этой разности (точнее, нужна оценка сверху для $|\ln |\sin \pi(x+t)| - \ln |\sin \pi x||$), которую утверждение (37) может дать только лишь в случае, когда $|\mu| < 1$. Случай, когда $|\mu| > 1$, имеет место при $|t|$ близких к $\|x\|$. Хотя число слагаемых в $D_{l,3}$, подпадающих под этот случай, невелико, тем не менее их оценка требует определенной аккуратности. Для оценки таких слагаемых будем пользоваться следующим элементарным утверждением: если $|t| < \|x\| \leq 1/4$, то

$$|\ln |\sin \pi(x+t)| - \ln |\sin \pi x|| \leq c_4 + |\ln(\|x\| + t) - \ln \|x\|| \leq c_4 - \ln \left(1 - \frac{|t|}{\|x\|}\right). \quad (38)$$

Положим $x_k = kp_{l-1}/q_{l-1}$, $t_k = k/(q_{l-1}q_l)$ и заметим, что при $k = 1, \dots, m$, не кратных q_{l-1} ,

$$\|x_k\| \geq \frac{1}{q_{l-1}}, \quad |t_k| \leq \frac{m}{q_{l-1}q_l} \leq \frac{q_l - 1}{q_{l-1}q_l} = \frac{1}{q_{l-1}} - \frac{1}{q_{l-1}q_l}.$$

Таким образом, $|t_k|/\|x_k\| \leq 1 - 1/q_l$ при всех $k = 1, \dots, m$, не кратных q_{l-1} . При этом

$$\frac{|t_k|}{\|x_k\|} < \frac{1}{2}, \quad \text{если } \|x_k\| \neq \frac{1}{q_{l-1}}.$$

Представим $D_{l,3}$ в виде суммы трех слагаемых $\sigma_{l,1} + \sigma_{l,2} + \sigma_{l,3}$. В $\sigma_{l,1}$ производится суммирование по тем индексам $k = 1, \dots, m$, не кратным q_{l-1} , для которых $|t_k|/\|x_k\| \geq 1/2$. Так как неравенство $|t_k|/\|x_k\| \geq 1/2$ возможно только лишь при $\|x_k\| = 1/q_{l-1}$ и $t_k \geq 1/(2q_{l-1})$, то индексы суммирования в $\sigma_{l,1}$ – это те $k \geq q_l/2$, для которых $k p_{l-1} \pmod{q_{l-1}} = \pm 1$. В частности, $\sigma_{l,1}$ не содержит ни одного слагаемого, если $m < q_l/2$. Поэтому при оценке $\sigma_{l,1}$ можно считать, что $m \geq q_l/2$, индексы суммирования в $\sigma_{l,1}$ образуют две арифметические прогрессии с шагом q_{l-1} (для одной из них $k p_{l-1} \pmod{q_{l-1}} = 1$, а для другой $k p_{l-1} \pmod{q_{l-1}} = -1$), каждая из которых содержит не более $\nu = [m/q_{l-1}] + 1$ элементов, а соответствующие этим индексам величины $|t_k|/\|x_k\|$ образуют две арифметические прогрессии с шагом $q_{l-1}/q_l \geq 1/q_l$, причем максимальная из величин $|t_k|/\|x_k\|$ не превосходит $1 - 1/q_l$. Поэтому из утверждения (38) и формулы Стирлинга следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{l,1} &\leq 2 \sum_{r=1}^{\nu} \left(c_4 - \ln \left(1 - \left(1 - \frac{r}{q_l} \right) \right) \right) = 2 \sum_{r=1}^{[m/q_{l-1}] + 1} \left(c_4 + \ln \frac{q_l}{r} \right) \\ &\leq 2 \left(\left[\frac{m}{q_{l-1}} \right] + 1 \right) \left(c_5 + \ln q_l - \ln \left(\left[\frac{m}{q_{l-1}} \right] + 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $m \geq q_l/2$, откуда получаем неравенство

$$\sigma_{l,1} \leq 2 \left(\frac{m}{q_{l-1}} + \frac{2m}{q_l} \right) \left(c_5 + \ln q_l - \ln \frac{m}{q_{l-1}} \right) \leq 6 \frac{m}{q_{l-1}} (c_6 + \ln q_{l-1}). \quad (39)$$

В $\sigma_{l,2}$ производится суммирование по тем индексам $k = 1, \dots, m$, не кратным q_{l-1} , для которых $\|x_k\| < 1/\sqrt{q_{l-1}}$ и которые не являются индексами суммирования из $\sigma_{l,1}$. Так как неравенство $\|x_k\| < 1/\sqrt{q_{l-1}}$ выполняется только для тех индексов k , для которых $kp_{l-1} \pmod{q_{l-1}} = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \lfloor \sqrt{q_{l-1}} \rfloor$, то число индексов суммирования в $\sigma_{l,2}$ не превосходит $2\sqrt{q_{l-1}} (\lfloor m/q_{l-1} \rfloor + 1)$. Так как в $\sigma_{l,2}$ производится суммирование по тем индексам, которые не являются индексами суммирования из $\sigma_{l,1}$, то $|t_k|/\|x_k\| < 1/2$ и по утверждению (38) каждое слагаемое в $\sigma_{l,2}$ не превосходит $c_4 + \ln 2$. Следовательно,

$$\sigma_{l,2} \leq 2\sqrt{q_{l-1}} \left(\left\lfloor \frac{m}{q_{l-1}} \right\rfloor + 1 \right) (c_4 + \ln 2) = c_7 \sqrt{q_{l-1}} \left(\left\lfloor \frac{m}{q_{l-1}} \right\rfloor + 1 \right). \quad (40)$$

В $\sigma_{l,3}$ производится суммирование по тем индексам $k = 1, \dots, m$, не кратным q_{l-1} , для которых $\|x_k\| \geq 1/\sqrt{q_{l-1}}$. При таких k из неравенства $|t_k| < 1/q_{l-1}$ следует неравенство $|t_k|/\|x_k\| < 1/\sqrt{q_{l-1}}$. Поэтому, учитывая, что число индексов суммирования в $\sigma_{l,3}$ не превосходит m , из утверждения (37) получаем неравенство

$$\sigma_{l,3} \leq m \left| \ln \left(1 - \frac{\pi^2}{2q_{l-1}^2} - \frac{\pi}{2\sqrt{q_{l-1}}} \right) \right| \leq c_8 m \frac{1}{\sqrt{q_{l-1}}}. \quad (41)$$

Суммируя оценки (39), (40) и (41) для $\sigma_{l,1}$, $\sigma_{l,2}$ и $\sigma_{l,3}$ и учитывая, что $m < q_l$, получаем неравенство

$$D_{l,3} = \sigma_{l,1} + \sigma_{l,2} + \sigma_{l,3} \leq 6 \frac{q_l}{q_{l-1}} (c_6 + \ln q_{l-1}) + 2c_7 \frac{q_l}{\sqrt{q_{l-1}}} + c_8 \frac{q_l}{\sqrt{q_{l-1}}}. \quad (42)$$

Из неравенств (35), (36) и (42) следует, что

$$D_l \leq D_{l-1} + q_l E_{l-1},$$

где

$$E_{l-1} = \frac{c_3 + \ln q_{l-1}}{q_{l-1}} + \frac{B_{l-1}}{q_{l-1}} + \frac{6(c_6 + \ln q_{l-1})}{q_{l-1}} + \frac{2c_7 + c_8}{\sqrt{q_{l-1}}}. \quad (43)$$

Складывая неравенства $D_j \leq D_{j-1} + q_j E_{j-1}$ по j от некоторого фиксированного достаточно большого l_0 до l , получаем неравенство

$$D_l \leq D_{l_0-1} + \sum_{j=l_0}^l q_j E_{j-1}.$$

Из рекуррентного соотношения (29) и условия $a_l \in \mathbb{N}$ следует, что $q_l \geq q_{l-1} + q_{l-2} \geq 2q_{l-2}$, $l = 1, 2, \dots$. Поэтому $q_j/q_l \leq (1/2)^{\lfloor \frac{l-j}{2} \rfloor}$, $j = 1, \dots, l$. Следовательно,

$$\frac{D_l}{q_l} \leq \frac{D_{l_0-1}}{q_l} + \sum_{j=l_0}^l \frac{q_j}{q_l} E_{j-1} \leq \frac{D_{l_0-1}}{q_l} + \sum_{j=l_0}^l \left(\frac{1}{2} \right)^{\lfloor \frac{l-j}{2} \rfloor} E_{j-1}. \quad (44)$$

По уже доказанному $\lim_{l \rightarrow \infty} B_l/q_l = 0$. Поэтому из определения (43) величины E_l следует, что $\lim_{l \rightarrow \infty} E_l = 0$. Отсюда и из неравенства (44) следует, что $\lim_{l \rightarrow \infty} D_l/q_l = 0$.

Докажем теперь равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} A_n = 0$. Пусть $j(n, \tau) = q_l$, т.е. пусть $q_l \leq n < q_{l+1}$ и m — индекс, на котором достигается максимум величины A_n . Тогда $A_n = \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \neq r q_l} \ln |2 \sin(\pi k \tau)| \right|$. Оценим A_n , повторив те же рассуждения, которые использовались при оценке величины D_l . Слагаемого, аналогичного $D_{l,1}$, в данном случае просто не будет в силу определения A_n . Имеем

$$A_n \leq \left| \sum_{1 \leq k \leq m, k \neq r q_l} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_l}{q_l} \right| \right| + \sum_{1 \leq k \leq m, k \neq r q_l} \left| \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\pi k p_l}{q_l} + \pi k \left(\tau - \frac{p_l}{q_l} \right) \right) \right| - \ln \left| 2 \sin \frac{\pi k p_l}{q_l} \right| \right|. \quad (45)$$

Легко видеть, что первое слагаемое в правой части неравенства (45) совпадает с $D_{l+1,2}$ и, как и выше (см. неравенство (36)), не превосходит $\frac{m}{q_l} B_l + D_l$, а второе слагаемое совпадает с $D_{l+1,3}$ с точностью до замены дроби p_{l+1}/q_{l+1} числом τ . Легко видеть, что если положить $x_k = k p_l / q_l$, $t_k = k |\tau - p_l / q_l|$, то с учетом неравенства (31) все рассуждения, использованные выше при оценке величины $D_{l,3}$, верны и в этом частично модифицированном случае. Из аналогов неравенств (39), (40) и (41), примененных к этому модифицированному случаю, следует, что второе слагаемое в неравенстве (45) не превосходит $(6m/q_l)(c_6 + \ln q_l) + c_7 \sqrt{q_l} (m/q_l + 1) + c_8 m / \sqrt{q_l}$. Таким образом, неравенство (45) можно переписать в виде

$$A_n \leq \frac{m}{q_l} B_l + D_l + 6 \frac{m}{q_l} (c_6 + \ln q_l) + c_7 \sqrt{q_l} \left(\frac{m}{q_l} + 1 \right) + c_8 m \frac{1}{\sqrt{q_l}}.$$

Так как $q_l \leq n$, $m \leq n$ и $q_l = j(n, \tau) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда и из уже доказанных равенств $\lim_{l \rightarrow \infty} B_l/q_l = \lim_{l \rightarrow \infty} D_l/q_l = 0$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} A_n = 0$. Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Получим лемму 1 как следствие леммы 4. Положим

$$M_{q,n,k} = \max_{n_1 + \dots + n_k = n} \left| \frac{(q)_n}{(q)_{n_1} \dots (q)_{n_k}} \right|^{1/n},$$

и пусть $(n_1, \dots, n_k)$ — мультииндекс, на котором достигается этот максимум. Заметим, что

$$|(q)_n|^{1/n} = \prod_{1 \leq k \leq n, k \notin J(n, \tau)} |1 - q^k|^{1/n} \prod_{r=1}^{[n/q_l]} |1 - q^{r q_l}|^{1/n},$$

$$|(q)_{n_i}|^{1/n} = \prod_{1 \leq k \leq n_i, k \notin J(n, \tau)} |1 - q^k|^{1/n} \prod_{r=1}^{[n_i/q_l]} |1 - q^{r q_l}|^{1/n},$$

где $q_l = j(n, \tau)$. Поэтому из леммы 4 и равенства (32) следует, что

$$|(q)_n|^{1/n} \leq (1 + \varepsilon_n) \prod_{r=1}^{[n/q_l]} |2 \sin(\pi r q_l \tau)|^{1/n},$$

$$|(q)_{n_i}|^{1/n} \geq (1 - \varepsilon_n) \prod_{r=1}^{[n_i/q_l]} |2 \sin(\pi r q_l \tau)|^{1/n},$$

где ε_n зависит только от n и τ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Следовательно,

$$M_{q,n,k} \leq \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 - \varepsilon_n)^k} \prod_{r=1}^{[n/q_l]} |2 \sin(\pi r q_l \tau)|^{1/n} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{r=1}^{[n_i/q_l]} |2 \sin(\pi r q_l \tau)| \right)^{-1/n}. \quad (46)$$

Так как

$$|\sin \pi r q_l \tau| = \left| \sin \pi r q_l \left(\tau - \frac{p_l}{q_l} \right) \right| \quad \text{и} \quad r q_l \left| \tau - \frac{p_l}{q_l} \right| \leq \left[\frac{n}{q_l} \right] q_l \frac{1}{q_l q_{l+1}} \leq \frac{1}{q_l},$$

то

$$M_{q,n,k} \leq \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 - \varepsilon_n)^k} \left[c_9^{n/q_l} |q_l \tau - p_l|^{[n/q_l] - \sum_{i=1}^k [n_i/q_l]} [n/q_l]! \left(\prod_{i=1}^k [n_i/q_l]! \right)^{-1} \right]^{1/n}.$$

Так как

$$[n/q_l] - \sum_{i=1}^k [n_i/q_l] \geq 0, \quad [n/q_l]! \left(\prod_{i=1}^k [n_i/q_l]! \right)^{-1} \leq k^{n/q_l} n^k$$

и $q_l \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} M_{q,n,k} \leq 1$. С учетом очевидного неравенства $M_{q,n,k} \geq 1$ отсюда следует точное равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_{q,n,k} = 1.$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

§ 4. Доказательство лемм 2 и 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Фиксируем $l \in \mathbb{Z}$ и обозначим через $T_{q,n,l}(z)$ многочлен Тейлора степени $[(n + l + 1)/2]$ функции $V_{q,l+1}$. Из равенства (18) следует, что

$$T_{q,n,l}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{[(n+l+1)/2]} z^k \frac{q^{k^2}}{(q)_k} \prod_{j=1}^k (1 - q^{l+1-2k+j}).$$

Так как функция $V_{q,l+1}$ голоморфна в круге D , то многочлены $T_{q,n,l}(z)$ стремятся при $n \rightarrow \infty$ к функции $V_{q,l+1}$ равномерно на компактах, лежащих в D . Положим

$R_{q,n,l}(z) = P_{q,n+l}(z) - T_{q,n,l}(z)$. Для доказательства леммы 2 достаточно доказать, что многочлены $R_{q,n,l}$ стремятся к нулю при $n \in \Lambda_q$, $n \rightarrow \infty$, равномерно на компактах, лежащих в D . Из равенства (8) следует, что

$$P_{q,n+l}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{[(n+l+1)/2]} z^k \frac{q^{k^2}}{(q)_k} \prod_{j=1}^k (1 - q^{n+l+1-2k+j}).$$

Поэтому $R_{q,n,l}(z) = \sum_{k=1}^{[(n+l+1)/2]} r_{q,n,l,k} z^k$, где

$$r_{q,n,l,k} = \frac{q^{k^2}}{(q)_k} \left(\prod_{j=1}^k (1 - q^{n+l+1-2k+j}) - \prod_{j=1}^k (1 - q^{l+1-2k+j}) \right).$$

Применяя к правой части этого равенства q -биномиальную теорему (равенство (15)) при $b = 1$, $w_1 = -q^{n+l+1-2k}$ и $w_2 = -q^{l+1-2k}$, получаем

$$r_{q,n,l,k} = q^{k^2} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(q)_j (q)_{k-j}} q^{\frac{j(j+1)}{2}} (-1)^j (q^{(n+l+1-2k)j} - q^{(l+1-2k)j}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |r_{q,n,l,k}| &\leq \sum_{j=0}^k \left| \frac{1}{(q)_j (q)_{k-j}} \right| |q^{nj} - 1| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \left| \frac{1}{(q)_j (q)_{k-j}} \right| |q^n - 1| |1 + q^n + \dots + q^{n(j-1)}| \leq |q^n - 1| d_{q,k}, \end{aligned}$$

где

$$d_{q,k} = \sum_{j=0}^k \left| \frac{j}{(q)_j (q)_{k-j}} \right|.$$

Заметим, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d_{q,k}^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(q)_k} \right|^{1/k} \limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k} \left| \frac{(q)_k}{(q)_j (q)_{k-j}} \right|^{1/k}.$$

Первый множитель в правой части этого неравенства по определению (3) радиуса R_q совпадает с R_q^{-1} , а второй множитель по лемме 1 равен единице. Поэтому для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $k(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k \geq k(\varepsilon_1)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|r_{q,n,l,k}| \leq (R_q^{-1} + \varepsilon_1)^k |q^n - 1|.$$

Следовательно, при $n > 2k(\varepsilon_1) - l$ имеет место неравенство

$$|R_{q,n,l}(z)| \leq \left(\sum_{k=1}^{k(\varepsilon_1)} d_{q,k} |z|^k + \sum_{k=k(\varepsilon_1)+1}^{[(n+l+1)/2]} (R_q^{-1} + \varepsilon_1)^k |z|^k \right) |q^n - 1|.$$

Из определения (24) последовательности Λ_q следует, что $|q^n - 1| \leq (R_q + \varepsilon_2)^n$ при всех $n \in \Lambda_q$, $n \geq n(\varepsilon_2)$, где ε_2 — произвольное сколь угодно малое положительное число. Поэтому при $n \in \Lambda_q$, $n \geq \max\{2k(\varepsilon_1) - l, n(\varepsilon_2)\}$, справедливо неравенство

$$|R_{q,n,l}(z)| \leq \left(\sum_{k=1}^{k(\varepsilon_1)} d_{q,k} |z|^k + \sum_{k=k(\varepsilon_1)+1}^{[(n+l+1)/2]} (R_q^{-1} + \varepsilon_1)^k |z|^k \right) (R_q + \varepsilon_2)^n. \quad (47)$$

Пусть K — компакт, лежащий в круге D . Легко видеть, что найдутся числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\gamma_1 < R_q^{-1}$ такие, что $(R_q^{-1} + \varepsilon_1) \max_{z \in K} |z| \leq \gamma_1$, а также числа $\varepsilon_2 > 0$ и $\gamma_2 < \min\{1, \gamma_1^{-1}\}$ такие, что $R_q + \varepsilon_2 \leq \gamma_2$. Поэтому из неравенства (47) следует, что при всех $z \in K$ и всех $n \in \Lambda_q$, $n \geq \max\{2k(\varepsilon_1) - l, n(\varepsilon_2)\}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |R_{q,n,l}(z)| &\leq \left(\sum_{k=1}^{k(\varepsilon_1)} d_{q,k} |z|^k + \sum_{k=k(\varepsilon_1)+1}^{[(n+l+1)/2]} \gamma_1^k \right) \gamma_2^n \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{k(\varepsilon_1)} d_{q,k} |z|^k + \frac{n+l+1}{2} \max\{1, \gamma_1^n\} \right) \gamma_2^n. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_2 < 1$ и $\gamma_1 \gamma_2 < 1$, то отсюда следует, что $R_{q,n,l}(z)$ равномерно на компакте K стремится к нулю при $n \in \Lambda_q$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Будем предполагать, что $R_q < 1$, так как при $R_q = 1$ лемма 3 является следствием утверждения 2 Любински. Обозначим через $S(w, z)$ дробно-линейное (по w) преобразование $z/(w+1)$. Композицию (по w) $S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^k z)$ дробно-линейных преобразований $S(w, q^l z)$, $l = 1, 2, \dots, k$, обозначим через $S_{q,k}(w, z)$, и пусть

$$S_{q,k}(w, z) = \frac{\alpha_{q,k}(z)w + \beta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)w + \delta_{q,k}(z)}.$$

Из хорошо известных в теории непрерывных дробей формул для композиций дробно-линейных преобразований, соответствующих непрерывной дроби, следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_{q,k}(z) &= P_{q,k-1}(z) - Q_{q,k-1}(z), \quad \beta_{q,k}(z) = P_{q,k}(z) - Q_{q,k}(z), \\ \gamma_{q,k}(z) &= Q_{q,k-1}(z), \quad \delta_{q,k}(z) = Q_{q,k}(z). \end{aligned}$$

Поэтому из леммы 2 и равенств (9) следует, что коэффициенты $\alpha_{q,k}(z)$, $\beta_{q,k}(z)$, $\gamma_{q,k}(z)$, $\delta_{q,k}(z)$ дробно-линейного преобразования $S_{q,k}(w, z)$ равномерно сходятся при $k \rightarrow \infty$, $k \in \Lambda_q$, на компактах, лежащих в D , соответственно к функциям

$$\begin{aligned} \alpha_q(z) &= V_{q,0}(z) - V_{q,-1}(qz), \quad \beta_q(z) = V_{q,1}(z) - V_{q,0}(qz), \\ \gamma_q(z) &= V_{q,-1}(qz), \quad \delta_q(z) = V_{q,0}(qz). \end{aligned}$$

Из этих равенств и из (17) (или непосредственно из определения (16) функций $V_{q,l}(z)$) следует, что при всех $z \in D$

$$\alpha_q(z)\delta_q(z) - \beta_q(z)\gamma_q(z) = 0. \quad (48)$$

Из этих же равенств и из (21) и (23) следует, что при всех $z \in D$

$$\alpha_q(z) + \delta_q(z) = V_{q,0}(z) - V_{q,-1}(qz) + V_{q,0}(qz) = 1. \quad (49)$$

Пусть K — компакт, лежащий в $D \setminus \Omega_q$. Не теряя в общности, можно считать, что компакт K инвариантен относительно поворотов вокруг точки $z = 0$. Пусть

$$M = \max_{z \in K} |\gamma_q(z)|, \quad m = \min \left\{ 1, \min_{z \in K} |\gamma_q(z)|, \min_{z \in K} |\delta_q(z)| \right\}.$$

Как уже отмечалось в §2, все нули голоморфных в D функций $V_{q,l}(z)$ принадлежат множеству Ω_q . В частности, все нули функций $\gamma_q(z)$ и $\delta_q(z)$ принадлежат множеству Ω_q . Поэтому $0 < m \leq M < \infty$. Положим $\theta = m/(6M)$ и зафиксируем натуральное число $k \in \Lambda_q$ столь большим, чтобы при всех $z \in K$ выполнялись неравенства

$$|\gamma_{q,k}(z)| \leq 2M, \quad |\delta_{q,k}(z)| \geq \frac{m}{2}, \quad (50)$$

$$\left| \frac{\alpha_{q,k}(z)\delta_{q,k}(z) - \beta_{q,k}(z)\gamma_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right| \leq \frac{\theta}{6}, \quad (51)$$

$$\left| \alpha_{q,k}(z) + \delta_{q,k}(q^{-k}z) \frac{\gamma_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(q^{-k}z)} \right| \geq \frac{2}{3}. \quad (52)$$

Такое $k \in \Lambda_q$ существует в силу отмеченной сходимости $\alpha_{q,k}(z)$, $\beta_{q,k}(z)$, $\gamma_{q,k}(z)$, $\delta_{q,k}(z)$ при $k \in \Lambda_q$, $k \rightarrow \infty$ к функциям $\alpha_q(z)$, $\beta_q(z)$, $\gamma_q(z)$, $\delta_q(z)$, ввиду определения чисел M и m , равенств (48), (49), равенства $\lim_{k \in \Lambda_q} q^{-k} = 1$ и в силу отсутствия нулей функции $\gamma_q(z)$ на компакте K . Покажем, что последовательность

$$\{S_{q,nk}(0, z)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{\beta_{q,nk}(z)}{\delta_{q,nk}(z)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{P_{q,nk}(z) - Q_{q,nk}(z)}{Q_{q,nk}(z)} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (53)$$

равномерно сходится на компакте K . Положим

$$T_{q,k}(w, z) = A_{q,k}^{-1}(w, q^{-k}z) \circ S_{q,k}(w, z) \circ A_{q,k}(w, z), \quad A_{q,k}(w, z) = \frac{\theta}{w} - \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)},$$

и найдем непосредственными вычислениями явный вид дробно-линейного преобразования $T_{q,k}(w, z)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} S_{q,k}(w, z) \circ A_{q,k}(w, z) &= \frac{\alpha_{q,k}(z) \left(\frac{\theta}{w} - \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right) + \beta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z) \left(\frac{\theta}{w} - \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right) + \delta_{q,k}(z)} \\ &= \frac{\theta^{-1} \left(\beta_{q,k}(z) - \alpha_{q,k}(z) \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right) w + \alpha_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства

$$A_{q,k}^{-1}(w, z) = \frac{\theta}{w + \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)}} \quad (54)$$

получаем, что

$$T_{q,k}(w, z) = \frac{\theta}{\frac{\theta^{-1} \left(\beta_{q,k}(z) - \alpha_{q,k}(z) \frac{\delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right) w + \alpha_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} + \frac{\delta_{q,k}(q^{-k}z)}{\gamma_{q,k}(q^{-k}z)}}.$$

Таким образом,

$$T_{q,k}(w, z) = \frac{a_{q,k}(z)w + b_{q,k}(z)}{c_{q,k}(z)w + d_{q,k}(z)},$$

где

$$\begin{aligned} a_{q,k}(z) &= 0, & b_{q,k}(z) &= \theta \gamma_{q,k}(z), \\ c_{q,k}(z) &= \theta^{-1} \frac{\beta_{q,k}(z) \gamma_{q,k}(z) - \alpha_{q,k}(z) \delta_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)}, \\ d_{q,k}(z) &= \alpha_{q,k}(z) + \delta_{q,k}(q^{-k}z) \frac{\gamma_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(q^{-k}z)}. \end{aligned}$$

Из неравенств (50)–(52) и из определения чисел M , m и θ следует, что при всех $z \in K$

$$\begin{aligned} |d_{q,k}(z)| - |b_{q,k}(z)| &= \left| \alpha_{q,k}(z) + \delta_{q,k}(q^{-k}z) \frac{\gamma_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(q^{-k}z)} \right| - \theta |\gamma_{q,k}(z)| \\ &\geq \frac{2}{3} - 2\theta M \geq \frac{1}{3} \geq 2\theta^{-1} \left| \frac{\alpha_{q,k}(z) \delta_{q,k}(z) - \beta_{q,k}(z) \gamma_{q,k}(z)}{\gamma_{q,k}(z)} \right| \\ &= 2|c_{q,k}(z)| = 2(|c_{q,k}(z)| + |a_{q,k}(z)|). \end{aligned}$$

Так как компакт K инвариантен относительно поворотов вокруг точки $z = 0$, то при всех $z \in K$ и всех $l \in \mathbb{Z}$

$$|d_{q,k}(q^l z)| - |b_{q,k}(q^l z)| \geq 2(|c_{q,k}(q^l z)| + |a_{q,k}(q^l z)|).$$

(Это означает, в частности, что при всех $z \in K$ и всех $l \in \mathbb{Z}$ дробно-линейное преобразование $T_{q,k}(w, q^l z)$ переводит круг $\{|w| < 1\}$ в себя.) В работе автора [14] показано, что отсюда следует сходимость при $n \rightarrow \infty$ композиций $T_{q,k,n}(w, z) = T_{q,k}(w, z) \circ \dots \circ T_{q,k}(w, q^{(n-1)k}z)$ при всех $|w| < 1$ к некоторой не зависящей от w функции $t_{q,k}(z)$ и при этом имеет место неравенство

$$|T_{q,k,n}(w, z) - t_{q,k}(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 + |w|}{1 - |w|}. \quad (55)$$

Из равенства (54), неравенств (50) и определения числа θ следует, что при всех $z \in K$

$$|A_{q,k}^{-1}(0, q^{(n-1)k}z)| = \left| \theta \frac{\gamma_{q,k}(q^{(n-1)k}z)}{\delta_{q,k}(q^{(n-1)k}z)} \right| \leq \theta \frac{2M}{m/2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отсюда и из (55) следует неравенство

$$|T_{q,k,n}(w, z) \circ A_{q,k}^{-1}(w, q^{(n-1)k}z)|_{w=0} - t_{q,k}(z)| \leq 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (56)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{q,nk}(w, z) &= S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^{nk}z) = S_{q,k}(w, z) \circ \dots \circ S_{q,k}(w, q^{(n-1)k}z) \\ &= A_{q,k}(w, q^{-k}z) \circ T_{q,k}(w, z) \circ \dots \circ T_{q,k}(w, q^{(n-1)k}z) \circ A_{q,k}^{-1}(w, q^{(n-1)k}z) \\ &= A_{q,k}(w, q^{-k}z) \circ T_{q,k,n}(w, z) \circ A_{q,k}^{-1}(w, q^{(n-1)k}z). \end{aligned}$$

Отсюда и из (56) следует, что последовательность $\{S_{q,nk}(0, z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится в сферической метрике на компакте K к функции

$$s_{q,k}(z) = A_{q,k}(t_{q,k}(z), q^{-k}z).$$

Таким образом, с учетом равенства (53) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{q,nk}(z)}{Q_{q,nk}(z)} = s_{q,k}(z) + 1 \quad (57)$$

равномерно на компакте K в сферической метрике. Так как непрерывной дроби (1) соответствует ряд H_q , то правая часть полученного предельного равенства обязана совпадать с функцией $H_q(z)$. Впрочем, это же самое следует и из уже доказанного равенства (25). Действительно, существует число l ($1 \leq l \leq k$) такое, что последовательность натуральных чисел $\{nk + l\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечно много членов последовательности Λ_q . Это означает, что последовательность $\{nk\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{n - l\}_{n \in \Lambda_q}$. Если $\Lambda_{q,k,l}$ — пересечение последовательностей $\{nk\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{n - l\}_{n \in \Lambda_q}$, то из равенств (57) и (25) получаем, что

$$s_{q,k}(z) + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{q,nk}(z)}{Q_{q,nk}(z)} = \lim_{n \in \Lambda_{q,k,l}} \frac{P_{q,n}(z)}{Q_{q,n}(z)} = \lim_{n \in \Lambda_q} \frac{P_{q,n-l}(z)}{Q_{q,n-l}(z)} = H_q(z).$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{q,nk}(z)}{Q_{q,nk}(z)} = H_q(z)$$

равномерно на компакте K в сферической метрике. Так как предельная функция $H_q(z)$ не имеет полюсов на компакте K , то последовательность $\left\{ \frac{P_{q,nk}(z)}{Q_{q,nk}(z)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на компакте K к функции $H_q(z)$ не только в сферической, но и в обычной метрике. Лемма 3 доказана.

Список литературы

1. *Lubinsky D. S.* Rogers–Ramanujan and the Baker–Gammel–Wills (Padé) conjecture // Ann. of Math. (2). (to appear).
2. *Baker G. A., Gammel J. L., Wills J. G.* An investigation of the applicability of the Padé approximant method // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 2. P. 405–418.
3. *Stahl H.* Conjectures around Baker–Gammel–Wills conjecture // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 287–292.
4. *Буслаев В. И.* О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Падэ // Матем. сб. 2002. Т. 193. №6. С. 25–38.
5. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Notes on the theory of series. XXIV. A curious power-series // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1946. V. 42. P. 85–90.
6. *Lubinsky D. S.* Note on polynomial approximation of monomials and diophantine approximation // J. Approx. Theory. 1985. V. 43. P. 29–35.
7. *Petruska G.* On the radius of convergence of q -series // Indag. Math. (N.S.). 1992. V. 3. №3. P. 353–364.
8. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
9. *Worpitsky J.* Untersuchungen über die Entwicklung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche // Friedrichs-Gymnasium rund Realschule Jahresbericht. Berlin, 1865. P. 3–39.
10. *Polya G.* Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe // Math. Ann. 1928. V. 99. P. 687–706.
11. *Буслаев В. И.* О теореме Ван Флека для правильных C -дробей с предельно периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №4. С. 35–48.
12. *Hirschhorn M. D.* Partitions and Ramanujan's continued fraction // Duke Math. J. 1972. V. 39. P. 789–791.
13. *Gasper G., Rahman M.* Basic hypergeometric series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
14. *Буслаев В. И.* О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей // Матем. сб. 1998. Т. 189. №12. С. 13–28.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
02.12.2002