Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Колокольцов, Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами и магнитными полями, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 105–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:30:12

УДК 517.958

В. Н. Колокольников

Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами и магнитными полями

Рассматривается формальный оператор Шрёдингера в $\mathbb{R}^d$ вида

$$H = \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + A(x) \right)^2 + V(x),$$

где A – ограниченная измеримая вектор-функция, а $V(x)$ и $\operatorname{div} A$ – меры, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Показывается, что такой оператор может быть проинтерпретирован как самосопряженный ограниченный снизу оператор в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Строится соответствующее ядро теплопроводности и получается его асимптотика на малых временах. Дается математически строгое представление решений уравнения теплопроводности и уравнения Шрёдингера с производящим оператором H в виде фейнмановских континуальных интегралов.

Библиография: 46 названий.

§ 1. Введение

Мы рассматриваем формальный оператор Шрёдингера с магнитным полем вида

$$H = \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + A(x) \right)^2 + V(x), \quad (1.1)$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ – оператор градиента в $\mathbb{R}^d$, при следующих условиях:

С1) магнитный вектор-потенциал $A = (A^1, \dots, A^d)$ представляет собой ограниченную измеримую функцию на $\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{R}^d$;

С2) потенциал V и дивергенция

$$\operatorname{div} A = \sum_{j=1}^d \frac{\partial A^j}{\partial x^j}$$

вектор-потенциала A (определенная в смысле распределений) являются борелевскими мерами;

С3) если $d > 1$, то существуют такие $\alpha > d - 2$ и $C > 0$, что

$$|\operatorname{div} A|(B_r(x)) \leq Cr^\alpha, \quad |V|(B_r(x)) \leq Cr^\alpha \quad (1.2)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $r \in (0, 1]$, где $|V|$ и $|\operatorname{div} A|$ – полные вариации (возможно, не положительных) мер V и $\operatorname{div} A$ соответственно, а $B_r(x)$ – шар радиуса r в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x . Если $d = 1$, то это же условие выполнено при $\alpha = 0$.

В §2 мы придаем смысл формальному оператору (1.1) как самосопряженному оператору в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с помощью непосредственного построения соответствующей полугруппы e^{-tH} . Кроме того, мы приводим глобальные оценки для соответствующего ядра теплопроводности и его локальную (для малых времен) мультипликативную асимптотику. Наш метод основан на стандартной теории возмущений относительно свободной эволюции $e^{t\Delta}$. Однако наличие сингулярного магнитного поля существенно усложняет оценки.

Основные результаты получены в §3, где мы выражаем соответствующую шрёдингерову полугруппу $\exp\{-iHt\}$ в терминах математически строго определенного континуального интеграла, обобщающего конструкцию из [1], [2] на случай нетривиальных магнитных полей.

В §4 выводятся используемые в §§ 2 и 3 технические оценки. Параграфы 5 и 6 посвящены кратким обсуждениям. В §5 мы обсуждаем понятие размерности мер и его взаимосвязь с нашим основным предположением С3). В §6 указываются возможные обобщения предположений С1)–С3), при которых основные результаты настоящей работы все еще могут быть доказаны с небольшими видоизменениями.

Пожалуй, стоит обсудить относящиеся к данной тематике результаты. Прежде всего заметим, что наша работа вносит вклад в несколько направлений в теории уравнений Шрёдингера, а именно оценки ядра теплопроводности и фундаментального решения, сингулярные потенциалы, магнитные поля и метод континуальных интегралов. В последнее время в каждом из этих направлений появилось значительное количество публикаций. Поэтому, хотя мы и даем весьма обширную библиографию, она далека от полноты.

Понятие сингулярных уравнений Шрёдингера весьма широкое. Многие авторы называют потенциал сингулярным, если он задается сильно нерегулярной функцией (например, локально неограниченной и разрывной). Оценки ядер теплопроводности для соответствующих операторов Шрёдингера

$$H = -\Delta/2 + V(x) \quad (1.3)$$

(т.е. интегральных ядер операторов e^{-tH}) обсуждаются во многих публикациях (см. [3]–[5] и приведенные там ссылки). Позднее понятие сингулярного оператора Шрёдингера стало использоваться для обозначения (формального) выражения (1.3), где потенциал V представляет собой некоторую обобщенную функцию (распределение). Наиболее популярные примеры таких операторов Шрёдингера даются системами с δ -взаимодействием, т.е. с потенциалами, сосредоточенными в точках или на гладких подмногообразиях (см., например, монографии [6], [7] и приведенные там ссылки), поскольку такие потенциалы встречаются в различных физических моделях. В нашей работе мы интересуемся более общими потенциалами. В работе [8] был введен обобщенный класс потенциалов Като (состоящий из мер Радона, удовлетворяющих определенным условиям) и получены локальные оценки ядра теплопроводности для соответствующих полугрупп Шрёдингера на основе обобщения вероятностных методов, развитых в [9]. В статье [10] содержатся результаты по спектральному анализу сингулярных уравнений Шрёдингера и

широкий обзор различных подходов к анализу сингулярных уравнений Шрёдингера, включая нестандартный анализ, теорию форм Дирихле, теорию квадратичных форм, теорию самосопряженных расширений Крейна и фон Неймана и др.

В статье [11] был разработан полезный метод гладких аппроксимаций, который позволяет придать строгий смысл оператору (1.3) в весьма общих ситуациях (в частности, когда соответствующая форма незамыкаема). Аппроксимационный метод получил также дальнейшее развитие в [12]. Глубокий анализ операторов Шрёдингера на римановых многообразиях (с ограниченной снизу кривизной Риччи) с потенциалами, задаваемыми мерами практически общего вида, был предпринят в [13]. Рассматриваемые в [13] меры не обязаны быть ни регулярными, ни σ -конечными; единственное требование заключается в том, что они не задают зарядов на полярных множествах.

Если общие методы применяются в одномерной ситуации, это обычно приводит к весьма существенным упрощениям (см., например, [14], [15]).

В работе [16] было начато изучение уравнений Шрёдингера с потенциалами, сосредоточенными на гладкой поверхности, в присутствии магнитных полей. Однако, по-видимому, до сих пор нет никаких общих результатов для уравнения Шрёдингера с магнитным полем в том случае, когда потенциал V представляет собой распределение. Случай магнитных полей и потенциалов из класса Като (не распределений) был рассмотрен в [17], где самосопряженность доказывалась вероятностным методом из [9]. Что касается оценок ядер теплопроводности для этих операторов, мы отсылаем читателя к [18], [4] и содержащимся там дальнейшим ссылкам.

Перейдем теперь к обсуждению представлений с помощью континуальных интегралов. В большинстве известных подходов к математически строгому определению интеграла Фейнмана он определяется не как настоящий интеграл по настоящей σ -аддитивной мере, а как некоторый обобщенный функционал на подходящем пространстве функций, который может задаваться, например, как предел некоторых дискретных приближений, с помощью аналитического продолжения, продолжениями равенства Парсеваля и связанными с этим аксиоматическими определениями, а в относительно недавнее время – с помощью анализа белого шума (см., например, обзоры в [19]–[21], недавние результаты в [22]–[25] и обсуждение уравнения Дирака в [26]). Все же эти подходы пригодны лишь для весьма ограниченного класса потенциалов. Например, сингулярные потенциалы рассматривались с помощью анализа белого шума, но только в одномерном случае (см., например, [27] и приведенные там ссылки).

Первые попытки построения интеграла Фейнмана в виде настоящего интеграла по настоящей мере были ошибочны (см. [28]) и привели к пониманию того, что не существует непосредственного обобщения меры Винера, которое дало бы аналог формулы Фейнмана–Каца для случая операторов Шрёдингера (см., например, [29]). В [30] был предложен подход к континуальному интегралу, позволяющий выразить последний в терминах меры Винера и основанный на идее поворота классических траекторий в комплексных областях. При этом приходится наложить на потенциалы весьма ограничительные аналитические условия (см., например, [31], [32] по поводу последних результатов в этом направлении).

В другом подходе к построению настоящей фейнмановской меры, начало которо-

му было положено в [33], [34], решения уравнения Шрёдингера в импульсном представлении определяются как математические ожидания относительно некоторого обобщенного пуассоновского процесса или как интегралы по мере, сосредоточенной на кусочно постоянных траекториях. Хотя этот метод успешно применялся к различным моделям (см., например, [35] по поводу многочастичных задач, [36] по поводу простых моделей квантовой теории поля, [37] в связи с вычислительными аспектами и задачами о туннелировании, а также [38] и [39] по поводу операторов Дирака), на силы взаимодействия всегда налагались очень сильные ограничения; например, для обычного уравнения Шрёдингера этот подход использовался только для случая потенциалов, представляющих собой преобразования Фурье конечных мер. Тем не менее в работах [1], [2] в русле того же подхода была развита конструкция, покрывающая существенно более общие потенциалы. С этой целью для уравнения Шрёдингера использовалось координатное представление (а вовсе не импульсное, как в [33]), а кроме того, уравнение подвергалось регуляризации путем введения либо комплексных времен $t(1 - i\varepsilon)$, либо непрерывного неразрушающего наблюдения рассматриваемой квантовой системы с малой константой связи λ (тот факт, что такая регуляризация может помочь преодолеть трудности в математической конструкции фейнмановского интеграла, был, по-видимому, впервые замечен в [40]). Наш континуальный интеграл определяется как абсолютно сходящийся интеграл в смысле Римана или Лебега для положительных ε или λ соответственно. При этом соответствующая мера на пространстве траекторий не зависит от ε или λ (и в действительности представляет собой меру на пространстве Камерона–Мартина траекторий с квадратично суммируемыми производными). Поэтому предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow 0$ (который существует во многих ситуациях), дающий решение исходного нерегуляризованного уравнения Шрёдингера, может рассматриваться как несобственный (бесконечномерный) интеграл Римана. Как бы то ни было, в одномерном случае регуляризация не требуется и фундаментальное решение уравнения Шрёдингера дается абсолютно сходящимся бесконечномерным интегралом (корректно определенным в смысле Лебега). При этом оказывается, что наш континуальный интеграл имеет естественное представление в пространстве Фока и потому может быть выражен в терминах математического ожидания некоторого функционала относительно винеровского процесса, см. [1]. Как мы отмечали выше, в настоящей статье (которая представляет собой переработанную версию препринта автора [41]) проводится дальнейшее развитие подхода, предложенного в [1], [2], для простоты с использованием только регуляризации с помощью комплексных времен.

§ 2. Самосопряженность и асимптотики ядра теплопроводности

Всюду в работе мы предполагаем, что выполнены условия C1)–C3).

Чтобы придать смысл оператору (1.1), мы собираемся построить соответствующую полугруппу e^{-tH} . При этом для наших целей будет полезно рассмотреть более общую формальную задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DHu, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (2.1)$$

где (обобщенный) коэффициент диффузии D — произвольное комплексное число такое, что $\varepsilon = \operatorname{Re} D \geq 0$, $|D| > 0$. В представлении взаимодействия уравнение (2.1)

приобретает вид

$$u(t) = e^{-Dt\Delta/2}u_0 - D \int_0^t e^{-D(t-s)\Delta/2} (W - 2i(A, \nabla)) u(s) ds, \quad (2.2)$$

где

$$W(x) = V(x) + |A(x)|^2 - i \operatorname{div} A(x). \quad (2.3)$$

Точнее, W – мера, представляющая собой сумму меры $V - i \operatorname{div} A$ и меры с плотностью $|A|^2$ относительно меры Лебега. Буква W в уравнении (2.2) обозначает оператор умножения на W .

Хорошо известно (и видно из простых вычислений), что задачи (2.1) и (2.2) формально эквивалентны. В некоторых ситуациях с уравнением (2.2) более удобно работать, чем с (2.1), поскольку его зачастую можно решить итерационным способом. Для случая функции Грина $G^D(t, x, y)$ (или фундаментального решения) уравнения (2.2), т.е. решения с дираковским начальным условием $u_0(x) = \delta(x - y)$, итерационная процедура приводит к представлению

$$G^D(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^D(t, x, y), \quad (2.4)$$

в котором $I_0^D(t, x, y) = G_{\text{free}}^D(t, x, y)$, а дальнейшие I_k^D при $k > 0$ определяются рекурсивно по формуле

$$I_k^D(t, x, y) = -D \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} I_{k-1}^D(t-s, x, \xi) \left(W(d\xi) + 2i \frac{(A, \xi - y)}{Ds} d\xi \right) G_{\text{free}}^D(s, \xi - y) ds, \quad (2.5)$$

где G_{free}^D – функция Грина “свободного” уравнения (2.1) (т.е. уравнения с $V = 0$):

$$G_{\text{free}}^D(t, x - y) = (2\pi t D)^{-d/2} \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{2Dt} \right\}. \quad (2.6)$$

Точнее, ясно, что если ряд в правой части равенства (2.4) сходится и для его суммы G^D имеет смысл правая часть уравнения (2.2), то G^D представляет собой решение (а priori не обязательно единственное) уравнения (2.2) с начальным условием $u_0(x) = \delta(x - y)$.

Основной технический результат настоящей статьи заключается в следующем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $\varepsilon = \operatorname{Re} D > 0$, то все члены ряда (2.4) корректно определены как абсолютно сходящиеся интегралы, сам ряд абсолютно сходится и его сумма $G^D(t, x, y)$ непрерывна по $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ (и D) и удовлетворяет оценке*

$$|G^D(t, x, y)| \leq K G_{\text{free}}^{|D|^{2/\varepsilon}}(t, x, y) \exp\{B|x - y|\} \quad (2.7)$$

равномерно по $t \leq t_0$ при любом заданном t_0 , где B, K – некоторые постоянные. При этом интегральные операторы

$$(U^D(t)u_0)(t, x) = \int u_G^D(t, x, y) u_0(y) dy, \quad (2.8)$$

определяющие решения уравнения (2.2) при $t \in [0, t_0]$, образуют равномерно ограниченное семейство операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, если D вещественно, т.е. $D = \varepsilon > 0$, то существует такая постоянная $\omega > 0$, что функция Грина G^ε имеет асимптотику

$$G^\varepsilon(t, x, y) = G_{\text{free}}^\varepsilon(t, x, y)(1 + O(t^\omega) + O(|x - y|)) \quad (2.9)$$

при малых t и $x - y$. При нулевом A можно опустить множитель $\exp\{B|x - y|\}$ в (2.7) и слагаемое $O(|x - y|)$ в (2.9), причем формула (2.9) дает в этом случае глобальную (равномерную по всем x, y) асимптотику функции G^ε на малых временах.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение и доказательство этого предложения остаются в силе, если предположить, что A принимает комплексные значения. В частности, это дает оценки ядра теплопроводности для уравнения диффузии с сингулярными сносами и источниками, обобщающие некоторые результаты, полученные в работе [42] для случая, когда $V - \delta$ -функция.

Предложение 1 будет доказано в § 4.

Далее мы собираемся показать, что операторы $U^\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$, образуют сильно непрерывную полугруппу операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$. С этой целью мы сначала регуляризуем A и V с помощью следующей стандартной процедуры. Возьмем такую бесконечно гладкую неотрицательную четную функцию φ в $\mathbb{R}^d$ с носителем в шаре $B_1(0)$, что $\int \varphi(x) dx = 1$. Пусть $\varphi_a(x) = a^{-d}\varphi(x/a)$, $a > 0$, и

$$\begin{aligned} A_a(x) &= \int \varphi_a(x - y)A(y) dy, \quad A_a^2(x) = \int \varphi_a(x - y)A^2(y) dy, \\ V_a(x) &= \int \varphi_a(x - y)V(dy). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Положим

$$\begin{aligned} H_a &= \left(-i\frac{\partial}{\partial x} + A_a(x)\right)^2 + A_a^2(x) - (A_a(x))^2 + V(x) \\ &= -\Delta + 2i(A_a(x), \nabla) + W_a(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$W_a(x) = \int \varphi_a(x - y)W(y) dy = A_a^2(x) - i \operatorname{div} A_a(x) + V_a(x). \quad (2.12)$$

Легко видеть, что A_a и V_a удовлетворяют предположениям C1)–C3) с теми же постоянными α и C . Поэтому предложение 1 остается верным для решения уравнения (2.2) с заменой W , A на W_a , A_a для всех a (причем все оценки будут равномерны по a). С другой стороны, известно, что поскольку A_a и V_a – ограниченные гладкие функции, то оператор H_a самосопряжен и ограничен снизу; более того, семейство операторов $U_a^D(t)$ с ядрами G_a^D , представляющими собой решения соответствующего уравнения (2.2), является полугруппой, которая совпадает с полугруппой e^{-tDH_a} , порожденной оператором DH_a .

В конце § 4 мы докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого D такого, что $\varepsilon = \operatorname{Re} D > 0$, и для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $t > 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{a \rightarrow 0} G_a^D(t, x, y) = G^D(t, x, y)$$

равномерно по параметрам на компактных подмножествах. Кроме того, $U_n^D(t) \rightarrow U^D(t)$ при $n \rightarrow \infty$ в сильном смысле в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Из этого предложения, в частности, следует, что $U^\varepsilon(t)$ образует при вещественных ε сильно непрерывную полугруппу ограниченных самосопряженных операторов. В частности, существуют такие положительные постоянные M и b , что

$$\|U^\varepsilon(t)\| \leq M e^{b\varepsilon t}. \quad (2.13)$$

Известно, что производящий оператор произвольной сильно непрерывной операторной полугруппы в гильбертовом пространстве плотно определен и замкнут. Обозначим через $\tilde{H}$ производящий оператор полугруппы $U^1(t)$, так что $U^\varepsilon(t) = \exp\{-t\varepsilon\tilde{H}\}$. Поскольку все операторы $U^\varepsilon(t)$ самосопряженные, оператор $\tilde{H}$ является симметрическим. При этом из условия (2.13) следует, что каждое $\lambda < -b$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\tilde{H}$, так что по основному критерию самосопряженности (см., например, [29]) оператор $\tilde{H}$ самосопряжен и ограничен снизу. Итак, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Семейство (2.8) операторов $U^D(t)$ (дающих решение уравнения (2.2), которое формально эквивалентно эволюционному уравнению (2.1) с формальным производящим оператором DH) совпадает с полугруппой $\exp\{-tD\tilde{H}\}$, определенной средствами функционального исчисления для самосопряженного ограниченного снизу оператора $\tilde{H}$. Интегральные ядра операторов $\exp\{-tD\tilde{H}\}$ удовлетворяют оценкам (2.7) и (2.9).

Поскольку $e^{-tH_n} \rightarrow e^{-t\tilde{H}}$ и, формально, $H_n \rightarrow H$, интерпретация оператора $\tilde{H}$ как строгой самосопряженной версии формального выражения H согласуется с интуитивным смыслом формального оператора $\tilde{H}$. В дальнейшем мы обозначаем $\tilde{H}$ снова через H .

§3. Представление в виде континуального интеграла

Чтобы построить представление решения $U^D(t)u_0$ уравнения (1.1) в виде континуального интеграла, мы сконструируем на пространстве траекторий меру, сосредоточенную на множестве непрерывных кусочно линейных траекторий. Обозначим это множество через CPL . Далее, пусть $CPL^{x,y}(0, t)$ – класс траекторий $q: [0, t] \mapsto \mathbb{R}^d$ из CPL , соединяющих точки x и y за время t , т.е. таких, что $q(0) = x$ и $q(t) = y$. Через $CPL_n^{x,y}(0, t)$ обозначим подкласс этого класса, состоящий из всех траекторий из $CPL^{x,y}(0, t)$, у которых производная делает в точности n скачков. Очевидно, $CPL_n^{x,y}(0, t)$ параметризовано симплексом

$$\operatorname{Sim}_t^n = \{s_1, \dots, s_n : 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t\}$$

времен скачков $s_1, \dots, s_n$ производной траектории и n положениями $q(s_j)$, $j = 1, \dots, n$, траектории в эти моменты времени. Другими словами, произвольная траектория в $CPL_n^{x,y}(0, t)$ имеет вид

$$q(s) = q_{\eta_1 \dots \eta_n}^{s_1 \dots s_n}(s) = \eta_j + (s - s_j) \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{s_{j+1} - s_j}, \quad s \in [s_j, s_{j+1}] \quad (3.1)$$

(предполагается, что $s_0 = 0$, $s_{n+1} = t$, $\eta_0 = x$, $\eta_{n+1} = y$). Очевидно,

$$CPL^{x,y}(0, t) = \bigcup_{n=0}^{\infty} CPL_n^{x,y}(0, t).$$

Каждой $\mathbb{R}^{d+1}$ -значной борелевской мере $M = (\mu, \nu) = (\mu, \nu^1, \dots, \nu^d)$ на $\mathbb{R}^d$ можно сопоставить (σ -конечную) комплексную меру M^{CPL} на $CPL^{x,y}(0, t)$. Эта мера определяется как сумма мер M_n^{CPL} на конечномерных пространствах $CPL_n^{x,y}(0, t)$, где M_0^{CPL} — единичная мера на одноточечном множестве $CPL_0^{x,y}(0, t)$, а каждая мера M_n^{CPL} , $n > 0$, определяется следующим образом: если Φ — функционал на $CPL^{x,y}(0, t)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{CPL_n^{x,y}(0, t)} \Phi(q(\cdot)) M_n^{CPL}(dq(\cdot)) = \int_{\text{Sim}_t^n} ds_1 \dots ds_n \\ & \times \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mu + 2i \frac{(\eta_2 - \eta_1, \nu)}{s_2 - s_1} \right) (d\eta_1) \dots \left(\mu + 2i \frac{(y - \eta_n, \nu)}{t - s_n} \right) (d\eta_n) \Phi(q(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ничто не изменится, если определить $CPL_n^{x,y}(0, t)$ как множество траекторий, производные которых делают не более n скачков. Действительно, мера M_n^{CPL} подмножества $CPL_{n-1}^{x,y}(0, t) \subset CPL_n^{x,y}(0, t)$ в любом случае равна нулю, поскольку если, скажем, в момент времени s_j скачок отсутствует, то это означает, что $(\eta_j - \eta_{j-1})(s_{j+1} - s_{j-1}) = (\eta_{j+1} - \eta_{j-1})(s_j - s_{j-1})$, так что s_j может быть только одной точкой, а мера Лебега не имеет атомов.

Пусть теперь $M = (W, A dx/D)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого D такого, что $\varepsilon = \text{Re } D > 0$, функция Грина G^D уравнения (2.1) имеет следующее представление в виде континуального интеграла:

$$G^D(t, x, y) = \int_{CPL^{x,y}(0, t)} \Phi_D(q(\cdot)) \exp \left\{ - \int_0^t \dot{q}^2(s) \frac{ds}{2D} \right\} M^{CPL}(dq(\cdot)), \quad (3.3)$$

где $q(s)$ дается формулой (3.1), а

$$\Phi_D(q(\cdot)) = D^n \prod_{j=1}^{n+1} (2\pi(s_j - s_{j-1})D)^{-d/2}. \quad (3.4)$$

Для любого $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ решение $u(t, s)$ задачи Коши (2.1) при $D = i$ имеет вид

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{CPL^{x,y}(0,t)} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \Phi_{i+\varepsilon}(q(\cdot)) \times \exp \left\{ - \int_0^t \dot{q}^2(s) \frac{ds}{2(i+\varepsilon)} \right\} M^{CPL}(dq(\cdot)) dy, \quad (3.5)$$

где предел понимается в смысле L^2 .

В силу определения меры M^{CPL} интеграл (3.3), если он существует, представляет собой сумму сходящегося ряда из конечномерных интегралов, каждый из которых абсолютно сходится. Непосредственно видно, что эти интегралы в точности совпадают с интегралами $I_k(t, x, y)$ из ряда (2.4), (2.5). Отсюда следует, что выполнено (3.3), поскольку в предложении 1 показано, что ряд (2.4), (2.5) абсолютно сходится и что все его члены суть абсолютно сходящиеся интегралы. Формула (3.5) немедленно следует из (3.3) и того факта, что в силу функционального исчисления для любого самосопряженного полуограниченного снизу оператора имеет место сильная сходимость

$$\exp\{-itH\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\{-(i+\varepsilon)tH\}$$

для всех положительных t .

В работе [1] показано, что при $A = 0$ и $d = 1$ формула (3.3) все еще верна для $D = i$ (т.е. при нулевом ε), так что в этом случае функция Грина самого уравнения Шрёдингера существует и представляется сходящимся континуальным интегралом (без какой бы то ни было регуляризации). Это одно из проявлений отмеченного во введении факта, что в одномерной ситуации обычно происходит существенное упрощение. В общем случае вопрос о существовании поточечного предела функции G^D при $D \rightarrow i$ является весьма тонким и здесь не рассматривается. Разумно выдвинуть гипотезу, что такой предел существует, если фундаментальное решение (или функция Грина) G^i уравнения Шрёдингера существует как непрерывная функция. Последний вопрос нетривиален, и лишь в последнее время были получены некоторые результаты для весьма общих потенциалов. По этому поводу см. работу [43] (соответственно [44]) для случая, когда магнитное поле отсутствует, а потенциал гладкий (соответственно сингулярный), а также работу [45] для случая гладких магнитных полей.

При $A = 0$ интеграл (3.3) имеет простую вероятностную интерпретацию в терминах математического ожидания относительно обобщенного пуассоновского процесса. Сформулированное ниже утверждение представляет собой непосредственное следствие теоремы 2 и стандартных свойств пуассоновских процессов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть векторный потенциал A равен нулю, а V удовлетворяет условию С3). Кроме того, предположим, что V не имеет атома в начале координат и является конечной положительной мерой, так что $\lambda_V = V(\mathbb{R}^d) > 0$. Параметризуем траектории из CPL с помощью (3.1). Пусть E_t – математическое ожидание относительно скачкообразного процесса со скачками η_j , одинаково и независимо распределенными в соответствии с вероятностной мерой V/λ_V и происходящими в моменты времени $s_j \in [0, t]$, распределенные как пуассоновский процесс интенсивности λ_V .

Тогда интеграл (3.3) можно записать в виде

$$G^D(t, x, y) = e^{t\lambda_V} \mathbb{E}_t \left(\Phi_D(q(\cdot)) \exp \left\{ - \int_0^t \dot{q}^2(s) \frac{ds}{2D} \right\} \right). \quad (3.6)$$

Аналогичное представление, конечно же, существует и для формулы (3.5).

Заметим также, что используемое в теореме 3 условие, что V конечна, несущественно, поскольку, очевидно, произвольная мера V имеет плотность относительно некоторой конечной (положительной) меры $\tilde{V}$. Поэтому эту плотность можно включить в подынтегральное выражение и работать с пуассоновским процессом, задаваемым мерой Леви $\tilde{V}$.

§ 4. Доказательство предложений 1 и 2

Всюду в этом параграфе буква C используется для обозначения всевозможных постоянных.

Определим полную вариацию комплексной меры W , заданной в (2.3), как положительную меру $|W| = |V| + |A|^2 + |\operatorname{div} A|$. Начнем с простой общей оценки для $|W|$, данной ниже в лемме 1. Заметим прежде всего, что оценка (1.2) выполнена и для меры $|W|$. Кроме того, эта оценка выполнена также для всех $r \leq r_0$ при произвольном r_0 . В дальнейшем α всегда обозначает параметр из (1.2) (в частности, $\alpha = 0$ при $d = 1$).

Далее, из (1.2) легко следует, что

$$|W|(B_R(x)) \leq C(\max(1, R))^d \quad (4.1)$$

для всех R .

Выберем произвольные положительные числа t_0, ε и такое число $\delta \in (0, 1/2)$, что постоянная

$$\omega = \min \left(\frac{1}{2} - \delta, \alpha \left(\frac{1}{2} - \delta \right) - \frac{d}{2} + 1 \right)$$

положительна (это возможно в силу сделанного нами предположения относительно α).

ЛЕММА 1. *Выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^p G_{\text{free}}^\varepsilon(t, \xi) |W|(d\xi) \leq C^{p/2} ((tp)^{p/2} + t^{(p+1)\omega-1}), \quad (4.2)$$

где свободная функция Грина G_{free}^D задана формулой (2.6), а $C = C(d, \varepsilon, t_0)$ не зависит от p и $t \leq t_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если W — мера Лебега, то выполнена та же оценка, но второе слагаемое в правой части неравенства (4.2) можно опустить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается простыми вычислениями. Разложим интеграл в левой части (4.2) в сумму $I_1 + I_2$, разбивая область интегрирования в объединение непересекающихся областей D_1 и D_2 , где $D_1 = B_R$ — шар радиуса $R = \sqrt{\varepsilon} t^{1/2-\delta}$ с центром в начале координат. Оценивая $G_{\text{free}}^\varepsilon$ через $O(t\varepsilon)^{-d/2}$ и используя (1.2), получаем, что второе слагаемое в правой части (4.2) дает оценку для I_1 . Далее,

$$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{(k+1)R} \setminus B_{kR}} |\xi|^p G_{\text{free}}^\varepsilon(t, \xi) |W|(d\xi),$$

что в силу (4.1) можно оценить (с точностью до постоянного множителя) через

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^p R^p (\varepsilon t)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{k^2 R^2}{2t\varepsilon}\right\} [\max(1, (k+1)R)]^d \\ & \leq 2^p t^{-d/2} \left(\sum_{k: kR \leq 1} \exp\left\{-\frac{k^2 R^2}{2t\varepsilon}\right\} + \sum_{k: kR > 1} (kR)^{p+d} \exp\left\{-\frac{k^2 R^2}{2t\varepsilon}\right\} \right). \end{aligned}$$

Первую сумму в скобках можно оценить (с точностью до постоянной) через ее первый член

$$\exp\left\{-\frac{R^2}{2t\varepsilon}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^{-2\delta}}{2}\right\},$$

который дает экспоненциально малый вклад, а вторая сумма (в силу хорошо известной связи между суммами и интегралами от монотонных функций, и опять с точностью до постоянной) не превосходит выражения

$$\begin{aligned} & \max_{x \geq 0} \left(x^{p+d} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t\varepsilon}\right\} \right) + \frac{1}{R} \int_0^\infty x^{p+d} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t\varepsilon}\right\} dx \\ & = \left(\frac{(p+d)t\varepsilon}{e} \right)^{(p+d)/2} + (t\varepsilon)^{(p+d)/2} t^\delta \Gamma\left(\frac{p+d+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует (4.2), что и завершает доказательство леммы.

Следующая лемма является основным ингредиентом в доказательстве предложения 1.

ЛЕММА 2. Обозначим через $\tilde{I}_k^D$ интегралы, полученные из интегралов I_k^D в (2.5) заменой подынтегральных выражений их модулями. Интегралы $\tilde{I}_k^D$ (и, следовательно, $|I_k^D|$) удовлетворяют оценкам

$$\tilde{I}_k^D(t, x, y) \leq \sum_{l=0}^k \frac{B^k}{l! [(k-l)!]^\omega} |x-y|^l (t^\omega)^{k-l} G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x-y) \quad (4.3)$$

с некоторой постоянной $B > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ оценка очевидна. Докажем ее теперь для $k + 1$, предполагая, что она выполнена для k . Из (2.5) следует, что

$$\tilde{I}_{k+1}^D(t, x, y) \leq C \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{I}_k^D(t-s, x, \xi) \left(|W|(d\xi) + \frac{|\xi - y|}{s} d\xi \right) G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(s, \xi - y), \quad (4.4)$$

где C не зависит от k, t, s, x, y . Поскольку

$$\frac{(x - \xi)^2}{t - s} + \frac{(\xi - y)^2}{s} = \frac{t}{s(t - s)}(\xi - \xi_0)^2 + \frac{(x - y)^2}{t},$$

где

$$\xi_0 = \xi_0(t, s; x, y) = \frac{sx + (t - s)y}{t},$$

мы получаем из (4.3), (4.4), что

$$\tilde{I}_{k+1}^D(t, x, y) \leq JB^k G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x - y), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} J &\leq C \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l! [(k-l)!]^\omega} |x - \xi|^l ((t-s)^\omega)^{k-l} \\ &\quad \times G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi - \xi_0 \right) \left(|W|(d\xi) + \frac{|\xi - y|}{s} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Очевидно,

$$x - \xi = (\xi_0 - \xi) + \frac{t-s}{t}(x - y), \quad \xi - y = (\xi - \xi_0) + \frac{s}{t}(x - y). \quad (4.7)$$

Из первого из этих неравенств следует оценка

$$|x - \xi|^l \leq \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} |\xi - \xi_0|^{l-m} |x - y|^m \frac{(t-s)^m}{t^m}.$$

Используя также второе неравенство в (4.7), затем сдвигая переменную интегрирования ξ в интеграле (4.6) на ξ_0 и обозначая сдвинутую меру $|W|$ снова через $|W|$ (заметим, что оценки (1.2) инвариантны относительно сдвигов, так что лемма 1 выполняется и для новой меры $|W|$), мы получаем

$$\begin{aligned} J &\leq C \sum_{m=0}^k |x - y|^m \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{t-s}{t} \right)^m \sum_{l=m}^k \frac{1}{l!} \binom{l}{m} |\xi|^{l-m} \\ &\quad \times \frac{(t-s)^{\omega(k-l)}}{[(k-l)!]^\omega} G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi \right) \left[|W|(d\xi) + \left(\frac{|\xi|}{s} + \frac{|x-y|}{t} \right) d\xi \right] \\ &= C \sum_{m=0}^k |x - y|^m \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{t-s}{t} \right)^m \sum_{p=0}^{k-m} \frac{1}{p!} |\xi|^p \\ &\quad \times \frac{(t-s)^{\omega(k-p-m)}}{[(k-p-m)!]^\omega} G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi \right) \left[|W|(d\xi) + \left(\frac{|\xi|}{s} + \frac{|x-y|}{t} \right) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{I}_{k+1}^D(t, x, y) \leq B^k G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x - y) \sum_{l=0}^{k+1} \beta_l |x - y|^l, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &\leq \frac{C}{k!t^{k+1}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} (t-s)^k G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi \right) d\xi \\ &\leq \frac{C}{k!t^{k+1}} \int_0^t (t-s)^k ds = \frac{C}{(k+1)!}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а для $l < k+1$ имеем

$$\begin{aligned} \beta_l &\leq \frac{C}{l!t^l} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} (t-s)^l G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{p=0}^{k-l} \frac{|\xi|^p}{p!} \frac{(t-s)^{\omega(k-p-l)}}{[(k-p-l)!]^\omega} \left[|W|(d\xi) + \frac{|\xi|}{s} d\xi \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{t-s} \sum_{p=0}^{k+1-l} \frac{|\xi|^p}{p!} \frac{(t-s)^{\omega(k+1-p-l)}}{[(k+1-p-l)!]^\omega} d\xi \right). \end{aligned}$$

Здесь вторая сумма может быть переписана в виде

$$\frac{(t-s)^{\omega(k+1-l)}}{[(k+1-l)!]^\omega} + \sum_{p=0}^{k-l} \frac{|\xi|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{(t-s)^{\omega(k-p-l)}}{[(k-p-l)!]^\omega}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \beta_l &\leq \frac{K}{l!t^l[(k+1-l)!]^\omega} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} (t-s)^{l+\omega(k-l)} G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} \left(\frac{s(t-s)}{t}, \xi \right) \\ &\quad \times \left\{ l(t-s)^{\omega-1} + \sum_{p=0}^{k-l} \left[\frac{(k+1-l)!}{(k-p-l)!} \right]^\omega (t-s)^{-\omega p} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{|\xi|^p}{p!} |W|(d\xi) + \frac{|\xi|^{p+1}}{(p+1)!} \left(\frac{p+1}{s} + \frac{l}{t-s} \right) d\xi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

По формуле Стирлинга имеем

$$\frac{(k+1-l)!}{(k-p-l)!} \leq C^p \sqrt{\frac{k+1-l}{k-p-l}} (k-l)^{1+p}$$

при $p < k-l$. Поэтому сумма в (4.10) оценивается суммой

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{k-l} \frac{C^p}{p^p} k^{\omega(1+p)} \left[\frac{k+1-l}{k+1-p-l} \right]^{\omega/2} (t-s)^{-\omega p} \\ &\quad \times \left[|\xi|^p |W|(d\xi) + |\xi|^{p+1} \left(\frac{1}{s} + \frac{l}{t-s} \right) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, из леммы 1 вытекает, что β_l не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{C}{l! t^l} \frac{1}{[(k+1-l)!]^\omega} \int_0^t ds (t-s)^{l+\omega(k-l+1)-1} \\ & \left\{ l + \sum_{p=0}^{k-l} \frac{C^p}{p^p} \frac{k^{\omega(1+p)}}{(t-s)^{\omega(p+1)-1}} \left[\frac{k+1-l}{k+1-p-l} \right]^{\omega/2} \right. \\ & \times \left[\left(\frac{(t-s)s}{t} \right)^{p/2} p^{p/2} + \left(\frac{(t-s)s}{t} \right)^{(p+1)\omega-1} \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{(t-s)s}{t} \right)^{(1+p)/2} p^{p/2} \left(\frac{1}{s} + \frac{l}{t-s} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta_l \leq \frac{C}{l! t^l} \frac{(t^\omega)^{k+1-l}}{[(k+1-l)!]^\omega} (1 + \gamma_l), \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_l = & \sum_{p=0}^{k-l} C^p k^{\omega(1+p)} \left[\frac{k+1-l}{k+1-p-l} \right]^{\omega/2} \\ & \times \left[B \left(l + \omega(k-l) + 1, \frac{p}{2} + 1 \right) p^{-p/2} + B(l + \omega(k-l+1), (p+1)\omega) p^{-p} \right. \\ & \left. + B \left(l + \omega(k-l) + \frac{3}{2}, \frac{p+1}{2} \right) p^{-p/2} + l B \left(l + \omega(k-l) + \frac{1}{2}, \frac{p+3}{2} \right) p^{-p/2} \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

а $B(u, v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$ обозначает бета-функцию Эйлера.

Мы собираемся показать, что γ_l равномерно ограничены. По формуле Стирлинга можем записать

$$\begin{aligned} & B \left(l + \omega(k-l) + 1, \frac{p}{2} + 1 \right) p^{-p/2} \\ & \leq C^p \exp \left\{ (l + \omega(k-l)) \ln(l + \omega(k-l)) \right. \\ & \quad \left. - \left(l + \omega(k-l) + 1 + \frac{p}{2} \right) \ln \left(l + \omega(k-l) + 1 + \frac{p}{2} \right) \right\} \\ & \leq C^p \exp \left\{ (l + \omega(k-l)) \ln(l + \omega(k-l)) \right. \\ & \quad \left. - \left(l + \omega(k-l) + 1 + \frac{p}{2} \right) \ln(l + \omega(k-l)) \right\} \\ & \leq C^p k^{-1-p/2} \end{aligned}$$

(напомним, что буква C в разных местах может обозначать разные постоянные) и аналогично

$$\begin{aligned} B(l + \omega(k - l + 1), (p + 1)\omega)p^{-p} &\leq C^p p^{-(1-\omega)} k^{-\omega(1+p)}, \\ B\left(l + \omega(k - l) + \frac{3}{2}, \frac{p+1}{2}\right)p^{-p/2} &\leq C^p k^{-(1+p)/2}, \\ lB\left(l + \omega(k - l) + \frac{1}{2}, \frac{p+3}{2}\right)p^{-p/2} &\leq lC^p k^{-(3+p)/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, первый и четвертый члены в квадратных скобках в (4.12) оцениваются через третий член, и мы получаем

$$\gamma_l \leq \sum_{p=0}^{k-l} C^p \left[\frac{k+1-l}{k-p-l} \right]^{\omega/2} (p^{-p(1-\omega)} + k^{-(1+p)(1/2-\omega)}).$$

Здесь сумму можно разбить на две таким образом, что в первой сумме параметр p меняется от 0 до $(k-l)/2$, а во второй — от $(k-l)/2$ до $k-l$. В первой сумме $(k+1-l)/(k+1-l-p) \leq 2$, и поэтому она, очевидно, ограничена. Чтобы упростить вторую сумму, мы обозначим $m = (k-l)/2$ и заменим индекс суммирования p на $q = p - m$. Это дает оценку

$$\gamma_l \leq C + \sum_{q=0}^m C^{m+q} m^{\omega/2} ((m+q)^{-(m+q)(1-\omega)} + k^{-(1+m+q)(1/2-\omega)}).$$

Здесь член $m^{\omega/2}$ можно включить в множитель C^{m+q} (подходящим образом меняя C). Далее, вклад второго члена в скобках ограничен, поскольку частное C/k мало для больших k и соответствующая сумма оценивается сходящейся геометрической прогрессией. Поэтому

$$\gamma_l \leq C + \sum_{q=0}^{\infty} C^{m+q} (m+q)^{-(m+q)(1-\omega)}.$$

Выбирая такое q_0 , что $q_0^{1-\omega} > C$, мы получаем оценку

$$\gamma_l \leq C + \sum_{q=0}^{q_0} C^{m+q} (m+q)^{-(m+q)(1-\omega)} + \sum_{q=q_0}^{\infty} (C(m+q_0)^{-(1-\omega)})^{m+q}.$$

Вторая сумма здесь снова ограничена как геометрическая прогрессия, и мы имеем оценку

$$\gamma_l \leq C + q_0 C^{q_0} C^m m^{-m(1-\omega)},$$

в которой правая часть ограничена равномерно по m . Итак, γ_l ограничены и из (4.8), (4.11) получаем нужную оценку для $\tilde{I}_{k+1}^D$, что завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{I}_k^D(t, x, y) &\leq G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x-y) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l |x-y|^l}{l!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{B^{k-l} (t^\omega)^{k-l}}{[(k-l)!]^\omega} \\ &= G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x-y) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l |x-y|^l}{l!} f(t^\omega) \end{aligned}$$

равномерно по $t \leq t_0$, где

$$f(t^\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B^p (t^\omega)^p}{[p!]^\omega}$$

— целая функция от t^ω . Отсюда очевидным образом следует оценка (2.7) для суммы (2.4). При $A = 0$ все вычисления существенно упрощаются и вместо оценки (4.3) получается оценка

$$\tilde{I}_k(t, x, y) \leq \frac{(Bt^\omega)^k}{(k!)^\omega},$$

так что множитель $\exp\{B|x-y|\}$ в (2.7) не появляется. Далее, для вещественного $D = \varepsilon$ имеем $G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon} = G_{\text{free}}^\varepsilon$ и асимптотика (2.9) вытекает из оценок, полученных в лемме 2. Наконец, непосредственные вычисления показывают, что интегральные операторы с интегральными ядрами $G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x-y) \exp\{B|x-y|\}$ равномерно ограничены, так что нужное утверждение об ограниченности операторов (2.8) вытекает из оценки (2.7).

Обратимся теперь к доказательству предложения 2.

Прежде всего заметим, что для произвольной дифференцируемой функции g справедливо равенство

$$\int g(y)(W_a - W)(dy) = \iint (g(y-z) - g(y))W(dy)\varphi_a(z) dz$$

и поэтому

$$\left| \int g(y)(W_a - W)(dy) \right| \leq a \int \sup_{z \in B_a(y)} |g'(z)| |W|(dy). \quad (4.13)$$

Такая же оценка выполнена для векторнозначной функции A , т.е.

$$\left| \int g(y)(A_a - A) dy \right| \leq a \int \sup_{z \in B_a(y)} |g'(z)| |A| dy. \quad (4.14)$$

Через $I_k^{D,a}$ обозначим интегралы (2.5), в которых все W и A заменены своими приближениями W_a и A_a . Тогда, очевидно,

$$|I_k^{D,a}(t, x, y) - I_k^D(t, x, y)| \leq \sum_{p=1}^k I_{k,p}^{D,a}(t, x, y), \quad (4.15)$$

где

$$I_{k,k}^{D,a}(t, x, y) = -D \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} I_{k-1}^D(t-s, x, \xi) \times \left((W_a - W)(d\xi) + 2i \frac{(A_a - A, \xi - y)}{Ds} d\xi \right) G_{\text{free}}^D(s, \xi - y) ds, \quad (4.16)$$

а при $k > p$ интегралы $I_{k,p}^{D,a}$ определяются рекуррентными формулами

$$I_{k,p}^{D,a}(t, x, y) = -D \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} I_{k-1,p}^{D,a}(t-s, x, \xi) \times \left(W_a(d\xi) + 2i \frac{(A_a, \xi - y)}{Ds} d\xi \right) G_{\text{free}}^D(s, \xi - y) ds. \quad (4.17)$$

Чтобы доказать предложение 2, мы должны оценить левую часть в (4.15), а для этого нам нужны оценки интегралов $I_{k,p}^{D,a}$.

ЛЕММА 3. *Справедливы оценки*

$$|I_{k,k}^{D,a}(t, x, y)| \leq \left(\frac{ak}{t} \right)^\nu \sum_{l=0}^k \frac{\tilde{B}^k}{l! [(k-l)!]^\omega} |x - y|^l (t^\omega)^{k-l} G_{\text{free}}^{2|D|^2/\varepsilon}(t, x - y), \quad (4.18)$$

где ν — произвольное число из интервала $(0, \omega)$, а $\tilde{B}$ — некоторая постоянная (зависящая от выбора ν).

ЗАМЕЧАНИЕ. Это очень грубая оценка, поскольку в нее входит $G_{\text{free}}^{2|D|^2/\varepsilon}$ в отличие от $G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}$ в (4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим интеграл в (4.16) в сумму $J_1 + J_2 + J_3$ трех интегралов по областям

$$D_1 = \{s : s < a\}, \quad D_2 = \{s : (t-s) < a\}, \quad D_3 = \{s : a \leq \min(s, t-s)\}.$$

В D_1 мы используем оценку $1 \leq s^{-\nu} a^\nu$. Просматривая доказательство леммы 2, видим, что дополнительный множитель $s^{-\nu}$ в подынтегральном выражении приводит к дополнительному множителю $(k/t)^\nu$ в оценке. То же самое происходит с интегралом по D_2 , где мы используем оценку $1 \leq (t-s)^{-\nu} a^\nu$ (в этом случае оценка даже лучше, поскольку она не содержит k^ν , что в данный момент неважно, но будет существенно в доказательстве леммы 4). Таким образом, оценка для $J_1 + J_2$ такая же, как и для I_k^D , но с дополнительным множителем $(ak/t)^\nu$, что и требовалось. Остается оценить интеграл J_3 . С этой целью мы воспользуемся формулами (4.13) и (4.14). Дифференцирование по ξ подынтегрального выражения в (4.16) дает два слагаемых $J_3^1 + J_3^2$, которые происходят из дифференцирования I_{k-1}^D и членов справа от $(W_a - W)$ соответственно. Рассмотрим только вклад J_3^2 второго члена (вклад первого члена рассматривается аналогично). Имеем

$$J_3^2 \leq aC \int_{D_3} \int_{\mathbb{R}^d} |I_{k-1}^D(t-s, x, \xi)| \times \left[\left(|W|(d\xi) + \frac{|\xi - y|}{s} d\xi \right) \left(\frac{|\xi - y|}{s} + a \right) + \frac{1}{s} d\xi \right] |G_{\text{free}}^D(s, \xi - y)| ds.$$

С учетом определения области D_3 можно здесь написать оценку $a/s \leq (a/s)^\nu$. Воспроизводя все шаги из доказательства леммы 2, получаем такую же оценку, как и для $|I_k^D|$, но с множителем $(ak/t)^\nu(1+|x-y|)$. Очевидно, можно избавиться от $|x-y|$, заменяя $G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}$ на $G_{\text{free}}^{2|D|^2/\varepsilon}$ в оценке для I_k , что и приводит к требуемой оценке (4.18).

ЛЕММА 4. При $k \geq p$ справедливы оценки

$$|I_{k,p}^{D,a}(t, x, y)| \leq \left(\frac{ap}{t}\right)^\nu \sum_{l=0}^k \frac{\tilde{B}^k}{l! [(k-l)!]^\omega} |x-y|^l (t^\omega)^{k-l} G_{\text{free}}^{2|D|^2/\varepsilon}(t, x-y). \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (4.17) и опять анализируя доказательство леммы 2, видим, что дополнительный множитель $t^{-\nu}$ (которым, по существу, и отличается $I_{k,k}^D$ от I_k^D) просто воспроизводится при каждом применении формулы (4.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Из (4.15) и леммы 4 следует, что

$$|G_a^D(t, x, y) - G^D(t, x, y)| \leq K \left(\frac{a}{t}\right)^\nu G_{\text{free}}^{2|D|^2/\varepsilon}(t, x, y) \exp\{\tilde{B}|x-y|\}, \quad (4.20)$$

откуда предложение 2 вытекает с очевидностью.

§ 5. О понятии размерности меры

Обсудим связь нашего предположения С3) относительно меры V с аналогичным предположением из [11]. Пусть μ — конечная (положительная) мера Радона в $\mathbb{R}^d$. Число N называлось в статье [11] *допустимым* для μ , если существует такая постоянная $C(N)$, что

$$\mu(B_r(x)) \leq C(N)r^N \quad (5.1)$$

для всех r и μ -почти всех x . Супремум $\dim \mu$ всех допустимых чисел был назван *размерностью* меры μ .

Как легко видеть, можно опустить условие, что неравенство (5.1) выполнено лишь почти для всех x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Предположим, что (5.1) выполнено почти для всех x (относительно μ). Тогда (5.1) выполнено для всех $x \in \mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что x — произвольная точка носителя меры μ . Тогда существует такая последовательность точек x_n , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

и неравенство (5.1) выполнено для всех x_n . Каково бы ни было δ , для достаточно больших n справедливо включение $B_r(x) \subset B_{r+\delta}(x_n)$, так что неравенство (5.1) выполнено для x с заменой r на $r+\delta$ в правой части. Поскольку δ произвольно мало, оно выполнено и для $\delta = 0$. Чтобы теперь доказать (5.1) для всех x (не обязательно из носителя меры μ), заметим, что для любого d существует целое число $K(d)$, ограничивающее сверху мощность любого конечного подмножества

$S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset B_r$, обладающего тем свойством, что расстояние между любыми двумя точками x_i, x_j не меньше r . Поэтому пересечение шара $B_r(x)$ с носителем меры μ может быть покрыто $K(d)$ шарами, центры которых принадлежат носителю меры μ . Итак, (5.1) выполнено для всех x (с заменой $C(N)$ на $C(N)K(d)$).

Обобщая понятие размерности конечной меры, скажем, что мера μ (теперь уже не обязательно конечная) имеет локальную размерность $\dim_{\text{loc}} \mu$, если это супремум таких чисел N , что неравенство (5.1) выполнено при $r \leq 1$ (или, эквивалентно, при $r \leq r_0$ для произвольно заданного r_0) и при всех x . Таким образом, наше предположение С3) в случае $d > 1$ означает, что обе меры V и $\text{div } A$ имеют локальные размерности большие чем $d - 2$.

Для случая, когда V — положительная конечная мера размерности большей чем $d - 2$, носитель которой представляет собой подмножество лебеговой меры нуль в $\mathbb{R}^d$, самосопряженность оператора (1.3) в смысле замыкаемости соответствующей формы была доказана в [11; предложение 12] при условии малости постоянной связи, т.е. с заменой V на λV при достаточно малом λ .

§ 6. Обобщения

Наши основные предположения С1)–С3) относительно A и V можно обобщать в разных направлениях, по существу не меняя основных результатов. Укажем некоторые возможности; подробности будут опубликованы в другой работе.

1) Вместо С1) можно использовать предположение, что функция A принадлежит равномерному локальному классу L^p при $p > d$, т.е.

$$\int_{B_1(x)} |A|^p(y) dy \leq C$$

с некоторой постоянной C равномерно для всех x . (В частности, это обобщает предположения, входящие в хорошо известный критерий самосопряженности из [46] для размерностей $d \leq 3$.)

В этом случае вместо основной оценки (2.7) для соответствующего ряда (2.4) можно доказать, что

$$|G^D(t, x, y)| \leq K G_{\text{free}}^{|D|^2/\varepsilon}(t, x, y) \exp \left\{ \frac{B|x - y|}{t^\nu} \right\}$$

для некоторого $\nu < 1/2$, а все остальные результаты затем обобщаются в соответствии с этим изменением.

2) Легко можно рассмотреть случай гармонического осциллятора в присутствии постоянного магнитного поля. Более точно, вместо оператора (1.1) можно рассмотреть оператор

$$H = \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + A(x) + Mx \right)^2 + V(x) + (Gx, x),$$

где M и G — некоторые матрицы, причем G неотрицательна, а A и V удовлетворяют условиям С1)–С3). При этих предположениях все рассуждения проводятся аналогично, но вместо явной формулы (2.6) для G_{free}^D следует использовать явное выражение для ядра теплопроводности в случае гармонического осциллятора в постоянном магнитном поле. В частности, это обобщение включает интересную точно

решаемую модель, описывающую эффект Ааронова–Бома с δ -образным взаимодействием, который подробно рассматривается в [16]. Для нулевых A и M такое обобщение нашей конструкции дано в [2].

3) Наконец, вместо того чтобы прибавлять к оператору (1.2) квадратичные члены, как в п. 2) выше, к нему можно добавить любой локально аналитический (или, более общо, гладкий) потенциал W . Представление решения соответствующего уравнения Шрёдингера в виде континуального интеграла можно получить, обобщая подход, разработанный в [1] для аналитических потенциалов без сингулярных возмущений. Соответствующая мера на пространстве траекторий будет сосредоточена на множестве локально классических траекторий, определяемых гамильтонианом $p^2 + W(x)$.

Автор признателен Д. Эплбауму за то, что он прочел работу и сделал ряд полезных замечаний. Автор благодарен также всем слушателям его докладов на тему этой работы в университетах Кембриджа, Халла, Ноттингема, Ноттингема Трент и Нагой.

Список литературы

1. *Kolokoltsov V.* Semiclassical analysis for diffusion and stochastic processes. Berlin: Springer-Verlag, 2000. (Lecture Notes in Math. V. 1724.)
2. *Kolokoltsov V.* A new path integral representation for the solutions of the Schrödinger, heat and stochastic Schrödinger equations // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2002. V. 132. P. 353–375.
3. *Арсеньев А. А.* Сингулярные потенциалы и резонансы. М.: Изд-во МГУ, 1974.
4. *Liskevich V., Manavi P.* Dominated semigroups with singular complex potentials // *J. Funct. Anal.* 1997. V. 151. №2. P. 281–305.
5. *Zhang Qi S.* Large time behavior of Schrödinger heat kernels and applications // *Comm. Math. Phys.* 2000. V. 210. P. 371–398.
6. *Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
7. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
8. *Blanchard Ph., Ma Zh.* Semigroups of Schrödinger operators with potentials given by Radon measures // *Stochastic processes, physics and geometry* / ed. S. Albeverio et al. Teaneck, NJ: World Scientific, 1990. P. 160–195.
9. *Simon B.* Schrödinger semigroups // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1982. V. 7. P. 447–526.
10. *Brasche J. F.* Generalised Schrödinger operators, an inverse problem in spectral analysis and the Efimov effect // *Stochastic processes, physics and geometry* / ed. S. Albeverio et al. Teaneck, NJ: World Scientific, 1990. P. 207–244.
11. *Albeverio S., Fenstad J. E., Hoegh-Krohn R., Karwowski W., Lindstrom T.* Schrödinger operators with potentials supported by null sets // *Ideas and methods in quantum and statistical physics. V. 2. In memory of R. Hoegh-Krohn* / ed. S. Albeverio et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P. 63–95.
12. *Brasche J. F., Figari R., Teta A.* Singular Schrödinger operators as limits of point interaction Hamiltonians // *Potential Anal.* 1998. V. 8. №2. P. 163–178.
13. *Sturm K.-T.* Schrödinger semigroups on manifolds // *J. Funct. Anal.* 1993. V. 118. P. 309–350.
14. *Brasche J. F.* Perturbation of Schrödinger Hamiltonians by measures – self-adjointness and lower semiboundedness // *J. Math. Phys.* 1985. V. 26. P. 621–626.
15. *Савчук А. М., Шкаликков А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // *Матем. заметки*. 1999. Т. 66. №6. С. 897–912.

16. *Dabrowski L., Stovicek P.* Aharonov–Bohm effect with δ -type interaction // J. Math. Phys. 1998. V. 39. №1. P. 47–62.
17. *Broderix K., Hundertmark D., Leschke H.* Continuity properties of Schrödinger semigroups with magnetic fields // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. №2. P. 181–225.
18. *Loss M., Thaler B.* Optimal heat kernel estimates for Schrödinger operators with magnetic fields in two dimensions // Comm. Math. Phys. 1997. V. 186. №1. P. 95–107.
19. *Albeverio S., Boutet de Monvel-Bertier A., Brzezniak Z.* Stationary phase method in infinite dimensions by finite approximations: Applications to the Schrödinger equation // Potential Anal. 1995. V. 4. №5. P. 469–502.
20. *Kolokoltsov V.* Complex measures on path space: an introduction to the Feynman integral applied to the Schrödinger equation // Methodol. Comput. Appl. Probab. 1999. V. 1. №3. P. 349–365.
21. *Смолянов О. Г., Шавгулдзе Е. Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
22. *Ichinose W.* On convergence of the Feynman path integral formulated through broken line paths // Rev. Math. Phys. 1999. V. 11. P. 1001–1025.
23. *Loo K.* A rigorous real time Feynman path integral // J. Math. Phys. 1999. V. 40. №1. P. 64–70.
24. *Albeverio S., Kolokoltsov V. N., Smolyanov O. G.* Continuous quantum measurement: Local and global approaches // Rev. Math. Phys. 1997. V. 9. №8. P. 907–920.
25. *Truman A., Zhao H.* Stochastic Hamilton–Jacobi equation, stochastic heat equation and Schrödinger equations // Stochastic analysis and application / ed. A.M. Etheridge. Singapore: World Scientific Press, 1996. P. 441–464.
26. *Zastawniak T.* Path integral for the Dirac equation – some recent developments in mathematical theory // Stochastic analysis, path integration and dynamics / ed. K. D. Elworthy, J.-C. Zambirini, 1989. P. 243–264. (Pitman Research Notes in Mathematics Series V. 200.)
27. *Asai N., Kubo I., Kuo H.-H.* Feynman integrals associated with Albeverio–Hoegh-Krohn and Laplace transform potentials // Stochastics in finite and infinite dimensions. Boston: Birkhäuser, 2000. P. 29–48.
28. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах с приложениями к квантовой физике // УМН. 1956. Т. 11. №1. С. 77–114.
29. *Reed M., Simon B.* Methods of mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness. New York: Academic Press, 1975.
30. *Doss H.* Sur une résolution stochastique de l'équation de Schrödinger à coefficient analytiques // Comm. Math. Phys. 1980. V. 73. P. 243–264.
31. *Haba Z.* Stochastic interpretation of Feynman path integral // J. Math. Phys. 1994. V. 35. №2. P. 6344–6359.
32. *Haba Z.* Feynman integral in regularized nonrelativistic quantum electrodynamics // J. Math. Phys. 1998. V. 39. №4. P. 1766–1787.
33. *Maslov V. P., Chebotarev A. M.* Processus à sauts et leur application dans la mécanique quantique // Feynman path integrals. Lecture Notes in Phys. 1979. V. 106. P. 58–72.
34. *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
35. *Gaveau B., Kac M.* A probabilistic formula for the quantum N -body problem and the nonlinear Schrödinger equation in operator algebra // J. Funct. Anal. 1986. V. 66. P. 308–322.
36. *Serva M.* Probabilistic solutions of generalized birth and death equations and applications to field theory // J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 435–446.
37. *Chebotarev A. M., Quezada R. B.* Stochastic approach to time-dependent quantum tunnelling // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 4. №3. P. 275–286.
38. *Gaveau B.* Representation formulas of the Cauchy problem for hyperbolic systems generalizing Dirac system // J. Funct. Anal. 1984. V. 58. P. 310–319.
39. *Kitarev D. V., Yegikian R. S.* Feynman path integral for Dirac system with analytic potential // J. Math. Phys. 1993. V. 34. №7. P. 2821–2826.

40. Менский М. В. Трудности в математическом определении континуальных интегралов преодолеваются в теории непрерывных квантовых измерений // ТМФ. 1992. Т. 93. №2. С. 264–272.
41. Kolokoltsov V. Singular Schrödinger equations with magnetic fields: self-adjointness and path integral representation // Preprint 7/00. Dep. Math. Stat. and O.R. Nottingham Trent University, 2000.
42. Albeverio S., Brzezniak Z., Dabrowski L. Fundamental solution of the heat and Schrödinger equations with point interaction // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 220–254.
43. Yajima K. Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations // Comm. Math. Phys. 1996. V. 181. P. 605–629.
44. Yajima K. Boundedness and continuity of the fundamental solution of the time dependent Schrödinger equation with singular potentials // Tôhoku Math. J. 1998. V. 50. P. 577–595.
45. Yajima K. Schrödinger evolution equations with magnetic fields // J. Anal. Math. 1991. V. 56. P. 29–76.
46. Leinfelder H., Simader C. Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials // Math. Z. 1981. V. 176. P. 1–19.

Nottingham Trent University, Nottingham, UK,
Институт проблем передачи информации РАН, Москва
E-mail: vassili.kolokoltsov@ntu.ac.uk

Поступила в редакцию
05.01.2001 и 20.09.2002