Общероссийский математический портал

М. Л. Гервер, Теоремы о разбиениях на многоугольники, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 87–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:15:00

УДК 514+517

М. Л. Гервер

Теоремы о разбиениях на многоугольники

Какая общая закономерность проявляется в том, что треугольник – и вообще никакой выпуклый многоугольник – нельзя разбить на невыпуклые четырехугольники? Другой вопрос: известно, что при $n > 6$ плоскость нельзя разбить на выпуклые n -угольники, если их диаметры ограничены, а площади отделены от нуля; обобщается ли этот факт на невыпуклые многоугольники? В статье предлагается определение характеристики $\chi(M)$ многоугольника M и в терминах $\chi(M)$ даются ответы на поставленные вопросы, а затем исследуются разбиения плоскости на n -угольники, эквивалентные M , – с тем же самым, что у многоугольника M , чередованием углов, меньших и больших π .

Библиография: 3 названия.

Часть I. Характеристика многоугольника. (D, s) -паркеты

§ 1. Введение

Листая “Реферативный журнал”, я наткнулся на следующее – *увы, неверное* –

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Попытка выложить плоскость многоугольниками с числом сторон больше шести приводит к неограниченному росту наибольшего из их диаметров при одновременном стремлении к нулю наименьшей из их площадей.*

Так анонимный рецензент ошибочно воспринял главный результат работы [1]. Фактически в [1] доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Попытка выложить плоскость выпуклыми многоугольниками с числом сторон больше шести приводит либо к неограниченному росту наибольшего из их диаметров, либо к стремлению к нулю наименьшей из их площадей.*

Нетрудно проверить, что *неверны* не только утверждение 1, но и следующие две его модификации – утверждения 3 и 4:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Попытка выложить плоскость выпуклыми многоугольниками M_j с числом сторон больше шести приводит к неограниченному росту наибольшего из их диаметров D_j при одновременном стремлении к нулю наименьшей из их площадей s_j .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Попытка выложить плоскость многоугольниками с числом сторон больше шести приводит – даже для невыпуклых многоугольников – либо к неограниченному росту наибольшего из их диаметров, либо к стремлению к нулю наименьшей из их площадей.*

Вопреки утверждению 3 плоскость – при любом $n > 6$ – можно выложить *равновеликими выпуклыми* n -угольниками (правда, для их диаметров $\max D_j \rightarrow \infty$) либо *выпуклыми* n -угольниками *равного диаметра* (правда, для их площадей $\min s_j \rightarrow 0$).

Чтобы построить такие n -угольники, достаточно взять последовательность концентрических окружностей с радиусами r_k , $r_k < r_{k+1}$, положить $m_{k,n} = n(n-3)^{k-1}$, вписать в k -ю окружность правильный $m_{k,n}$ -угольник $M_{k,n}$, $k \geq 1$, и разбить часть $M_{k+1,n}$, лежащую вне $M_{k,n}$, на $m_{k,n}$ равных n -угольников (примыкающих к сторонам $M_{k,n}$). Это и будут искомые n -угольники, если подобрать подходящие радиусы r_k .

Что касается утверждения 4 и его возможных вариантов, то, на первый взгляд, намерение отказаться от условия *выпуклости* кажется бесперспективным, поскольку плоскость при любом $n > 3$ можно выложить *невыпуклыми равными* n -угольниками (см. §5). Однако, оказывается, можно так изменить утверждение 4, что оно станет верным для довольно широкого класса невыпуклых многоугольников.

Прежде чем исследовать разбиения плоскости, займемся разбиениями многоугольников. Начнем с разбиений выпуклых многоугольников.

§ 2. О разбиениях выпуклых многоугольников на невыпуклые

Треугольник можно разбить на выпуклые четырехугольники и на невыпуклые пятиугольники (рис. 1). Но никакой выпуклый многоугольник нельзя разбить на невыпуклые четырехугольники. Почему?

Рис. 1

Более общий вопрос: на какие невыпуклые многоугольники можно и на какие нельзя разбить произвольный выпуклый многоугольник V ?

Черные и белые углы. Выступы и вмятины. Для произвольного многоугольника M (рис. 2) выкрасим в *черный* цвет углы M *меньшие* π , а для углов *больших* π (такие углы существуют, если многоугольник M невыпуклый) выкрасим дополнительные к ним (*внележащие*) углы M в *белый* цвет.¹

¹Здесь и далее рассматриваются *только односвязные многоугольники*.

Рис. 2

Вершины многоугольника M , к которым прилежат черные и белые углы, будем называть *выступами* и *вмятинами* соответственно.

Пусть выпуклый v -угольник V разбит на многоугольники M_j , $1 \leq j \leq k$. Обозначим через A_j сумму черных и через B_j сумму белых углов M_j . Положим $A = \sum_{j=1}^k A_j$, $B = \sum_{j=1}^k B_j$. Так как любой белый угол каждого M_i заполнен черными углами других M_j и так как еще и все углы при вершинах V заполнены черными углами M_j , то $A \geq B + (v-2)\pi > B$. С другой стороны, для невыпуклого четырехугольника M белый внележащий угол в точности равен сумме черных углов M , т.е. *никакой выпуклый многоугольник нельзя разбить на невыпуклые четырехугольники*.²

Подчеркнем еще раз (см. введение и §5), что при этом плоскость можно разбить даже на *равные* невыпуклые четырехугольники.

Характеристика $\chi(M)$ многоугольника M . Вычтем из суммы черных (внутренних, меньших π) углов M сумму белых (внележащих, меньших π) углов M . Разность назовем *характеристикой M* и обозначим через $\chi(M)$.

ТЕОРЕМА 1. *Никакой выпуклый многоугольник V нельзя разбить на невыпуклые многоугольники M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$.*

Теорема 1 сразу следует из полученного выше неравенства $A > B$.

Более точное неравенство $A \geq B + (v-2)\pi$ будет обобщено на *невыпуклые* многоугольники и позволит усилить теорему 1 в §3.

Для выпуклого v -угольника V характеристика $\chi(V)$ равна сумме углов $(v-2)\pi$.

Какие значения может принимать характеристика невыпуклого n -угольника M ? При $n = 4$, очевидно, $\chi(M) = 0$, при $n = 5$ возможны значения $\pm\pi$, при $n = 6$ — значения 0 и $\pm 2\pi$, при $n = 7$ — значения -3π , $-\pi$, π и 3π . В общем случае $\chi(M)$ принимает значения $i\pi$, где i растет с шагом 2 от $4-n$ до $n-4$. Для невыпуклого $(p+t)$ -угольника M с p выступами и t вмятинами $\chi(M) = (p-t-2)\pi$ независимо от того, в каком порядке следуют друг за другом выступы и вмятины.

Теорему 1 дополняют следующие теоремы 2 и 3, которые будут доказаны в §4.

ТЕОРЕМА 2. *Любой многоугольник M , выпуклый или невыпуклый, можно разбить на n -угольники с характеристикой π , 2π или 3π :*

- 1) на n -угольники с характеристикой π — для любого нечетного $n > 1$;

²Эта теорема, по-видимому, не слишком широко известна, но и не является новой (см. [2; задача 23:18]).

- 2) на n -угольники с характеристикой 2π – для любого четного $n > 2$;
- 3) на n -угольники с характеристикой 3π – для любого нечетного $n > 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любой многоугольник можно разбить на треугольники. Поэтому теорему 2 достаточно доказать в случае, когда M является треугольником, и в §4 она будет доказана в уточненной редакции, включающей добавление о невозможности разбиения треугольника на многоугольники с характеристиками $\chi > 3\pi$:

ТЕОРЕМА 3. Для любого $n > 1$ правильный треугольник T можно разбить на три равных $(2n - 1)$ -угольника с характеристикой π , а также на три равных $2n$ -угольника с характеристикой 2π . Для любого нечетного $n > 3$ треугольник можно разбить на девять n -угольников с характеристикой 3π . Треугольник нельзя разбить ни на какое конечное число k многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \leq j \leq k$.

§3. О разбиениях невыпуклых многоугольников

В доказательстве теоремы 1 используется неравенство $A > B$. Для выпуклого v -угольника V верно (и получено в §2) более точное неравенство

$$A \geq B + (v - 2)\pi. \quad (*)$$

Обобщив неравенство $(*)$ на невыпуклые многоугольники, убедимся в том, что теорема 1 допускает усиление: верны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Никакой многоугольник M с положительной характеристикой χ нельзя разбить на конечное число k многоугольников M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$.

Никакой многоугольник с характеристикой $\chi \leq 0$ нельзя разбить на k многоугольников M_j с характеристиками $\chi(M_j) < \chi$, $1 \leq j \leq k$.

ТЕОРЕМА 5. Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -\pi$ нельзя разбить на $k > 1$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$.

Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -r\pi < 0$ нельзя разбить на $k > r$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$.

Доказательство теорем 4, 5 сводится к проверке следующей леммы:

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть многоугольник M с характеристикой χ разбит на многоугольники M_j с характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$. Тогда

$$\sum_{j=1}^k \chi(M_j) \geq \chi. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Введем обозначения: a – сумма черных и b – сумма белых углов M ; a_j – сумма черных углов M_j , b_j – сумма белых углов M_j с вершинами *внутри* M и c_j – сумма белых углов M_j с вершинами *на границе* M . Тем самым, $\chi = a - b$, $\chi(M_j) = a_j - b_j - c_j$. Положим

$$A = \sum_{j=1}^k a_j, \quad B = \sum_{j=1}^k b_j, \quad C = \sum_{j=1}^k c_j.$$

Черными углами многоугольников M_j заполнены

- а) черные углы при вершинах M ,
- б) белые углы M_j внутри M и
- с) “зазоры” между белыми углами M_j с вершинами на границе M и белыми углами M , так что

$$A \geq a + B + (C - b), \quad \text{т.е.} \quad A - B - C \geq a - b,$$

а последнее неравенство равносильно (1).

Теоремы 4, 5 немедленно следуют из (1).

§ 4. О разбиениях треугольника на многоугольники положительной характеристики

Подготовку к доказательству теоремы 3 (см. § 2) начнем с решения двух задач:

ЗАДАЧА 1. Можно ли разбить треугольник на выпуклые 5-угольники?

ЗАДАЧА 2. Можно ли разбить треугольник на выпуклые 6-угольники?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. В задаче 1 ответ утвердительный: треугольник можно разбить на девять выпуклых 5-угольников (рис. 3).

Рис. 3

В задаче 2 ответ отрицательный. Докажем это. Допустим, что треугольник можно разбить на k выпуклых 6-угольников. Сумма σ их углов равна $4\pi k$. Оценим ее сверху. Разобьем вершины 6-угольников на три класса: пусть v_1 вершин совпадают с вершинами треугольника, v_2 вершин лежат на сторонах треугольника (и не совпадают с его вершинами) и v_3 вершин лежат внутри треугольника, так

что $6k = v_1 + v_2 + v_3$, причем $v_1 \geq 3$, $v_2 \geq 0$. Поэтому (см. пояснение к неравенству (**))

$$\sigma = \frac{2\pi}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \leq \pi \left(\frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{2} + \frac{2v_3}{3} \right), \quad (**)$$

т.е. $0 < v_1/3 + v_2/6 \leq 0$. Полученное противоречие доказывает невозможность разбиения треугольника на выпуклые 6-угольники.

Пояснение к неравенству (**). Сумма v_1 углов 6-угольников, прилежащих к трем вершинам треугольника, равна π . Поэтому их оценка сверху получится, если каждый из $v_1 \geq 3$ таких углов заменить на $\pi/3$. Сумма углов, прилежащих к каждой из v_2 вершин на сторонах треугольника, равна π , а так как ко всякой такой вершине прилежат минимум 2 угла, то их оценка сверху получится, если каждый такой угол заменить на $\pi/2$. Для суммы v_3 углов, прилежащих к v_3 вершинам 6-угольников, расположенным внутри треугольника, оценка сверху получится, если каждый такой угол заменить на $2\pi/3$, так как – ввиду выпуклости 6-угольников – вокруг любой из этих вершин располагаются минимум три 6-угольника. Стоит особо отметить, что при такой замене верная – с запасом – оценка получается и в том случае, когда вершина какого-нибудь 6-угольника лежит на стороне другого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Последовательно преобразуя разбиение правильного треугольника T на 3 равных треугольника, видим (рис. 4), что – для любого нечетного $n > 1$ – треугольник T можно разбить на три равных n -угольника с характеристикой π .

Рис. 4

Из разбиения T на 3 равных 4-угольника получаем (рис. 5) – для любого четного $n > 2$ – разбиения T на три равных n -угольника с характеристикой 2π .

Рис. 5

Рис. 6

Базируясь на рис. 3, видим (рис. 6), что – для любого нечетного $n > 3$ – треугольник можно разбить на девять n -угольников с характеристикой 3π .

Первая часть теоремы 3 доказана.

Остается доказать, что *треугольник нельзя разбить на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j \geq 4\pi$, $1 \leq j \leq k$* . Предположив, что такое разбиение возможно, приведем это предположение к противоречию.

Пусть M_j имеет p_j выступов и m_j вмятин. Расклассифицируем все вершины многоугольников M_j (сравним с решением задачи 2). Число всех вершин равно $\sum_{j=1}^k (p_j + m_j)$. Пусть v_1 из них совпадают с вершинами треугольника, v_2 из них лежат на сторонах треугольника (и не совпадают с его вершинами), v_3 из них лежат внутри треугольника и к каждой примыкают минимум 3 многоугольника и, наконец, $2w$ из них лежат внутри треугольника и к ним примыкают ровно по 2 многоугольника, так что в каждой из w пар таких вершин одна является выступом, а другая – вмятиной. Тогда

$$\sum_{j=1}^k (p_j + m_j) = v_1 + v_2 + v_3 + 2w, \quad w \leq \sum_{j=1}^k m_j. \quad (2)$$

Вследствие (2)

$$2w = \sum_{j=1}^k (p_j + m_j) - v_1 - v_2 - v_3. \quad (3)$$

Оценивая сверху сумму всех углов многоугольников M_j , с учетом пояснения к неравенству (**) и с учетом (3) получаем:

$$\sum_{j=1}^k (p_j + m_j - 2) \leq \frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{2} + \frac{2v_3}{3} + 2w = \sum_{j=1}^k (p_j + m_j) - \frac{2v_1}{3} - \frac{v_2}{2} - \frac{v_3}{3},$$

откуда

$$2k \geq \frac{2v_1}{3} + \frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{3} > \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}. \quad (4)$$

Из (4) и (3) следует, что

$$6k > v_1 + v_2 + v_3 = -2w + \sum_{j=1}^k (p_j + m_j),$$

а так как $\chi_j = (p_j - m_j - 2)\pi \geq 4\pi$, то $p_j \geq m_j + 6$ и, значит,

$$6k > -2w + \sum_{j=1}^k (2m_j + 6) = -2w + 2 \sum_{j=1}^k m_j + 6k,$$

так что $w > \sum_{j=1}^k m_j$ вопреки (2). Теорема 3 доказана.

Из ее второй части вытекает следствие: *никакой выпуклый 4- или 5-угольник нельзя разбить на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \leq j \leq k$.*

§ 5. О разбиениях плоскости на равные многоугольники с характеристиками $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ или 4π

По теореме 1 треугольник нельзя разбить на многоугольники M_j с неположительными характеристиками χ_j , $1 \leq j \leq k$. По теореме 3 треугольник нельзя разбить на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \leq j \leq k$. Для всей плоскости рамки раздвигаются: при любом $n > 1$ (а в случае $\chi = 3\pi$ или 4π — при любом $n > 2$) ее можно разбить и на равные $(2n - 1)$ -угольники с характеристикой $\chi = \pi$ или 3π , и на равные $2n$ -угольники с характеристикой $\chi = 0, 2\pi$ или 4π (рис. 7).

Рис. 7

Интересней задача о разбиениях плоскости на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j > 4\pi$ (она исследуется в § 6) и задача о разбиениях плоскости на многоугольники отрицательной характеристики (ей посвящен § 7).

§ 6. О разбиениях плоскости на многоугольники с характеристиками больше 4π

Паркеты и мозаики. Разбиения *плоскости* на многоугольники будем называть *паркетами*, а разбиения *многоугольников* на конечное число многоугольников — *мозаиками*. Пусть D_j — диаметры, а s_j — площади многоугольников M_j , и

пусть диаметры ограничены сверху числом D , а площади отделены от нуля числом s :

$$D_j \leq D, \quad s_j \geq s > 0 \quad \text{при всех } j. \quad (***)$$

Мозаику из многоугольников M_j назовем тогда (D, s) -мозаикой. Если условия (***) выполняются для паркета из многоугольников M_j , назовем его (D, s) -паркетом.

ЗАДАЧА 3. Существуют ли (D, s) -паркеты, составленные из многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j > 4\pi$, или (D, s) -паркеты из M_j с характеристиками $\chi_j < 0$?

Ответ утвердительный (рис. 8). Однако для таких паркетов не удастся равномерно ограничить число вершин u_j многоугольников M_j (см. теорему 6 в этом параграфе и теорему 7 в § 7).

Рис. 8

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть многоугольники M_j , образующие (D, s) -мозаику, покрывают круг K радиуса R ; k — число многоугольников, имеющих общие точки с кругом K ; k^* — число многоугольников, имеющих общие точки с границей K . Тогда

$$\frac{k^*}{k} \leq \frac{c}{R},$$

где c — константа, зависящая от D и s (можно взять $c = 4D^3/s$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — наибольший из диаметров, S — наибольшая, а s — наименьшая из площадей многоугольников M_j . Так как k многоугольников M_j покрывают круг K и так как $S \leq D^2$ (поскольку многоугольник диаметра D , очевидно, можно заключить в квадрат со стороной D), то $\pi R^2 \leq Sk \leq D^2 k$.

Каждый из k^* многоугольников, имеющих общие точки с границей K , лежит в кольце между концентрическими окружностями с центром в центре круга K и с

радиусами $R + D$ и $R - D$. Поэтому сумма площадей *граничных* многоугольников не превосходит $\pi[(R + D)^2 - (R - D)^2] = 4\pi RD$, так что $sk^* \leq 4\pi RD$. Итак,

$$k^* \leq \frac{4\pi RD}{s}, \quad k \geq \frac{\pi R^2}{D^2}, \quad \frac{k^*}{k} \leq \frac{4D^3}{sR}.$$

ТЕОРЕМА 6. *Плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) \geq 5\pi$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от нуля: $u_j \leq U$, $D_j \leq D$, $s_j \geq s > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многоугольники M_j , образующие (D, s) -паркет, покрывают круг K радиуса R . Пусть k — число многоугольников, имеющих общие точки с K , k^* — число многоугольников, имеющих общие точки с границей K . Тогда (по второй основной лемме)

$$\frac{k^*}{k} \leq \frac{4D^3}{sR}. \quad (5)$$

Пусть p_j — число выступов, m_j — число вмятин и u_j — число всех вершин многоугольника M_j : $u_j = p_j + m_j$. По условию теоремы числа u_j равномерно ограничены:

$$u_j \leq U. \quad (6)$$

Сумму u_j по k многоугольникам, имеющим общие точки с K , обозначим через u , $u = p + m$, где $p = \sum_{j=1}^k p_j$, $m = \sum_{j=1}^k m_j$.

Сумму u_j по k^* многоугольникам, имеющим общие точки с границей K , обозначим через u^* . Ввиду (6) и (5) для любого $\varepsilon > 0$

$$u^* \leq Uk^* < \frac{\varepsilon k}{2}, \quad (7)$$

если радиус R круга K достаточно велик.

Сосчитаем двумя способами сумму всех внутренних углов k многоугольников M_j , имеющих общие точки с K . Для одного многоугольника M_j эта сумма равна $(u_j - 2)\pi$; для k многоугольников M_j она равна $(u - 2k)\pi = (p + m - 2k)\pi$.

Другой способ подсчета углов позволит оценить найденную сумму σ сверху.

Все вершины многоугольников M_j внутри круга разобьем на два класса. К первому классу отнесем такие v вершин, что *к каждой из них примыкают минимум 3 многоугольника*, ко второму классу — такие $2w$ вершин, что *к ним примыкают ровно по 2 многоугольника*, так что в каждой из w пар таких вершин одна является выступом, а другая — вмятиной и, тем самым,

$$w \leq m = \sum_{j=1}^k m_j, \quad v \leq p + m - 2w. \quad (8)$$

Оценка σ сверху получится, если каждый из v углов, прилежащих к вершинам первого класса, заменить на $2\pi/3$, каждый из $2w$ углов, прилежащих к вершинам второго класса, заменить на π , а каждый из углов, прилежащих к вершинам вне

круга, заменить на 2π . Вершин вне круга не больше чем u^* . Поэтому с учетом (7) и (8)

$$\begin{aligned}\sigma &= (p + m - 2k)\pi \leq \frac{2\pi v}{3} + 2\pi(w + u^*), \\ p + m - 2k &\leq \frac{2}{3}(p + m - 2w) + 2w + \varepsilon k = \frac{2}{3}(p + m + w) + \varepsilon k \leq \frac{2}{3}(p + 2m) + \varepsilon k, \\ 3(p + m) - 6k &\leq 2p + 4m + 3\varepsilon k, \quad \frac{p - m}{k} \leq 6 + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Однако по условию $\chi(M_j) = (p_j - m_j - 2)\pi \geq 5\pi$, $p_j - m_j \geq 7$, $(p - m)/k \geq 7$.

Полученное противоречие доказывает, что не только всю плоскость, но никакой многоугольник, содержащий достаточно большой круг, нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) \geq 5\pi$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от нуля.

СЛЕДСТВИЯ. *Плоскость нельзя разбить на равные многоугольники с характеристикой $\chi \geq 5\pi$. Никакой n -угольник, которым можно замостить плоскость (в частности, n -угольники на рис. 7), нельзя разбить на многоугольники с характеристиками $\chi_j \geq 5\pi$, $1 \leq j \leq k$.*

§ 7. О разбиениях плоскости на многоугольники отрицательной характеристики

ТЕОРЕМА 7. *Плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, если число вершин у каждого многоугольника и диаметры многоугольников ограничены сверху, а площади многоугольников отделены от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Почти дословно повторяя доказательство второй основной леммы из § 6, приходим к следующей модификации этой леммы.

Пусть многоугольники M_j , образующие (D, s) -мозаику, покрывают правильный треугольник T со стороной R ; k — число многоугольников, имеющих общие точки с треугольником T ; k^ — число многоугольников, имеющих общие точки с границей T . Тогда*

$$\frac{k^*}{k} \leq \frac{c}{R}, \quad (9)$$

где c — константа, зависящая от D и s .

Предположим, что теорема 7 неверна и существует (D, s) -паркет, составленный из многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j < 0$ и числом вершин $u_j \leq U$.

Возьмем большой правильный треугольник T со стороной R ; k^* многоугольников M_j , имеющих общие точки с границей T , заменим пересечениями Π_j с треугольником T . Ясно, что при такой замене число вершин каждого M_j может увеличиться не более чем вдвое. Пересечение Π_j не обязательно связно — возможно,

Π_j состоит из нескольких многоугольников: $\Pi_j = M_{1,j}^* \cup \dots \cup M_{i(j),j}^*$. Но суммарное число их вершин не больше $2U$. К разбиению T на $k - k^*$ многоугольников M_j и на многоугольники $M_{i,j}^*$ применим первую основную лемму из §3. Сумма X характеристик $k - k^*$ многоугольников M_j — большое по модулю отрицательное число: ввиду (9) $|X|$ больше суммы характеристик многоугольников $M_{i,j}^*$, если R достаточно велико. Поэтому применение (1) приводит к противоречию: $\chi(T) = \pi$ оказывается меньше отрицательного числа. Теорема 7 доказана.

Возвращаясь к утверждению 4 из §1, видим, что верна его модификация:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Произвольно фиксируем $U > 0$. Тогда попытка выложить плоскость многоугольниками M_j с числом сторон не больше U и характеристиками $\chi_j < 0$ (или характеристиками $\chi_j > 4\pi$) приводит либо к неограниченному росту наибольшего из их диаметров, либо к стремлению к нулю наименьшей из их площадей.*

Часть II. Разбиения на эквивалентные многоугольники

§8. Эквивалентность. Последовательность $\Pi(M)$

Два $(p + m)$ -угольника с одной и той же последовательностью p выступов и m вмятин будем называть *эквивалентными*.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — последовательные углы n -угольника M . Классу n -угольников, эквивалентных M , сопоставим периодическую последовательность $\Pi(M)$ из плюсов и минусов — с периодом, состоящим из знаков разностей $\pi - \varphi_j$, $1 \leq j \leq n$, так что плюсы соответствуют выступам, а минусы — вмятинам n -угольника M .

Рис. 9

Для многоугольников на рис. 9 получатся последовательности

$$(- - + + +), \quad (- + - + +), \quad (- + + - + +),$$

так здесь и далее обозначаются последовательности с периодами

$$- - + + +, \quad - + - + +, \quad - + + - + +.$$

Отказавшись от условия (**), но рассматривая только такие паркеты, что

с каждым кругом пересекается лишь конечное число многоугольников,
(****)

зададимся вопросом: для каких M существует паркет из многоугольников, эквивалентных M ?

ТЕОРЕМА 8. *Для существования паркета из многоугольников, эквивалентных M , не является необходимым, но достаточно, чтобы последовательность $\Pi(M)$ содержала три плюса подряд, т.е. чтобы у M какие-нибудь три выступа не были разделены вмятинами. Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но содержатся три минуса подряд, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M .*

Доказательству теоремы 8 предположим решение следующей задачи.

ЗАДАЧА 4. Для каких из трех многоугольников M на рис. 9 существует паркет из многоугольников, эквивалентных M ?

С шестиугольником на рис. 9 все ясно: на рис. 7 изображен паркет из шестиугольников, эквивалентных (и даже равных) ему.

С двумя пятиугольниками на рис. 9 мы разберемся в § 9, а теорему 8 докажем в § 10 и там же сформулируем новые задачи, в том числе – одну нерешенную.

§ 9. Решение задачи о двух пятиугольниках

ЛЕММА О ЧЕТЫРЕХ ВЫСТУПАХ. *Если $\Pi(M)$ содержит четыре плюса подряд, т.е. если у многоугольника M какие-нибудь четыре выступа идут подряд, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на плоскости прямоугольные координаты x, y . Переходя от M к многоугольнику M' , эквивалентному M , можем добиться (рис. 10), чтобы граница M' состояла из отрезков

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x = 1$$

и из графика положительной непрерывной кусочно линейной функции

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f(0) = f(1) = 1.$$

Многоугольниками, эквивалентными M' , легко замостить полуполосу $x \in [0, 1]$, $y \geq 0$, а значит, и всю плоскость x, y .

Из двух пятиугольников, эквивалентных пятиугольнику M с последовательностью $\Pi(M) = (- - + + +)$, составим (рис. 11) восьмиугольник M' с последовательностью $\Pi(M') = (- - - - + + + +)$ и, применив лемму, замостим плоскость эквивалентными M' восьмиугольниками, разбитыми на пятиугольники, эквивалентные M .

Чтобы решить задачу 4, остается доказать, что *не существует паркета из эквивалентных пятиугольников M_j с последовательностью*

$$\Pi(M_j) = (- + - + +).$$

Рис. 10

Рис. 11

Опираясь на условие (****), докажем это факт. Допустим, что паркет из таких пятиугольников M_j существует, и приведем это допущение к противоречию. Пусть M — односвязный многоугольник, составленный из h пятиугольников M_j , образующих паркет, и пусть в периоде $\Pi(M)$ число плюсов равно p , а число минусов равно m . Так как $\chi(M_j) = -\pi$, то по первой основной лемме $\chi(M) = (p - m - 2)\pi \leq -h\pi$, т.е.

$$m \geq p + h - 2. \quad (10)$$

Сумма всех углов h пятиугольников M_j , составляющих M , равна $3\pi h$. Обозначим через i число точек внутри M , к которым примыкают вершины пятиугольников M_j . Тогда $3\pi h \geq (m + p - 2)\pi + \pi i$.³

Значит, $3h \geq (m + p - 2) + i$ и ввиду (10) $3h \geq 2p + h - 4 + i$, т.е. $p \leq h + 2 - i/2$. Можно считать многоугольник M настолько большим, что $i > 8$. Тогда

$$p < h - 2. \quad (11)$$

³ Возможно, вершина какого-нибудь пятиугольника M_j лежит на стороне другого. Поэтому нельзя утверждать, что $3\pi h = (m + p - 2)\pi + 2\pi i$, и приходится ограничиться приведенной оценкой.

Ввиду (10) и (11)

$$\frac{m}{p} \geq \frac{p+h-2}{p} = 1 + \frac{h-2}{p} > 2,$$

т.е. $m > 2p$.⁴ Значит, последовательность $\Pi(M)$ содержит серию --- из трех минусов, идущих подряд. Это противоречит, однако, следующей лемме.

ЛЕММА А. *Из отрезков границ пятиугольников M_j , образующих паркет, нельзя составить четырехзвенную выпуклую ломаную.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что лемма неверна, т.е. множество μ всех четырехзвенных выпуклых ломаных, составленных из отрезков границ M_j , не пусто.

Для каждой такой ломаной L интерпретируем ее три последовательные вершины как три идущие подряд вмятины и считаем число $H = H(L)$ пятиугольников M_j , образующих паркет и примыкающих *изнутри* L ко второй из этих вмятин.

Рис. 12

Ввиду (****) $H \neq \infty$, так что существует минимум функции $H(L)$ по всем $L \in \mu$. Пусть он достигается на ломаной L с вершинами V_1, V_2, V_3 , и пусть r — сторона L , соединяющая V_1 и V_2 . Рассмотрим входящий в паркет пятиугольник M_i , примыкающий *изнутри* L к вмятине V_2 и прилежащий к стороне r . Часть контура M_i образует вместе с частью L четырехзвенную ломаную L' , которая (рис. 12) содержит три вмятины $V_1', V_2' = V_2$ и $V_3' = V_3$, идущие подряд. При этом $H(L') < H(L)$. Полученное противоречие доказывает лемму А.

Задача 4 решена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо пятиугольников M_j с $\Pi(M_j) = (- + - + +)$ можно было бы рассматривать многоугольники M_j с p_j выступами и m_j вмятинами. Из них нельзя построить паркет, если при каждом j выполняется неравенство $m_j \geq 2p_j - 4$ и $\Pi(M_j)$ не содержит трех плюсов подряд.

Докажем это утверждение, опираясь на следующую лемму, которая доказывается так же, как лемма А.

ЛЕММА В. *Если многоугольники M_j образуют паркет и последовательности $\Pi(M_j)$ не содержат трех плюсов подряд, то не существует четырехзвенной выпуклой ломаной, составленной из отрезков границ M_j .*

⁴Приведенное доказательство неравенства $m > 2p$ предложил А. Поярков (см. [3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что паркет из многоугольников M_j с p_j выступами и m_j вмятинами существует, хотя последовательности $\Pi(M_j)$ не содержат трех плюсов подряд и

$$p_j - 2 \leq \frac{m_j}{2} \quad (12)$$

при каждом j . Приведем это допущение к противоречию. Пусть M — односвязный многоугольник, составленный из многоугольников $M_1, \dots, M_h$, образующих паркет, и пусть в периоде последовательности $\Pi(M)$ число плюсов равно p , а число минусов равно m .

Вследствие (12) $\chi(M_j) = (p_j - m_j - 2)\pi \leq -\pi m_j/2$. По первой основной лемме $\chi(M) = (p - m - 2)\pi \leq \sum_{j=1}^h \chi(M_j) \leq -\sum_{j=1}^h \pi m_j/2$, т.е.

$$m \geq p - 2 + \sum_{j=1}^h \frac{m_j}{2}. \quad (13)$$

Сумма всех углов многоугольников $M_1, \dots, M_h$ равна $\sum_{j=1}^h (p_j + m_j - 2)\pi$. Обозначив через i число точек внутри M , к которым примыкают вершины многоугольников M_j , получаем:

$$\sum_{j=1}^h (p_j + m_j - 2)\pi \geq (m + p - 2)\pi + \pi i.$$

Значит, с учетом (13)

$$\sum_{j=1}^h (p_j + m_j - 2) \geq m + p - 2 + i \geq 2p - 4 + \sum_{j=1}^h \frac{m_j}{2} + i.$$

Будем считать многоугольник M настолько большим, что $i > 8$. Тогда с учетом (12) $\sum_{j=1}^h m_j > 2p + 4$, так что

$$p < -2 + \sum_{j=1}^h \frac{m_j}{2}. \quad (14)$$

Ввиду (13) и (14)

$$\frac{m}{p} \geq \frac{p - 2 + \sum_{j=1}^h m_j/2}{p} = 1 + \frac{-2 + \sum_{j=1}^h m_j/2}{p} > 2,$$

т.е. $m > 2p$. Значит, последовательность $\Pi(M)$ содержит серию --- из трех минусов, идущих подряд, что противоречит лемме В.

§ 10. Доказательство теоремы о трех выступах. Нерешенная задача

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. С помощью приема, примененного в § 9 (см. рис. 11), первая часть теоремы 8 о трех выступах сводится к лемме о четырех выступах. Тем самым, наличие у многоугольника M трех выступов, идущих подряд, является достаточным условием для существования паркета из многоугольников, эквивалентных M .

То, что это условие не является необходимым, демонстрируют пример шестиугольника M на рис. 9 с последовательностью $\Pi(M) = (- + + - + +)$ и паркет из равных ему шестиугольников на рис. 7. См. также рис. 13 и 14.

Из леммы В в § 9 следует: *если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но содержатся три минуса подряд, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M* . Теорема 8 доказана.

В добавление к теореме 8 ниже сформулированы три решенные задачи 5 а), б), в) и одна правдоподобная, но пока не доказанная гипотеза (задача 6).

Рис. 13

Рис. 14

ЗАДАЧА 5. Верны ли следующие утверждения?

а) Если в $\Pi(M)$ нет двух минусов подряд, но $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд пяти знаков $++-++$, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M . (Ответ утвердительный, так что это утверждение можно включить в теорему 8. Идею решения задачи 5а) иллюстрирует рис. 13.)

б) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд четырех знаков $--+-$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M . (Ответ отрицательный, см. рис. 14.)

в) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\chi(M) < 0$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M . (Ответ отрицательный, контрпример к утверждению построил в августе 2000 года А. Гайфуллин, см. [3].)

ЗАДАЧА 6. Верна ли следующая гипотеза? Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M) \neq (++-+-)$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M , в котором к каждой вершине примыкают минимум три многоугольника.

Благодарю А. Алексеевского, М. Вялого, А. Гайфуллина, С. Дориченко, С. Ландо, А. Леонтовича, А. Меркова и А. Пояркова за полезные обсуждения задач и теорем.

Список литературы

1. *Fulton Candler*. Tessellations // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. №3. P. 442–445.
2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Часть II. М.: Наука, 1991.
3. *Гервер М. Л.* Паркеты и мозаики // <http://www.mccme.ru/olympiads/lktg/2000/>, <http://www.mccme.ru/olympiads/lktg/2000/mosaic.ps>.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН, г. Москва
E-mail: M.L@gerver.mccme.ru

Поступила в редакцию
16.08.2000 и 20.03.2003