Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Приближение наимпростейшими дробями
на полуоси, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 8, 25–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 08:21:04

УДК 517.538.5

П. А. Бородин

Приближение наипростейшими дробями на полуоси

Доказано, что для любого $\gamma \in [0, \pi/2]$ наипростейшие дроби (логарифмические производные многочленов) со всеми полюсами в угле $\Lambda_\gamma = \{z : \arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)\}$ содержатся в собственном полупространстве пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$ (в частности, не всюду плотны в этом пространстве) при каждом $p \in (1, p_0)$ и, наоборот, всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при каждом $p \geq p_0$, где $p_0 = (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$. Получены оценки расстояний от полюсов наипростейшей дроби r до полуоси $\mathbb{R}_+$ в зависимости от степени дроби r и ее нормы в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Исследуются аппроксимативные свойства множеств наипростейших дробей степени не выше n , а также свойства наименьших уклонений $\rho_n(f)$ от этих множеств для функций $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: приближение, наипростейшая дробь, интегральные метрики.

§ 1. Введение

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}$ — точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ — многочлен с нулями в этих точках.

В 1960-е годы Е. А. Горин поставил следующую задачу. Пусть наипростейшая дробь $r_n(z)$ по модулю не превосходит единицы в каждой точке действительной оси $\mathbb{R}$. Как близко могут подходить к оси $\mathbb{R}$ полюсы a_k этой дроби? Другими словами, стремятся ли к нулю величины

$$d(n) = \inf \left\{ \min |\operatorname{Im} a_k| : \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\},$$

и если стремятся, то с какой скоростью?

В работе [1] В. И. Данченко полностью решил эту задачу. Он показал, что

$$d(n) \asymp \frac{\ln \ln n}{\ln n}, \quad n \rightarrow \infty$$

(знак $\asymp$ слабой эквивалентности означает, что отношение левой и правой частей ограничено сверху и снизу положительными постоянными). В [1] приведена подробная библиография и история решения задачи Е. А. Горина.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

С помощью этого результата В. И. Данченко в работе [2] было доказано, что для любого $u > 0$ любая функция из пространства $C_0(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \in C(\mathbb{R}), f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty\}$ может быть с любой точностью равномерно на $\mathbb{R}$ приближена наипростейшими дробями с полюсами вне полосы $\{z: |\operatorname{Im} z| < u\}$.

В то же время, как было отмечено в [2] (и следует из других результатов работы [1]), наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси не плотны ни в одном из содержащих их пространств $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Класс $S_p(\mathbb{R})$ функций из $L_p(\mathbb{R})$, с любой точностью приближаемых в этом пространстве наипростейшими дробями, был полностью описан В. Ю. Протасовым в [3]: а именно, $S_p(\mathbb{R})$ состоит из тех функций пространства $L_p(\mathbb{R})$, которые являются логарифмическими производными целых функций порядка не выше $1/q$, где $1/p + 1/q = 1$.

Естественным продолжением этих исследований стало изучение аппроксимативных свойств наипростейших дробей на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. В [4] было замечено, что наипростейшие дроби не плотны в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при любом $p \in (1, 2)$. Это следует из неравенства

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt{t}}{t+1} \cdot \frac{1}{t-a} dt = \operatorname{Re} \frac{\pi i}{\sqrt{a}+i} > 0, \quad \operatorname{Im} \sqrt{a} > 0,$$

которое верно для любого числа $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Так как функция $\sqrt{t}/(t+1)$ принадлежит пространству $L_q(\mathbb{R}_+)$ при любом $q > 2$, то указанное неравенство означает, что наипростейшие дроби содержатся в собственном полупространстве во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < 2$, и, следовательно, не плотны в каждом из этих пространств.

Возникает задача о плотности наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \geq 2$.

В. Ю. Протасов [3] установил, что при $p \geq 2$ любую функцию из $L_p(\mathbb{R}_+)$ можно сколь угодно точно приблизить дробью вида $cp'(z)/p(z)$, где $c > 0$, а $p(z)$ – комплексный многочлен. Эти дроби образуют выпуклый конус, порожденный наипростейшими дробями.

Цели настоящей работы: 1) доказать, что наипростейшие дроби всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \geq 2$ (теорема 1); 2) исследовать вопрос о том, являются ли всюду плотными в $L_p(\mathbb{R}_+)$ наипростейшие дроби с ограничениями на расположение полюсов (теорема 2); 3) получить оценки расстояний до полуоси от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ (теорема 3 и следствие 3.1); 4) в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ изучить качественные (теорема 4) и количественные (теорема 5) аппроксимативные свойства множеств наипростейших дробей заданной степени.

Следует отметить, что аппроксимации наипростейшими дробями стали изучаться по инициативе Е. П. Долженко. К настоящему времени получено немало результатов о приближениях наипростейшими дробями на компактных подмножествах комплексной плоскости [5]–[9].

§ 2. Плотность при $p \geq 2$

ТЕОРЕМА 1. При любых $p \geq 2$ и $\alpha > 0$ множество наипростейших дробей с полюсами в области $\Omega_\alpha = \{z = x + iy : x < y^2/(4\alpha^2) - \alpha^2\}$ всюду плотно в $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Заметим, что область Ω_α является образом множества $\sqrt{\Omega_\alpha} = \{z : |\operatorname{Im} z| > \alpha\}$ при отображении $z \rightarrow z^2$. Граница области Ω_α – это парабола с фокусом в начале координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное комплексное число $a \in \Omega_\alpha$. Тогда найдется такое $\delta \in (0, 1)$, что $a + \delta \in \Omega_\alpha$. Пусть $\sqrt{a + \delta}$ – корень из $a + \delta$ с положительной мнимой частью. По теореме Данченко [1] для любого достаточно большого натурального n найдется многочлен $p(z)$ степени не выше n с нулем в $\sqrt{a + \delta}$ и остальными нулями в $\sqrt{\Omega_\alpha}$, удовлетворяющий неравенству

$$\left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right| \leq C(\alpha) \frac{\ln \ln n}{\ln n} =: C(\alpha)L(n)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$ (константа $C(\alpha)$ зависит от α и не зависит от n и a).

Многочлен $P(z) = p(z)p(-z)$ – четный, а $P(\sqrt{t + \delta}) =: q(t)$ – многочлен степени не выше n с нулем в a и остальными нулями в области Ω_α .

Для $t > 0$ имеем

$$\left| \frac{q'(t)}{q(t)} \right| = \left| \frac{P'(\sqrt{t + \delta})}{2\sqrt{t + \delta}P(\sqrt{t + \delta})} \right| \leq \frac{C(\alpha)L(n)}{\sqrt{t + \delta}}, \quad (1)$$

так что при $p > 2$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{q'}{q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p &= \int_0^\infty \left| \frac{q'(t)}{q(t)} \right|^p dt \leq (C(\alpha)L(n))^p \int_0^\infty \frac{dt}{(t + \delta)^{p/2}} \\ &= \frac{2(C(\alpha)L(n))^p}{(p - 2)\delta^{p/2-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Чтобы получить аналогичный результат при $p = 2$, следует оценить дробь q'/q точнее.

Как мы сейчас покажем, при достаточно больших n можно считать, что все нули b_k многочлена p по модулю меньше $2n^3$. Отметим, что этот результат можно получить непосредственно из конструкции В. И. Данченко (см. [1; п. 4.1]).

Найдутся такие два отрезка $\Delta^- \subset [-2n^3, -n^3]$ и $\Delta^+ \subset [n^3, 2n^3]$ с центрами s^- и s^+ соответственно и длины $n^2/2$, что на этих отрезках нет чисел $\operatorname{Re} b_k$. Пусть $p(z) = p_1(z)p_2(z)$, где действительные части всех нулей многочлена p_1 лежат в интервале $(s^- + n^2/4, s^+ - n^2/4)$ и сами эти нули по модулю меньше $2n^3$, а у всех нулей многочлена p_2 либо действительные части лежат на лучах $(-\infty, s^- - n^2/4)$ и $(s^+ + n^2/4, \infty)$, либо модули больше или равны $2n^3$. Тогда при $x \in (-\infty, s^-] \cup [s^+, \infty)$ имеем

$$\left| \frac{p'_1(x)}{p_1(x)} \right| < n \cdot \frac{1}{n^2/4} = \frac{4}{n},$$

а при $x \in (s^-, s^+)$ имеем

$$\left| \frac{p'_2(x)}{p_2(x)} \right| < n \cdot \frac{1}{n^2/4} = \frac{4}{n} \implies \left| \frac{p'_1(x)}{p_1(x)} \right| = \left| \frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{p'_2(x)}{p_2(x)} \right| < C(\alpha)L(n) + \frac{4}{n}.$$

Таким образом, $|p'_1(x)/p_1(x)| \leq C_1(\alpha)L(n)$ для всех x при достаточно больших n , $p_1(\sqrt{a + \delta}) = 0$ ($|\sqrt{a + \delta}| < n^3$ при достаточно больших n) и все нули многочлена p_1 по модулю меньше $2n^3$.

Тогда действительные части нулей многочлена $q(t) = p_1(\sqrt{t+\delta})p_1(-\sqrt{t+\delta})$ меньше $4n^6 - \delta < 4n^6$, и при $t \geq 8n^6$ дополнительно к (1) имеем

$$\left| \frac{q'(t)}{q(t)} \right| < \frac{n}{t/2} = \frac{2n}{t},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\| \frac{q'}{q} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 &= \int_0^\infty \left| \frac{q'(t)}{q(t)} \right|^2 dt = \int_0^{8n^6} + \int_{8n^6}^\infty \leq (C_1(\alpha)L(n))^2 (\ln(8n^6 + \delta) - \ln \delta) + \frac{4n^2}{8n^6} \\ &\leq C_2(\alpha, \delta) \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, $\|q'/q\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при каждом $p \geq 2$. Это означает, что функция $-1/(t-a)$ с любой точностью приближается наипростейшими дробями с полюсами в области Ω_α в каждом из пространств $L_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$.

Для доказательства теоремы достаточно приблизить каждую функцию из пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$ с любой точностью суммами функций вида $\pm 1/(z-a)$, $a \in \Omega_\alpha$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, применявшимся в доказательстве теоремы 1 работы [2].

Докажем индукцией по $k \geq 2$, что такими суммами приближается любая дробь вида $c/(z-a)^k$, $\operatorname{Re} a < -\alpha^2$, $c \in \mathbb{C}$. Если $\operatorname{Re} a < -\alpha^2$, то $a \in \Omega_\alpha$, для достаточно больших натуральных m имеем $\operatorname{Re}(a + c/m) < -\alpha^2$ и при этом

$$\begin{aligned} \left\| \frac{c}{(t-a)^2} - \left(\frac{m}{t-(a+c/m)} - \frac{m}{t-a} \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p &= \left\| \frac{c^2}{m(t-a)^2(t-(a+c/m))} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p \\ &\leq \frac{|c|^{2p}}{m^p} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+\alpha^2)^{3p}} = \frac{|c|^{2p}}{m^p(3p-1)\alpha^{6p-2}} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что при $k=2$ утверждение доказано. Если оно верно при некотором $k \geq 2$, то функция

$$R_\varepsilon(t) = \frac{c/\varepsilon}{(t-(a+\varepsilon/k))^k} - \frac{c/\varepsilon}{(t-a)^k}$$

при достаточно малом ε с любой точностью в $L_p(\mathbb{R}_+)$ приближается суммами дробей $\pm 1/(t-b)$, $b \in \Omega_\alpha$, и в то же время

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{c}{(t-a)^{k+1}} - R_\varepsilon(t) \right\| \\ &= \left\| \frac{c(t-(a+\varepsilon/k))^k - (c/\varepsilon)(t-a)((t-a)^k - (t-(a+\varepsilon/k))^k)}{(t-a)^{k+1}(t-(a+\varepsilon/k))^k} \right\| \\ &= |c| \cdot \left\| \frac{(t-a)^k - \varepsilon(t-a)^{k-1} - (t-a)^k + (k-1)(t-a)^{k-1}\varepsilon/(2k) + O(\varepsilon^2)}{(t-a)^{k+1}(t-(a+\varepsilon/k))^k} \right\| \rightarrow 0, \\ &\quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так что утверждение справедливо при всех $k \geq 2$.

Возьмем теперь произвольное комплексное число $\zeta \notin \mathbb{R}_+$. Можно подобрать такое число a со сколь угодно большим модулем, что $\operatorname{Re} a < -\alpha^2$ и $|t-a| > |\zeta-a|$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(\zeta-a)^{k-1}}{(t-a)^k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R}_+)$ к функции

$$\frac{\lambda(\zeta - a)}{(t - a)^2} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta - a)/(t - a)} = \frac{\lambda(\zeta - a)}{(t - a)(t - \zeta)} =: F_a(t).$$

С другой стороны,

$$\left\| F_a(t) - \frac{\lambda}{t - \zeta} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0, \quad |a| \rightarrow \infty$$

(числа a удовлетворяют указанным выше условиям), так что дробь $\lambda/(t - \zeta)$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с любой точностью приближается в $L_p(\mathbb{R}_+)$ суммами дробей вида $c/(t - a)^k$, $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a < -\alpha$, $k \geq 2$, и, следовательно, и исходными суммами дробей $\pm 1/(t - a)$, $\operatorname{Re} a < -\alpha^2$. Остается учесть то, что суммы дробей вида $\lambda/(t - \zeta)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, образуют всюду плотное множество во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$ (см., например, [10; “Дополнения и задачи”, п. 4]).

Теорема 1 доказана.

Еще раз отметим различие между прямой $\mathbb{R}$ и полупрямой $\mathbb{R}_+$ в вопросе приближения наипростейшими дробями функций из L_p : на $\mathbb{R}$ приближаются только аналитические функции специального вида (см. приведенный во введении результат из [3]), а на $\mathbb{R}_+$ приближаются все функции из L_p при $p \geq 2$.

§ 3. Приближение с ограничением на полюсы

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\gamma \in [0, \pi/2]$ наипростейшие дроби с полюсами в угле $\Lambda_\gamma = \{z : \arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)\}$ содержатся в собственном полупространстве пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$ (в частности, не всюду плотны в этом пространстве) при каждом $p \in (1, (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma))$ и всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при каждом $p \geq (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$.

Этот результат, с одной стороны, является обобщением теоремы 1, а с другой стороны, он показывает, что область Ω_α в теореме 1 нельзя заменить никаким углом Λ_γ , $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\gamma = 0$ (неплотность при $p \in (1, 2)$ и плотность при $p \geq 2$) уже отмечался выше (см. введение и теорему 1); случай $\gamma = \pi/2$ (неплотность при всех $p \in (1, \infty)$) очевиден: наипростейшие дроби с полюсами в левой полуплоскости имеют на $\mathbb{R}_+$ положительные действительные части и, следовательно, лежат в собственном полупространстве $\{f \in L_p(\mathbb{R}_+) : \operatorname{Re} f(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R}_+\}$ пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Всюду ниже считаем, что $\gamma \in (0, \pi/2)$.

Пусть $p \in (1, (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma))$. Положим $s = (\pi - 2\gamma)/(2\pi - 2\gamma)$, $s \in (0, 1/2)$. Для любого числа $a \in \Lambda_\gamma$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{t^s}{t + 1} \cdot \frac{1}{t - a} dt = \frac{\pi}{\sin \pi s} \cdot \frac{(-a)^s - 1}{(-a) - 1} =: f(a) \quad (2)$$

(см. задачу 28.20 из [11]), где выбранная непрерывная ветвь функции $z \rightarrow (-z)^s$ переводит угол Λ_γ в угол $\{z : \arg z \in (-s(\pi - \gamma), s(\pi - \gamma))\}$.

Докажем, что $\operatorname{Re} f(a) > 0$ для любого $a \in \Lambda_\gamma$.

Для этого рассмотрим выражение $g(a) := ((-a)^s - 1)(-\bar{a} - 1)$, отличающееся от $f(a)$ положительным множителем. Полагая $-a = re^{i\varphi}$ с $r > 0$ и $|\varphi| \leq \pi - \gamma$, имеем

$$\operatorname{Re} g(a) = \operatorname{Re}((r^s e^{is\varphi} - 1)(re^{-i\varphi} - 1)) = r^{s+1} \cos(s-1)\varphi - r \cos \varphi - r^s \cos s\varphi + 1. \quad (3)$$

Ясно, что при достаточно больших r выражение (3) положительно: если $|\varphi|$ отделен от $\pi - \gamma$, то $|(s-1)\varphi| = |\pi\varphi/(2(\pi - \gamma))|$ есть острый угол, отделенный от $\pi/2$, и тогда первое слагаемое в (3) положительно и перевешивает остальные; если же $|\varphi|$ близок к $\pi - \gamma$, то $\cos(s-1)\varphi > 0$, а $\cos \varphi$ отрицателен и отделен от нуля, и тогда первые два слагаемых в (3) положительны и второе перевешивает третье.

При $\varphi = \pm(\pi - \gamma)$ выражение (3) принимает вид

$$r \cos \gamma - r^s \sin \gamma + 1 =: h(r).$$

Имеем $h(0) = 1$, $h(r) > 0$ при достаточно больших r , а в единственной своей критической точке $r_0 = (s \operatorname{tg} \gamma)^{1/(1-s)}$ функция h равна

$$\begin{aligned} h(r_0) &= r_0^s (r_0^{1-s} \cos \gamma - \sin \gamma) + 1 = (s \operatorname{tg} \gamma)^{s/(1-s)} (s \operatorname{tg} \gamma \cos \gamma - \sin \gamma) + 1 \\ &= -(1-s) \sin \gamma (s \operatorname{tg} \gamma)^{s/(1-s)} + 1 > 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$s \operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi - 2\gamma}{2\pi - 2\gamma} \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\pi - \gamma} \cdot \frac{\pi/2 - \gamma}{\operatorname{tg}(\pi/2 - \gamma)} < 1$$

для любого $\gamma \in (0, \pi/2)$.

Таким образом, выражение (3) положительно при всех достаточно больших r и при граничных значениях φ , т.е. $\operatorname{Re} f(a) > 0$ на границе угла Λ_γ и при достаточно больших $|a|$. Так как $\operatorname{Re} f(a)$ – гармоническая функция в Λ_γ , то она положительна всюду в угле Λ_γ .

Функция $t^s/(t+1)$ принадлежит пространству $L_q(\mathbb{R}_+)$ при всех $q > 1/(1-s) = 2(\pi - \gamma)/\pi =: q_0$. Поэтому из (2) и доказанного неравенства $\operatorname{Re} f(a) > 0$, $a \in \Lambda_\gamma$, получаем, что наипростейшие дроби с полюсами в угле Λ_γ содержатся в собственном полупространстве во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < 1/(1 - 1/q_0) = (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$, и, следовательно, не плотны в каждом из этих пространств.

Пусть теперь $p \geq (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$. Докажем, что наипростейшие дроби с полюсами в угле Λ_γ плотны в $L_p([1, \infty))$ при таких p . Это равносильно тому, что наипростейшие дроби с полюсами в угле $\Lambda_\gamma - 1 = \{z : z + 1 \in \Lambda_\gamma\}$ плотны в $L_p(\mathbb{R}_+)$, а так как $\Lambda_\gamma - 1 \subset \Lambda_\gamma$, то отсюда будет следовать второе утверждение теоремы.

Положим $s = \pi/(2\pi - 2\gamma) \in (1/2, 1)$ и выберем ту ветвь функции $z \rightarrow z^s$, которая переводит угол Λ_γ в полуплоскость $\Pi = \{z : \arg z \in (s\gamma, s\gamma + \pi)\}$. Пусть a – произвольное число из Λ_γ , $a^s \in \Pi$. По теореме Данченко для любого достаточно большого натурального n найдется многочлен $p(z)$ степени не выше n с нулем в точке a^s , удовлетворяющий неравенству

$$\left| \frac{p'(z)}{p(z)} \right| \leq C(a) \frac{\ln \ln n}{\ln n} =: C(a)L(n) \quad (4)$$

для любого $z \in \partial\Pi$. При этом для достаточно больших n можно считать, что все корни b_k многочлена p по модулю не превосходят $2n^3$ (см. доказательство теоремы 1).

Функция

$$F(z) = \frac{sz^{s-1}p'(z^s)}{p(z^s)}$$

мероморфна в области Λ_γ , имеет там полюсы в точности в тех точках $b_k^{1/s}$, для которых $b_k \in \Pi$ (в том числе в точке a), и вычет F в каждом полюсе является натуральным числом.

Обозначим через $\partial\Lambda_\gamma$ границу угла Λ_γ с таким направлением обхода, при котором область Λ_γ остается слева. Через $\partial\Lambda_\gamma(r)$ обозначим часть контура $\partial\Lambda_\gamma$, лежащую внутри окружности радиуса r с центром в нуле, а через C_r – дугу этой окружности, лежащую внутри Λ_γ , с направлением обхода против часовой стрелки.

При $x \in [1, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_\gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_\gamma(r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_\gamma(r) \cup C(r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\ &= \sum_{k: b_k \in \Pi} \operatorname{res}_{b_k^{1/s}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - x} = \sum_{k: b_k \in \Pi} \frac{1}{b_k^{1/s} - x} = -\frac{q'(x)}{q(x)}, \end{aligned}$$

где $q(z)$ – многочлен степени не выше n с нулями в точности в тех точках $b_k^{1/s}$, для которых $b_k \in \Pi$ (в том числе в точке a). Используя (4), оценим полученную наипростейшую дробь на луче $[1; \infty)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{q'(x)}{q(x)} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_\gamma} \frac{s\zeta^{s-1}p'(\zeta^s)}{p(\zeta^s)(\zeta - x)} d\zeta \right| \leq \frac{1}{\pi} C(a)L(n) \int_0^\infty \frac{sr^{s-1}}{|re^{i\gamma} - x|} dr \\ &\leq C_1(a)L(n) \left(\int_0^{2x} \frac{sr^{s-1}}{x \sin \gamma} dr + s \int_{2x}^\infty \frac{dr}{|re^{i\gamma} - x|^{2-s}} \right) \\ &\leq C_1(a)L(n) \left(\frac{2^s / \sin \gamma}{x^{1-s}} + s \int_{2x}^\infty \frac{dr}{((r+x)/4)^{2-s}} \right) = \frac{C_2(a)L(n)}{x^{1-s}}. \end{aligned}$$

Отсюда при $p > (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma) = 1/(1-s)$ имеем

$$\left\| \frac{q'}{q} \right\|_{L_p([1, \infty))}^p \leq (C_2(a)L(n))^p \int_1^\infty \frac{dx}{x^{p(1-s)}} = \frac{(C_2(a)L(n))^p}{p(1-s) - 1}$$

при достаточно больших n .

Так как все нули многочлена q по модулю не превосходят $(2n^3)^{1/s} < 4n^6$, то при $x \geq 8n^6$ дополнительно имеем

$$\left| \frac{q'(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{n}{x/2} = \frac{2n}{x}$$

и при $p = (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma) = 1/(1-s)$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{q'}{q} \right\|_{L_p([1, \infty))}^p &= \int_1^\infty \left| \frac{q'(t)}{q(t)} \right|^p dt = \int_1^{8n^6} + \int_{8n^6}^\infty \\ &\leq (C_2(a)L(n))^p \ln(8n^6) + \frac{(2n)^p}{(p-1)(8n^6)^{p-1}} \leq C_3(a) \frac{(\ln \ln n)^p}{(\ln n)^{p-1}} \end{aligned}$$

при достаточно больших n .

Таким образом,

$$\left\| \frac{q'}{q} \right\|_{L_p([1, \infty))} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

при каждом $p \geq (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$. Это означает, что функция $-1/(x - a)$ с любой точностью приближается наипростейшими дробями с полюсами в области Λ_γ в каждом из пространств $L_p([1, \infty))$, $p \geq (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из доказательства теоремы 2, при $p \geq (2\pi - 2\gamma)/(\pi - 2\gamma)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ всюду плотны наипростейшие дроби с полюсами не просто из угла Λ_γ , а из любой меньшей области вида

$$e^{i\gamma} \cdot \{z : \operatorname{Im} z > u\}^{(2\pi - 2\gamma)/\pi},$$

где $u > 0$ (при $\gamma = 0$ эти области совпадают со внешностями парабол из теоремы 1).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если $1 < q \leq 2$, $g \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $\gamma \in [0, \pi(2 - q)/2]$ и

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{g(t)}{t - z} dt \geq 0$$

для любого z с $\arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)$, то $g \equiv 0$.

Отметим, что для $q = 2$ это утверждение вытекает из упомянутого во введении результата В. Ю. Протасова [3].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любого $\varepsilon > 0$ наипростейшие дроби с полюсами в множестве

$$X_\varepsilon = \{z : \arg z \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon) \cup (\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon)\}$$

не плотны в пространстве $C_0(\mathbb{R})$. Кроме того, у наипростейших дробей r с полюсами из X_ε полюсы не могут подходить сколь угодно близко к действительной оси при условии $\|r\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы любое из утверждений следствия не было верным, то повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, мы получили бы, что наипростейшие дроби с полюсами в угле $X_\varepsilon^2 = \{z : \arg z \in (2\varepsilon, 2\pi - 2\varepsilon)\}$ всюду плотны в $L_2(\mathbb{R}_+)$, а это противоречит теореме 2.

§ 4. Оценки расстояний от полюсов до полуоси

Согласно теореме 1 для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ функция $-1/(t - a)$ с любой точностью приближается в $L_2(\mathbb{R}_+)$ наипростейшими дробями. Это означает, что полюсы наипростейших дробей r с условием $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$ могут подходить к полуоси $\mathbb{R}_+$ сколь угодно близко. Как показывает следующая теорема, ближе всего они могут подходить к $\mathbb{R}_+$ вблизи нуля.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $h > 0$ найдется такой номер $N = N(h)$ и такие константы $C_j = C_j(h) > 0$, $j = 1, 2$, что

(а) для любого $n > N$ и любой точки a из области

$$\Omega_1(n, h) = \left\{ z = x + iy : x < \frac{y^2}{4\alpha_n^2} - \alpha_n^2, x < h \right\}, \quad \alpha_n = C_1 \frac{\ln \ln n}{\sqrt{\ln n}},$$

существует наипростейшая дробь r степени не выше n с полюсом в точке a , удовлетворяющая неравенству $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$;

(б) для любого $n > 1$ не существует наипростейшей дроби r степени не выше n , имеющей хотя бы один полюс в области

$$\Omega_2(n, h) = \left\{ z = x + iy : \frac{y^2}{4\beta_n^2} - \beta_n^2 < x < h \right\}, \quad \beta_n = \frac{C_2}{\sqrt{\ln n}},$$

и удовлетворяющей неравенству $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$.

Сразу отметим, что убрать в пункте (б) ограничение $x < h$ нельзя хотя бы потому, что для наипростейшей дроби $1/(t - a)$ с $\operatorname{Im} a = \pi$ и произвольной $\operatorname{Re} a$ имеем $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} < 1$.

Результат, аналогичный теореме 3, можно получить и для дробей с ограничением $\|r\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \leq 1$ при любом $p > 2$, но получающиеся при этом значения параметров α_n и β_n слишком далеки друг от друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, с помощью теоремы Данченко для любого $n \geq N_1$ построим наипростейшую дробь $r(z)$ степени не выше n , имеющую полюс в любой наперед заданной точке z_0 области

$$\Omega(n) = \left\{ z = x + iy : x < \frac{y^2}{4} - 1, |z| < n^3 \right\}$$

и удовлетворяющую неравенству

$$\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq C_1 \frac{\ln \ln n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Для любого $\lambda > 0$ наипростейшая дробь $\lambda r(\lambda z)$ имеет полюс в точке z_0/λ и при этом

$$\|\lambda r(\lambda z)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \sqrt{\lambda} \|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Полагая

$$\alpha_n = C_1 \frac{\ln \ln n}{\sqrt{\ln n}}, \quad \lambda_n = \frac{1}{\alpha_n^2},$$

получаем наипростейшую дробь с нормой меньше или равной единице и полюсом в точке $\alpha_n^2 z_0$ – любой наперед заданной точке из области

$$\alpha_n^2 \Omega(n) = \left\{ z = x + iy : x < \frac{y^2}{4\alpha_n^2} - \alpha_n^2, |z| < n^3 \alpha_n^2 \right\}.$$

Найдется такое $N_2(h)$, что при $n \geq N_2(h)$ всякая точка a области $\Omega_1(n, h) \setminus \alpha_n^2 \Omega(n)$ отстоит от полуоси $\mathbb{R}_+$ не менее чем на π , так что $\|1/(z - a)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$. Таким образом, мы доказали справедливость утверждения (а) теоремы при $N = \max\{N_1, N_2(h)\}$.

Для доказательства утверждения (б) возьмем произвольную наипростейшую дробь $r(z) = 1/(z - a) + \sum 1/(z - a_k)$ степени не выше n с полюсом в точке a , $\operatorname{Re} a < h$, для которой $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$. Для любого $B > 0$ найдется такое

$b \in [h + B/(2n), h + B - B/(2n)]$, что на интервале $(b - B/(2n), b + B/(2n))$ нет ни одного из чисел $\operatorname{Re} a_k$. Разобьем дробь $r(z)$ на две:

$$r(z) = r_1(z) + r_2(z), \quad r_1(z) := \frac{1}{z - a} + \sum_{\operatorname{Re} a_k < b} \frac{1}{z - a_k}.$$

Эти дроби хорошо оцениваются на определенных промежутках из $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} t \in (0, b) &\implies |r_2(t)| < \frac{n}{B/(2n) + b - t}, \\ t \in (b, \infty) &\implies |r_1(t)| < \frac{n}{B/(2n) + t - b}. \end{aligned}$$

Положим $\sqrt{a} = -\alpha + i\beta$, $\beta > 0$. Наша цель – оценить снизу величину β . Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{r_1(t)\sqrt{t}}{t - (\alpha + i\beta + is)^2} dt = \frac{\pi i}{\sqrt{a} + \alpha + i\beta + is} + \sum_{\operatorname{Re} a_k < b} \frac{\pi i}{\sqrt{a_k} + \alpha + i\beta + is}$$

(здесь и ниже $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{(i \arg z)/2}$, $\arg z \in [0, 2\pi)$), где $s \geq 0$ – некоторый параметр, значение которого выберем позже. С одной стороны,

$$|I| \geq \operatorname{Re} \left(\frac{\pi i}{\sqrt{a} + \alpha + i\beta + is} \right) + \sum \operatorname{Re} \left(\frac{\pi i}{\sqrt{a_k} + \alpha + i\beta + is} \right) > \frac{\pi}{2\beta + s}. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \left(\int_0^{B+h} + \int_{B+h}^\infty \right) \frac{|r_1(t)|\sqrt{t}}{|t - (\alpha + i\beta + is)^2|} dt \\ &\leq \|r_1\|_{L_2[0, B+h]} \cdot \left\| \frac{\sqrt{t}}{t - (\alpha + i\beta + is)^2} \right\|_{L_2[0, B+h]} \\ &\quad + \int_{B+h}^\infty \frac{n}{B/(2n) + t - b} \cdot \frac{\sqrt{t}}{|t - (\alpha + i\beta + is)^2|} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Оценим все составляющие в последнем выражении. Имеем

$$\begin{aligned} \|r_1\|_{L_2[0, B+h]}^2 &= \|r_1\|_{L_2[0, b]}^2 + \int_b^{B+h} |r_1(t)|^2 dt \\ &\leq (\|r\|_{L_2[0, b]} + \|r_2\|_{L_2[0, b]})^2 + \int_b^{B+h} \frac{n^2}{(B/(2n) + t - b)^2} dt \\ &\leq \left(1 + \left(\int_0^b \frac{n^2}{(B/(2n) + b - t)^2} dt \right)^{1/2} \right)^2 + n^2 \int_0^\infty \frac{dy}{(y + B/(2n))^2} \\ &= \left(1 + n \left(\frac{1}{B/(2n)} - \frac{1}{b + B/(2n)} \right)^{1/2} \right)^2 + \frac{2n^3}{B} \\ &\leq \left(1 + n \left(\frac{2n}{B} \right)^{1/2} \right)^2 + \frac{2n^3}{B} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}n^{3/2}}{\sqrt{B}} \right)^2 + \frac{2n^3}{B} \leq 2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}n^{3/2}}{\sqrt{B}} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, $\operatorname{Re}(\alpha + i\beta + is)^2 = \alpha^2 - (\beta + s)^2 < \alpha^2 - \beta^2 = \operatorname{Re} a < h$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{B+h}^{\infty} \frac{n}{B/(2n) + t - b} \cdot \frac{\sqrt{t}}{|t - (\alpha + i\beta + is)^2|} dt \\ & \leq \int_{B+h}^{\infty} \frac{n}{t - (h + B(n-1)/n)} \cdot \frac{\sqrt{t}}{t - h} dt = \int_B^{\infty} \frac{n}{x - B(n-1)/n} \cdot \frac{\sqrt{x+h}}{x} dx \\ & \leq \sqrt{\frac{B+h}{B}} \int_B^{\infty} \frac{n dx}{(x - B(n-1)/n)\sqrt{x}} = 2n\sqrt{\frac{B+h}{B}} \int_{\sqrt{B}}^{\infty} \frac{dy}{y^2 - B(n-1)/n} \\ & = n \frac{\sqrt{B+h}}{B} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \ln \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \leq 2 \frac{\sqrt{B+h}}{B} n \ln 4n. \end{aligned} \quad (8)$$

При оценке второй нормы в (6) и применении полученных оценок рассмотрим два случая.

1) Пусть $\beta \leq |\alpha|/(10h)$. Полагая $s = 0$, получаем, что $(\alpha + i\beta)^2 = \bar{a}$ и

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\sqrt{t}}{t - (\alpha + i\beta)^2} \right\|_{L_2[0, B+h]}^2 = \left(\int_0^{2h} + \int_{2h}^{B+h} \right) \frac{t}{|t - \bar{a}|^2} dt \\ & \leq 2h \int_0^{2h} \frac{dt}{(t - (\alpha^2 - \beta^2))^2 + 4\alpha^2\beta^2} + \int_{2h}^{B+h} \frac{t}{(t-h)^2} dt \\ & \leq 2h \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2 + 4\alpha^2\beta^2} + 2 \int_{2h}^{B+h} \frac{dt}{t-h} = \frac{2h\pi}{2|\alpha|\beta} + 2 \ln \frac{B}{h} \leq \frac{\pi}{10\beta^2} + 2 \ln \frac{B}{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5)–(9) получаем ($s = 0$), что

$$\frac{\pi}{2\beta} < \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}n^{3/2}}{\sqrt{B}} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{10}} \frac{1}{\beta} + \sqrt{2} \sqrt{\ln \frac{B}{h}} \right) + 2 \frac{\sqrt{B+h}}{B} n \ln 4n.$$

Полагая здесь $B = n^4$, при $n \geq \max\{4, h, 1/h\}$ получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2\beta} < \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{10}} \frac{1}{\beta} + \sqrt{2} \sqrt{5 \ln n} \right) + \frac{6 \ln n}{n} < \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5\beta} + 4\sqrt{\ln n} \right) + \frac{6 \ln n}{n} \\ & \Rightarrow \frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \right) < 10\sqrt{\ln n} + \frac{6 \ln n}{n} < 16\sqrt{\ln n} \Rightarrow \beta > \frac{1}{230\sqrt{\ln n}}. \end{aligned}$$

2) Пусть $\beta > |\alpha|/(10h)$. Полагая $s = 10h\beta + 1/n$, имеем $\operatorname{Re}(\alpha + i\beta + is)^2 = \alpha^2 - (\beta + s)^2 < 100h^2\beta^2 - ((10h+1)\beta + 1/n)^2 < -1/n^2$ и

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\sqrt{t}}{t - (\alpha + i\beta + is)^2} \right\|_{L_2[0, B+h]}^2 = \int_0^{B+h} \frac{t}{(t - (\alpha^2 - (\beta + s)^2))^2 + 4\alpha^2(\beta + s)^2} dt \\ & \leq \int_0^{B+h} \frac{t}{(t + 1/n^2)^2} dt < \int_0^{B+h} \frac{dt}{t + 1/n^2} = \ln(n^2(B+h) + 1). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (5)–(8) и (10) получаем ($s = 10h\beta + 1/n$), что

$$\frac{\pi}{(2+10h)\beta + 1/n} < \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}n^{3/2}}{\sqrt{B}} \right) \sqrt{\ln(n^2(B+h) + 1)} + 2 \frac{\sqrt{B+h}}{B} n \ln 4n.$$

Полагая здесь $B = n^4$, при $n \geq \max\{20, h\}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{(2+10h)\beta + 1/n} < \frac{5}{2} \sqrt{7 \ln n} + \frac{6 \ln n}{n} < 15\sqrt{\ln n} \\ & \Rightarrow \beta > \frac{1}{2+10h} \left(\frac{\pi}{15\sqrt{\ln n}} - \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{(2+10h)10\sqrt{\ln n}}. \end{aligned}$$

Объединяя результаты, полученные в двух рассмотренных случаях, окончательно получаем, что при $n \geq n_0 := \max\{20, h, 1/h\}$ выполнено неравенство

$$\beta = \operatorname{Im} \sqrt{a} > \frac{1}{(230 + 100h)\sqrt{\ln n}}.$$

Но тогда при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\beta > \frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln n_0}(230 + 100h)\sqrt{\ln n}}.$$

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для каждого $n \geq 20$ полюсы наимпростейшей дроби r степени не выше n , удовлетворяющей условию $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$, не могут подходить к полуоси $\mathbb{R}_+$ ближе чем на $(330^2 \ln n)^{-1}$.

Отметим, что по теореме 3, п. (а) при достаточно больших n полюсы наимпростейшей дроби r степени не выше n такой, что $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$, могут подходить к полуоси $\mathbb{R}_+$ на расстояние $(C_1 \ln \ln n)^2 / \ln n$ (по отрицательной полуоси).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 дробь r степени не выше n не может иметь полюсов в области

$$\left\{ x + iy : \frac{y^2}{4\beta_n^2} - \beta_n^2 < x < 1 \right\},$$

где $\beta_n = (330\sqrt{\ln n})^{-1}$ и $n \geq 20$ (константы взяты из конца доказательства теоремы 3). Отсюда следует, что если полюс a имеет действительную часть $\operatorname{Re} a < 1$, то он отстоит от полуоси $\mathbb{R}_+$ не меньше чем на $\beta_n^2 = (330^2 \ln n)^{-1}$.

Если же $\operatorname{Re} a \geq 1$, то наимпростейшая дробь $r_a(z) = r(z + \operatorname{Re} a)$ имеет полюс в точке $a - \operatorname{Re} a$ и

$$\|r_a\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1.$$

Поэтому точка $a - \operatorname{Re} a$ отстоит от $\mathbb{R}_+$ не меньше чем на $(330^2 \ln n)^{-1}$ и, следовательно, и точка a обладает этим свойством.

Следствие 3.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для каждого $n \geq 20$ всякая наимпростейшая дробь r степени не выше n удовлетворяет неравенству

$$\|r\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq c(n) \|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2, \quad c(n) = 330^2 n \ln n. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \|r\|_2 = 1$, то полюсы r не могут приближаться к $\mathbb{R}_+$ ближе чем на $(330^2 \ln n)^{-1}$ (следствие 3.1) и тогда $\|r\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \|r\|_\infty \leq n(330^2 \ln n) = c(n)$, т.е. неравенство (11) выполняется.

Если же $\|r\|_2^2 = \lambda$, то наимпростейшая дробь $\tilde{r}(z) = r(z/\lambda)/\lambda$ удовлетворяет соотношениям $\|\tilde{r}\|_2 = \|r\|_2/\sqrt{\lambda} = 1$, $\|\tilde{r}\|_\infty = \|r\|_\infty/\lambda = \|r\|_\infty/\|r\|_2^2$. По доказанному $\|\tilde{r}\|_\infty \leq c(n)$, так что для r выполнено (11).

Следствие 3.2 доказано.

Было бы интересно найти точные (или асимптотически точные) значения констант $c(n)$ в неравенстве (11). Эти значения должны расти с ростом n : по теореме 1 наимпростейшими дробями с любой точностью в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ приближается “ступенька” $\sqrt{m}I_{[0,1/m]}$ (I – индикаторная функция), так что у приближающих дробей r норма $\|r\|_2$ примерно равна единице, а норма $\|r\|_\infty$ растет с ростом m .

§ 5. Аппроксимативные свойства

Пусть $SF_n = SF_n(\mathbb{R}_+)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обозначает множество наипростейших дробей степени не выше n с полюсами вне полуоси $\mathbb{R}_+$ (SR_0 по определению состоит из единственной функции, тождественно равной нулю). Для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $p > 1$, наименьшие уклонения

$$\rho_{n,p}(f) = \inf\{\|f - r\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} : r \in SF_n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

образуют невозрастающую последовательность, которая при $p \geq 2$ стремится к нулю по теореме 1.

В этом параграфе мы установим, какими аппроксимативными свойствами обладают множества SF_n в пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$, а также отметим некоторые свойства последовательностей наименьших уклонений.

Напомним некоторые определения.

Множество M в банаховом пространстве X называется *аппроксимативно компактным* [12], если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ (т.е. такая последовательность, что $\|y_n - x\| \rightarrow \rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ при $n \rightarrow \infty$) содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M . Всякое аппроксимативно компактное множество M замкнуто и является множеством существования (т.е. для любого $x \in X$ в M существует элемент, ближайший к x). Множество M называется *чебышёвским*, если для любого элемента $x \in X$ ближайший к нему в M существует и единствен.

ТЕОРЕМА 4. *Для каждого $n = 1, 2, \dots$ множество SF_n наипростейших дробей степени не выше n с полюсами вне полуоси $\mathbb{R}_+$ является аппроксимативно компактным, но не чебышёвским множеством в каждом из пространств $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$.*

В частности, у любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$ для каждого n наипростейшая дробь наилучшего приближения в SF_n существует, но, вообще говоря, не единственна при $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $\{r_k\} \subset SF_n$ – минимизирующая последовательность для f . Можно считать, что все r_k имеют одинаковое число полюсов m , $m \leq n$ (можно выбрать такую подпоследовательность). Для каждого k занумеруем эти полюсы в порядке возрастания действительных частей: $\operatorname{Re} b_1^{(k)} \leq \dots \leq \operatorname{Re} b_m^{(k)}$. Выбирая, если надо, подпоследовательность, можно также считать, что для каждого $j = 1, \dots, m$ существует предел $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j^{(k)} = b_j \in \overline{\mathbb{C}}$.

Последовательность r_k ограничена в $L_p(\mathbb{R}_+)$, поэтому $b_j \notin \mathbb{R}_+$ и $1/(t - b_j) \in L_p(\mathbb{R}_+)$ (в случае $b_j = \infty$ считаем, что $1/(t - b_j) \equiv 0$). Для каждого j имеем либо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t - b_j^{(k)}} - \frac{1}{t - b_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (12)$$

либо $b_j = \infty$, последовательность $\{\operatorname{Im} b_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и $\operatorname{Re} b_j^{(k)} \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$.

Пусть A – множество тех $j \in \{1, \dots, m\}$, для которых выполняется (12). Положим

$$r_{k1}(t) = \sum_{j \in A} \frac{1}{t - b_j^{(k)}}, \quad r_{k2} = r_k - r_{k1}, \quad r(t) = \sum_{j \in A} \frac{1}{t - b_j}.$$

Выбирая, если надо, из рассматриваемой последовательности подпоследовательность, считаем, что для любого $j \notin A$ и любого k выполнено неравенство $\operatorname{Re} b_j^{(k)} > 2k$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{n,p}^p(f) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - r_k\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f - r_k\|_{L_p[0,k]}^p + \|f - r_k\|_{L_p[k,\infty)}^p) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f - r_{k1}\|_{L_p[0,k]}^p + \|r_{k2}\|_{L_p[k,\infty)}^p) = \|f - r\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p + \lim_{k \rightarrow \infty} \|r_{k2}\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p. \end{aligned}$$

Так как $r \in \operatorname{SF}_n$, то отсюда следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|r_{k2}\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p = 0$, r – элемент наилучшего приближения для f в SF_n и последовательность функций $r_k = r_{k1} + r_{k2}$ (точнее, выбранная из нее по ходу доказательства подпоследовательность) сходится к r в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, множество SF_n аппроксимативно компактно.

То, что SF_n не является чебышёвским, следует теперь из известной теоремы Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [12]: в равномерно выпуклом банаховом пространстве (а таковыми являются пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$) всякое аппроксимативно компактное чебышёвское множество является выпуклым. Множество SF_n при $n \geq 1$ невыпукло и, следовательно, и не чебышёвское.

Теорема 4 доказана.

В следующей теореме устанавливаются некоторые свойства наименьших уклонений $\rho_n(f) = \rho_{n,2}(f)$. Выбор конкретного значения $p = 2$ связан не только с простотой изложения, но и с тем, что необходимые для доказательства оценки из предыдущего параграфа доказывались там только для случая $p = 2$.

ТЕОРЕМА 5. *Для пространства $L_2(\mathbb{R}_+)$ справедливы следующие утверждения.*

- (а) *У любой наимпростейшей дроби r последовательность наименьших уклонений строго монотонна вплоть до нуля: $\rho_0(r) > \rho_1(r) > \dots > \rho_n(r) = 0$, где n – степень r .*
- (б) *Пусть $n \geq 20$, $\lambda \in \mathbb{C}$, I_Δ – индикаторная функция отрезка $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, причем $|\lambda| \cdot |\Delta| \leq (2c(n))^{-1}$, где $|\Delta|$ – длина отрезка Δ , а $c(n) = 330^2 n \ln n$ – величина из следствия 3.2. Тогда*

$$\rho_0(\lambda I_\Delta) = \rho_1(\lambda I_\Delta) = \dots = \rho_n(\lambda I_\Delta).$$

- (с) *Для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ при всех достаточно больших n имеют место неравенства*

$$\frac{C_2}{\sqrt{\ln n}} \leq \rho_n\left(\frac{-1}{z-a}\right) \leq C_1 \frac{\ln \ln n}{\sqrt{\ln n}},$$

где константы C_1, C_2 зависят только от a .

- (д) *Для любой последовательности $\{d_n\}_{n=0}^\infty$ неотрицательных чисел со свойствами: $d_n \searrow 0$, $d_{n-1}^2 - d_n^2 \geq (1 + \delta)(d_n^2 - d_{n+1}^2)$ ($\delta > 0$, $n = 1, 2, \dots$), найдется такая функция $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$, что $\rho_n(f) = d_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

Как следует из утверждения п. (а), не всякая невозрастающая и стремящаяся к нулю последовательность может быть последовательностью наименьших уклонений от множеств SF_n в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Аналогичный факт для пространства $C_0(\mathbb{R})$ был установлен в [2]. Утверждение п. (d), по-видимому, справедливо для любой строго монотонной и стремящейся к нулю последовательности $\{d_n\}$, но доказать это пока не удастся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $r(z) = \sum_{k=1}^n 1/(z - a_k)$ – произвольная наипростейшая дробь степени n , $r^*(z) = \sum_{k=1}^m 1/(z - b_k)$ – ее наипростейшая дробь наилучшего приближения степени не выше m , $m < n$, $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что $\|r - r_m^* - 1/(t + \alpha)\|_2 < \|r - r_m^*\|_2 = \rho_m(r)$ при достаточно большом $\alpha > 0$ (отсюда будет следовать утверждение п. (а)). Имеем

$$\begin{aligned} \left\| r - r_m^* - \frac{1}{t + \alpha} \right\|_2^2 - \|r - r_m^*\|_2^2 &= \left\| \frac{1}{t + \alpha} \right\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty (r(t) - r_m^*(t)) \frac{1}{t + \alpha} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} - 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(-\alpha) - \ln a_k}{a_k + \alpha} - \sum_{k=1}^m \frac{\ln(-\alpha) - \ln b_k}{b_k + \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} - 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln \alpha}{\alpha} (1 + o(1)) - \sum_{k=1}^m \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} (1 + o(1)) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} - 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} (n - m + o(1)) < 0 \end{aligned}$$

при достаточно больших α (здесь $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in (0, 2\pi)$, $\alpha \rightarrow +\infty$).

(b) Надо доказать, что для любой дроби $r \in \text{SF}_n$ выполняется неравенство

$$\|\lambda I_\Delta - r\|_2^2 \geq \|\lambda I_\Delta\|_2^2 \iff 2 \operatorname{Re}(\lambda I_\Delta, r) \leq \|r\|_2^2,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Справедливость последнего неравенства можно доказать при помощи следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\lambda I_\Delta, r) &= 2 \operatorname{Re} \left(\lambda \int_\Delta \overline{r(t)} dt \right) \leq 2 |\lambda| \cdot |\Delta| \cdot \|r\|_\infty \\ &\leq 2 \cdot (2c(n))^{-1} \cdot c(n) \|r\|_2^2 = \|r\|_2^2, \end{aligned}$$

в которой использована оценка из следствия 3.2.

(c) Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, для любого $n \geq N(a)$ построим наипростейшую дробь $r(z)$ степени не выше n , имеющую полюс в точке a и удовлетворяющую неравенству $\|r\|_2 \leq C_1(a) \ln \ln n / \sqrt{\ln n}$. Отсюда будет следовать оценка сверху в утверждении (c).

Для доказательства оценки снизу возьмем r_n^* – наипростейшую дробь наилучшего приближения степени не выше n для $-1/(z - a)$. Пусть

$$r(z) = \frac{1}{z - a} + r_n^*(z), \quad \|r\|_2 = \rho_n \left(\frac{-1}{z - a} \right) =: \rho_n.$$

Наипростейшая дробь $\lambda r(\lambda z)$ с $\lambda = 1/\rho_n^2$ имеет норму в $L_2(\mathbb{R}_+)$, равную единице, и полюс в точке $\rho_n^2 a$. При $n \geq 20$ в силу следствия 3.1 должно выполняться неравенство $|\rho_n^2 a| > (330^2 \ln n)^{-1}$, из которого следует требуемое неравенство $\rho_n > (330 \sqrt{|a|} \sqrt{\ln n})^{-1}$.

(d) Общая схема доказательства утверждений такого рода (о существовании функции с заданными уклонениями от системы нелинейных множеств) была

разработана А. А. Пекарским [13] и состоит, если ее применить к данному случаю, в следующем. Выбирается некоторая последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$ и для каждого вектора v из множества $V = \{v = (v_0, v_1, \dots) \in c_0 : 0 \leq v_n \leq \varepsilon_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ строится функция $f_v \in L_2(\mathbb{R}_+)$, непрерывно зависящая от v и удовлетворяющая неравенствам

$$d_n + v_n - \varepsilon_n \leq \rho_n(f_v) \leq d_n + v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Отображение $\rho: V \rightarrow V$, $\rho: v = (v_0, v_1, \dots) \longrightarrow \rho(v) = (d_0 + v_0 - \rho_0(f), d_1 + v_1 - \rho_1(f), \dots)$ является непрерывным отображением компакта V в себя и, следовательно, по теореме Шаудера–Тихонова [14; п. 3.6], оно имеет неподвижную точку $w = \rho(w)$. Соответствующая функция f_w – искомая: $d_n + w_n - \rho_n(f_w) = w_n \iff \rho_n(f_w) = d_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Положим $\varepsilon_n = k \min\{d_0 - d_1, d_1 - d_2, \dots, d_n - d_{n+1}\}$, где число $k \in (0, 1/2)$ удовлетворяет неравенству

$$(1 - k)^2(1 + \delta) > 1 + k. \quad (14)$$

Числа $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ образуют сходящуюся к нулю невозрастающую последовательность. Возможны два случая:

I. $\varepsilon_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$;

II. существует такое N , что $\varepsilon_n > 0$ при $n \leq N$ и $\varepsilon_n = 0$ при $n > N$.

Для произвольной последовательности чисел $v_n \in [0; \varepsilon_n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, положим

$$s_n = \left(\left(d_n + v_n - \frac{\varepsilon_n}{2} \right)^2 - \left(d_{n+1} + v_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\theta_n = \min \left\{ \frac{\varepsilon_n^2}{64s_n}, \frac{\varepsilon_n}{4} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(при $s_n = 0$ получаем, что $d_n = d_{n+1} = \varepsilon_n = 0$ и считаем, что $\theta_n = 0$). Числа

$$s'_n := \left(\left(d_n - \frac{\varepsilon_n}{2} \right)^2 - \left(d_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$s''_n := \left(\left(d_n + \frac{\varepsilon_n}{2} \right)^2 - \left(d_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \theta'_n := \min \left\{ \frac{\varepsilon_n^2}{64s''_n}, \frac{\varepsilon_n}{4} \right\}$$

не зависят от последовательности $\{v_n\}$ и удовлетворяют неравенствам $s'_n \leq s_n \leq s''_n$ и $\theta'_n \leq \theta_n$.

Рассмотрим функцию

$$f_v(t) = \sum_{k=0}^{\infty(N)} \frac{1}{t - a_k},$$

где индекс суммирования k меняется от нуля до ∞ в случае I и от нуля до N в случае II, $a_k = \alpha_k + i\beta_k$,

$$\beta_k = \frac{\pi}{(s_k + \theta_k)^2}, \quad (15)$$

а положительные числа α_k возрастают, не зависят от последовательности $\{v_n\}$ и удовлетворяют следующим условиям:

а) α_k являются центрами непересекающихся отрезков $\Delta_k \subset \mathbb{R}_+$ длины

$$|\Delta_k| = \frac{2\pi}{(s'_k + \theta'_k)^2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{s''_k}{\theta'_k + s''_k} \right)^2 \right);$$

б) отрезки Δ_k погружены в концентрические им отрезки $W_k \subset \mathbb{R}_+$, которые уже составляют всю полуось $\mathbb{R}_+$, соседние W_k пересекаются в точке (в случае II W_N является лучом и не концентричен Δ_N), причем

61)

$$\sum_{k \neq n} \left\| \frac{1}{t - \alpha_k} \right\|_{L_2(W_n)} \leq \theta'_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

62)

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty(N)} \frac{1}{t - \alpha_k} \right\|_{L_2(W_0 \cup \dots \cup W_{n-1})} \leq \frac{\varepsilon_n}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

63) для любого $\alpha \in W_k$ и для любого j такого, что $\max\{k, j\} \geq n$, справедливо неравенство

$$\left\| \frac{1}{t - \alpha} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \frac{\theta'_j}{2^n}.$$

Ясно, что условия 61)–63) выполняются, если отрезки W_k достаточно велики по сравнению с Δ_k , т.е. соседние отрезки Δ_k и Δ_{k+1} достаточно далеки друг от друга.

Докажем для построенной функции f_v неравенства (13) (попутно мы убедимся, что $f_v \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и f_v непрерывно зависит от последовательности $v = \{v_n\}$). Имеем, используя (15), 61) и 62),

$$\begin{aligned} \rho_n^2(f_v) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty(N)} \frac{1}{t - a_k} \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty(N)} \frac{1}{t - a_k} \right\|_{L_2(W_0 \cup \dots \cup W_{n-1})}^2 + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\left\| \frac{1}{t - a_j} \right\|_{L_2(W_j)} + \sum_{k \neq j} \left\| \frac{1}{t - a_k} \right\|_{L_2(W_j)} \right)^2 \\ &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty(N)} \frac{1}{t - \alpha_k} \right\|_{L_2(W_0 \cup \dots \cup W_{n-1})}^2 + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\left\| \frac{1}{t - a_j} \right\|_{L_2(\mathbb{R})} + \sum_{k \neq j} \left\| \frac{1}{t - \alpha_k} \right\|_{L_2(W_j)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon_n}{4} \right)^2 + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta_j}} + \theta'_j \right)^2 = \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} (s_j + \theta_j + \theta'_j)^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} (s_j^2 + 4\theta_j s_j + 4\theta_j^2) \leq \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(s_j^2 + \frac{\varepsilon_j^2}{16} + \frac{\varepsilon_j^2}{4} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\left(d_j + v_j - \frac{\varepsilon_j}{2} \right)^2 - \left(d_{j+1} + v_{j+1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} \right)^2 + \frac{5\varepsilon_j^2}{16} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\left(d_j + v_j - \frac{\varepsilon_j}{4} \right)^2 - \left(d_{j+1} + v_{j+1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \sum_{j=n}^{\infty(N)} \left(\left(d_j + v_j - \frac{\varepsilon_j}{4} \right)^2 - \left(d_{j+1} + v_{j+1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{4} \right)^2 \right) \\
&= \frac{\varepsilon_n^2}{16} + \left(d_n + v_n - \frac{\varepsilon_n}{4} \right)^2 \leq (d_n + v_n)^2
\end{aligned}$$

(в частности, $\rho_0(f_v) = \|f_v\| \leq d_0 + v_0$, так что $f_v \in L_2(\mathbb{R}_+)$).

Для доказательства оценки снизу в (13) необходимо следующее утверждение: для любых точек $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ найдутся такие $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, что для любого номера $j \notin \{j_1, \dots, j_n\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{t - b_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \theta_j \left(1 - \frac{1}{2^n} \right). \quad (16)$$

Докажем это утверждение индукцией по n . Для $n = 1$ в качестве j_1 возьмем тот номер, для которого $\operatorname{Re} b_1 \in W_{j_1}$ (если $\operatorname{Re} b_1 < 0$, то $j_1 := 0$). Для любого $j \neq j_1$ по условию б3) имеем

$$\left\| \frac{1}{t - b_1} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \left\| \frac{1}{t - \operatorname{Re} b_1} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \frac{\theta'_j}{2^{\max\{j, j_1\}}} \leq \frac{\theta_j}{2},$$

т.е. (16) при $n = 1$ выполнено.

Пусть утверждение верно для $n - 1$, и пусть даны точки $b_1, \dots, b_n$. Если для каждого k имеем $\operatorname{Re} b_k \in (-\infty; 0) \cup W_0 \cup \dots \cup W_{n-1}$, то полагаем $j_1 = 0$, $j_2 = 1$, $\dots$, $j_n = n - 1$ и при $j \geq n$ в силу б3) получаем

$$\sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{t - b_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{t - \operatorname{Re} b_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq n \cdot \frac{\theta'_j}{2^n} \leq \theta_j \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Если же для какого-то из b_k , например для b_n , имеем $\operatorname{Re} b_n \in W_\nu$ с $\nu \geq n$, то возьмем те $j_1, \dots, j_{n-1}$, для которых по предположению индукции выполнено (16), и положим $j_n = \nu$. Тогда для любого $j \notin \{j_1, \dots, j_n\}$ получаем

$$\sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{t - b_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \theta_j \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{\theta'_j}{2^n} \leq \theta_j \left(1 - \frac{1}{2^n} \right),$$

что и требовалось.

Теперь для любых $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| f_v - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - b_k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \\
&\geq \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_n\}} \left(\left\| \frac{1}{t - a_j} \right\|_{L_2(\Delta_j)} - \sum_{k \neq j} \left\| \frac{1}{t - \alpha_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} - \sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{t - b_k} \right\|_{L_2(\Delta_j)} \right)^2 \\
&\geq \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_n\}} \left(\left(\frac{2}{\beta_j} \operatorname{arctg} \frac{|\Delta_j|}{2\beta_j} \right)^{1/2} - 2\theta_j \right)^2 \\
&\geq \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_n\}} \left(\frac{(s_j + \theta_j)s''_j}{s''_j + \theta'_j} - 2\theta_j \right)^2 \geq \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_n\}} (s_j - 2\theta_j)^2
\end{aligned}$$

(мы использовали неравенство треугольника, (16), б1), а) и (15)).

Далее,

$$\begin{aligned}
(s_j - 2\theta_j)^2 &\geq s_j^2 - 4s_j\theta_j \geq \left(d_j + v_j - \frac{\varepsilon_j}{2}\right)^2 - \left(d_{j+1} + v_{j+1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon_j^2}{16} \\
&= (d_j + v_j - \varepsilon_j)^2 + (d_j + v_j)\varepsilon_j - \frac{13}{16}\varepsilon_j^2 \\
&\quad - (d_{j+1} + v_{j+1} - \varepsilon_{j+1})^2 - (d_{j+1} + v_{j+1})\varepsilon_{j+1} + \frac{3}{4}\varepsilon_{j+1}^2 \\
&\geq (d_j + v_j - \varepsilon_j)^2 - (d_{j+1} + v_{j+1} - \varepsilon_{j+1})^2 \\
&\quad + d_j\varepsilon_j - (d_{j+1} + \varepsilon_{j+1})\varepsilon_{j+1} - \frac{13}{16}\varepsilon_j^2 + \frac{3}{4}\varepsilon_{j+1}^2 \\
&\geq (d_j + v_j - \varepsilon_j)^2 - (d_{j+1} + v_{j+1} - \varepsilon_{j+1})^2 \\
&\quad + \left(d_{j+1} + \frac{\varepsilon_j}{k}\right)\varepsilon_j - d_{j+1}\varepsilon_{j+1} - \frac{13}{16}\varepsilon_j^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_{j+1}^2 \\
&\geq (d_j + v_j - \varepsilon_j)^2 - (d_{j+1} + v_{j+1} - \varepsilon_{j+1})^2 =: h_j,
\end{aligned}$$

а последовательность $\{h_j\}$ не возрастает в силу (14) и условия на $\{d_n\}$:

$$\begin{aligned}
h_{n-1} &= (d_{n-1} - d_n + v_{n-1} - v_n - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)(d_{n-1} + d_n + v_{n-1} + v_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) \\
&\geq (d_{n-1} - d_n - \varepsilon_{n-1})(d_{n-1} + d_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) \\
&\geq (1-k)^2(d_{n-1}^2 - d_n^2) \geq (1-k)^2(1+\delta)(d_n^2 - d_{n+1}^2) \\
&> (1+k)(d_n - d_{n+1})(d_n + d_{n+1}) \geq (d_n - d_{n+1} + \varepsilon_{n+1})(d_n + d_{n+1}) \geq h_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho_v^2(f_v) \geq \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_n\}} h_j \geq \sum_{j=n}^{\infty(N)} h_j = (d_n + v_n - \varepsilon_n)^2$$

при $n \geq 1$, а при $n = 0$ просто

$$\rho_0^2(f_v) \geq \sum_{j=0}^{\infty(N)} h_j = (d_0 + v_0 - \varepsilon_0)^2.$$

Теорема 5 доказана.

Было бы интересно выделить какой-нибудь класс функций $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$, у которых наименьшие отклонения $\rho_n(f)$ достаточно быстро стремятся к нулю.

Автор благодарен Е. П. Долженко за полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. И. Данченко, “Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of the distances from the poles of logarithmic derivatives of polynomials to lines and circles”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 425–440.
- [2] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, “Approximation by the simplest fractions on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.

- [3] В. Ю. Протасов, “Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by simple partial fractions and the Hilbert transform”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 333–349.
- [4] П. А. Бородин, “Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 803–810; англ. пер.: P. A. Borodin, “Estimates of the distances to direct lines and rays from the poles of simplest fractions bounded in the norm of L_p on these sets”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 725–732.
- [5] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Тезисы докл. школы-конференции, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 1999, 74–79.
- [6] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:3–4 (2001), 502–507.
- [7] О. Н. Косухин, “Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех.*, 2001, № 4, 54–59; англ. пер.: O. N. Kosukhin, “Approximation properties of the most simple fractions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:4 (2001), 36–40.
- [8] В. И. Данченко, “Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 33–52; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of derivatives of simplest fractions and other questions”, *Sb. Math.*, **197**:4 (2006), 505–524.
- [9] Я. В. Новак, “О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 882–887; англ. пер.: Ya. V. Novak, “Best local approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **84**:5–6 (2008), 821–825.
- [10] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [11] М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов, *Сборник задач по теории аналитических функций*, Наука, М., 1969.
- [12] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества”, *Докл. АН СССР*, **140**:3 (1961), 522–524; англ. пер.: N. V. Efimov, S. B. Stechkin, “Approximative kompaktheit und Chebyshevsche mengen”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1226–1228.
- [13] А. А. Пекарский, “Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями”, *Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 1994, № 1, 23–26.
- [14] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965.

П. А. Бородин (P. A. Borodin)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступила в редакцию
 24.10.2008 и 01.04.2009