Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кореновский, О связи между классами функций Гурова–Решетняка и Макенхаупта, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 127–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:38:54

УДК 517.5

А. А. Кореновский

О связи между классами функций Гурова–Решетняка и Макенхаупта

Для функции, удовлетворяющей условию Гурова–Решетняка, в одномерном случае найден предельный показатель класса Макенхаупта, содержащего эту функцию. Показано также, что каждый класс Макенхаупта содержится в некотором классе Гурова–Решетняка.

Библиография: 14 названий.

§1. Введение и формулировки результатов

Рассмотрим неотрицательную на отрезке $I_0 \subset \mathbb{R}$ функцию $f \in L(I_0)$. Средним колебанием функции f на отрезке $I \subset I_0$ называется величина

$$\Omega(f; I) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx,$$

где $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx$. Ясно, что неравенство $\Omega(f; I) \leq 2f_I$ справедливо для произвольной f . Говорят, что функция f удовлетворяет условию Гурова–Решетняка при некотором ε , $0 < \varepsilon < 2$, если для любого отрезка $I \subset I_0$ справедливо неравенство

$$\Omega(f; I) \leq \varepsilon f_I. \quad (1)$$

Совокупность всех функций f , удовлетворяющих условию (1), называется *классом Гурова–Решетняка* $GR(\varepsilon)$. Класс $GR(\varepsilon)$ был определен в работах [1], [2] (в многомерном случае) и использовался для изучения свойств квазилоренцевых отображений. Фундаментальное свойство функций из класса Гурова–Решетняка состоит в том, что условие $f \in GR(\varepsilon)$ влечет $f \in L^p(I_0)$ при некотором $p > 1$. Более того, справедлива следующая

ТЕОРЕМА А. *Для любого ε , $0 < \varepsilon < 2$, найдется такое $p_0 \equiv p_0(\varepsilon) > 1$, что для любой функции f , удовлетворяющей условию (1), справедливо неравенство*

$$\left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f^p(x) dx \right\}^{1/p} \leq B \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx, \quad I \subset I_0, \quad (2)$$

при любом $p < p_0$, где постоянная B зависит лишь от ε и p .

Работа выполнена при частичной поддержке ДФФД (грант № Ф7/329-2001).

Благодаря этому свойству классы $GR(\varepsilon)$ находят применение при изучении свойств квазиконформных отображений, дифференциальных уравнений в частных производных и в других вопросах.

Доказательство теоремы А и различных ее модификаций при достаточно малом ε были получены многими авторами [2]–[8]. Точное значение $p_0(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon < 2$ в одномерном случае найдено в [9]. В многомерном случае в (1) и (2) вместо отрезков берут всевозможные кубы со сторонами, параллельными координатным осям. Такой многомерный аналог теоремы А при всех $\varepsilon < 2$ доказан в [10], однако точное значение $p_0(\varepsilon)$ не найдено.

Неравенство (2) называется “обратным неравенством Гёльдера”, или же неравенством Геринга, а совокупность всех функций f , удовлетворяющих условию (2), обозначается через $G_p \equiv G_p(B)$. Классы Геринга G_p тесно связаны с классами весовых функций Макенхаупта $A_q \equiv A_q(C)$ ($q, C > 1$), которые определяются условием

$$\frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f^{-1/(q-1)}(x) dx \right\}^{q-1} \leq C, \quad I \subset I_0. \quad (3)$$

А именно принадлежность функции f классу G_p влечет $f \in A_q$ при некотором $q > 1$ и наоборот [11], [12]. Если использовать теорему А, то получим, что из условия (1) вытекает неравенство (3) при некотором $q > 1$. Однако такой подход не позволяет получить нижнюю грань $q_0 \equiv q_0(\varepsilon) > 1$ тех значений q , при которых справедливо (3). Основной результат настоящей работы состоит в нахождении $q_0(\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть неотрицательная на отрезке $I_0 \subset \mathbb{R}$ функция $f \in L(I_0)$ удовлетворяет условию

$$\Omega(f; I) \leq \varepsilon f_I, \quad I \subset I_0, \quad (4)$$

при некотором ε , $0 < \varepsilon < 2$. Далее, пусть число $q_0 > 1$ определено как единственный корень уравнения

$$(q_0 - 1) q_0^{-q_0/(q_0-1)} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Тогда при любом $q > q_0$ справедливо неравенство (3), в котором постоянная C зависит только от ε и q .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $\psi(y) = (y - 1)y^{-y/(y-1)}$ непрерывна на $(1, +\infty)$,

$$\lim_{y \rightarrow 1+0} \psi(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(y) = 1$$

и ψ строго возрастает на $(1, +\infty)$, в чем легко убедиться, вычислив ее производную. Из этих свойств функции ψ следует, что при любом $\varepsilon \in (0, 2)$ уравнение (5) имеет единственный корень $q_0 = q_0(\varepsilon) > 1$.

Окончателность теоремы 1 показывает

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\varepsilon \in (0, 2)$ существует функция $f \in L([0, 1])$, удовлетворяющая условию (4) и такая, что $f^{-1/(q_0-1)} \notin L([0, 1])$, где число $q_0 > 1$ определено равенством (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Положим $p_0 = q_0/(q_0 - 1)$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{p_0^{p_0}}{(p_0 - 1)^{p_0 - 1}} = \frac{2}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Как показано в [9], определенное равенством (6) значение p_0 является предельным показателем, о котором идет речь в теореме А.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В приложениях теоремы А изучается поведение $p_0 = p_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В работе [9] отмечается, что $p_0(\varepsilon) \sim 2/(e\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (5) получаем, что для определенного в теореме 1 предельного показателя $q_0 = q_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение $q_0 - 1 \sim 2\varepsilon/e$.

Рассмотрим теперь вопрос о вложении класса Макенхаупта в класс Гурова–Решетняка. Известно, что условие (3) влечет выполнение неравенства

$$|\{x \in I : f(x) > \beta f_I\}| \geq \alpha |I|, \quad I \subset I_0, \quad (7)$$

где числа α, β , $0 < \alpha, \beta < 1$, зависят только от q и C [11]. Далее, в [10] показано, что из (7) следует принадлежность f классу Гурова–Решетняка $GR(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 2(1 - \alpha\beta)$. Мы приведем прямое доказательство того факта, что условие $f \in A_q(C)$ влечет $f \in GR(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon < 2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть неотрицательная на отрезке $I_0 \subset \mathbb{R}$ функция f принадлежит классу Макенхаупта $A_q(C)$ при некоторых $q, C > 1$. Тогда f принадлежит классу Гурова–Решетняка $GR(\varepsilon)$, где $\varepsilon = 2(1 - (qC)^{-1})$.

§ 2. Доказательства теорем

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Следующая лемма представляет собой один из вариантов известной леммы Ф. Рисса “о восходящем солнце” (см., например, [13]).

ЛЕММА 1. Пусть неотрицательная на отрезке $I_0 \subset \mathbb{R}$ функция $f \in L(I_0)$ и положительное число $\gamma \leq f_{I_0}$. Тогда найдется набор попарно не пересекающихся интервалов $I_\nu \subset I_0$, $\nu = 1, 2, \dots$, таких, что

$$f_{I_\nu} = \gamma, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$f(x) \geq \gamma \quad \text{для почти всех } x \in I_0 \setminus \left(\bigcup_{\nu \geq 1} I_\nu \right). \quad (9)$$

Доказательство этой леммы легко получить такими же рассуждениями, которые использовались в [13]. Здесь мы приведем другое доказательство, более простое на наш взгляд, представляющее собой некоторую модификацию так называемой “техники моментов останова” (см. [14; гл. 6, § 2, замечание после леммы 2.2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. При $\gamma = f_{I_0}$ утверждение леммы очевидно. Пусть $\gamma < f_{I_0}$. Разделим $I_0 \equiv [a_0, b_0]$ пополам точкой c и получим отрезки $I' = [a_0, c]$ и $I'' = [c, b_0]$. Если $f_{I'} > \gamma$ и $f_{I''} > \gamma$, то переходим к следующему шагу, на котором каждый из отрезков I' и I'' будет делиться дальше. Случай $f_{I'} \leq \gamma$ и $f_{I''} \leq \gamma$ невозможен, ибо он противоречит тому, что $\gamma < f_{I_0}$. Поэтому остается рассмотреть еще случай, когда

- а) $f_{I'} \leq \gamma, f_{I''} > \gamma$ или
- б) $f_{I'} > \gamma, f_{I''} \leq \gamma$.

Если выполнено а), то непрерывная на $[c, b_0]$ функция

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\tau - a_0} \int_{a_0}^{\tau} f(x) dx$$

удовлетворяет условиям $\varphi(c) = f_{I'} \leq \gamma$, $\varphi(b_0) = f_{I_0} > \gamma$. Поэтому найдется такое $c_0 \in [c, b_0]$, что $\varphi(c_0) = \gamma$. Обозначим $I_1 = (a_0, c_0)$. Тогда получим $f_{I_1} = \varphi(c_0) = \gamma$, а отрезок $[c_0, b_0]$ будем делить на следующем шаге. Заметим при этом, что из $f_{I_1} = \gamma, f_{I_0} > \gamma$ следует, что $f_{[c_0, b_0]} > \gamma$. Аналогично рассматривается случай б), и тем самым завершается первый шаг доказательства.

После очередного шага мы получим занумерованные не пересекающиеся попарно интервалы $I_\nu, \nu = 1, 2, \dots, s$, такие, что $f_{I_\nu} = \gamma$, а также конечный набор отрезков J , которые подлежат делению на следующем шаге. Прделав описанную выше процедуру для каждого из отрезков J , мы к набору уже имеющихся интервалов I_ν , быть может, добавим интервалы I_ν с последующими номерами, а длина каждого из отрезков, подлежащего делению на следующем шаге, уменьшится не менее чем в два раза.

В результате такого процесса получим набор попарно не пересекающихся интервалов I_ν , удовлетворяющих (8). Обозначим через E объединение замыкания интервалов I_ν . Если $x \in I_0 \setminus E$, то согласно описанному выше процессу найдется последовательность стягивающихся к x отрезков J , которые подлежали дальнейшему делению. Но для каждого такого J было выполнено неравенство $f_J > \gamma$. Поскольку в силу известной теоремы Лебега для почти каждого $x \in I_0 \setminus E$ справедливо $f(x) = \lim_{|J| \rightarrow 0} f_J$, то тем самым доказано (9).

Следующее простое свойство колебаний имеется, например, в [9], хотя и в несколько ином виде. Доказательство из [9] легко может быть переписано для нашего случая, и поэтому мы его приводить здесь не будем.

ЛЕММА 2. Пусть суммируемая функция φ не убывает на отрезке $I \equiv [0, t]$. Тогда для функции

$$\Phi(\tau) = \tau^{-1} \int_0^{\tau} \varphi(u) du, \quad 0 < \tau \leq t,$$

и для любого $a > 1$ справедливо неравенство

$$\Phi(t) - \Phi\left(\frac{t}{a}\right) \leq \frac{a}{2} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(u) - \Phi(t)| du = \frac{a}{2} \Omega(\varphi; I).$$

Далее нам понадобится понятие равноизмеримой перестановки. Для неотрицательной измеримой на отрезке $I_0 \subset \mathbb{R}$ функции f неубывающая равноизмеримая перестановка f_* определяется равенством

$$f_*(t) = \inf_{e \in I_0, |e|=t} \sup_{x \in e} f(x), \quad 0 < t \leq |I_0|.$$

Функция f_* не убывает на $[0, |I_0|]$, равноизмерима с f и обладает тем свойством, что для любого измеримого множества $E \subset I_0$ справедливо неравенство

$$\int_0^{|E|} f_*(t) dt \leq \int_E f(x) dx,$$

а при любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{I_0} f^\alpha(x) dx = \int_0^{|I_0|} f_*^\alpha(t) dt.$$

Обозначим

$$f_{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_*(u) du, \quad 0 < t \leq |I_0|.$$

Центральное место в доказательстве теоремы 1 занимает следующая оценка перестановки функции из класса Гурова–Решетняка.

ЛЕММА 3. Пусть функция f удовлетворяет условию (4) при некотором $\varepsilon \in (0, 2)$. Тогда справедливо неравенство

$$\Omega(f_*; [0, t]) \leq \varepsilon f_{**}(t), \quad 0 < t \leq |I_0|. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t \in (0, |I_0|]$ и положим $\gamma = f_{**}(t) \leq f_{I_0}$. Пользуясь леммой 1, построим набор попарно не пересекающихся интервалов I_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, обладающих свойствами (8) и (9). Обозначим $E = \bigcup_{\nu \geq 1} I_\nu$. Тогда из (8) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t f_*(u) du &= f_{**}(t) = \frac{1}{|E|} \sum_{\nu \geq 1} |I_\nu| f_{I_\nu} = \frac{1}{|E|} \sum_{\nu \geq 1} \int_{I_\nu} f(x) dx \\ &= \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx \geq \frac{1}{|E|} \int_0^{|E|} f_*(u) du. \end{aligned}$$

Отсюда в силу монотонности f_* следует, что $|E| \leq t$. Поэтому, используя (9) и условие (4), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^t |f_*(u) - f_{**}(t)| du &= 2 \int_{\{u: f_*(u) < f_{**}(t)\}} (f_{**}(t) - f_*(u)) du \\ &= 2 \int_{\{x \in I_0: f(x) < f_{**}(t)\}} (f_{**}(t) - f(x)) dx \\ &= \int_E |f(x) - f_{**}(t)| dx = \sum_{\nu \geq 1} \int_{I_\nu} |f(x) - f_{I_\nu}| dx \\ &\leq \varepsilon \sum_{\nu \geq 1} |I_\nu| f_{I_\nu} = \varepsilon f_{**}(t) |E| \leq \varepsilon t f_{**}(t), \end{aligned}$$

откуда следует (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для невозрастающей перестановки аналог леммы 3 доказан в [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ясно, что неравенство (3) достаточно доказать для случая $I = I_0$.

Пусть число $a > 1$, его мы выберем ниже. Тогда из лемм 2 и 3 следует неравенство

$$f_{**}(t) - f_{**}\left(\frac{t}{a}\right) \leq \frac{a}{2} \Omega(f_*; [0, t]) \leq \frac{a\varepsilon}{2} f_{**}(t), \quad 0 < t \leq |I_0|,$$

или, что то же самое,

$$f_{**}\left(\frac{t}{a}\right) \geq \left(1 - \frac{a\varepsilon}{2}\right) f_{**}(t), \quad 0 < t \leq |I_0|. \quad (11)$$

Заметим, что число $a > 1$ ниже будет подобрано так, что

$$1 - \frac{a\varepsilon}{2} > 0. \quad (12)$$

Из (11) следует

$$f_{**}(a^{-\nu}|I_0|) \geq \left(1 - \frac{a\varepsilon}{2}\right)^\nu f_{**}(|I_0|), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Пусть $q_0 > 1$ — корень уравнения (5). Положим $a = q_0^{1/(q_0-1)} > 1$. Тогда получим

$$1 - \frac{a\varepsilon}{2} = 1 - q_0^{1/(q_0-1)}(q_0 - 1)q_0^{-q_0/(q_0-1)} = \frac{1}{q_0} > 0,$$

так что (12) имеет место. Кроме того,

$$\left(1 - \frac{a\varepsilon}{2}\right)^{1/(q_0-1)} = q_0^{-1/(q_0-1)} = \frac{1}{a},$$

и поэтому (13) можем переписать так:

$$f_{**}(a^{-\nu}|I_0|) \geq (a^\nu)^{-(q_0-1)} f_{I_0}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Теперь для заданного $t \in (0, |I_0|]$ находим такое $\nu \geq 1$, что $a^{-\nu}|I_0| < t \leq a^{-\nu+1}|I_0|$, и из (14) в силу монотонности f_{**} получаем

$$f_{**}(t) \geq f_{**}(a^{-\nu}|I_0|) \geq (a^\nu)^{-(q_0-1)} f_{I_0} \geq a^{-(q_0-1)} \left(\frac{|I_0|}{t}\right)^{-(q_0-1)} f_{I_0}. \quad (15)$$

Пусть теперь $q > q_0$. Тогда из (15) следует

$$f_{**}^{-1/(q-1)}(t) \leq a^{(q_0-1)/(q-1)} \left(\frac{|I_0|}{t}\right)^{(q_0-1)/(q-1)} (f_{I_0})^{-1/(q-1)}, \quad 0 < t \leq |I_0|.$$

Интегрируя от 0 до $|I_0|$, находим

$$\int_0^{|I_0|} f_{**}^{-1/(q-1)}(t) dt \leq C_1 |I_0| (f_{I_0})^{-1/(q-1)},$$

где постоянная $C_1 = a^{(q_0-1)/(q-1)}(q-1)/(q-q_0)$ зависит только от q и ε . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} f^{-1/(q-1)}(x) dx &= \frac{1}{|I_0|} \int_0^{|I_0|} f_*^{-1/(q-1)}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{|I_0|} \int_0^{|I_0|} f_{**}^{-1/(q-1)}(t) dt \leq C_1 (f_{I_0})^{-1/(q-1)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает (3) с постоянной $C = C_1^{q-1}$, зависящей только от q и ε .

При доказательстве теоремы 2 будем использовать следующее свойство средних колебаний.

ЛЕММА 4 (см. [13]). Пусть монотонная на отрезке J функция $f \in L(J)$ и отрезок $I \subset J$ таков, что $f_J = f_I$. Тогда

$$\Omega(f; I) \leq \Omega(f; J).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\varepsilon \in (0, 2)$ и число $q_0 > 1$ определено равенством (5). Положим $\alpha = q_0 - 1 > 0$. Тогда ясно, что для функции $f(x) = x^\alpha$, $0 \leq x \leq 1$, справедливо $f^{-1/(q_0-1)} \notin L([0, 1])$. Таким образом, остается показать, что $f \in GR(\varepsilon)$, т.е. проверить выполнение неравенства (1).

Пусть произвольный отрезок $I \subset [0, 1]$. Найдем такое $t > 0$, что $J \equiv [0, t] \supset I$ и $f_J = f_I$. Тогда, пользуясь леммой 4, получаем

$$\begin{aligned} (f_I)^{-1} \Omega(f; I) &\leq (f_J)^{-1} \Omega(f; J) = (f_{[0,1]})^{-1} \Omega(f; [0, 1]) \\ &= 2\alpha(\alpha+1)^{-(\alpha+1)/\alpha} = 2(q_0-1)q_0^{-q_0/(q_0-1)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

и тем самым завершается доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Фиксируем отрезок $I \subset I_0$. Тогда, обозначая через χ_I характеристическую функцию отрезка I , из условия (3) для $0 < u \leq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} f_I &\leq C \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f^{-1/(q-1)}(x) dx \right\}^{-(q-1)} = C \left\{ \frac{1}{|I|} \int_0^{|I|} (f\chi_I)_*^{-1/(q-1)}(t) dt \right\}^{-(q-1)} \\ &\leq C \left\{ \frac{1}{|I|} \int_0^{u|I|} (f\chi_I)_*^{-1/(q-1)}(t) dt \right\}^{-(q-1)} \leq C (f\chi_I)_*(u|I|) \cdot u^{-(q-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(f\chi_I)_*(t) \geq \frac{1}{C} f_I \left(\frac{t}{|I|} \right)^{q-1}, \quad 0 < t \leq |I|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Omega(f; I) &= \frac{2}{|I|} \int_{\{x \in I: f(x) < f_I\}} (f_I - f(x)) dx \\ &= \frac{2}{|I|} \int_{\{t \in (0, |I|): (f\chi_I)_*(t) < f_I\}} (f_I - (f\chi_I)_*(t)) dt \\ &\leq \frac{2}{|I|} f_I \int_0^{|I|} \left(1 - \frac{1}{C} \left(\frac{t}{|I|}\right)^{q-1}\right) dt = 2 \left(1 - \frac{1}{qC}\right) f_I.\end{aligned}$$

Это означает, что $f \in GR(\varepsilon)$, где $\varepsilon = 2(1 - (qC)^{-1}) < 2$.

Список литературы

1. Гуров Л. Г. Об устойчивости преобразований Лоренца. Оценки для производных // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. №2. С. 273–276.
2. Гуров Л. Г., Решетняк Ю. Г. Об одном аналоге понятия функций с ограниченным средним колебанием // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. №3. С. 540–546.
3. Iwaniec T. On L^p -integrability in PDEs and quasiregular mappings for large exponents // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1982. V. 7. №2. P. 301–322.
4. Bojarski B. Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1985. V. 10. P. 89–94.
5. Wik I. Note on a theorem by Reshetnyak–Gurov // Studia Math. 1987. V. 86. №3. P. 287–290.
6. Franciosi M. Weighted rearrangements and higher integrability results // Studia Math. 1989. V. 92. №2. P. 131–139.
7. Franciosi M. On weak reverse integral inequalities for mean oscillation // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. №1. P. 105–112.
8. Korenovskii A. A. One refinement of the Gurov–Reshetnyak inequality // Ricerche Mat. 1996. V. 45. №1. P. 197–204.
9. Кореновский А. А. О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. №12. С. 1721–1727.
10. Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M. A note on the Gurov–Reshetnyak condition // Preprint, math. CA/0205001; <http://arXiv.org/abs/math/0205001>.
11. Coifman R. R., Fefferman Ch. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math. 1974. V. 15. P. 241–250.
12. Strömberg J. O., Torchinsky A. Weighted Hardy spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Math. V. 1381.)
13. Klemes I. A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 93. P. 497–500.
14. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова,
Институт математики, экономики и механики, Украина, г. Одесса
E-mail: anakor@paco.net

Поступила в редакцию
04.07.2002