Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лотов, Н. Г. Орлова, О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 135–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:35:28

УДК 519.21

В. И. Лотов, Н. Г. Орлова

О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания

Получены точные выражения для распределения общего числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания, скачки которого имеют двустороннее геометрическое распределение. Распределение количества пересечений за конечный промежуток времени найдено в явном виде для блужданий со скачками, принимающими значения ± 1 . Доказана предельная теорема для совместного распределения числа пересечений расширяющейся полосы на конечном (расходящемся) промежутке времени и положения блуждания в конце этого промежутка; найдено соответствующее предельное распределение.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

В работе изучается число пересечений полосы $-a \leq y \leq b$, $-a \leq 0 \leq b$, на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n)\}_{n=0}^\infty$. Известно, что число пересечений конечно с вероятностью единица, если сходится один из рядов

$$\sum \frac{1}{n} P(S_n > 0) < \infty \quad \text{или} \quad \sum \frac{1}{n} P(S_n < 0) < \infty, \quad (1)$$

для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось условие $E\xi_1 \neq 0$.

Пусть выполнено (1). Для рассматриваемого случайного блуждания определим моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf \{n \geq \tau_{i-1}^+ : S_n \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf \{n \geq \tau_i^- : S_n \geq b\}, \\ i \geq 1.$$

Здесь всегда подразумевается, что $\inf \emptyset = \infty$. Рассмотрим случайную величину $\eta^{(1)}$, равную числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n, S_n), n \geq 0\}$. Очевидно, $P(\eta^{(1)} \geq k) = P(\tau_k^+ < \infty)$. Аналогичным образом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00902) и фонда INTAS (грант № 00-265).

определяется случайная величина $\eta^{(2)}$, равная числу пересечений полосы сверху вниз.

В [1] приведены представления вероятностей $P(\eta^{(i)} \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda) = E \exp\{\lambda \xi_1\}$. Однако использование этих представлений затруднительно без дополнительных предположений о характере распределения ξ_1 . В §3 настоящей работы найдены распределения случайных величин $\eta^{(i)}$ при условии, что ξ_i целочисленны, $E\xi_1 \neq 0$, а вероятности $P(\xi_1 = k)$, $P(\xi_1 = -k)$ убывают в геометрической прогрессии, что составляет содержание теоремы 1. Далее изучаются случайные величины $\eta_n^{(1)}$, $\eta_n^{(2)}$, также равные соответственно числу пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз, но за промежуток времени от 0 до n . В теореме 2 для простейшего случайного блуждания получены точные формулы для распределений случайных величин $\eta_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, без ограничений на среднее значение ξ_1 .

Далее предполагается, что $E\xi_1 = 0$. В этой ситуации общее число пересечений полосы бесконечно с вероятностью единица. В условиях, когда случайная величина ξ_1 имеет произвольное распределение и конечный второй момент, доказана предельная теорема (теорема 3) о сходимости совместного распределения случайных величин $\eta_n^{(i)}$ и S_n к соответствующим характеристикам винеровского процесса; последние найдены в явном виде. При этом предполагается, что ширина полосы и длина рассматриваемого промежутка времени неограниченно возрастают согласованным образом.

Некоторые предельные результаты для числа пересечений полосы в случае нулевой ширины (полоса вырождается в прямую) изложены в работах [2], [3]. Работа [4] содержит утверждение о предельном распределении числа нулей в последовательности S_n в случае, когда $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$. В [1] кроме упомянутых операторных представлений для вероятностей $P(\eta^{(i)} \geq k)$ найдены их асимптотические представления при условии, что полоса безгранично расширяется. При этом дополнительно предполагалось выполненным условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания.

§ 2. Предварительные сведения

В [1] установлено, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$E(z^{\tau_k^+} e^{\lambda S_{\tau_k^+}}; \tau_k^+ < \infty) = ((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, \lambda), \quad (2)$$

где $e(\lambda) \equiv 1$, а операторы J_b^+ , J_{-a}^- определяются следующим образом.

Пусть $1 - z\varphi(\lambda) = r_{z+}(\lambda) \cdot r_{z-}(\lambda)$ — разложение на положительную и отрицательную компоненты факторизации при $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ (см. например, [5]), где функция $r_{z+}(\lambda)$ отлична от нуля и аналитична при $\operatorname{Re} \lambda < 0$, непрерывна на множестве $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает $r_{z-}(\lambda)$, и такая факторизация единственна, если потребовать, например, $r_{z-}(+\infty) = 1$. Пусть на прямой $\operatorname{Re} \lambda = 0$ функция $g(\lambda)$ допускает представление

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y),$$

в котором функция G имеет конечную полную вариацию, тогда при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ полагаем

$$\begin{aligned}(J_t^- g)(z, \lambda) &= r_{z-}(\lambda)[r_{z-}^{-1}(\lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, t]}, \\ (J_t^+ g)(z, \lambda) &= r_{z+}(\lambda)[r_{z+}^{-1}(\lambda)g(\lambda)]^{[t, \infty)}.\end{aligned}$$

Здесь используются обозначения вида

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y) \right]^D = \int_D e^{\lambda y} dG(y), \quad D \subset \mathbb{R}.$$

Функция g может зависеть от z . Для краткости зависимость от z в обозначениях операторов J_t^+ , J_t^- не подчеркивается. Ясно, что для нахождения $P(\tau_k^+ < \infty)$ достаточно положить $\lambda = 0$ в (2) и устремить z к единице. Аналогичным образом находится вероятность события $\{\tau_k^- < \infty\}$.

§ 3. Основные результаты

Заметим вначале, что вероятности $P(\eta^{(i)} \geq k)$ всегда могут быть оценены сверху соответствующими вероятностями для геометрического распределения. Пусть, к примеру, $E\xi_1 < 0$. Тогда

$$P(\eta^{(1)} \geq k) \leq [P(S \geq a + b)]^k,$$

где $S = \sup_{n \geq 0} S_n$. Действительно, обозначив $\nu_t = \inf\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$, будем иметь

$$\begin{aligned}P(\eta^{(1)} \geq k) &= \int_b^{\infty} P(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy) \int_{-\infty}^{-a-y} P(S \geq b - x) P(S_{\nu_{-a-y}} \in dx) \\ &\leq P(S \geq a + b) \int_b^{\infty} P(S_{\nu_{-a-y}} \leq -a - y) P(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy) \\ &= P(S \geq a + b) P(\eta^{(1)} \geq k - 1) \leq [P(S \geq a + b)]^k.\end{aligned}$$

При $E\xi_1 > 0$ по той же схеме получаем

$$P(\eta^{(1)} \geq k) \leq [P(\inf_{n \geq 0} S_n \leq -a - b)]^k.$$

Оценки для $P(\eta^{(2)} \geq k)$ получаются аналогично.

Следующая теорема показывает, что случайные величины $\eta^{(i)}$ имеют в точности геометрическое распределение, если такой же характер распределения на каждой из полусей имеют скачки блуждания ξ_i .

ТЕОРЕМА 1. Пусть a, b — натуральные числа и при $k \geq 1$

$$\begin{aligned}P(\xi_1 = k) &= \alpha p^{k-1}, \quad P(\xi_1 = -k) = \beta q^{k-1}, \quad P(\xi_1 = 0) = r, \\ \frac{\alpha}{1-p} + \frac{\beta}{1-q} &= 1 - r.\end{aligned}$$

Здесь $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что $E\xi_1 \neq 0$. Тогда для любого $k \geq 1$

$$P(\eta^{(i)} \geq k) = c_i d^{k-1},$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= h_1^{a-1} \frac{h_1 - q}{q - h_2} \frac{ph_2 - 1}{h_2^{a+b-1}} \frac{1}{1 - p}, \\ c_2 &= (1 - ph_2) \frac{1}{h_2^b} h_1^{b+a-1} \frac{h_1 - q}{1 - ph_1} \frac{1}{1 - q}, \\ d &= \frac{h_1 - q}{q - h_2} \frac{ph_2 - 1}{1 - ph_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{b+a-1}, \end{aligned}$$

h_1, h_2 – корни уравнения $E\mu^{\xi_1} = 1$, $h_1 < h_2$ (одно из этих чисел всегда равно единице).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам будет удобнее перейти в (2) к переменной $\mu = e^\lambda$. При этом мы сохраним прежние обозначения для компонент факторизации и операторов $J_t^\pm$ как функций переменной μ . Обозначим $\psi(\mu) = E\mu^{\xi_1}$, тогда

$$\begin{aligned} 1 - z\psi(\mu) &= 1 - z \left[r + \frac{\alpha\mu}{1 - \mu p} + \frac{\beta}{\mu - q} \right] \\ &= \frac{(1 - \mu p)(\mu - q) - zr(1 - \mu p)(\mu - q) - z\alpha\mu(\mu - q) - z\beta(1 - \mu p)}{(1 - \mu p)(\mu - q)} \\ &= \frac{\mu^2 C(z) + \mu L(z) + K(z)}{(1 - \mu p)(\mu - q)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C(z) &= -p + rzp - \alpha z, \\ L(z) &= 1 + pq + z(-r - rpq + \alpha q + \beta p), \\ K(z) &= -q + z(rq - \beta). \end{aligned}$$

Заметим, что множитель при μ^2 не может быть тождественным нулем, поскольку $C(z) < 0$ при $0 \leq z \leq 1$. Таким образом,

$$1 - z\psi(\mu) = \frac{\mu - h_1(z)}{\mu - q} \frac{\mu - h_2(z)}{(1 - \mu p)\tilde{C}(z)} = r_{z-}(\mu) \cdot r_{z+}(\mu).$$

Здесь $h_{1,2}(z)$ – корни уравнения $1 - z\psi(\mu) = 0$, $q < h_1(z) < 1 < h_2(z) < 1/p$ при $z \in (0, 1)$, $C(z) = \tilde{C}^{-1}(z)$. Приведенная факторизация обладает всеми указанными выше свойствами. Далее нам потребуются две леммы (ср. с леммами 2, 3 в [6]).

ЛЕММА 1. Пусть ряд $g(\mu) = \sum_{-\infty}^0 a_k \mu^k$ абсолютно сходится при $|\mu| \geq 1$. Тогда при $|z| < 1$, $|\mu| = 1$

$$(J_b^+ g)(z, \mu) = \frac{1 - ph_2(z)}{h_2^b(z)} \frac{\mu^b}{1 - \mu p} g(h_2(z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямыми вычислениями устанавливаем:

$$\begin{aligned}
[r_{z+}^{-1}(\mu)g(\mu)]^{[b,\infty)} &= \tilde{C}(z) \left[\frac{1-\mu p}{\mu-h_2(z)} \sum_{k=-\infty}^0 a_k \mu^k \right]^{[b,\infty)} \\
&= \tilde{C}(z) \left[\left(-p + \frac{1-ph_2(z)}{\mu-h_2(z)} \right) \sum_{k=-\infty}^0 a_k \mu^k \right]^{[b,\infty)} \\
&= \tilde{C}(z) \left[\frac{1-ph_2(z)}{-h_2(z)(1-\mu/h_2(z))} \sum_{k=-\infty}^0 a_k \mu^k \right]^{[b,\infty)} \\
&= \tilde{C}(z) \frac{1-ph_2(z)}{-h_2(z)} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{h_2(z)} \right)^i \sum_{k=-\infty}^0 a_k \mu^k \right]^{[b,\infty)} \\
&= \tilde{C}(z) \frac{1-ph_2(z)}{-h_2(z)} \sum_{i=-\infty}^0 a_i h_2^i(z) \sum_{k=b}^{\infty} \left(\frac{\mu}{h_2(z)} \right)^k \\
&= \tilde{C}(z) \frac{1-ph_2(z)}{\mu-h_2(z)} g(h_2(z)) \frac{\mu^b}{h_2^b(z)}, \\
r_{z+}(\mu)[r_{z+}^{-1}(\mu)g(\mu)]^{[b,\infty)} &= \frac{\mu-h_2(z)}{(1-\mu p)\tilde{C}(z)} \tilde{C}(z) \frac{1-ph_2(z)}{\mu-h_2(z)} g(h_2(z)) \frac{\mu^b}{h_2^b(z)} \\
&= \frac{1-ph_2(z)}{1-\mu p} g(h_2(z)) \frac{\mu^b}{h_2^b(z)}.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть ряд $g(\mu) = \sum_0^\infty a_k \mu^k$ абсолютно сходится при $|\mu| \leq 1$. Тогда при $|z| < 1$, $|\mu| = 1$

$$(J_{-a}^- g)(z, \mu) = \frac{h_1(z) - q}{\mu - q} \left(\frac{h_1(z)}{\mu} \right)^{a-1} g(h_1(z)).$$

Лемма 2 доказывается аналогично.

Обозначим

$$g_1(\mu) = \frac{\mu^b}{1-\mu p}, \quad g_2(\mu) = \frac{1}{\mu^{a-1}(\mu-q)}.$$

Применяя леммы 1 и 2 к функциям $e(\mu)$, $g_1(\mu)$, $g_2(\mu)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
(J_b^+ e)(z, \mu) &= \frac{1-ph_2(z)}{h_2^b(z)} g_1(\mu), \\
(J_b^+ g_2)(z, \mu) &= \frac{ph_2(z)-1}{q-h_2(z)} \frac{1}{h_2^{a+b-1}(z)} g_1(\mu), \\
(J_{-a}^- e)(z, \mu) &= h_1^{a-1}(z)(h_1(z)-q)g_2(z), \\
(J_{-a}^- g_1)(z, \mu) &= \frac{h_1(z)-q}{1-ph_1(z)} h_1^{a+b-1}(z)g_2(\mu)
\end{aligned}$$

и, следовательно, для любого $k \geq 1$

$$\begin{aligned} ((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, \mu) &= h_1^{a-1}(z)(h_1(z) - q) \frac{ph_2(z) - 1}{q - h_2(z)} \frac{1}{h_2^{a+b-1}(z)} \\ &\times \left(\frac{ph_2(z) - 1}{q - h_2(z)} \left(\frac{h_1(z)}{h_2(z)} \right)^{a+b-1} \frac{h_1(z) - q}{1 - ph_1(z)} \right)^{k-1} g_1(\mu), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} ((J_{-a}^- J_b^+)^k e)(z, \mu) &= (1 - ph_2(z)) \frac{h_1^{a+b-1}(z)}{h_2^b(z)} \frac{h_1(z) - q}{1 - ph_1(z)} \\ &\times \left(\frac{ph_2(z) - 1}{q - h_2(z)} \left(\frac{h_1(z)}{h_2(z)} \right)^{a+b-1} \frac{h_1(z) - q}{1 - ph_1(z)} \right)^{k-1} g_2(\mu). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда получаем

$$P(\eta^{(1)} \geq k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, 1) = c_1 d^{k-1}, \quad (5)$$

$$P(\eta^{(2)} \geq k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((J_{-a}^- J_b^+)^k e)(z, 1) = c_2 d^{k-1}. \quad (6)$$

Постоянные c_1, c_2, d находятся из (3), (4) при $\mu = 1, z \rightarrow 1$. А именно $h_1 = h_1(1), h_2 = h_2(1)$,

$$\begin{aligned} c_1 &= h_1^{a-1} \frac{h_1 - q}{q - h_2} \frac{ph_2 - 1}{h_2^{a+b-1}} \frac{1}{1 - p}, \quad c_2 = (1 - ph_2) \frac{1}{h_2^b} h_1^{a+b-1} \frac{h_1 - q}{1 - ph_1} \frac{1}{1 - q}, \\ d &= \frac{h_1 - q}{q - h_2} \frac{ph_2 - 1}{1 - ph_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{a+b-1}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Доказательство теоремы с очевидными изменениями может быть проведено для случая, когда $P(\xi_i \geq x) = \alpha e^{-px}, P(\xi_i < x) = \beta e^{-qx}, x \geq 0$, и также приведет к геометрическому распределению для $\eta^{(i)}$.

2. Доказательство теоремы основывается на возможности вычисления в явном виде функций вида $(J_t^\pm g)(z, \mu)$ с последующим анализом суперпозиций операторов $J_t^\pm$. Для этих целей предполагалось, что компоненты факторизации являются дробно-линейными функциями. Все вычисления могут быть проделаны и в более общей ситуации, когда функция $\psi(\mu)$ (или $\varphi(\lambda)$) рациональна (например, когда ξ_1 — ограниченная целочисленная величина). При этом компоненты факторизации также будут рациональными функциями и, следовательно, допускают разложение на простые дроби. Это также дает возможность вычислять в явном виде значения операторов $J_t^\pm$ и их суперпозиций, однако результат получится слишком громоздким, и по этой причине мы его не приводим. Отметим, что распределение числа пересечений полосы в этом случае будет являть собой смесь дискретных аналогов гамма-плотностей.

3. Требование $0 \in [-a, b]$ не принципиально. Формулы типа (5), (6) легко получаются и в случае, когда $0 \notin [-a, b]$. Замечания по этому поводу содержатся в [1].

Ясно, что общее число пересечений полосы будет неограниченно возрастать, если устремить к нулю снос случайного блуждания. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки. Мы воспользуемся наличием точных формул для распределения числа пересечений полосы, чтобы также получить предельный результат при $E\xi_1 \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $1 - r \geq \varepsilon > 0$. Обозначим $\theta = h_2 - h_1$. Тогда для любого $t \geq 0$, $i = 1, 2$,

$$P\left(\theta\left(a + b + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q}\right)\eta^{(i)} \geq t\right) \rightarrow \exp\{-t\}$$

при $E\xi_1 \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае корни уравнения $E\mu^{\xi_1} = 1$ равны

$$h_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4CK}}{2C}.$$

Здесь $L = L(1)$, $C = C(1)$, $K = K(1)$. Заметим, что $L^2 - 4CK = (L + 2C)^2$. Обозначим $m = E\xi_1$. Прямыми вычислениями устанавливаем:

$$L + 2C = -(1-p)(1-q)m.$$

Пусть для определенности $m > 0$, тогда $L + 2C < 0$, $h_2 = 1$, $h_1 = -1 - L/C$ и

$$\theta = 1 - h_1 = \frac{2C + L}{C} = \frac{(1-p)(1-q)m}{p(1-r) + \alpha}.$$

Заметим, что коэффициент при m в этом выражении допускает оценку

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)(1-q)}{p(1-r) + \alpha} &= \frac{(1-p)(1-q)}{p(1-r) + \frac{(1-p)^2(1-r)}{2-p-q} + \frac{m(1-p)^2(1-q)}{2-p-q}} \\ &\leq \frac{(1-p)(1-q)}{p(1-r) + \frac{(1-p)^2(1-r)}{2-p-q}} = \frac{(1-p)(1-q)(2-p-q)}{(1-r)(1-pq)} \leq \frac{2}{1-r}. \end{aligned}$$

Здесь использовалось выражение для α , которое получается из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1-p} + \frac{\beta}{1-q} &= 1-r, \\ \frac{\alpha}{(1-p)^2} - \frac{\beta}{(1-q)^2} &= m. \end{aligned}$$

Следовательно, при $1 - r \geq \varepsilon > 0$ коэффициент при m ограничен и $\theta \rightarrow 0$ при $m \rightarrow 0$. Далее,

$$d = (1 - \theta)^{a+b-1} \left(1 - \frac{\theta}{1-q}\right) \left(1 - \frac{p\theta}{1-p+p\theta}\right),$$

при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \ln d &= -\theta(a+b-1) - \frac{\theta}{1-q} - \frac{\theta p}{1-p+p\theta} + o(\theta) \\ &= -\theta \left(a+b + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} \right) + o(\theta). \end{aligned}$$

Пусть $\theta_1 = \theta \left(a+b + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} \right)$. Для любого $t \geq 0$ найдется $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$k \leq \frac{t}{\theta_1} \leq k+1.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\theta_1 \eta^{(1)} \geq t) = \mathbf{P}\left(\eta^{(1)} \geq \frac{t}{\theta_1}\right) \leq \mathbf{P}(\eta^{(1)} \geq k) = c_1 d^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} c_1 &= \mathbf{P}(\eta^{(1)} \geq 1) \rightarrow 1, \\ d^{k-1} &\rightarrow \exp\{-t\} \end{aligned}$$

при $m \rightarrow 0$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\theta_1 \eta^{(1)} \geq t) \geq \mathbf{P}(\eta^{(1)} \geq k+1) = c_1 d^k.$$

Повторяя вычисления, получаем

$$\lim_{m \rightarrow 0} c_1 d^k = \exp\{-t\}.$$

Доказательство для случая $i = 1$ закончено. Случай $i = 2$ рассматривается аналогично.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \alpha$, $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \beta = 1 - \alpha$, тогда при $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\eta_m^{(1)} \geq k) = \sum_{i=\gamma}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} \frac{(2\alpha)^b}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} 2^\gamma (\alpha\beta)^i \left\{ \binom{2i-\gamma-1}{i-1} - \binom{2i-\gamma-1}{i} \right\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(\eta_m^{(2)} \geq k) = \sum_{i=\tilde{\gamma}}^{\left[\frac{n+\tilde{\gamma}}{2}\right]} \frac{(2\beta)^a}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} 2^{\tilde{\gamma}} (\alpha\beta)^i \left\{ \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i-1} - \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i} \right\}, \quad (8)$$

где числа a и b целые, $-a \leq 0 \leq b$, $a+b > 0$, $\gamma = 2k(a+b) - b$, $\tilde{\gamma} = 2k(a+b) - a$, квадратные скобки означают целую часть числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $\lambda = 0$ правая часть (2) представляет собой выражение для производящей функции случайной величины τ_k^+ . Это дает возможность получить значения вероятностей событий $\{\tau_k^+ = j\}$ и, в конечном итоге, прийти к соотношению (7), ибо имеет место очевидное равенство

$$P(\eta_n^{(1)} \geq k) = \sum_{j=1}^n P(\tau_k^+ = j).$$

Поэтому наша ближайшая цель состоит в разложении композиции операторов $((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, 1)$ в ряд по степеням z . Для выполнения условий теоремы 2 положим $p = q = r = 0$ в (3), (4). Тогда

$$((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, 1) = \left(\frac{h_1(z)}{h_2(z)} \right)^{k(a+b)} \frac{1}{h_1^b(z)},$$

где $h_{1,2}(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2}}{2z\alpha}$. Далее находим

$$\begin{aligned} ((J_b^+ J_{-a}^-)^k e)(z, 1) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2}}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2}} \right)^{k(a+b)} \frac{(2z\alpha)^b}{(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2})^b} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2})^{2k(a+b)-b}}{(4\alpha\beta z^2)^{k(a+b)}} (2z\alpha)^b \\ &= (1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2})^{2k(a+b)-b} z^{b-2k(a+b)} \frac{(2\alpha)^b}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}}. \end{aligned}$$

Пусть $\gamma = 2k(a+b) - b$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta z^2})^\gamma &= \sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} (-1)^j (1 - 4\alpha\beta z^2)^{j/2} \\ &= \sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} (-1)^j \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{j/2}{i} (4\alpha\beta z^2)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (-1)^i (4\alpha\beta z^2)^i \left[\sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} (-1)^j \binom{j/2}{i} \right] \right\} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (4\alpha\beta z^2)^i f_i, \end{aligned}$$

где $f_i = \sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} (-1)^j \binom{j/2}{i}$. Напомним, что

$$\binom{j/2}{i} = \frac{(j/2 - i + 1)(j/2 - i + 2) \cdots (j/2)}{i!},$$

если $i \leq j/2$, и по определению эта величина равна нулю, если $i > j/2$.

Из [7; формула 4.2.5.54] имеем

$$f_i = \begin{cases} (-1)^i 2^{\gamma-2i} \left\{ \binom{2i-\gamma-1}{i-1} \binom{2i-\gamma-1}{i} \right\}, & \text{если } i \geq \gamma, \\ 0, & \text{если } i < \gamma. \end{cases}$$

Таким образом,

$$((J_b^+ J_a^-)^k e)(z, 1) = \frac{(2\alpha)^b 2^\gamma}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} \sum_{i=\gamma}^{\infty} (\alpha\beta)^i z^{2i-\gamma} \left\{ \binom{2i-\gamma-1}{i-1} - \binom{2i-\gamma-1}{i} \right\}.$$

Вычисления, аналогичные приведенным выше, дают

$$((J_a^- J_b^+)^k e)(z, 1) = \frac{(2\alpha)^a 2^{\tilde{\gamma}}}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} \sum_{i=\tilde{\gamma}}^{\infty} (\alpha\beta)^i z^{2i-\tilde{\gamma}} \left\{ \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i-1} - \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i} \right\},$$

здесь $\tilde{\gamma} = 2k(a+b) - a$ и, следовательно, в условиях теоремы 2

$$\begin{aligned} P(\eta_n^{(1)} \geq k) &= \sum_{i=\gamma}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} \frac{(2\alpha)^b}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} 2^\gamma (\alpha\beta)^i \left\{ \binom{2i-\gamma-1}{i-1} - \binom{2i-\gamma-1}{i} \right\}, \\ P(\eta_n^{(2)} \geq k) &= \sum_{i=\tilde{\gamma}}^{\left[\frac{n+\tilde{\gamma}}{2}\right]} \frac{(2\beta)^a}{(4\alpha\beta)^{k(a+b)}} 2^{\tilde{\gamma}} (\alpha\beta)^i \left\{ \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i-1} - \binom{2i-\tilde{\gamma}-1}{i} \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Далее будем изучать предельное поведение распределения числа пересечений полосы для случайных блужданий общего вида с нулевым сносом.

Пусть $C[0, 1]$ – пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ с метрикой $\rho = \sup_t |x(t) - y(t)|$. Для $x \in C[0, 1]$ обозначим через $f_{A,B}^{(1)}(x)$, $f_{A,B}^{(2)}(x)$ число пересечений полосы $-A \leq y \leq B$, $-A \leq 0 \leq B$, траекториями $(t, x(t))$ на координатной плоскости (t, y) соответственно снизу вверх и сверху вниз. Определим случайные величины $\chi_{A,B}^{(1)} = f_{A,B}^{(1)}(W)$, $\chi_{A,B}^{(2)} = f_{A,B}^{(2)}(W)$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс на $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = 1$, и пусть $a = A\sqrt{n}$, $b = B\sqrt{n}$, $c = C\sqrt{n}$, $d = D\sqrt{n}$, $C \leq D$. Тогда для любого $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(\eta_n^{(i)} \geq k, S_n \in [c, d]) \rightarrow P(\chi_{A,B}^{(i)} \geq k, W(1) \in [C, D]),$$

при этом

$$\begin{aligned} P(\chi_{A,B}^{(1)} \geq k, W(1) \in [C, D]) &= \Phi(N \vee L) - \Phi(M \vee L) + \Phi((2L - M) \vee L) - \Phi((2L - N) \vee L), \\ P(\chi_{A,B}^{(2)} \geq k, W(1) \in [C, D]) &= \Phi(N \vee L_1) - \Phi(M \vee L_1) + \Phi((2L_1 - M) \vee L_1) - \Phi((2L_1 - N) \vee L_1), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt,$$

$$L = 2k(A+B) - B, L_1 = 2k(A+B) - A, M = C + 2k(A+B), N = D + 2k(A+B), M \vee N = \max(M, N), i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим первое соотношение. Покажем, что отображение, переводящее точку x из $C[0, 1]$ в точку $(f_{A,B}^{(i)}(x), x(1))$ пространства $\mathbb{R}^2$ непрерывно всюду, за исключением множества винеровской меры 0. Для этого достаточно доказать данное утверждение для функции $f_{A,B}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Пусть x — точка разрыва функции $f_{A,B}^{(i)}$, тогда траектория $x(t)$ должна касаться верхней границы полосы снизу или нижней границы сверху при некотором t . Непрерывность всюду, кроме множества винеровской меры 0, следует теперь из непрерывности функции распределения верхней и нижней грани $W(t)$ на $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ для любого t и $\varepsilon > 0$. Действительно, пусть v — винеровская мера, и пусть событие A_1 означает, что траектория $W(t)$ в некоторой точке касается уровня $-A$ сверху, а событие B_1 состоит в том, что $W(t)$ касается уровня B снизу в некоторой точке. Тогда

$$v(x(t) : x(t) \text{ есть точка разрыва } f_{A,B}^{(i)}) \leq P(A_1) + P(B_1).$$

Далее,

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^n \left\{ \sup_{t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} W(t) = B \right\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n \left\{ \sup_{t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} W(t) = B \right\}\right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $P(A_1) = 0$. Пусть для $n \geq 1$ случайная функция $x_n(t)$ построена по отрезкам случайного блуждания $\{(m, S_m)\}_{m=0}^n$ следующим образом: полагаем $x_n(j/n) = (1/\sqrt{n})S_j$ для точек вида j/n , $j = 0, 1, \dots, n$. Для прочих точек $t \in [0, 1]$ определим $x_n(t)$ с помощью линейной интерполяции: если $t \in [(i-1)/n, i/n]$, то

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{i-1} + n\left(t - \frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_i.$$

Таким образом, первое утверждение теоремы следует из слабой сходимости x_n к W и непрерывности $f_{A,B}^{(i)}$ почти всюду. Найдем явный вид совместного распределения случайных величин $\chi_{A,B}^{(2)}$ и $W(1)$. Для этого установим равенства

$$\begin{aligned} &P(\chi_{A,B}^{(2)} \geq k, W(1) \in [C, D]) \\ &= P\left(\sup_{t \in [0,1]} W_{2k}(t) \geq 2k(A+B) - A, \right. \\ &\quad \left. W_{2k}(1) \in [C + 2k(A+B), D + 2k(A+B)]\right) \\ &= P\left(\sup_{t \in [0,1]} W(t) \geq 2k(A+B) - A, W(1) \in [C + 2k(A+B), D + 2k(A+B)]\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь для любого $k \geq 1$ процесс $W_{2k}(t)$ построен следующим образом. Для процесса $W(t)$ пусть τ_1^B – момент первого пересечения уровня B , τ_1^{-A} – первый после τ_1^B момент пересечения уровня $-A$, τ_2^B – первый после τ_1^{-A} момент пересечения уровня B и так далее до τ_k^{-A} . Положим $W_1(t) = W(t)$ при $t < \tau_1^B$, для $t \geq \tau_1^B$ процесс $W_1(t)$ является зеркальным отражением процесса $W(t)$ относительно уровня B , т.е. $W_1(t) = 2B - W(t)$ при $t \geq \tau_1^B$. Процесс $W_2(t)$ совпадает с $W_1(t)$ при $t < \tau_1^{-A}$, а при $t \geq \tau_1^{-A}$ процесс $W_2(t)$ является зеркальным отражением процесса $W_1(t)$ относительно уровня $B + (A + B)$, т.е. $W_2(t) = 2(B + (A + B)) - W_1(t)$ при $t \geq \tau_1^{-A}$. Заметим, что процесс $W(t)$ пересекает хотя бы один раз рассматриваемую полосу сверху вниз тогда и только тогда, когда процесс $W_2(t)$ достигает уровня $B + (A + B)$. Продолжая далее эти построения, получаем на k -м шаге процесс $W_{2k}(t) = W_{2k-1}(t)$ при $t < \tau_k^{-A}$ и $W_{2k}(t) = 2(B + (2k - 1)(A + B)) - W_{2k-1}(t)$ при $t \geq \tau_k^{-A}$. События $\{\chi_{A,B}^{(2)} \geq k, W(1) \in [C, D]\}$ и $\{\sup_{t \in [0,1]} W_{2k}(t) \geq 2k(A + B) - A, W_{2k}(1) \in [C + 2k(A + B), D + 2k(A + B)]\}$ совпадают в силу наличия взаимно однозначного соответствия между траекториями процессов $W(t)$ и $W_{2k}(t)$. Второе равенство в (9) справедливо в силу того, что процессы $W(t)$ и $W_{2k}(t)$ одинаково распределены (см. [8; гл. 6, §3]). Вероятность события $\{\sup_{t \in [0,1]} W(t) \geq 2k(A + B) - A, W(1) \in [C + 2k(A + B), D + 2k(A + B)]\}$ хорошо известна, она приведена в формулировке теоремы. Аналогично находим совместное распределение случайных величин $\chi_{A,B}^{(1)}$ и $W(1)$. Теорема 3 доказана.

Заметим попутно, что из доказанной теоремы легко следует известный результат о том, что число пересечений уровня траекторией винеровского процесса бесконечно. Действительно, пусть $A = B = 1/k$, тогда для любого $k \geq 1$

$$P(\chi_{0,0}^{(i)} \geq k) \geq P(\chi_{A,B}^{(i)} \geq k) = P\left(\sup_{t \in [0,1]} W(t) \geq 4 - \frac{1}{k}\right) \geq P\left(\sup_{t \in [0,1]} W(t) \geq 4\right) > 0.$$

Список литературы

1. Лотов В. И. Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
2. Гизман Й. І. Асимптотичні розподіли числа перетинів випадковою функцією границі даної області // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. астроном., матем., механ. 1958. Т. 1. № 1. С. 25–46.
3. Скороход А. В., Слободенюк Н. Г. Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наукова думка, 1970.
4. Chung K. L., Hunt G. A. On the zeros of $\sum_1^n \pm 1$ // Ann. of Math. (2). 1949. V. 50. № 2. P. 385–400.
5. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
6. Лотов В. И. Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I // Теория вероятностей и ее прим. 1979. Т. 24. № 3. С. 475–485.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
8. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск
E-mail: lotov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
19.03.2002 и 21.03.2003