Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Водопьянов, О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 67–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:41:14

УДК 517.518.23+517.813.52+517.954

С. К. Водопьянов

О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно

Доказана $\mathcal{P}$ -дифференцируемость в топологии пространства Соболева слабо контактных отображений групп Карно. В качестве следствия получены $\mathcal{P}$ -дифференцируемость в смысле Пансю контактных отображений класса W_p^1 , $p > \nu$, и другие результаты. Метод доказательства является новым и для евклидова пространства, что, в частности, дает новое доказательство известных теорем Решетняка и Зигмунда–Кальдерона о дифференцируемости функций классов Соболева. Кроме того, мы приводим новое доказательство $\mathcal{N}$ -свойства Лузина для квазимонотонных отображений класса W_p^1 . В качестве следствия выведены формулы замены переменных для отображений групп Карно.

Библиография: 21 название.

Стратифицированной однородной группой [1] или, в другой терминологии, *группой Карно* [2] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $\dim V_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Пусть векторные поля $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ образуют базис пространства V_1 . Поскольку они порождают V , для каждого $1 < i \leq m$ можно выбрать базис X_{ij} , $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$, в V_i , образованный коммутаторами полей $X_{1k} \in V_1$ порядка $i-1$. отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum_{i=1}^m n_i$, $x = (x_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, посредством экспоненциального отображения $\exp(\sum x_{ij} X_{ij}) = g$. Растяжения δ_t , определяемые как $\delta_t x = (t^i x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i}$, суть автоморфизмы $\mathbb{G}$ для любого $t > 0$. Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ – бинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_t x) = t^\nu dx$, где $\nu = \sum_{i=1}^m i \dim V_i$ – однородная размерность группы $\mathbb{G}$. Мера Лебега $|E|$ измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$ равна $\int_E dx$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной структурой служит примером абелевой группы: векторные поля $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, не имеют нетривиальных коммутационных соотношений и образуют базис соответствующей алгебры Ли. Примером неабелевой группы Карно является группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Ее алгебра Ли имеет размерность $2n+1$, а центр одномерен. Если $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T$ – базис алгебры Гейзенберга, то нетривиальными коммутационными соотношениями будут лишь $[X_i, Y_i] = -4T$, $i = 1, \dots, n$, все остальные равны нулю.

Однородная норма на группе $\mathbb{G}$ является непрерывной функцией $\rho: \mathbb{G} \rightarrow [0, \infty)$ класса C^∞ на $\mathbb{G} \setminus \{0\}$, обладающей свойствами:

$$(a) \quad \rho(x) = \rho(x^{-1}) \text{ и } \rho(\delta_t(x)) = t\rho(x);$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01009) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-311.2003.1).

- (b) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (c) существует постоянная $c > 0$ такая, что $\rho(x_1 x_2) \leq c(\rho(x_1) + \rho(x_2))$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{G}$.

Естественно, что однородная норма определяется неоднозначно, однако любые две однородные нормы эквивалентны между собой: если ρ_1 и ρ_2 — две однородные нормы, то существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $0 < c_1 \leq \rho_1(x)/\rho_2(x) \leq c_2 < \infty$ для любого $x \in \mathbb{G}$, отличного от нуля. Далее на группе Карно мы фиксируем такую однородную норму ρ , что $\rho|_{V_1 \times V_1}$ определяется скалярным произведением, относительно которого значения $X_{ij}(0)$ векторных полей X_{ij} в единице группы ортонормальны, и $\rho(X_{ij}(0)) = 1$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$. Однородная норма определяет однородную метрику ρ : для любых двух точек $x, y \in \mathbb{G}$ полагаем $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x)$. Относительно этой метрики стандартным образом задаются сферы $S(x, t)$, шары $B(x, t)$ и топология, которая оказывается эквивалентной евклидовой. Нормируем меру Лебега таким образом, чтобы мера шара $B(0, 1)$ была равна единице. Тогда $|B(0, r)| = r^\nu$.

Набор $X_1, X_2, \dots, X_n$ базисных векторов пространства V_1 (здесь и далее полагаем, что $n_1 = n$ и $X_{1i} = X_i$, где $i = 1, \dots, n$) удовлетворяет условию гипотезы Хёрмандера. Расстоянием Карно–Каратеодори $d(x, y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется нижняя грань длин всех горизонтальных кривых с концевыми точками x, y , где длина измеряется римановой метрикой, а горизонтальная кривая есть абсолютно непрерывный кусочно гладкий путь, касательный вектор которого принадлежит V_1 . Можно показать, что $d(x, y)$ всегда является конечной левоинвариантной метрикой, причем расстояния $d(x, y)$ и $\rho(x, y)$ эквивалентны: существуют постоянные c_3 и c_4 такие, что $0 < c_3 \leq d(x, y)/\rho(x, y) \leq c_4 < \infty$ для любых $x, y \in \mathbb{G}$, $x \neq y$. В дальнейшем мы полагаем $d(x) = d(0, x)$.

Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно с однопараметрической группой растяжений δ_t , $t > 0$, и однородной нормой ρ , а Ω — открытое множество в $\mathbb{G}$. Как обычно, символом $L_q(\Omega)$ мы обозначаем пространство суммируемых в степени $q \in [1, \infty]$ функций со стандартной нормой:

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

при $q \in [1, \infty)$ и $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_\Omega |f(x)|$ при $q = \infty$, а символом $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$ — пространство функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f \in L_q(F)$ для всякой компактной части $F \subset \Omega$.

Пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ ($L_q^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$), состоит из локально суммируемых в Ω функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих обобщенную производную $X_i f$ вдоль векторного поля X_i , $i = 1, \dots, n$, и конечную норму (полунорму)

$$\|f\|_{W_q^1(\Omega)} = \|f\|_{L_q(\Omega)} + \|\nabla_{\mathcal{L}} f\|_{L_q(\Omega)} \quad (\|f\|_{L_q^1(\Omega)} = \|\nabla_{\mathcal{L}} f\|_{L_q(\Omega)}),$$

где $\nabla_{\mathcal{L}} f = (X_1 f, \dots, X_n f)$ — субградиент функции f . Напомним, что локально суммируемая функция $g_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной производной функции f вдоль векторного поля X_i , $i = 1, \dots, n$, если

$$\int_{\Omega} g_i \psi dx = - \int_{\Omega} f X_i \psi dx$$

для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Если $f \in W_q^1(U)$ для каждого открытого множества U , $\overline{U} \subset \Omega$, то говорят, что f принадлежит классу $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega)$.

Пусть Ω – область в $\mathbb{G}$. Будем говорить, что функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на линиях* ($f \in ACL(\Omega)$), если для любой области $U, \bar{U} \subset \Omega$, и слоения Γ_j , определяемого левоинвариантным векторным полем X_j , $j = 1, \dots, n$, f абсолютно непрерывна на $\gamma \cap U$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\gamma$ -почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$. (Напомним, что мера $d\gamma$ на слоении Γ_j равна внутреннему произведению $i(X_j)$ векторного поля X_j с биинвариантной формой объема dx , см., например, [3]–[5], где приведена употребляемая в работе терминология.) Для такой функции f почти всюду в Ω существует производная $X_j f$ вдоль векторного поля X_j , $j = 1, \dots, n$, и если $X_j f$ локально суммируема, то она является обобщенной производной функции f .

Пусть $(\mathbb{X}, r)$ – полное метрическое пространство, r – метрика на $\mathbb{X}$, а Ω – область на группе Карно $\mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия:

- (A) для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi]_z : x \in \Omega \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega)$;
- (B) семейство функций $(\nabla_{\mathcal{L}}[\varphi]_z)_{z \in \mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$, т.е. существует функция $g \in L_{q, \text{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z , такая, что $|\nabla_{\mathcal{L}}[\varphi]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, мы имеем определение функции класса Соболева, эквивалентное вышеприведенному. В случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ получаем определение отображения класса Соболева, принадлежащее Ю.Г. Решетняку [6]. Если $\mathbb{X} = \tilde{\mathbb{G}}$ – еще одна группа Карно с однопараметрической группой растяжений $\tilde{\delta}$, однородной нормой $\tilde{\rho}$ и т. д., то мы получаем определение отображения класса Соболева различных групп Карно и обозначаем этот класс символом $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева из [5], [7], [8] только через координатные функции.

Будем говорить, что отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, *принадлежит классу* $HW_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $1 \leq q < \infty$, если

- 1) $\tilde{\rho}(\varphi(x)) \in L_{q, \text{loc}}(\Omega)$,
- 2) координатные функции φ_{ij} принадлежат $ACL(\Omega)$ для всех i, j , а φ_{1j} принадлежат $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega)$ для всех $j = 1, \dots, n_1$,
- 3) вектор

$$X_k \varphi(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \tilde{m} \\ 1 \leq j \leq \tilde{n}_i}} X_k \varphi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{ij}}$$

принадлежит $\tilde{V}_1$ для почти всех $x \in \Omega$, $k = 1, \dots, n$.

Сформулируем в следующем утверждении эквивалентные описания отображений классов Соболева, используемые в настоящей работе. При его доказательстве в [8] в соотношении (4.2) следует рассматривать последовательность точек x_i , $i \in \mathbb{N}$, такую, что интервалы (x_{2i-1}, x_{2i}) , $i \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются и если $\sum_i \rho(x_{2i-1}, x_{2i}) < \delta$, то $\sum_i \rho(\varphi(x_{2i-1}), \varphi(x_{2i})) < \varepsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [5], [7], [8]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ – область на группе Карно.

1. Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ принадлежит $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in HW_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$.

2. Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ принадлежит $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ тогда и только

тогда, когда

- а) функция $\Omega \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = r(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$ для любой точки $z \in \tilde{\mathbb{G}}$,
- б) отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ абсолютно непрерывно на линиях, т.е. для любой области $U, \bar{U} \subset \Omega$, и слоения Γ_i , определяемого левинвариантным векторным полем $X_i, i = 1, \dots, n$, длина кривой $\Sigma: \gamma \cap U \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ абсолютно непрерывна для $d\gamma$ -почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_i$ относительно параметра $t, \gamma(t) = \exp tX_i, \Sigma(t) = \varphi(\gamma(t))$,
- в) производная

$$X_i \varphi_l(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{l(\varphi(p), \varphi(p \exp tX_i))}{t}$$

длины кривой $\Sigma(\tau) = \varphi(p \exp \tau X_i): [0, t] \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, существующая почти всюду в области Ω , принадлежит $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$ для всех i (здесь $\varphi(p), \varphi(p \exp tX_i)$ – концевые точки кривой $l(\Sigma[0, t])$, а $l(\varphi(p), \varphi(p \exp tX_i))$ – ее длина).

3. Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ принадлежит $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ тогда и только тогда, когда для произвольной функции $f \in \text{Lip } \tilde{\mathbb{G}}$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega)$ и $|\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi)|(x) \leq \text{Lip } f \cdot g(x)$, где $g \in L_{q,\text{loc}}(\Omega)$ не зависит от f .

Поскольку $X_j \varphi(x) \in \tilde{V}_1, j = 1, \dots, n$, для почти всех $x \in \Omega$, линейное отображение $D_h \varphi(x)$, матрица которого равна $(X_1 \varphi(x), \dots, X_n \varphi(x))$, переводит горизонтальное пространство V_1 в горизонтальное пространство $\tilde{V}_1$ и называется *формальным горизонтальным дифференциалом* отображения φ в точке x . Обозначим символом $|D_h \varphi(x)|$ норму этого дифференциала:

$$|D_h \varphi(x)| = \sup_{\xi \in V_1, \rho(\xi)=1} \tilde{\rho}(D_h \varphi(x)(\xi)).$$

Заметим, что норма $|D_h \varphi|$ эквивалентна величине $|\nabla_{\mathcal{L}} \varphi|$ в том смысле, что

$$\alpha |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi(x)| \leq |D_h \varphi(x)| \leq \beta |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi(x)|,$$

где числа $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ не зависят ни от φ , ни от x .

Гладкие отображения, дифференциалы которых сохраняют горизонтальную структуру, называют *контактными*. По этой причине отображения класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ естественно называть (*слабо*) *контактными*. В [4], [8] доказано, что формальный горизонтальный дифференциал $D_h \varphi: V_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ порождает гомоморфизм $D\varphi: V \rightarrow \tilde{V}$ алгебр Ли V и $\tilde{V}$, называемый *формальным дифференциалом*. По этой причине $|D\varphi(x)| \leq C |D_h \varphi(x)|$ для почти всех $x \in \Omega$, где постоянная C зависит лишь от групп и однородных норм. Здесь

$$|D\varphi(x)| = \sup_{\xi \in V, \rho(\xi)=1} \tilde{\rho}(D\varphi(x)(\xi)).$$

Если $\tilde{\mathbb{G}} = \tilde{\mathbb{G}}$, то определитель матрицы $D\varphi(x)$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения φ и обозначается символом $J(x, \varphi)$.

В настоящей работе исследуется дифференцируемость в топологии пространств Соболева слабо контактных отображений. Контактный гомоморфизм $L: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$

группы Карно называется $\mathcal{P}$ -дифференциалом отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке $p \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, в топологии пространства W_q^1 , $q \in [1, \infty)$, если

$$|(L(\cdot), \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t \cdot)))| |W_q^1(B; \tilde{\mathbb{G}})| = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $B = B(0, 1)$ – шар радиуса 1 с центром в единице группы. Здесь расстояние между двумя отображениями ψ и $\varphi \in W_q^1(B; \tilde{\mathbb{G}})$ определяется по формуле

$$|(\psi, \varphi)| |W_q^1(B; \tilde{\mathbb{G}})| = \|\tilde{\rho}(\psi^{-1}\varphi(\cdot))\| |L_q(B)| + \|D_h\psi(\cdot) - D_h\varphi(\cdot)\| |L_q(B)|.$$

Наши основные результаты сформулированы в следующих двух утверждениях.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, – отображение класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $q \in [1, \infty)$, на группе Карно. Тогда для почти всех $p \in \Omega$ гомоморфизм $L(p) = \widetilde{\text{exp}} \circ D\varphi(p) \circ \text{exp}^{-1}$, где $D\varphi(p)$ – формальный дифференциал, является $\mathcal{P}$ -дифференциалом отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке $p \in \Omega$ в топологии пространства W_q^1 .

Теорема 1 в случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$ установлена в [9], и метод ее доказательства, полученный Ю. Г. Решетняком, основан на интегральных представлениях дифференцируемых функций. Приводимое ниже доказательство является новым и для евклидова случая, основано на других идеях и, по-видимому, более простое. По существу, оно базируется лишь на теореме о дифференцируемости липшицевых функций и неравенстве Пуанкаре, что, очевидно, позволяет распространить его и вытекающие из него результаты на более общие метрические структуры (например, пространства Карно–Каратеодори). Применение следующего результата в ряде случаев оказывается более удобным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, – отображение класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $q \in [1, \infty)$, на группе Карно. Тогда для почти всех $p \in \Omega$

$$\|\tilde{\rho}(z, \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t \cdot))) - \tilde{\rho}(z, L(\cdot))\| |W_q^1(B)| = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $z \in \mathbb{G}$ – произвольная точка, отличная от нуля, а $L = L(p) = \widetilde{\text{exp}} \circ D\varphi(p) \circ \text{exp}^{-1}$ – гомоморфизм групп из теоремы 1.

Доказательству теорем 1, 2 и следствий посвящен §1. Из этих теорем в качестве следствия получаем, в частности, что отображения класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $q > \nu - 1$, имеют $\mathcal{H}$ -дифференциал почти всюду ($\mathcal{H}$ -дифференцируемость определяется перед следствием 3), а квазимонотонные отображения класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ (отображения класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ при $q > \nu$) $\mathcal{P}$ -дифференцируемы в равномерной топологии. В §2 мы приводим теоремы о замене переменной для отображений класса Соболева на группах Карно и получаем условия, при которых отображение на группах Карно сохраняет ориентацию. Последний результат применяется в теории отображений с ограниченным искажением [7], [10], [11].

Наш подход базируется на теореме о $\mathcal{P}$ -дифференцируемости липшицевых отображений, первоначально исследованной в работе [2] (см. также [4], [8], где приведены и другие результаты, относящиеся к этому вопросу).

Напомним, что отображение $\varphi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, где E – произвольное измеримое множество в $\mathbb{G}$, называется *липшицевым* на E ($\varphi \in \text{Lip } E$), если существует постоянная M такая, что $\tilde{\rho}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq M\rho(x, y)$ для всех $x, y \in E$. *Постоянной Липшица* отображения φ называется величина

$$\text{Lip } \varphi = \sup \left\{ \frac{\tilde{\rho}(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x, y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}.$$

Если в точке $x \in \mathbb{G}$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|B(x, r) \cap E|}{|B(x, r)|},$$

то он называется *плотностью* множества E в точке x . Известно [1], что плотность измеримого множества E равна единице почти в каждой точке $x \in E$ и нулю почти в каждой точке дополнения к E .

Пусть E – измеримое множество, плотность множества E в точке a равна единице и $\varphi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – некоторое отображение. Контактный гомоморфизм групп Карно $L: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ называется *$\mathcal{P}$ -дифференциалом* отображения φ в точке a на множестве E , если

$$\tilde{\rho}(L(a^{-1}x)^{-1}\varphi(a)^{-1}\varphi(x)) = o(\rho(a^{-1}x)) \quad \text{при } x \rightarrow a, \quad x \in E.$$

Далее $\mathcal{P}$ -дифференциал L в точке a обозначаем символом $D\varphi(a)$.

Гомоморфизм L , участвующий в определении $\mathcal{P}$ -дифференцируемости, определяется единственным образом. Понятие $\mathcal{P}$ -дифференцируемости в том случае, когда a – внутренняя точка множества E , введено в [2], где, в частности, доказано, что липшицево отображение $\varphi: D \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, заданное на открытом множестве D группы $\mathbb{G}$, $\mathcal{P}$ -дифференцируемо почти всюду в D .

ЛЕММА 1 [2], [4], [8]. Пусть $E \subset \mathbb{G}$ – измеримое множество и отображение $\varphi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ липшицево. Тогда $\mathcal{P}$ -дифференциал отображения φ существует и единствен почти во всех точках множества E . Соответствующий ему гомоморфизм алгебр Ли переводит базисные векторы $X_1, \dots, X_n$ горизонтального подпространства V_1 в векторы $\{X_i\varphi \in \tilde{V}_1\}$, $i = 1, \dots, n$.

Сформулированная выше лемма служит также основой для доказательства теоремы типа Степанова для отображений групп Карно [2], [4], [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 1 доказана в [2] для отображений групп Карно, определенных на открытых множествах. Для произвольного измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$ утверждение получено в [4; лемма 3], где схематично показано, как следует модифицировать аргументы П. Пансю, чтобы получить доказательство в новой ситуации (см. детали в [8; §2]). В работе [8] получено также доказательство теоремы об аппроксимативной $\mathcal{P}$ -дифференцируемости отображений групп Карно, обобщающей результат [3; теорема 3.1.4], из которой в качестве следствия получаем, в частности, лемму 1. Это дает новый способ ее доказательства. Используем следующее соглашение: $\delta_s u = \delta_{|s|} u^{-1}$, если $s < 0$. Его удобство состоит в том, что тогда можно записать

$$\begin{aligned} \exp X_i \varphi(x) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \exp t X_i \in E}} \tilde{\delta}_t^{-1} (\varphi(x)^{-1} \varphi(x \exp t X_i)) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \delta_t u_i \in E}} \tilde{\delta}_t^{-1} (\varphi(x)^{-1} \varphi(x \delta_t u_i)), \end{aligned}$$

где $u_i = \exp X_i$, $i = 1, \dots, n$. В лемме 2 из [4] описано липшицево продолжение $\tilde{\varphi}$ отображения φ вдоль векторного поля X_i такое, что $\tilde{\varphi}$ определено на $E \exp tX_i$, $t \in \mathbb{R}$, и

$$\begin{aligned} D_{u_i} \varphi(x) &= \exp X_i \varphi(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \delta_t u_i \in E}} \tilde{\delta}_t^{-1} (\varphi(x)^{-1} \varphi(x \delta_t u_i)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\delta}_t^{-1} (\tilde{\varphi}(x)^{-1} \tilde{\varphi}(x \delta_t u_i)) \end{aligned}$$

для почти всех $x \in E$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Из доказательства $\mathcal{P}$ -дифференцируемости, приведенного в [8], вытекает, что отображение $\mathcal{P}$ -дифференцируемо во всех точках измеримого множества $F \subset E$, $|E| < \infty$, такого, что $|E \setminus F| < \varepsilon$ и на котором выполняются следующие свойства:

- (а) разностное отношение $\tilde{\delta}_t^{-1} (\tilde{\varphi}(x)^{-1} \tilde{\varphi}(x \delta_t u_i))$ сходится к $D_{u_i} \varphi(x)$ равномерно по $x \in F$, $i = 1, \dots, n$;
- (б) отображение $x \mapsto D_{u_i} \varphi(x)$ непрерывно на F , $i = 1, \dots, n$;
- (с) если $\psi: E' \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — другое липшицево отображение измеримого множества $E' \supset F$, совпадающее с φ на F , $\varphi|_F = \psi|_F$, то отображение ψ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо во всех точках множества F и $\mathcal{P}$ -дифференциалы отображений φ и ψ совпадают на F .

Упомянутое множество F обладает следующими свойствами: каждая точка F является точкой плотности 1 и точкой равномерной линейной плотности множества E вдоль $\exp X_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Напомним, что $x \in E \subset \mathbb{G}$ представляет собой точку линейной плотности множества E вдоль $z \in \exp V_1$, $\rho(z) = 1$, если $\lim_{t \rightarrow 0} |\{s \in [-t, t] : x \delta_s z \notin E\}| / (2t) = 0$ (если этот предел равномерен по $x \in F \subset E$, то эти точки называются точками равномерной линейной плотности множества E вдоль u_i). Получение свойства равномерной линейной плотности описано в [3; с. 214], где для любых $x \in E$ и $r > 0$ следует положить $T(x, r, j) = \{s : |s| < r \text{ и } x \exp X_j \notin E\}$ и для любых $m, p \in \mathbb{N}$ определить измеримое множество $B(j, m, p) = \{x \in E : H^1 T(x, r, j) \leq r/m \text{ для } 0 < r < 1/p\}$ (детали этой конструкции на группах Карно см. в [8]).

§ 1. $\mathcal{P}$ -дифференцируемость отображений классов Соболева на группах Карно

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся приводимые ниже результаты. Между двумя произвольными отображениями φ и ψ , определенными на непустом множестве $M \subset \mathbb{G}$ (измеримом множестве $\Sigma \subset \mathbb{G}$ положительной меры) и принимающими значения в группе $\tilde{\mathbb{G}}$, определим расстояние

$$\begin{aligned} |(\varphi, \psi) | L_\infty(M)| &= \sup_{x \in M} \tilde{\rho}(\varphi(x), \psi(x)) \\ (|(\varphi, \psi) | L_q(\Sigma)| &= \|\tilde{\rho}(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)) | L_q(\Sigma)\|), \end{aligned}$$

$q \in [1, \infty)$. Сформулируем здесь в нужном нам виде следующие свойства, фактически доказанные в [6].

СВОЙСТВО 1 [6; лемма 2.1]. *Последовательность непрерывных ограниченных отображений $\varphi_k: M \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ сходится к непрерывному отображению $\varphi: M \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в метрике $L_\infty(M)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{x \in M} |\tilde{\rho}(z, \varphi_k(x)) - \tilde{\rho}(z, \varphi(x))|$$

сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для любого z из некоторого счетного всюду плотного множества $Z \subset \tilde{\mathbb{G}}$.

СВОЙСТВО 2 [6; лемма 2.3]. Последовательность отображений $\varphi_k: \Sigma \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ сходится к отображению $\varphi: \Sigma \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в метрике $L_q(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда

$$\|\tilde{\rho}(z, \varphi_k(\cdot)) - \tilde{\rho}(z, \varphi(\cdot))\|_{L_q(\Sigma)}$$

сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для любого z из некоторого счетного всюду плотного множества $Z \subset \tilde{\mathbb{G}}$.

Следующая лемма доказана в [4], [8]. Мы приведем здесь другое доказательство этого утверждения, более простое и краткое.

ЛЕММА 2. Пусть отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$ – ограниченная область, принадлежит классу $W_q^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $q \geq 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $A \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \setminus A| < \varepsilon$ и сужение $\varphi|_A$ принадлежит $\text{Lip } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и область $D \Subset \Omega$ (т.е. замыкание $\overline{D}$ компактно и $\overline{D} \subset \Omega$) такую, что $|\Omega \setminus D| < \varepsilon/2$. Для любой функции $f \in W_q^1(\Omega)$, $q > 1$, из результатов работы [5; теоремы 1, 3] вытекает существование множества $S \subset D$ нулевой меры и неотрицательной функции $g \in L_q(D)$ таких, что выполняется следующее поточечное неравенство:

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)(g(x) + g(y))$$

для всех точек $x, y \in D \setminus S$. Отметим, что в качестве g можно взять произведение максимальной функции от $|\nabla \mathcal{L} f|$ на некоторую постоянную, зависящую от D (предполагается, что $|\nabla \mathcal{L} f|$ продолжена нулем на дополнении к Ω). Если $q = 1$, то приведенная поточечная оценка верна также для $f \in W_1^1(\Omega)$ при условии, что неотрицательная функция g удовлетворяет условию $|\{x \in D : g(x) \geq k\}| \leq Ck^{-1}$ для всякого $k > 0$.

Фиксируем $z \in \tilde{\mathbb{G}}$ и рассмотрим функцию $[\varphi]_z(x) = \tilde{d}(z, \varphi(x))$, где $\tilde{d}$ – метрика Карно–Каратеодори на группе $\tilde{\mathbb{G}}$. Заметим, что поскольку область Ω ограничена, то $[\varphi]_z \in W_q^1(\Omega)$, так как

$$|\nabla \mathcal{L} [\varphi]_z|(x) \leq \gamma |D_h \varphi(x)| \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Постоянная γ не зависит от выбора точки z . Таким образом, подставляя в

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)(g(x) + g(y))$$

функцию $[\varphi]_z$ вместо f , получаем неравенство

$$|[\varphi]_z(x) - [\varphi]_z(y)| \leq \rho(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (3)$$

для всех точек $x, y \in D \setminus S_z$, где S_z – некоторое множество нулевой меры. Правая часть в (3) не зависит от z . Более того, по известным свойствам максимальной функции g принадлежит L_q при $q > 1$ и $|\{x \in D : g(x) \geq k\}| \leq Ck^{-1}$ при $q = 1$ для всякого $k > 0$.

Рассмотрим произвольное счетное всюду плотное множество $Z \subset \varphi(D)$ и положим

$$S = \bigcup_{z \in Z} S_z.$$

Тогда $|S| = 0$. Пусть $A = \{x \in D \setminus S : g(x) \leq k\}$, где k подбирается настолько большим, чтобы $|D \setminus A| < \varepsilon/2$. Тогда $|\Omega \setminus A| < \varepsilon$ и $|\tilde{d}(z, \varphi(x)) - \tilde{d}(z, \varphi(y))| \leq 2k\rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in A$ и $z \in Z$. Выбирая произвольную

последовательность точек $z_l \rightarrow \varphi(x)$, получаем неравенство

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq 2k\rho(x, y)$$

для всех точек $x, y \in A$. Таким образом, сужение $\varphi|_A$ принадлежит $\text{Lip } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы рассмотрим два случая в зависимости от того, является область значений коммутативной группой или нет.

1. В случае $\tilde{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$ доказательство значительно упрощается в деталях. Обозначим отображение $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ символом f . Определение $\mathcal{P}$ -дифференцируемости принимает следующий вид. Гомоморфизм $L: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ группы Карно называется $\mathcal{P}$ -дифференциалом функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $p \in \Omega$ в топологии пространства W_q^1 , если

$$\left\| \frac{f(p\delta_t \cdot) - f(p)}{t} - L(p)(\cdot) \right\|_{W_q^1(B)} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (4)$$

где гомоморфизм $L(p)$ равен $\nabla_{\mathcal{L}} f(p) \circ \exp^{-1}$, $\nabla_{\mathcal{L}} f(p)$ — линейная форма, определяемая субградиентом. Произведем в (4) замену $\delta_t(x) = y$ и положим $B_t = \delta_t(B)$. Тогда доказательство (4) сводится к проверке следующих соотношений:

$$\left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |f(py) - f(p) - L(p)(y)|^q dy \right)^{1/q} = o(t) \quad (5)$$

и

$$\left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |\nabla_{\mathcal{L}} f(py) - \nabla_{\mathcal{L}} f(p)|^q dy \right)^{1/q} = o(1) \quad (6)$$

для почти всех $p \in \Omega$. Соотношение (6) является следствием теоремы Лебега о дифференцировании интеграла [1].

Докажем (5). Поскольку результат локальный, область Ω можно считать ограниченной. В силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $F \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$ и $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица: существует постоянная C такая, что $|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)$ для всех точек $x, y \in F$. Продолжим функцию $f|_F$ на $\mathbb{G}$ с сохранением условия липшицевости. Тогда $f = g + h$, где $f|_F = g|_F$, $g \in W_{\infty, \text{loc}}^1$, $h|_F = 0$. Функция g удовлетворяет условию Липшица и $\mathcal{P}$ -дифференцируема на $\mathbb{G}$ почти всюду по лемме 1. Поэтому для почти всех $p \in F$ функция g $\mathcal{P}$ -дифференцируема в топологии пространства W_q^1 . Отсюда вытекает справедливость (5) для функции g вместо f в почти всех точках множества F .

Далее, поскольку $\nabla_{\mathcal{L}} g(x) = \nabla_{\mathcal{L}} f(x)$ для почти всех $x \in F$, субградиент функции h равен нулю почти всюду на F . Докажем, что дифференциал функции $h \in W_q^1(\Omega)$ равен нулю для почти всех точек F в топологии пространства Соболева. Соотношение (6) для функции h состоит в том, что

$$\left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |\nabla_{\mathcal{L}} h(py)|^q dy \right)^{1/q} = o(1) \quad (7)$$

почти всюду на множестве F , что верно по уже упомянутой теореме Лебега. Аналог (5) для h выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |h(py)|^q dy \right)^{1/q} = o(t). \quad (8)$$

Чтобы его установить, нам потребуется следующее утверждение, доказательство которого приводится ниже.

ЛЕММА 3. Пусть F – измеримое подмножество шара $B_t = B(0, t)$ положительной меры. Для всех $u \in W_q^1(B_t)$, $1 \leq q < \infty$, $u|_F = 0$, выполняется неравенство

$$\left(\int_{B_t} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{Ct}{(t^{-\nu}|F|)^{1/q}} \left(\int_{B_t} |\nabla \mathcal{L} u|^q dx \right)^{1/q}. \quad (9)$$

Пусть p – точка плотности 1 множества F , в которой выполняется (7). Пусть t_0 такое число, что

$$\frac{|F \cap pB_t|}{|pB_t|} \geq \frac{1}{2}$$

для всех t , $0 < t < t_0$. Тогда из (7) и (9) вытекает (8):

$$\left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |h(py)|^q dy \right)^{1/q} \leq 2^{1/q} Ct \left(\frac{1}{t^\nu} \int_{B_t} |\nabla \mathcal{L} h(py)|^q dy \right)^{1/q} = o(t).$$

Таким образом, для почти всех $p \in F$ справедливо (4). Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема 1 в этом случае доказана.

Доказательство теоремы 1 в случае $\tilde{\mathbb{G}} = \mathbb{R}^n$ получается применением предыдущего случая к каждой координатной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Достаточно доказать лемму при $t = 1$, а затем воспользоваться преобразованием растяжения δ_t . Обозначим $B = B_1$. Рассмотрим произвольную функцию $u \in W_q^1(B)$, $u|_F = 0$, где $F \subset B$ – множество положительной меры, и $M = \|u\|_{L_q(B)} > 0$. Пусть для определенности $u_B = \int_B u dx \geq 0$ (иначе вместо u следует рассмотреть функцию $-u$). Тогда

$$|F| \leq \|1 - M^{-1}u\|_{W_q^1(B)}^q = M^{-q} \|\nabla \mathcal{L} u\|_{L_q(B)}^q + \|1 - M^{-1}u\|_{L_q(B)}^q.$$

Отсюда получаем

$$M^q |F| \leq \|\nabla \mathcal{L} u\|_{L_q(B)}^q + \|M - u\|_{L_q(B)}^q. \quad (10)$$

Заметим, что $\|M - u_B\| = \|\|u\|_{L_q(B)} - \|u_B\|_{L_q(B)}\| \leq \|u - u_B\|_{L_q(B)}$. Следовательно, применяя неравенство Пуанкаре [12]–[14], имеем

$$\begin{aligned} \|M - u\|_{L_q(B)} &\leq \|M - u_B\|_{L_q(B)} + \|u - u_B\|_{L_q(B)} \\ &\leq 2\|u - u_B\|_{L_q(B)} \leq C_0 \|\nabla \mathcal{L} u\|_{L_q(B)}, \end{aligned}$$

где C_0 – постоянная, не зависящая от u . Отсюда и из (10) вытекает неравенство

$$\|u\|_{L_q(B)} \leq \frac{C}{|F|^{1/q}} \|\nabla \mathcal{L} u\|_{L_q(B)},$$

где $C = (1 + C_0^q)^{1/q}$. Лемма доказана.

2. Случай некоммукативной группы $\tilde{\mathbb{G}}$ требует более деликатных рассуждений. Обозначим $L(p)$ символом L . Проверка сходимости (1) сводится к доказательству следующих соотношений:

$$\|\tilde{\rho}(L(\cdot)^{-1} \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot)))\|_{L_q(B)} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad (11)$$

и

$$\left(\int_B |D_h \varphi(p \delta_t y) - D_h \varphi(p)|^q dy \right)^{1/q} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad (12)$$

для почти всех $p \in \Omega$. Соотношение (12) является следствием теоремы Лебега о дифференцировании интеграла [1].

Поскольку результат локальный, область Ω можно считать ограниченной. В силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \setminus E| < \varepsilon/2$ и $\varphi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ удовлетворяет условию Липшица: существует постоянная C_1 такая, что $\tilde{d}(\varphi(p), \varphi(q)) \leq C_1 \rho(p, q)$ для всех точек $p, q \in E$. По замечанию 1 существует измеримое множество $F \subset E$, $|E \setminus F| < \varepsilon/2$, на котором выполняются свойства (а), (б) и (с) из этого замечания, и потому отображение $\varphi: F \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо в каждой точке множества F . Фиксируем точку $p \in F$ такую, что в точке p выполняется (12). Докажем, что в этой же точке будет выполняться и (11).

В соответствии со свойством 2 для этого достаточно проверить, что

$$\left(\int_B |\tilde{\rho}(z, \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t y))) - \tilde{\rho}(z, L(y))|^q dy \right)^{1/q} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad (13)$$

для всех точек z некоторого счетного всюду плотного множества $Z \subset \tilde{\mathbb{G}}$, где L — $\mathcal{P}$ -дифференциал отображения $\varphi: F \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке p . Покажем справедливость (13) для любой точки $z \neq 0$. Фиксируем такую точку. Поскольку отображение $\varphi|_F$ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо в точке p , то немедленно получаем сходимость (13) с областью интегрирования $D_t = \tilde{\delta}_t^{-1}(B_t \cap p^{-1}F)$, где $B_t = \delta_t(B)$, вместо B . Докажем, что сходимость (13) имеет место также и для области интегрирования $B \setminus D_t$ вместо B .

Так как функция $\tilde{\mathbb{G}} \ni x \mapsto \tilde{\rho}(z, x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\tilde{\mathbb{G}}$, то функция $f_t(\cdot) = \tilde{\rho}(z, \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot))) - \tilde{\rho}(z, L(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица на множестве D_t , причем постоянная Липшица ограничена константой, не зависящей от t . Пусть $f_t(x) = g_t(x) + h_t(x)$, $x \in B$, где g_t — липшицево продолжение липшицевой функции $f_t|_{D_t}$ на шар B , постоянная Липшица которой ограничена постоянной, не зависящей от t . Поскольку p — точка плотности 1 множества F , то $\lim_{t \rightarrow 0} |B \setminus D_t| = 0$. Отсюда вытекает, что $\int_{B \setminus D_t} |g_t(y)|^q dy \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, ибо g_t ограничена постоянной, не зависящей от t . Остается проверить, что $\int_B |h_t(y)|^q dy \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Основу этой проверки составляет соотношение

$$\left(\int_B |(\nabla \mathcal{L} f_t)(y)|^q dy \right)^{1/q} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (14)$$

к доказательству которого мы переходим.

Заметим еще, что $f_t(\cdot)$ принадлежит классу $W_q^1(B)$ в силу предложения 1. Далее, поскольку функция $\tilde{\rho}(z, \cdot)$ непрерывно дифференцируема в точках, отличных от z , полагая $\psi_t(y) = \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t y))$, находим

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{L} f_t)(y) &= \nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, \psi_t(y)) (D_h \varphi(p \delta_t y) - D_h \varphi(p)) \\ &\quad + (\nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, \psi_t(y)) - \nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, L(y))) D_h \varphi(p) \end{aligned}$$

для почти всех точек $y \in B$ (полагаем здесь $\nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, \psi_t(y)) = 0$, если $\psi_t(y) = z$, и учитываем $|L^{-1}(z)| = 0$). Так как горизонтальные производные функции $\tilde{\rho}(z, \cdot)$

ограничены, в силу (12) имеем сходимость к нулю при $t \rightarrow 0$ нормы в $L_q(B)$ первого слагаемого в правой части. Чтобы показать, что второе слагаемое также стремится к нулю в $L_q(B)$, заметим, что ввиду $\lim_{t \rightarrow 0} |B \setminus D_t| = 0$ верна сходимость $\chi_{D_t}(y)(\nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, \psi_t(y)) - \nabla \mathcal{L} \tilde{\rho}(z, L(y))) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ для всех $y \in B \setminus L^{-1}(z)$ (здесь $\chi_{D_t}(\cdot)$ — характеристическая функция множества D_t). Последняя дает возможность применить ко второму слагаемому теорему Лебега о мажорируемой сходимости, так как $|L^{-1}(z)| = 0$ и горизонтальные производные ограничены. Таким образом, соотношение (14) доказано.

Условие (с) замечания 1 позволяет заключить, что имеет место равенство $(\nabla \mathcal{L} f_t)(y) = (\nabla \mathcal{L} g_t)(y)$ для всех точек $y \in D_t \setminus L^{-1}(z)$. Поэтому (14) выполняется также и для функции g_t вместо f_t , так как горизонтальные производные функции g_t ограничены в B постоянной, не зависящей от t , и $|B \setminus D_t| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Таким образом, сходимость (14) справедлива также и для функции h_t вместо f_t , т.е.

$$\int_B |(\nabla \mathcal{L} h_t)(y)|^q dy = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Применим неравенство (9) с B вместо B_t , с D_t вместо F и с функцией h_t вместо u . Так как $h_t|_{D_t} \equiv 0$ и $|D_t| \rightarrow |B|$ при $t \rightarrow 0$, выводим:

$$\int_B |h_t(y)|^q dy \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\int_{B \setminus D_t} |f_t(y)|^q dy \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

и теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что сходимости (13) и (14) установлены для любой точки $z \neq 0$, что и доказывает теорему 2.

Следующие два утверждения обобщают на группы Карно известные теоремы Зигмунда–Кальдерона о дифференцируемости.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на группе $\mathbb{G}$ и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — отображение класса $W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $q > \nu$. Тогда для почти всех $p \in \Omega$ отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо и его $\mathcal{P}$ -дифференциалом является контактный гомоморфизм $L(p) = \exp \circ D\varphi(p) \circ \exp^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $p \in \Omega$, в которой верна сходимость (2). Умножая разностное отношение в норме (2) на срезку $\psi \in C_0^\infty(B)$, $\psi|_{B(0, 2^{-1})} \equiv 1$, и применяя теорему вложения $i: W_q^1(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{G})$ [15], получаем

$$\|\tilde{\rho}(z, \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot))) - \tilde{\rho}(z, L(\cdot))\|_{C(B(0, 2^{-1}))} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0$$

для любой точки $z \neq 0$. Отсюда и из свойства 1 выводим, что $\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot))$ сходится равномерно к $L(\cdot)$ на B при $t \rightarrow 0$. Таким образом, отображение φ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо в точке p .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ – область на группе $\mathbb{G}$ и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – отображение класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $1 < q < \nu$. Тогда для почти всех $p \in \Omega$ гомоморфизм $L(p) = \widetilde{\exp} \circ D\varphi(p) \circ \exp^{-1}$, где $D\varphi(p)$ – формальный дифференциал, является $\mathcal{P}$ -дифференциалом отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке $p \in \Omega$ в топологии пространства L_s , $s = \nu q / (\nu - q)$:

$$\|\tilde{\rho}(L(\cdot)^{-1} \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot))) \mid L_s(B)\| = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО отличается от предыдущего лишь тем, что вместо теоремы вложения $i: W_q^1(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{G})$ применяется теорема вложения $i: W_q^1(B) \rightarrow L_s$ из [15], а вместо свойства 1 – свойство 2.

Контактный гомоморфизм $L: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ групп Карно называется $\mathcal{K}$ -дифференциалом отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке $p \in \Omega$, если L есть аппроксимативный дифференциал отображения φ в точке p [8] и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\tilde{\rho}(L(\cdot)^{-1} \tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_t \cdot))) \mid C(S(0, 1))\| = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ – область на группе $\mathbb{G}$ и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – отображение класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $\nu - 1 < q \leq \nu$. Тогда для почти всех $p \in \Omega$ гомоморфизм $L(p) = \widetilde{\exp} \circ D\varphi(p) \circ \exp^{-1}$, где $D\varphi(p)$ – формальный дифференциал, является $\mathcal{K}$ -дифференциалом отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ в точке $p \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, приводимое ниже, уточняет детали доказательства соответствующего утверждения из [7; следствие 1]. Пусть $p \in \Omega$ – точка, в которой выполняется (2). Положим $\psi_h(y) = \delta_h^{-1}(\varphi(p)^{-1} \varphi(p \delta_h y))$, $L = L(y)$ и $r(p) = \text{dist}(p, \partial\Omega)$. Пусть еще $f_{z,h}(x) = \tilde{\rho}(z, \psi_h(x)) - \tilde{\rho}(z, L(x))$, $x \in B$, и $Z \subset \mathbb{G}$ – счетное всюду плотное множество, не содержащее 0. Фиксируем $z \in Z$. Поскольку

$$\int_B |f_{z,h}|^q(x) dx = \int_0^1 t^{\nu-1} \int_{S(0,1)} |f_{z,h}|^q(\delta_t y) d\sigma(y) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то найдется последовательность $h'_m \rightarrow 0$ такая, что

$$\int_{S(0,1)} |\tilde{\rho}(z, \psi_{h'_m}(\delta_t y)) - \tilde{\rho}(z, L(\delta_t y))|^q d\sigma(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

для почти всех $t \in [r(p)/4, r(p)/2]$ (здесь $d\sigma(y)$ – борелевская мера на сфере $S(0, 1)$, см. [1]). Применяя диагональный процесс, можно добиться того, что эта сходимость имеет место при всех $z \in Z$.

Из [5; теорема 2] имеем, что для почти всех $t \in [r(p)/4, r(p)/2]$ отображение $\psi_{h'_m}(\delta_t \cdot): S(0, 1) \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ непрерывно, $m \in \mathbb{N}$.

По теореме о максимальной функции справедливо неравенство

$$\int_{B(0, r(p)/2)} M_{\gamma r(p)}^q(|\nabla \mathcal{L} f_{z, h'_m}|)(x) dx \leq C \int_{B(0, r(p))} |\nabla \mathcal{L} f_{z, h'_m}|^q(x) dx,$$

где γ – фиксированное число, а $M_\delta(g)$ – максимальная функция:

$$M_\delta g(x) = \sup \left\{ |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |g(y)| dy : r \leq \delta \right\}.$$

Поскольку в силу (2) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, применяя диагональный процесс, можно добиться того, что при всех $z \in Z$

$$\int_{S(0,1)} M_{\gamma r(p)}^q(|\nabla \mathcal{L} f_{z, h'_m}|)(\delta_t y) d\sigma(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

для почти всех $t \in [r(p)/4, r(p)/2]$.

Фиксируем $t \in [r(p)/4, r(p)/2]$, для которого верны все вышеперечисленные свойства. Применяя теорему вложения из [5; теорема 2], имеем, что для любого $z \in Z$ семейство $\{f_{z, h'_m} : m \in \mathbb{N}\}$ обладает модулем непрерывности на сфере $S(0, 1)$. Отсюда вытекает, что семейство $\{\tilde{\rho}(z, \psi_{h'_m}(\delta_t y)) : m \in \mathbb{N}\}$ также обладает модулем непрерывности и, следовательно, равностепенно непрерывно на сфере $S(0, 1)$. Используя сходимости $\tilde{\rho}(z, \psi_{h'_m}(\delta_t y))$ к $\tilde{\rho}(z, L(\delta_t y))$ в $L_q(S(0, 1))$ при $m \rightarrow \infty$, выводим, что семейство функций $\tilde{\rho}(z, \psi_{h'_m}(\delta_t y))$ равномерно ограничено на сфере $S(0, 1)$. Отсюда получаем, что $\tilde{\rho}(z, \psi_{h'_m}(\delta_t y))$ сходится к $\tilde{\rho}(z, L(\delta_t y))$ равномерно на $S(0, 1)$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $z \in Z$. Из свойства 1 имеем теперь, что $\psi_{h'_m}(\delta_t y)$ сходится к $L(\delta_t y)$ равномерно на $S(0, 1)$ при $m \rightarrow \infty$. Тем самым последовательность $\psi_{h'_m}(y)$, $h_m = th'_m$, сходится равномерно к $L(y)$ на $S(0, 1)$ при $m \rightarrow \infty$. Следствие 3 доказано.

В следующем утверждении формулируется условие $\mathcal{P}$ -дифференцируемости монотонных функций. Свойствам монотонных функций и отображений на группах Карно посвящена статья [5], результаты которой существенно используются в этой работе. Напомним, что функция $f \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega)$, $p > \nu - 1$, называется (сферически) *монотонной*, если для любой точки $a \in \Omega$ существует число $r_a > 0$ такое, что для почти всех $r \in (0, r_a)$ шар $B(a, r)$ содержится в области Ω и на нем справедливы следующие неравенства:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in B(a, r)} f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in S(a, r)} f(x) \quad \text{и} \quad \operatorname{ess\,inf}_{x \in B(a, r)} f(x) \geq \operatorname{ess\,inf}_{x \in S(a, r)} f(x).$$

(Существенный экстремум в правых частях приведенных неравенств определяется относительно поверхностной меры на сфере $S(a, r)$.) Известно [5; теорема 4], что квазинепрерывный представитель монотонной функции класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega)$ непрерывен.

Непрерывное отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, называется *K-квазимонотонным*, $K \geq 1$ – постоянная величина, если колебание отображения на шаре $B(x, r) \Subset \Omega$ контролируется колебанием этого отображения на сфере $S(x, r)$, т.е.

$$\operatorname{diam}(\varphi(B(x, r))) \leq K \operatorname{diam}(\varphi(S(x, r))).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ – область на группе Карно и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – отображение класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, квазимонотонное на всякой компактной области $D \subset \Omega$. Тогда φ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо почти всюду в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – точка $\mathcal{P}$ -дифференцируемости отображения φ в топологии пространства Соболева $W_{\nu}^1(B)$. Кроме того, на всяком шаре $B(0, \tau)$, $\tau < 1$, семейство отображений $\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t \cdot))$ равностепенно непрерывно при достаточно малом t (в силу приводимой ниже оценки (18) это семейство имеет модуль непрерывности $C \ln^{-1/\nu} \frac{\gamma}{\rho(x, y)}$ (см. детали в [5]), где постоянная C (γ) зависит от нормы отображения φ (τ), и поэтому равномерно ограничено, так как $\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t 0)) = 0$). Отсюда выводим, что семейство $\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t \cdot))$ сходится равномерно на шаре B к гомоморфизму групп Ли.

Другое доказательство предложения 2 см. в [7; следствие 1], [8; следствие 4.1].

Непрерывное отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ называется *отображением с ограниченным искажением*, определенным на области Ω группы Карно, если φ открыто, дискретно, принадлежит классу $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ и формальный горизонтальный

дифференциал $D_h \varphi$ удовлетворяет условию $|D_h \varphi(x)|^\nu \leq K J(x, \varphi)$ для почти всех $x \in \Omega$. Если φ – гомеоморфизм, то отображение φ называется квазиконформным. Наименьшая постоянная K в этом определении называется коэффициентом искажения и обозначается символом $K(\varphi)$.

Из предложения 2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [5], [7]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ – область на группе Карно и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – отображение класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ с ограниченным искажением. Тогда φ $\mathcal{P}$ -дифференцируемо почти всюду в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что открытое отображение φ квазимоноotonно на всякой компактной части области Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Модуль непрерывности семейства $\tilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(p)^{-1}\varphi(p\delta_t \cdot))$, где φ – отображение с ограниченным искажением, другим способом найден в работе [16].

§ 2. Формулы замены переменной на группе Карно и их применения

Утверждение следующей теоремы в случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ и $p = n$ доказано в [17]. Более простое и краткое доказательство этого утверждения в случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ и $p = n$ получено в [5]. Здесь на общих группах Карно мы приведем новое доказательство, обобщающее рассуждения работы [5]. Напомним, что отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{G}$ называется *абсолютно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $E \subset D$, мера которого меньше δ , образ $\varphi(E)$ измерим и $|\varphi(E)| \leq \varepsilon$. Очевидно, что каждое абсолютно непрерывное отображение обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина. Напомним, что отображение обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, если образ всякого множества нулевой меры имеет нулевую меру.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ – непрерывное K -квазимонотонное отображение класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ или непрерывное отображение класса $W_{p, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, $p > \nu$, области $\Omega \subset \mathbb{G}$. Тогда отображение φ абсолютно непрерывно на всякой компактной части $D, \overline{D} \subset \Omega$. В частности, $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина. Более того, при $p > \nu$ справедлива оценка

$$|\varphi(E)| \leq \gamma |E|^{1-\nu/p} \left(\int_E |D_h \varphi|^p(y) dy \right)^{\nu/p}$$

для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ (постоянная γ зависит лишь от группы $\mathbb{G}$ и p).

Для доказательства нам потребуется следующее утверждение, представляющее независимый интерес.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{G}$ – непрерывное K -квазимонотонное отображение класса $W_\nu^1(\tilde{\Omega})$. Тогда для любого $a \in \Omega$ и всех $r \in (0, \tilde{\gamma} \text{dist}(a, \partial \tilde{\Omega}))$, где $\tilde{\gamma} \leq 1/2$ не зависит от точки a , диаметр $\varphi(S(a, r))$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$(\text{diam}(\varphi(S(a, r))))^\nu \leq K^\nu C \int_{B(a, 2r)} M^\nu(|D_h \varphi|)(y) dy, \quad (15)$$

где постоянная C не зависит от выбора отображения и радиуса r , а $M(g)$ – максимальная функция $g = |D_h \varphi|$ (полагаем $g|_{\mathbb{G} \setminus \tilde{\Omega}} \equiv 0$).

Доказательство леммы основывается на оценке колебания функции $f \in W_\nu^1(\tilde{\Omega})$ на сфере группы Карно, полученной в [5; следствие 1]: произвольную функцию $f \in W_\nu^1(\tilde{\Omega})$ можно изменить на множестве нулевой меры так, что для любой точки $a \in \tilde{\Omega}$ и почти всех $r \in (0, \tilde{\gamma} \operatorname{dist}(a, \partial\tilde{\Omega}))$ след функции f на сфере $S(a, r) \subset \tilde{\Omega}$ непрерывен и для ее колебания на сфере $S(a, r)$ справедлива оценка

$$\left(\operatorname{osc}_{S(a, r)} f \right)^\nu \leq C r \int_{S(a, r)} M_{\gamma r}^\nu(|\nabla \mathcal{L} f|)(y) d\sigma_r(y), \quad (16)$$

где $C, \tilde{\gamma}, \gamma$ – некоторые постоянные, не зависящие от выбора функции f и радиуса r , σ_r – борелевская мера на $S(a, r)$, а $M_\delta(g)$ – максимальная функция. Оценка (16) выполняется, в частности, на тех сферах, где $f \in L_\nu(S(a, r))$ и $M_{\gamma r}^\nu(|\nabla \mathcal{L} f|) \in L_\nu(S(a, r))$.

Применим этот результат для оценки колебания отображения $\varphi \in W_\nu^1(\tilde{\Omega})$. Очевидно, функция $[\varphi]_z(x) = d(z, \varphi(x))$, где $z \in \mathbb{G}$, удовлетворяет условиям сформулированного утверждения. Учитывая неравенство $|\nabla \mathcal{L} [\varphi]_z|(x) \leq C |D_h \varphi|$ почти всюду в $\tilde{\Omega}$, в котором правая часть не зависит от z , и полагая в (16) $f = [\varphi]_z$, получаем

$$\left(\operatorname{osc}_{S(a, r)} [\varphi]_z \right)^\nu \leq C_1 r \int_{S(a, r)} M_{\gamma r}^\nu(|D_h \varphi|)(y) d\sigma_r(y). \quad (17)$$

Так как правая часть не зависит от z , отсюда можно получить оценку для колебания отображения на сфере: если $\operatorname{diam}(\varphi(S(a, r))) = d(\varphi(x), \varphi(y))$, $x, y \in S(a, r)$, то, полагая $z = x$, очевидно, имеем $\operatorname{diam}(\varphi(S(a, r))) = \operatorname{osc}_{S(a, r)} [\varphi]_z$. Тогда из (17) вытекает, что

$$(\operatorname{diam}(\varphi(S(a, r))))^\nu \leq C_1 r \int_{S(a, r)} M_{\gamma r}^\nu(|D_h \varphi|)(y) d\sigma_r(y). \quad (18)$$

Если $2r \in (0, \tilde{\gamma} \operatorname{dist}(a, \partial\tilde{\Omega}))$, то с учетом оценок

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{diam}(\varphi(S(a, r)))^\nu}{2r} &\leq \frac{\operatorname{diam}(\varphi(B(a, r)))^\nu}{2r} \leq \frac{\operatorname{diam}(\varphi(B(a, t)))^\nu}{2r} \\ &\leq K^\nu \frac{\operatorname{diam}(\varphi(S(a, t)))^\nu}{t} \leq K^\nu C_1 \int_{S(a, t)} M_{\gamma t}^\nu(|D_h \varphi|)(y) d\sigma_t(y) \end{aligned}$$

для почти всех $t \in (r, 2r)$ получаем (15) интегрированием крайних членов от r до $2r$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $U \Subset \Omega$ – компактно вложенное открытое множество. Как известно, существует набор шаров $B(x_i, r_i) \subset U$ такой, что

- 1) $U \subset \bigcup_i B(x_i, r_i)$,
- 2) $B(x_i, 2r_i) \subset U$ и $\sum_i \chi_{B(x_i, 2r_i)}(x) \leq M$, где число M не зависит ни от выбора множества U , ни от выбора точки $x \in U$.

Сформулированным свойствам удовлетворяет, например, набор шаров из разбиения Уитни открытого множества U [1].

1. В случае $p = \nu$ фиксируем области D и $\tilde{\Omega}$ так, чтобы $U \subset D \Subset \tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Заметим также, что шары можно выбрать такими, что радиус r_i всякого шара $B(x_i, r_i)$ из вышеописанного набора не превосходит $\tilde{\gamma} \operatorname{dist}(D, \partial\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\gamma}$ — постоянная из леммы 4. Тогда неравенство (15) применимо на каждом шаре $B(x_i, r_i)$, $x_i \in D$. Следовательно, диаметр образа $\varphi(S(x_i, r_i))$ удовлетворяет соотношению

$$(\operatorname{diam}(\varphi(S(x_i, r_i))))^\nu \leq K^\nu C \int_{B(x_i, 2r_i)} M^\nu(|D_h \varphi|)(y) dy. \quad (19)$$

Поскольку

$$|\varphi(B(x_i, r_i))|^* \leq (\operatorname{diam} \varphi(B(x_i, r_i)))^\nu \leq K^\nu (\operatorname{diam} \varphi(S(x_i, r_i)))^\nu$$

для каждого шара $\varphi(B(x_i, r_i))$, то, применяя (19), окончательно приходим к оценкам

$$|\varphi(U)|^* \leq \sum_i |\varphi(B(x_i, r_i))|^* \leq K^{2\nu} M C \int_U M^\nu(|D_h \varphi|)(y) dy$$

(здесь $|\varphi(U)|^*$ и $|\varphi(B(x_i, r_i))|^*$ — внешние меры множеств $\varphi(U)$ и $\varphi(B(x_i, r_i))$ соответственно). Так как мера множества U может быть выбрана сколь угодно малой, мера множества $\varphi(E)$ равна нулю для любого множества $E \subset D$ нулевой меры. Следовательно, образ $\varphi(A)$ измерим, если множество A измеримо. В силу произвольности множества $U \subset D$ в последней оценке мы получаем также абсолютную непрерывность отображения φ на всякой компактной части области определения.

2. В случае $p > \nu$ доказательство основано на изложенной схеме в его геометрической части и обобщает аналитические выкладки из [18; лемма 8.1]. Вместо неравенства (19) мы применим другое соотношение. Чтобы его получить, воспользуемся известной (см. [5; теорема 3], [19]) оценкой: если функция $f \in W_p^1(B(x, 2r))$, $p > \nu$, то

$$|f(x) - f(y)| \leq C \rho(x, y)^{1-\nu/p} \left(\int_{B(x, 2r)} |\nabla \mathcal{L} f|^p dx \right)^{1/p}$$

для всех точек $x, y \in B(x, r)$ (постоянная C зависит лишь от группы $\mathbb{G}$ и показателя суммируемости p). Полагая в этом неравенстве $f(y) = [\varphi]_{\varphi(x)}(y) = \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y))$, для шара $B(x, 2r) \subset D$ получаем

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C \rho(x, y)^{1-\nu/p} \left(\int_{B(x, 2r)} |D_h \varphi|^p dx \right)^{1/p}, \quad y \in B(x, r).$$

Отсюда вместо (19) имеем

$$(\operatorname{diam}(\varphi(B(x_i, r_i))))^\nu \leq C_1 |B(x_i, r_i)|^{1-\nu/p} \left(\int_{B(x_i, 2r_i)} |D_h \varphi|^p(y) dy \right)^{\nu/p},$$

где постоянная C_1 зависит лишь от группы $\mathbb{G}$ и p .

Если $\{B(x_i, r_i)\}$ — последовательность шаров, выбранная по открытому множеству $U \subset \Omega$, то

$$\begin{aligned} |\varphi(U)|^* &\leq \sum_i |\varphi(B(x_i, r_i))|^* \leq \sum_i (\operatorname{diam}(\varphi(B(x_i, r_i))))^\nu \\ &\leq C_1 \sum_i |B(x_i, r_i)|^{1-\nu/p} \left(\int_{B(x_i, 2r_i)} |D_h \varphi|^p(y) dy \right)^{\nu/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left(\sum_i |B(x_i, r_i)| \right)^{1-\nu/p} \left(\sum_i \int_{B(x_i, 2r_i)} |D_h \varphi|^p(y) dy \right)^{\nu/p} \\
&\leq C_2 |U|^{1-\nu/p} \left(\int_U |D_h \varphi|^p(y) dy \right)^{\nu/p},
\end{aligned}$$

где постоянная C_2 зависит лишь от группы $\mathbb{G}$ и p . Отсюда вытекают абсолютная непрерывность отображения φ , его измеримость и оценка теоремы 3 для произвольного измеримого множества $E \subset \Omega$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для отображения $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ — непрерывное отображение класса $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, $p > \nu$;
- 2) $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ — квазимонотонное отображение класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$;
- 3) $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ — непрерывное отображение класса $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, $\nu-1 < q \leq \nu$, якобиан $J(x, \varphi)$ которого локально интегрируем в Ω при $\nu-1 < q < \nu$ и которое обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина.

Тогда для любой компактной области $D \Subset \Omega$ такой, что $|\varphi(\partial D)| = 0$ (любого измеримого множества $A \subset \Omega$), и любой измеримой функции u функция $y \mapsto u(y)\mu(y, \varphi, D)$ ($y \mapsto u(y)N(y, \varphi, A)$) интегрируема в $\mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда функция $(u \circ \varphi)(x)J(x, \varphi)$ ($(u \circ \varphi)(x)|J(x, \varphi)|$) интегрируема в D (в A), и при этом справедливы равенства

$$\int_D (u \circ \varphi)(x)J(x, \varphi) dx = \int_{\mathbb{G}} u(y)\mu(y, \varphi, D) dy \quad (20)$$

и

$$\int_A (u \circ \varphi)(x)|J(x, \varphi)| dx = \int_{\mathbb{G}} u(y)N(y, \varphi, A) dy. \quad (21)$$

(Здесь $N(y, \varphi, A) = \#\{x \in \varphi^{-1}(y) \cap A\}$ — функция кратности.)

Равенство (20) вытекает из формулы замены переменной в интеграле Лебега [4; теорема 11], [8; §§ 6, 7]. Заметим лишь, что $\mathcal{N}$ -свойство рассматриваемых в теореме отображений на группе Карно при $p \geq \nu$ доказано в теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В формулировке теоремы 11 из [4] пропущено $\mathcal{N}$ -свойство Лузина. В [8; теорема 6.2] и [11] формула теоремы 11 из [4] модифицирована и для отображений, не обладающих $\mathcal{N}$ -свойством Лузина.

Напомним, что непрерывное отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ сохраняет ориентацию, если степень отображения $\mu(y, \varphi, D)$ положительна для всякой компактно вложенной подобласти $D \Subset \Omega$ и любой точки $y \in \varphi(D) \setminus \varphi(\partial D)$.

Теорема, формулируемая ниже, применяется при изучении топологических свойств отображений с ограниченным (интегральным) искажением [11].

ТЕОРЕМА 5. Пусть непостоянное непрерывное отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ на группе Карно, обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина или является квазимонотонным, а также имеет конечное искажение, т.е. из условия $D_h \varphi(x) \neq 0$ вытекает, что $J(x, \varphi) > 0$ почти всюду. Тогда отображение φ сохраняет ориентацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $y \in \varphi(D) \setminus \varphi(\partial D)$ и компоненту связности V открытого множества $\mathbb{G} \setminus \varphi(\partial D)$, содержащую точку y . Не может быть такого, чтобы $J(x, \varphi) = 0$ почти всюду на $\varphi^{-1}(V)$, так как в противном случае частные производные отображения φ равны нулю на $\varphi^{-1}(V)$ и поэтому множество $\varphi(V)$ не более чем счетно, чего, очевидно, быть не может.

Подставим в формулу (20) характеристическую функцию $\xi_A(z)$ компактного множества $A \subset V$ положительной меры такого, что $|\varphi^{-1}(A)| > 0$. Поскольку в силу формулы (21) $|\{x \in \varphi^{-1}(A) \cap D : J(x, \varphi) > 0\}| > 0$, то

$$0 < \int_{\varphi^{-1}(A) \cap D} J(x, \varphi) dx = \int_A \mu(y, \varphi, D) dz \leq \mu(y, \varphi, D)|A|.$$

Отсюда вытекает, что степень $\mu(y, \varphi, D)$ — положительная функция точки y .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит классу Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда для почти всех точек $x \in \Omega$ определен полином

$$P_x(X) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} X^\alpha.$$

В [9] Ю. Г. Решетняк доказал, что

$$\|f(x + tX) - P_x(tX) \mid W_p^l(B(0, 1))\| = o(t^l) \quad (22)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Покажем, как с помощью методов настоящей работы получить новое доказательство этой известной теоремы Решетняка о дифференцируемости функций классов Соболева.

Область Ω можно считать ограниченной. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и, используя [20], найдем замкнутое множество $F \subset \Omega$, $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$, такое, что $f(x) = g(x) + h(x)$, $g \in C^l(\Omega)$, $f|_F = g|_F$, $h|_F \equiv 0$. Почти во всех точках $x \in F$ выполняются следующие условия: x — точка плотности 1 множества F , x — точка Лебега для функции f и всех ее производных $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq l$, имеет место равенство $D^\alpha f(x) = D^\alpha g(x)$, $|\alpha| \leq l$, и x — точка Лебега для функции h и всех ее производных до порядка l , при этом $D^\alpha h(x) = 0$, $|\alpha| \leq l$.

Пусть в точке x выполняются все вышеперечисленные свойства. Рассмотрим $f(x + tX) - P_x(tX) = g(x + tX) - P_x(tX) + h(x + tX)$. Очевидно, $g(x + tX) - P_x(tX) = o(t^l)$, поэтому $\|g(x + tX) - P_x(tX) \mid W_p^l(B(0, 1))\| = o(t^l)$. Остается показать, что

$$\|h(x + tX) \mid W_p^l(B(0, 1))\| = o(t^l). \quad (23)$$

По теореме Лебега $\|D^\alpha h(x + tX) \mid L_p(B(0, 1))\| = o(1)$ для всех $|\alpha| = l$. Применяя лемму 3 к функции $D^\alpha h(x)$, $|\alpha| = l - 1$, получаем

$$\|D^\alpha h(x + tX) \mid W_p^1(B(0, 1))\| = o(t).$$

Продолжая это рассуждение по индукции, приходим к соотношению (23).

Если (22) доказано, то, применяя при $1 < p < n/l$ ($n < lp$) вложение $i: W_p^l(B(0, 1)) \rightarrow L_q(B(0, 1))$, $q = lp/(n - lp)$ ($i: W_p^l(B(0, 1)) \rightarrow C(B(0, 1))$), получаем

$$\begin{aligned} \|f(x + hX) - P_x(hX) \mid L_q(B(0, 1))\| &= o(h^l) \\ (\|f(x + hX) - P_x(hX) \mid C(B(0, 1))\| &= o(h^l)). \end{aligned}$$

Последние соотношения другим методом доказаны в [21].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Метод настоящей работы можно применить также к дифференцированию функций класса BV на группах Карно, однако эти рассуждения выходят за рамки настоящей статьи.

Список литературы

1. *Folland G. B., Stein I. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes. V. 28.)
2. *Pansu P.* Métriques de Carnot – Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. of Math.* (2). 1989. V. 119. P. 1–60.
3. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
4. *Водопьянов С. К., Утлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37. № 1. С. 70–89.
5. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37. № 6. С. 1269–1295.
6. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // *Сиб. матем. журн.* 1997. Т. 38. № 3. С. 657–675.
7. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // *Сиб. матем. журн.* 1999. Т. 40. № 4. С. 764–804.
8. *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // *Труды по анализу и геометрии* / ред. С. К. Водопьянов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. С. 603–670.
9. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // *Матем. сб.* 1968. Т. 75. № 3. С. 323–334.
10. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
11. *Водопьянов С. К.* Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом. I // *Сиб. матем. журн.* 2000. Т. 41. № 1. С. 23–48.
12. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // *Duke Math. J.* 1986. V. 53. № 2. P. 503–523.
13. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // *Rev. Mat. Iberoamericana*. 1992. V. 8. № 3. P. 367–439.
14. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: An endpoint result // *Rev. Mat. Iberoamericana*. 1994. V. 10. № 3. P. 453–466.
15. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // *Ark. Mat.* 1975. V. 13. P. 161–207.
16. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нормальные семейства отображений на группах Карно // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37. № 2. С. 273–286.
17. *Martio O., Malý J.* Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // *J. Reine Angew. Math.* 1995. V. 485. P. 19–36.
18. *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.* 1983. V. 8. P. 257–324.
19. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // *Potential Anal.* 1996. V. 5. P. 403–415.
20. *Bagby T., Ziemer W. P.* Pointwise differentiability and absolute continuity // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1974. V. 191. P. 129–148.
21. *Calderón A. P., Zygmund A.* Local properties of solutions of elliptic partial differential equations // *Studia Math.* 1961. V. 20. P. 171–225.