Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, Обобщенные многочлены Полачека, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 113–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:31:42

УДК 517.53

В. Н. Сорокин

Обобщенные многочлены Полачека

Получена слабая асимптотика многочленов совместной ортогональности для двух весов Полачека. Показано, что предельная мера распределения нулей служит решением векторной задачи равновесия теории логарифмического потенциала при наличии внешнего поля и ограничения на меры.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: многочлены Полачека, совместно ортогональные многочлены, векторная задача равновесия.

§ 1. Введение

В теории рациональных аппроксимаций аналитических функций и ее приложениях важную роль играют понятия системы Никишина [1]–[3] и связанные с ней многочлены совместной ортогональности. Дадим определение такой системы для случая двух функций $\hat{\mu}_j(z)$, $j = 1, 2$. Это – функции марковского типа, т.е.

$$\hat{\mu}_j(z) = \int \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad j = 1, 2,$$

где μ_j – конечные положительные борелевские меры на некотором отрезке $\Delta = [a, b]$ вещественной оси. При этом отношение мер, т.е. производная Радона–Никодима

$$u(x) = \frac{d\mu_2(x)}{d\mu_1(x)}, \quad (1.1)$$

также является функцией марковского типа, т.е.

$$u(x) = \int \frac{d\nu(t)}{x - t}, \quad (1.2)$$

где ν – мера на некотором отрезке $F = [c, d]$ вещественной оси, который не пересекается с отрезком Δ . Договоримся в определение классической системы Никишина также включать следующие условия

$$\mu'_1(x) > 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Delta, \quad \nu'(t) > 0 \quad \text{для п.в. } t \in F \quad (1.3)$$

(“для п.в.” относительно классической меры Лебега).

Многочлены совместной ортогональности $P_n(x)$ – это многочлены степени $2n$, удовлетворяющие соотношениям

$$\int_{\Delta} P_n(x) x^m d\mu_j(x) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3906.2008.1).

(Заметим, что приведенное выше определение – это частный случай более общего определения.) Для каждого целого $n \geq 0$ существует единственный (с точностью до нормировки) многочлен P_n . Все его $2n$ нулей простые и лежат на интервале (a, b) (см. [4]).

Многие задачи теории приближений сводятся к вопросу о предельном распределении нулей многочленов совместной ортогональности. Этот вопрос был полностью решен в работе [4] для широкого класса систем аналитических функций, включающего в себя и системы Никишина любого порядка.

А именно, существуют единственные меры λ_Δ и λ_F такие, что носитель меры λ_Δ лежит на отрезке Δ ($S(\lambda_\Delta) \subset \Delta$) и величина меры равна двум ($|\lambda_\Delta| = 2$), а носитель меры λ_F лежит на отрезке F ($S(\lambda_F) \subset F$) и величина меры равна единице ($|\lambda_F| = 1$). При этом выполняются следующие условия равновесия:

$$2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_F} \begin{cases} \leq w_\Delta \text{ на } S(\lambda_\Delta), \\ \geq w_\Delta \text{ на } \Delta, \end{cases} \quad 2V^{\lambda_F} - V^{\lambda_\Delta} \begin{cases} \leq w_F \text{ на } S(\lambda_F), \\ \geq w_F \text{ на } F, \end{cases}$$

где w_Δ и w_F – некоторые постоянные,

$$V^\mu(x) = \int \log \frac{1}{|x-t|} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{C},$$

– логарифмический потенциал меры μ на комплексной плоскости [5].

Утверждается, что мера λ_Δ служит предельным распределением нулей многочленов P_n . Другими словами, если положить старший коэффициент многочлена равным единице, то при $n \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{n} \log |P_n(x)| \rightarrow V^{\lambda_\Delta}(x) \quad (1.5)$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus \Delta$. (В этой простейшей ситуации можно утверждать, что носители $S(\lambda_\Delta)$ и $S(\lambda_F)$ совпадают с отрезками Δ и F соответственно.) Формулы вида (1.5) называются слабыми асимптотиками (или асимптотиками корня n -й степени).

Однако часто возникают задачи, в которых некоторые условия, входящие в определение системы Никишина, нарушаются. Для таких случаев не разработано общих теорий. Но к настоящему времени появилось много интересных примеров таких задач. Рассмотрим несколько типичных ситуаций.

Например, один или оба промежутка Δ , F могут быть бесконечными. Изучение многочленов, ортогональных на бесконечных промежутках, методами теории потенциала было начато Е. А. Рахмановым в работе [6].

Еще одна интересная задача возникает, когда отношение мер (1.2) является целой функцией. Такой пример рассмотрел В. Г. Лысов [7]. При этом вместо отрезка F появляется дуга на комплексной плоскости, аналогичная той, которая впервые появилась в работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [8], связанной с наилучшими приближениями экспоненты. Похожий эффект был отмечен и в работе [9].

Далее, могут нарушаться условия (1.3). Например, одна или обе меры μ_1 , ν дискретны. Первые результаты по применению теории потенциала к дискретным ортогональным многочленам также получены Е. А. Рахмановым [10]. Е. Кусман и В. Ван Аше (см. [11], [12]) рассмотрели пример, в котором меры μ_1 , μ_2 абсолютно непрерывны на промежутке $[0, +\infty)$ с весами, убывающими

как e^{-x} , а мера ν дискретна на промежутке $(-\infty, 0]$. В последнее время такие системы Никишина стали применяться в некоторых задачах теории случайных матриц (см. [13]–[15]).

Цель настоящей работы – изучить еще один пример, аналогичный примеру Кусмана и Ван Аше, но в котором веса убывают как $e^{-\sqrt{x}}$. Это – пограничный случай определенности проблемы моментов. В работе изучается слабая асимптотика соответствующих многочленов совместной ортогональности и показано, что мера распределения нулей может быть интерпретирована как решение задачи равновесия.

§ 2. Постановка задачи

На положительной полуоси $\Delta = [0, +\infty)$ определим две меры

$$d\mu_1(x) = \frac{1}{12} \frac{dx}{\operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{x}}{2}}, \quad d\mu_2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{x}}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}. \quad (2.1)$$

Эти меры – частный случай мер Полачека, которые обсуждаются далее в § 5. Их отношение

$$u(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{x}}{2} \quad (2.2)$$

является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках

$$x_k = -(2k+1)^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и вычетами, равными $24/\pi$. Обозначим через ν бесконечную меру на отрицательной полуоси $F = (-\infty, 0]$, у которой массы величины $24/\pi$ сосредоточены в точках x_k . Тогда

$$u(x) = \int \frac{d\nu(t)}{x-t}.$$

Обозначим через P_n многочлены совместной ортогональности, удовлетворяющие соотношениям (1.4) с мерами (2.1). Они существуют, определены единственным образом (с точностью до нормировки) и имеют $2n$ простых нулей на промежутке Δ . Удобную для нас нормировку этих многочленов введем позже.

Рассмотрим следующую задачу: изучить поведение нулей многочленов P_n при $n \rightarrow \infty$.

§ 3. Основной результат

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей работы, обсудим поставленную задачу. Из характера убывания весов (2.1) на бесконечности следует (см. [6]), что необходимо масштабировать многочлены P_n следующим образом

$$P_n^*(x) = C_n P_n(4n^2 x), \quad (3.1)$$

где нормировочная постоянная C_n выбирается так, чтобы старший коэффициент многочлена (3.1) равнялся единице.

Обозначим через λ_Δ предельную меру распределения нулей этих многочленов (предполагая, что она существует). Тогда λ_Δ – мера величины два на промежутке Δ . Обозначим через λ_F предельную меру дополнительных точек

интерполяции (см. [4]). Это – мера величины один на промежутке F . В §2 было показано, что преобразования Коши мер (2.1) образуют систему типа системы Никишина (хотя и с бесконечными промежутками Δ , F и дискретной мерой ν). Поэтому можно предположить, что потенциалы мер λ_Δ и λ_F удовлетворяют стандартной задаче равновесия для систем Никишина со следующими двумя дополнениями. Во-первых, результат масштабирования (3.1) приводит к появлению внешнего поля

$$\phi(x) = \pi\sqrt{x}, \quad x \in \Delta.$$

Во-вторых, по теореме Чебышёва–Маркова–Стилтьеса о разделении нулей меры λ_F должна удовлетворять ограничению, соответствующему распределению полюсов функции (2.2), а именно,

$$d\lambda_c(x) = \frac{dx}{2\sqrt{|x|}}, \quad x \in F.$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче теории логарифмического потенциала.

ЗАДАЧА S . Требуется найти две меры – меру λ_Δ величины два с носителем на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$ и меру λ_F величины один с носителем на промежутке $F = (-\infty, 0]$ такие, чтобы

а) выполнялось ограничение

$$\lambda_F \leq \lambda_c;$$

б) были справедливы следующие условия равновесия:

$$W_\Delta = 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_F} + \phi \begin{cases} \leq w_\Delta \text{ на } S(\lambda_\Delta), \\ \geq w_\Delta \text{ на } \Delta, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$W_F = 2V^{\lambda_F} - V^{\lambda_\Delta} \begin{cases} \leq w_F \text{ на } S(\lambda_F), \\ \geq w_F \text{ на } F \setminus (S(\lambda_F) \setminus S(\lambda_c - \lambda_F)), \end{cases} \quad (3.3)$$

где w_Δ , w_F – некоторые константы.

Из [10] и [16] следует, что задача S имеет единственное решение. Одним из основных результатов настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. При $n \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{n} \log |P_n^*(x)| \rightarrow V^{\lambda_\Delta}(x)$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus S(\lambda_\Delta)$, т.е. мера λ_Δ служит предельным распределением нулей многочленов $P_n^*(x)$.

Теорема 1 может быть доказана методами теории потенциала. В настоящей работе выбран другой способ доказательства, основанный на явных формулах для многочленов P_n , который позволяет найти предельную меру λ_Δ в явном виде. Этот результат сформулирован далее в виде теоремы 2. Прежде чем сформулировать эту теорему, введем необходимые обозначения.

Положим

$$z_+ = \frac{1}{\vartheta^5}, \quad z_- = -\vartheta^5,$$

где $\vartheta = (\sqrt{5}-1)/2$ – золотое сечение. Рассмотрим трехлистное накрытие сферы, схема которого изображена на рис. 1.

Рис. 1

На римановой поверхности $\mathfrak{R}$ определим мероморфную функцию $v = v(z)$ ее дивизором. Она имеет простой нуль в точке $z = \infty$ на листах $\mathfrak{R}_+$ и $\mathfrak{R}_-$ и простой полюс в точке $z = 0$ на листах $\mathfrak{R}_+$ и $\mathfrak{R}_0$. Таким образом, $v(z)$ осуществляет конформное отображение поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу. Нормируем эту функцию условием $v(\infty) = 1$ на листе $\mathfrak{R}_0$. Нетрудно проверить, что $v(z)$ – алгебраическая функция, обратная рациональной функции

$$z = \frac{1}{v^2} \frac{1+v}{1-v}.$$

Обозначим через v_j ветвь функции v на проекции листа $\mathfrak{R}_j$. Пусть $\zeta = \psi(v)$ – функция, обратная к функции Жуковского

$$\psi(v) = v + \sqrt{v^2 - 1},$$

осуществляющая конформное отображение плоскости с разрезами

$$\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$$

на верхнюю полуплоскость. Обозначим через $w = \log \zeta$ главную ветвь логарифма в верхней полуплоскости (такую, что $0 < \operatorname{Im} w < \pi$).

Составим композицию

$$g(z) = \log \psi(v(z))$$

и обозначим через $g_j(z)$, $j = 0, +, -$, ее однозначные ветви. Легко видеть, что функция $g(z)$ осуществляет конформное отображение римановой поверхности $\mathfrak{R}$, разрезанной над промежутком $(-\infty, z_+]$, на горизонтальную полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ с соответствующими разрезами (см. рис. 2, 3).

Рис. 2

Рис. 3

$$w_1 = \log \frac{1 + 2\theta^{3/2}}{\theta^3}, \quad \varphi_1 = \arccos \theta,$$

$$w_2 = \log \frac{1 + \theta^{1/2}}{\theta}, \quad \varphi_2 = \arccos(-\theta^3).$$

Положим

$$f_0(z) = \frac{g_0(z)}{i\sqrt{z}}, \quad f_{\pm}(z) = \frac{g_{\pm}(z) - \pi i/2}{i\sqrt{z}},$$

где $\sqrt{z}$ – главная ветвь корня в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ такая, что $\operatorname{Re} \sqrt{z} > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Меры λ_{Δ} и λ_F определены формулами

$$f_0 = \hat{\lambda}_{\Delta}, \quad f_+ = \hat{\lambda}_F - \hat{\lambda}_{\Delta}, \quad f_- = \hat{\lambda}_F,$$

где $\hat{\lambda}_{\Delta}$ и $\hat{\lambda}_F$ – преобразования Коши мер λ_{Δ} и λ_F соответственно, причем

$$S(\lambda_{\Delta}) = [0, z_+], \quad S(\lambda_F) = (-\infty, 0].$$

Мера λ_F совпадает с ограничением λ_c на отрезке $[z_-, 0]$.

Следующие параграфы содержат доказательства теорем 1 и 2. Результаты работы легко обобщаются на весь класс мер Полачека. Мы рассматриваем фиксированные значения параметров весов Полачека, что тем не менее является типичной ситуацией.

§ 4. Совместные многочлены Полачека

Сделаем следующую замену переменной:

$$Q_n(x) = P_n(4x^2).$$

Тогда Q_n – четный многочлен степени $4n$. Многочлены Q_n удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) x^m \frac{x}{3 \operatorname{sh} \pi x} dx = 0, \quad m = 0, \dots, 2n-1, \quad (4.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) x^m \frac{1}{\operatorname{ch} \pi x} dx = 0, \quad m = 0, \dots, 2n-1. \quad (4.2)$$

Назовем Q_n *совместными (или обобщенными) многочленами Полачека*.

Положим

$$Q_n^*(x) = Q_n(2nx).$$

Наша цель – найти предельное распределение нулей многочленов Q_n^* .

§ 5. Многочлены Полачека

В 1950 г. Полачек (см. монографию [17]) рассмотрел последовательность многочленов

$$P_n^\lambda(x; \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

зависящих от двух параметров – $\lambda > 0$ и $0 < \varphi < \pi$. Эти многочлены определены рекуррентным соотношением

$$nP_n^\lambda - 2((n-1+\lambda) \cos \varphi + x \sin \varphi) P_{n-1}^\lambda + (n-2+2\lambda) P_{n-2}^\lambda = 0, \quad (5.1)$$

где $n = 1, 2, \dots$, с начальными условиями $P_{-1}^\lambda = 0$, $P_0^\lambda = 1$.

Далее мы рассмотрим лишь симметричный случай $\varphi = \pi/2$. Используем следующее обозначение: $P_n^\lambda(x) = P_n^\lambda(x; \pi/2)$, где верхний индекс λ является именно индексом, а не показателем степени.

Определим производящую функцию

$$\Phi^\lambda(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(x) w^n.$$

Из рекуррентных формул (5.1) следует, что

$$\Phi^\lambda(x, w) = (1 + iw)^{-\lambda - ix} (1 - iw)^{-\lambda + ix}, \quad (5.2)$$

при этом в единичном круге $|w| < 1$ берутся главные ветви степенных функций.

Из формул (5.2) методом Дарбу легко выводится сильная асимптотика многочленов $P_n^\lambda(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Из этого результата, в свою очередь, следует, что эти многочлены ортогональны на всей вещественной оси с весом

$$w^\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{2\lambda}}{\Gamma(2\lambda)} |\Gamma(\lambda + ix)|^2, \quad (5.3)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Нормировочный коэффициент в формуле (5.3) выбирается так, чтобы соответствующая мера была вероятностной, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^\lambda(x) dx = 1.$$

Из формулы дополнения для гамма-функции следует, что

$$w^{1/2}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi x}, \quad w^1(x) = \frac{x}{3 \operatorname{sh} \pi x}.$$

Тоскано (см. [17]) предложил следующий аналог формул Родрига для многочленов Полачека

$$P_n^\lambda(x) G(\lambda, x) = \frac{(-1)^n}{n!} \delta^n G\left(\lambda + \frac{n}{2}, x\right), \quad (5.4)$$

где

$$G(\lambda, x) = \frac{\Gamma(\lambda + ix)}{\Gamma(1 - \lambda + ix)} e^{\pi x}$$

– мероморфная функция, а δ – оператор конечной разности

$$(\delta F)(x) = F\left(x + \frac{i}{2}\right) - F\left(x - \frac{i}{2}\right).$$

§ 6. Вычисление многочленов совместной ортогональности

Обозначим через

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n q_k^{(n)} x^k \quad (6.1)$$

многочлены, для которых $T_n(-x^2)$ – это четные многочленами Чебышёва второго рода на отрезке $[-1, 1]$. Нормируем эти многочлены в стандартизованном виде, т.е. многочлен (6.1) определим формулой Родрига

$$T_n(x) \sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ x^n (1+x)^n \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right\},$$

где ветви корней в обеих частях этого равенства согласованы между собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n q_k^{(n)} P_{2n+2k}^{1/2}(x). \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать многочлен $Q_n(x)$ в виде (6.2) с неизвестными коэффициентами $q_k = q_k^{(n)}$. Тогда условия ортогональности (4.2) будут выполнены автоматически. Условия ортогональности (4.1) перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) P_{2m}^1(x) w^1(x) dx = 0, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Тогда получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных величин q_k :

$$\sum_{k=0}^n A_{m,k} q_k = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (6.3)$$

где

$$A_{m,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n+2k}^{1/2}(x) P_{2m}^1(x) w^1(x) dx. \quad (6.4)$$

Рассмотрим интеграл Фурье от весовой функции (5.3):

$$\mathcal{F}^\lambda(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} w^\lambda(x) dx.$$

Хорошо известна формула Рамануджана

$$\mathcal{F}^\lambda(p) = \left(\operatorname{ch} \frac{p}{2} \right)^{-2\lambda}.$$

Для нахождения коэффициентов (6.4) вычислим интеграл от произведения производящих функций

$$\Phi(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{1/2}(x; u) \Phi^1(x; v) w^1(x) dx.$$

Имеем

$$\Phi(u, v) = (1 + u^2)^{-1/2} (1 + v^2)^{-1} \mathcal{F}^1 \left(\log \left(\frac{1 - iu}{1 + iu} \frac{1 - iv}{1 + iv} \right) \right) = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{(1 - uv)^2}.$$

Справедливы следующие разложения в ряды:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + u^2} &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l u^{2l}, & a_l &= \binom{1/2}{l}, \\ (1 - uv)^{-2} &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (uv)^j, & b_j &= \binom{-2}{j}. \end{aligned}$$

Тогда

$$A_{m,k} = a_{n+k-m} b_{2m}.$$

Таким образом, система (6.3) равносильна системе с матрицей

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

ганкелевского типа. Рассмотрим функцию

$$H(z) = 2 \left(\sqrt{\frac{z+1}{z}} - 1 \right),$$

голоморфную вне отрезка $[-1, 0]$. Ветвь корня выделяем условием

$$H(z) \sim \frac{1}{z}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда по формулам Сохоцкого

$$H(z) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1+x}{|x|}} \frac{dx}{z-x},$$

т.е. $H(z)$ – преобразование Коши меры ортогональности многочленов (6.1). С другой стороны,

$$H(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

т.е. числа $2a_n$ суть степенные моменты этой меры. Следовательно, решением системы уравнений с матрицей (6.5) будут коэффициенты соответствующего ортогонального многочлена.

Предложение 1 доказано.

§ 7. Асимптотика многочленов Полачека

Исследуем асимптотическое поведение масштабированных многочленов Полачека.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть параметр $\beta > 0$. Справедливы следующие утверждения.

1. Существует предел

$$V_\beta(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta n} \log |P_{2[\beta n]}^\lambda(2nx)|,$$

причем имеет место равномерная сходимость внутри области $\mathbb{C} \setminus [-\beta, \beta]$. (Здесь $[\beta n]$ – целая часть числа βn .)

2. С точностью до константы функция $V_\beta(x)$ является логарифмическим потенциалом некоторой меры

$$V_\beta(x) = V^{\sigma_\beta}(x) + w_\beta,$$

где

$$w_\beta = \log \frac{\beta}{2e}.$$

Мера σ_β является предельным распределением нулей многочленов $P_{2[\beta n]}^\lambda(2nx)$.

3. Справедлива формула

$$d\sigma_\beta(t) = -\frac{1}{\pi\beta} \log \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - t^2}}{|t|} dt, \quad |t| < \beta, \quad (7.1)$$

где берутся арифметические значения многозначных функций.

4. Мера σ_β

а) имеет единичную норму, т.е.

$$|\sigma_\beta| = 1;$$

b) ее носителем является отрезок

$$S(\sigma_\beta) = [-\beta, \beta];$$

c) эта мера решает следующую задачу равновесия во внешнем поле

$$\phi_\beta(x) = \frac{\pi|x|}{\beta}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а именно,

$$2V_\beta(x) + \phi_\beta(x) \begin{cases} \leq 0, & x \in S(\sigma_\beta), \\ \geq 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Преобразование Коши $h_\beta = \hat{\sigma}_\beta$ определено формулой

$$h_\beta(x) = \frac{2}{\beta} \operatorname{arctg} \psi_\beta(x),$$

где

$$\psi_\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - \beta^2}}{\beta}$$

– функция, обратная функции Жуковского, осуществляющая конформное отображение внешности отрезка $[-\beta, \beta]$ на единичный круг. При этом в единичном круге берется главная ветвь арктангенса.

6. Справедлива формула

$$V_\beta(x) = \operatorname{Re}\{-xh_\beta(x) + \log \psi_\beta(x)\}. \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой Родрига (5.4). Перепишем ее, используя интегральную формулу Коши:

$$n^{2\beta n} P_{2[\beta n]}^\lambda(2nx) G(\lambda, 2nx) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{G(\lambda + \beta n, -int) dt}{\omega_n(2ix - t)},$$

где для определенности точка x лежит в правой полуплоскости и

$$\omega_n(z) = \prod_{\kappa=-\beta n}^{\beta n} \left(z - \frac{\kappa}{n}\right).$$

Контур γ лежит в верхней полуплоскости и обходит по часовой стрелке отрезок $[2ix - \beta, 2ix + \beta]$.

Найдем слабую асимптотику подынтегральной функции. Имеем

$$\left(-\frac{1}{2\beta x}\right) \log |\omega_n(z)| \rightarrow V^\mu(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

где μ – вероятностная мера, равномерно распределенная на отрезке $[-\beta, \beta]$. Комплексный потенциал этой меры равен

$$\mathcal{V}^\mu = -\frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{\beta} \log(z - \zeta) d\zeta = \frac{1}{2\beta} \{(z - \beta) \log(z - \beta) - (z + \beta) \log(z + \beta)\} + 1.$$

В этой формуле выбираем главные ветви логарифмов при $z > \beta$.

Далее, по формуле Стирлинга при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2\beta n}\right) \log G(\lambda + \beta n, -int) + \log \frac{n}{e} \\ & \rightarrow \frac{1}{2\beta} \{(t - \beta) \log(t - \beta) - (t + \beta) \log(t + \beta) + \pi it\}. \end{aligned}$$

Мнимые части логарифмов принадлежат интервалу $(0, \pi)$.

Нетрудно показать, что

$$V_\beta(x) = \frac{\pi x}{\beta} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log \left| \int_\gamma e^{-nS(t;x)} dt \right|, \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} 2\beta S(t; x) &= (t - \beta) \log(t - \beta) - (t + \beta) \log(t + \beta) + \pi it \\ &\quad - (2ix - t - \beta) \log(2ix - t - \beta) + (2ix - t + \beta) \log(2ix - t + \beta). \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики интеграла в правой части равенства (7.3) воспользуемся методом перевала. Найдем критические точки функции S из следующего уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t; x) = \frac{1}{2\beta} \log \left\{ \frac{t - \beta}{t + \beta} \frac{2ix - t - \beta}{2ix - t + \beta} \right\} + \pi i = 0,$$

которое равносильно квадратному уравнению

$$t^2 - 2ixt - \beta^2 = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что основной вклад в асимптотику дает точка

$$t_*(x) = i(x + \sqrt{x^2 - \beta^2}). \quad (7.4)$$

При этом ветвь функции (7.4) выделяется вне отрезка $[-\beta, \beta]$ следующим условием:

$$t_*(x) \sim 2ix, \quad x \rightarrow \infty.$$

Имеем

$$V_\beta(x) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi x}{\beta} + S_*(x) \right\},$$

где

$$S_*(x) = S(t_*(x); x).$$

Покажем, что $V_\beta(x)$ есть с точностью до константы логарифмический потенциал некоторой меры. Вычислим формальную частную производную по комплексной переменной x от этой функции:

$$-h_\beta(x) = \frac{\partial}{\partial x} V_\beta(x) = \frac{\pi}{\beta} + \frac{\partial}{\partial x} S(t; x) \Big|_{t=t_*(x)}.$$

Имеем

$$h_\beta(x) = \frac{1}{i\beta} \log \frac{1 + i\psi_\beta(x)}{1 - i\psi_\beta(x)}.$$

При этом берется главная ветвь логарифма.

Далее,

$$h_\beta(x) = \int \frac{d\sigma_\beta(t)}{x-t},$$

где σ_β – мера на отрезке $[-\beta, \beta]$, которая может быть найдена из формулы Сохоцкого

$$\sigma'_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_\beta(t - i \cdot 0), \quad -\beta < t < \beta.$$

Отсюда следует формула (7.1). Интегрируя функцию $h_\beta(x)$, получаем формулу (7.2). Когда точка x лежит на отрезке $[-\beta, \beta]$, то точка $\psi_\beta(x)$ лежит на единичной окружности. Отсюда следуют условия равновесия.

Предложение 2 доказано.

§ 8. Коэффициенты многочленов Чебышёва

Найдем асимптотику коэффициентов многочленов (6.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$(q_{[\alpha n]}^{(n)})^{1/n} \rightarrow f(\alpha), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8.1)$$

где

$$f(\alpha) = \frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}{\alpha^{2\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}. \quad (8.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Родрига (6.2), дифференцируя по правилу Лейбница, получаем

$$T_n(x) = \sum_{l=0}^n \binom{n-1/2}{l} \binom{n+1/2}{n-l} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} x^{n-l+m}.$$

Откуда

$$q_k^{(n)} = \sum_{l=n-k}^n \binom{n-1/2}{l} \binom{n+1/2}{n-l} \binom{l}{l+k-n}.$$

Пусть

$$1 - \alpha \leq \beta \leq 1, \quad k = [\alpha n], \quad l = [\beta n].$$

Тогда по формуле Стирлинга при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \binom{n-1/2}{l}^{1/n} &\rightarrow \frac{1}{\beta^\beta(1-\beta)^{(1-\beta)}}, & \binom{n+1/2}{n-l}^{1/n} &\rightarrow \frac{1}{\beta^\beta(1-\beta)^{(1-\beta)}}, \\ \binom{l}{l+k-n}^{1/n} &\rightarrow \frac{\beta^\beta}{(\beta+\alpha-1)^{(\beta+\alpha-1)}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log q_{[\alpha n]}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log \int_{1-\alpha}^1 e^{-n\gamma(\beta; \alpha)} d\beta, \quad (8.3)$$

где

$$\gamma(\beta; \alpha) = \beta \log \beta + 2(1 - \beta) \log(1 - \beta) + (\alpha + \beta - 1) \log(\alpha + \beta - 1) + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha).$$

Для нахождения асимптотики интеграла в правой части равенства (8.3) воспользуемся методом перевала. Найдем критические точки функции γ из следующего уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \gamma(\beta; \alpha) = \log \frac{\beta(\alpha + \beta - 1)}{(1 - \beta)^2} = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$\beta_* = \beta_*(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Обозначим

$$\gamma_*(\alpha) = \gamma(\beta_*(\alpha); \alpha).$$

Тогда предел в (8.1) равен $e^{-\gamma_*(\alpha)}$. При этом

$$\gamma_*(\alpha) = -(1 + \alpha) \log(1 + \alpha) + 2\alpha \log \alpha + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha), \quad (8.4)$$

что равносильно формуле (8.2).

Предложение 3 доказано.

§ 9. Асимптотика многочленов совместной ортогональности

Из предложений 1, 2 и 3 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(2nx)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 e^{-n\Sigma(\alpha; x)} d\alpha \right|^{1/n}, \quad (9.1)$$

где

$$\operatorname{Re} \Sigma(\alpha; x) = \gamma_*(\alpha) + 2\beta V_\beta(x), \quad \beta = 1 + \alpha,$$

а функции γ_* и V_β определены формулами (8.4) и (7.2) соответственно. Применим метод перевала. Найдем критические значения функции $\Sigma(\alpha; x)$ из следующего уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Sigma(\alpha; x) = \log \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + 2 \log \psi_\beta(x) = 0,$$

которое равносильно кубическому уравнению

$$4x^2 \alpha^2 (\alpha - 1) + (\alpha + 1) = 0.$$

Вычисляя дискриминант, находим четыре точки ветвления второго порядка: $\pm x_*$ и $\pm iy_*$, где

$$x_* = \frac{\sqrt{z_+}}{2}, \quad y_* = \frac{\sqrt{|z_-|}}{2},$$

и $z_\pm$ определены в § 3. При $x \rightarrow \infty$ ветви функции $\alpha(x)$ имеют следующую асимптотику:

$$\alpha_0(x) \rightarrow 1, \quad \alpha_\pm(x) \sim \pm \frac{1}{2x}.$$

Следовательно, риманова поверхность функции $\alpha(x)$ устроена следующим образом (см. рис. 4):

Рис. 4

Положим

$$\Sigma_0(x) = \Sigma(\alpha_0(x); x).$$

Тогда предел в (9.1) равен $\exp(-\operatorname{Re} \Sigma_0(x))$. Вычислим

$$h(x) = -\frac{d}{dx} \Sigma_0(x).$$

Получим, что

$$h(x) = 4 \operatorname{arctg} \psi_{\beta_0}(x), \quad \beta_0 = 1 + \alpha_0.$$

После тождественных преобразований имеем

$$h(x) = \frac{4}{i} \log \psi(\alpha_0(x)).$$

Функция $h(x)$ является марковской, т.е.

$$h(x) = \int \frac{d\sigma(t)}{x-t}.$$

Меру σ находим из формулы Сохоцкого

$$\sigma'(x) = \frac{4}{\pi} \log |\psi(\alpha_0(x + i \cdot 0))|, \quad -x_* < x < x_*.$$

Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $n \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{n} \log |Q_n(2nx)| \rightarrow V^\sigma(x) + w \quad (9.2)$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus [-x_*, x_*]$. При этом

$$w = 2 \log 2 + 4.$$

§ 10. Доказательство основных результатов

Сделаем в (9.2) замену переменной $x = \sqrt{z}/2$, получим, что

$$-\frac{1}{n} \log |P_n^*(z)| \rightarrow V^{\lambda_\Delta}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, z_+],$$

где мера λ_Δ определена в § 3. Поскольку функция $f_0(z)$ голоморфна вне отрезка $[0, z_+]$ и $f_0(z) \sim 2/z$ при $z \rightarrow \infty$, то из формул Сохоцкого следует, что λ_Δ – положительная мера с полной вариацией, равной двум на этом отрезке. Аналогично, λ_F – положительная мера с полной вариацией, равной единице на промежутке $(-\infty, 0]$. Легко видеть (см. рис. 2 и 3), что

$$\lambda'_F(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, \quad x \in (z_-, 0).$$

Осталось проверить условия равновесия (3.2) и (3.3).

Вычислим формальную частную производную по комплексной переменной x от функции W_Δ :

$$h_\Delta = -\frac{\partial}{\partial x} W_\Delta = 2\hat{\lambda}_\Delta - \hat{\lambda}_F - \phi'.$$

Производная вдоль вещественной оси равна вещественной части граничных значений этой функции. Покажем, что

$$\operatorname{Re} h_\Delta(x \pm i \cdot 0) = 0, \quad x \in (0, z_+), \quad (10.1)$$

$$h_\Delta(x \pm i \cdot 0) < 0, \quad x \in (z_+, +\infty). \quad (10.2)$$

Имеем

$$h_\Delta(x) = \frac{g_0(x) - g_+(x)}{i\sqrt{x}}.$$

Если $x \in (0, z_+)$, то (см. рис. 2 и 3)

$$\operatorname{Re} h_\Delta(x \pm i \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{x}} \{ \operatorname{Im} g_0(x \pm i \cdot 0) - \operatorname{Im} g_+(x \pm i \cdot 0) \} = 0.$$

Соотношение (10.1) доказано. Также легко проверяется соотношение (10.2). Доказаны условия равновесия (3.2).

Аналогично, рассмотрим производную

$$h_F = -\frac{\partial}{\partial x} W_F = 2\hat{\lambda}_F - \hat{\lambda}_\Delta.$$

Покажем, что

$$\operatorname{Re} h_F(x \pm i \cdot 0) = 0, \quad x \in (-\infty, z_-), \quad (10.3)$$

$$\operatorname{Re} h_F(x \pm i \cdot 0) > 0, \quad x \in (z_-, 0). \quad (10.4)$$

Имеем

$$h_F(z) = \frac{2g_+(z) + g_0(z)}{i\sqrt{z}} - \frac{\pi}{\sqrt{z}}.$$

Если $x \in (-\infty, 0)$, то

$$\operatorname{Re} h_F(x \pm i \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \log |\psi_+^2(x) \psi_0(x)|,$$

где для определенности

$$\psi_j(x) = \psi(v_j(x - i \cdot 0)), \quad j = 0, +, -.$$

Запишем

$$\psi_+^2 \psi_0 = (\psi_+ \psi_- \psi_0) \cdot \frac{\psi_+}{\psi_-}.$$

Сделаем следующее преобразование:

$$\psi_j(z) = v_j(z)(1 + i\sqrt{z}(1 - v_j(z))).$$

Тогда по теореме Виета

$$\psi_+ \psi_- \psi_0 = 1.$$

Если $x \in (-\infty, z_-)$, то числа $\psi_{\pm}(x)$ комплексно сопряженные (см. рис. 1) и, следовательно,

$$\left| \frac{\psi_+(x)}{\psi_-(x)} \right| = 1.$$

Итак, соотношение (10.3) доказано. Также легко проверяется и соотношение (10.4). Таким образом, доказаны условия равновесия (3.3).

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Список литературы

- [1] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113(155):4(12)** (1980), 499–519; англ. пер.: Е. М. Nikišin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41:4** (1982), 409–425.
- [2] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: Е. М. Nikišin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30:2** (1986), 43–52.
- [3] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188:5** (1997), 33–58; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188:5** (1997), 671–696.
- [5] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [6] Е. А. Рахманов, “Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **119(161):2(10)** (1982), 163–203; англ. пер.: Е. А. Rakhmanov, “On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis”, *Math. USSR-Sb.*, **47:1** (1984), 155–193.
- [7] В. Г. Лысов, “Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стильтесовских функций с весом Лагерра”, *Матем. сб.*, **196:12** (2005), 99–122; англ. пер.: V. G. Lysov, “Strong asymptotics of the Hermite–Padé approximants for a system of Stieltjes functions with Laguerre weight”, *Sb. Math.*, **196:12** (2005), 1815–1840.

- [8] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [9] В. Н. Сорокин, Е. Н. Чередникова, “Некоторые замечания о приближении логарифмов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2007, № 2, 21–26; англ. пер.: V. N. Sorokin, E. N. Cherednikova, “Some notes on approximation of logarithms”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **62**:2 (2007), 61–66.
- [10] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1213–1228.
- [11] E. Coussement, W. Van Assche, “Asymptotics of multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind”, *J. Comput. Appl. Math.*, **153**:1–2 (2003), 141–149.
- [12] E. Coussement, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind”, *Constr. Approx.*, **19**:2 (2003), 237–263.
- [13] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky, “Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights”, *Comm. Math.*, **286**:1 (2009), 217–275.
- [14] M. Duits, A. B. J. Kuijlaars, “Universality in the two matrix model: a Riemann–Hilbert steepest descent analysis”, *Comm. Pure Appl. Math.* (to appear); [arXiv: abs/0807.4814](https://arxiv.org/abs/0807.4814).
- [15] А. А. Кандаян, “Многоточечные аппроксимации Паде бета-функции”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 189–203.
- [16] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1966; пер. с англ.: А. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.

В. Н. Сорокин (V. N. Sorokin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vnsormm@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

29.09.2008 и 26.01.2009