Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, Об эллиптических и параболических
неравенствах с точечными особенностями на границе,
Матем. сб., 2009, том 200, номер 10, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:44:58

УДК 517.954

Е. И. Галахов

Об эллиптических и параболических неравенствах с точечными особенностями на границе

Доказано отсутствие решений ряда квазилинейных эллиптических и параболических дифференциальных неравенств и систем таких неравенств в ограниченных областях с точечными особенностями на границе. Для доказательства использован метод нелинейной емкости. Приведены примеры, показывающие неулучшаемость полученных условий в рассматриваемом классе задач.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, отсутствие решений, особенности на границе.

§ 1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется проблеме нахождения необходимых условий локальной разрешимости (иначе говоря, достаточных условий мгновенного разрушения) дифференциальных неравенств различных типов. Для полулинейных сингулярных обыкновенных дифференциальных неравенств и систем неравенств ряд результатов такого рода принадлежит И. Т. Кигурадзе (см., например, монографию [1] и библиографию в ней) и Дж. Хею [2], [3]. Для эллиптических и параболических операторов с главной линейной частью и сингулярными коэффициентами в ограниченной области первые результаты в этом направлении получили Х. Брезис и Х. Кабре [4] с помощью принципов сравнения. Достаточные условия разрешимости некоторых эллиптических задач с граничными особенностями были получены А. В. Демьяновым и А. И. Назаровым [5]. Нелинейные параболические задачи с однородной стационарной частью и сингулярным потенциалом исследовались в работах И. Комба (см., например, [6]).

В работах Э. Митидиери и С. И. Похожаева (см. [7]–[9], а также монографию [10] и библиографию в ней) был разработан метод нелинейной емкости, позволяющий получать точные условия глобальной или локальной разрешимости рассматриваемых неравенств в некоторых функциональных классах, в том числе и для операторов, для которых принципы сравнения не имеют места. Метод основан на получении априорных оценок решений путем алгебраического анализа интегральной формы неравенства с оптимальным выбором пробных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00370, 08-01-00841) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3810.2008.1).

В настоящей работе метод нелинейной емкости применяется для получения необходимых условий разрешимости квазилинейных эллиптических и параболических задач с точечными особенностями коэффициентов и начальных данных на границе, удовлетворяющей, вообще говоря, лишь условию внутреннего конуса. Таким образом, постановка задачи в этой работе отличается от постановок задач в предыдущих работах, в которых особенности, как правило, имели место внутри области (за исключением некоторых задач [11], допускающих наличие особенности на плоском участке границы). Вследствие этого возникает необходимость выбора специальных пробных функций с носителем, несимметричным относительно особой точки, и формулировки дополнительных условий на поведение решения или начальной функции в ее окрестности. Некоторые результаты, полученные этим способом для эллиптических неравенств и систем, были опубликованы нами ранее в [12]. В настоящей работе дано обобщение этих результатов на более широкий класс операторов и областей, а также их распространение на параболический случай.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 рассматривается задача поиска достаточных условий, при которых квазилинейные эллиптические задачи с точечными особенностями на границе не имеют решений. В § 3 результаты § 2 обобщены на случай систем неравенств аналогичного вида. Параграф 4 посвящен мгновенному разрушению решений параболических дифференциальных неравенств. В § 5 результаты § 4 обобщаются на случай параболических систем.

§ 2. Скалярные эллиптические задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с $0 \in \partial\Omega$, удовлетворяющая условию внутреннего конуса в нуле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $A: \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция Каратеодори и $p > 1$. Следуя [11], будем называть операторы вида $\mathcal{A}u := \operatorname{div}(A(x, u, Du)Du)$ p -коэрцитивными, если существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любых $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ выполняются неравенства

$$c_1|\xi|^{p-2} \leq A(x, u, \xi) \leq c_2|\xi|^{p-2}. \quad (2.1)$$

Отметим, что ранее такие операторы рассматривались Дж. Серрином в [13].

ПРИМЕР 2.1. Простейшим примером p -коэрцитивного оператора является p -лапласиан

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du).$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u, Du)Du) \geq a(x)u^q, & x \in \Omega, \\ u(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $p > 1$, $q > p - 1$, $a \in C(\Omega)$ – неотрицательная функция такая, что $a(x) \geq a_0|x|^{-\alpha}$, $a_0 > 0$.

Обозначим через K_θ прямой круговой конус с вершиной в нуле и углом раствора 2θ такой, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пересечение

$$M_{\theta,\varepsilon} := (B_\varepsilon(0) \setminus B_{\varepsilon/2}(0)) \cap K_\theta \cap \Omega$$

непусто (такие конусы существуют по предположению). Для любой функции u , определенной и дифференцируемой почти всюду в $K_\theta \cap \Omega$, введем величины

$$\delta_{\theta,\varepsilon}(u) := \operatorname{ess\,inf}_{x \in M_{\theta,\varepsilon}} |Du(x)|, \quad \delta_{\theta,0}(u) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\theta,\varepsilon}(u).$$

Отметим, что величина $\delta_{\theta,0}(u)$ может быть и бесконечной, а для $u \in C^1(\Omega \cup \{0\})$ имеет место равенство $\delta_{\theta,0}(u) = |Du(0)|$.

Определим класс допустимых решений задачи (2.2) в смысле распределений как

$$S_{p,q}^a(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+, a(x)u^q, |Du|^p \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \exists \theta > 0 : \delta_{\theta,0}(u) > 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если Ω удовлетворяет условию внутренней сферы в нуле, то в силу граничного принципа максимума Хопфа для квазилинейных задач (см. [14; теорема 5, $\beta \equiv 0$]) последнее условие выполнено, в частности, для положительных решений задачи (2.2) из класса $C^1(\Omega \cup \{0\})$ с $\Delta_p u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ и $u(0) = 0$, так как для них

$$\delta_{\theta,0}(u) = |Du(0)| \geq \frac{\partial u(0)}{\partial n} > 0,$$

где $\frac{\partial u(0)}{\partial n}$ – производная по внутренней нормали к внутренней сфере в нуле.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. При $\alpha > q+1$ задача (2.2) не имеет решений в классе $S_{p,q}^a(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное, т.е., что задача (2.2) имеет решение $u \in S_{p,q}^a(\Omega)$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\eta_k \rightarrow 0$ и точек $x_k \rightarrow 0$ таких, что шары $B_{2\eta_k}(x_k)$ целиком лежат внутри множеств $M_{\theta,2|x_k|}$, где θ – угол раствора конуса из определения класса $S_{p,q}^a(\Omega)$, и, кроме того,

$$4\eta_k \leq |x_k| \leq c_0\eta_k, \quad c_0 > 4. \quad (2.3)$$

Введем срезающие функции $\varphi_k(x) = \varphi(|(x - x_k)/\eta_k|)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$, причем $\varphi(x) = \xi^\lambda(x)$ с достаточно большим $\lambda > 0$ и

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Будем также предполагать, что

$$|D\varphi_k(x)| \leq c\eta_k^{-1}, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

с некоторой константой $c > 0$. (Здесь и далее мы обозначаем буквами $C, c, \dots$ различные положительные постоянные.) Умножив обе части уравнения (2.2)

на $u_\varepsilon^\gamma \varphi_k$, где $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $1 - p < \gamma < 0$, проинтегрировав по Ω и воспользовавшись оценками (2.1), получаем

$$a_0 \int_{\Omega} u^q u_\varepsilon^\gamma |x|^{-\alpha} \varphi_k dx + c_1 |\gamma| \int_{\Omega} |Du|^p u_\varepsilon^{\gamma-1} \varphi_k dx \leq c_2 \int_{\Omega} |Du|^{p-1} |D\varphi_k| u_\varepsilon^\gamma dx. \quad (2.6)$$

В силу неравенства Юнга после предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$a_0 \int_{\Omega} u^{q+\gamma} |x|^{-\alpha} \varphi_k dx + \frac{c_1 |\gamma|}{2} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi_k dx \leq C_\gamma \int_{\Omega} |D\varphi_k|^p \varphi_k^{1-p} u^{\gamma+p-1} dx,$$

где $C_\gamma > 0$, и далее с учетом выбора x_k , φ_k , λ и (2.4), (2.5) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \int_{\Omega} u^{q+\gamma} |x|^{-\alpha} \varphi_k dx + \frac{c_1 |\gamma|}{2} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi_k dx \\ & \leq C \int_{\Omega} |x|^{\alpha(\gamma+p-1)/(q-p+1)} |D\varphi_k|^{p(q+\gamma)/(q-p+1)} \varphi_k^{((1-p)(q+\gamma)-\gamma-p+1)/(q-p+1)} dx \\ & \leq C \eta_k^{N+(\alpha(\gamma+p-1)-p(q+\gamma))/(q-p+1)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначим $B_k = B_{\eta_k}(x_k)$. Тогда из (2.7) в силу (2.3) и (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} I_k &:= \int_{B_k} u^{q+\gamma} dx \leq C \eta_k^{N+(\alpha(\gamma+p-1)-p(q+\gamma))/(q-p+1)} \\ &= C \eta_k^{N+(\alpha-p)(q+\gamma)/(q-p+1)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$J_k := \int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx \leq C \eta_k^{N+(\alpha(\gamma+p-1)-p(q+\gamma))/(q-p+1)}. \quad (2.9)$$

Вследствие неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} & \int_{B_k} |Du|^{p(q+\gamma)/(q+1)} dx \leq I_k^{(1-\gamma)/(q+1)} J_k^{(q+\gamma)/(q+1)} \\ & \leq c \eta_k^{N+p(\alpha-q-1)(q+\gamma)/((q+1)(q-p+1))} \end{aligned} \quad (2.10)$$

и с учетом того, что по построению $B_k \subset M_{\theta, 2|x_k|}$, имеем

$$\delta_{\theta, 2|x_k|}(u) = \inf_{x \in M_{\theta, 2|x_k|}} |Du(x)| \leq \inf_{x \in B_k} |Du(x)| \leq c \eta_k^{(\alpha-q-1)/(q-p+1)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу, получаем противоречие с требованием $\delta_{\theta, 0}(u) > 0$.

Покажем, что условие $\alpha > q + 1$ в теореме 2.1 является существенным.

ПРИМЕР 2.2. При $p = 2$ и $N \geq 2$ задача (2.2) с $A(x, u, Du) \equiv 1$ (т.е. $\mathcal{A} = \Delta$) и $a(x) = |x|^{-\alpha}$ в конусе K_θ с достаточно малым углом раствора θ имеет решения вида

$$u_\mu(x) = C_\mu |x|^\lambda \varphi_\mu \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

где $C_\mu > 0$ и φ_μ – нормированная неотрицательная собственная функция оператора Лапласа–Бельтрами Δ_B , соответствующая его наименьшему собственному значению μ , т.е. нетривиальное неотрицательное решение уравнения

$-\Delta_B \varphi_\mu = \mu \varphi_\mu$ в области $\Omega_\theta := K_\theta \cap S^{N-1}$ с нулевыми граничными условиями и условием нормировки

$$\|\varphi_\mu\|_{L^\infty(\Omega_\theta)} = 1.$$

Здесь S^{N-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^{N-1}$. Известно, что такие функции существуют, причем собственное значение μ может быть сколь угодно большим за счет малости угла θ (см., например, [10; раздел 11]). При условиях

$$\lambda = \frac{\alpha - 2}{q - 1}, \quad \mu > \lambda(\lambda + N - 2), \quad C_\mu = (\mu - \lambda(\lambda + N - 2))^{1/(q-1)}$$

функция u_μ действительно является решением неравенства (2.2), так как

$$\begin{aligned} -\Delta(C_\mu r^\lambda \varphi_\mu) &= -C_\mu \left(\frac{d^2(r^\lambda)}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d(r^\lambda)}{dr} \right) \varphi_\mu - C_\mu r^{\lambda-2} \Delta_B \varphi_\mu \\ &= C_\mu (\mu - \lambda(\lambda + N - 2)) r^{\lambda-2} \varphi_\mu \geq C_\mu^q r^{\lambda q - \alpha} \varphi_\mu^q. \end{aligned}$$

Вследствие сильного принципа максимума для оператора Лапласа–Бельтрами при любом выборе угла $\theta' \in (0, \theta)$ справедливо неравенство

$$\inf_{K_{\theta'} \cap S^{N-1}} \varphi_\mu =: c_{\theta'} > 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\delta_{\theta', \varepsilon}(u_\mu) = \inf_{M_{\theta', \varepsilon}} |Du_\mu(x)| \geq \inf_{M_{\theta', \varepsilon}} \left| \frac{\partial u_\mu}{\partial r} \right| = \min\{1, 2^{1-\lambda}\} \cdot C_\mu c_{\theta'} |\lambda| \varepsilon^{\lambda-1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, легко убедиться в том, что при $\alpha < q + 1$ (что эквивалентно условию $\lambda < 1$) имеем $\delta_{\theta', 0}(u_\mu) = +\infty$, а при $\alpha = q + 1$ выполнены неравенства $\delta_{\theta', 0}(u_\mu) \geq C_\mu c_{\theta'} > 0$. Таким образом, в обоих этих случаях функция u_μ принадлежит классу $S_{p,q}^a(K_\theta)$.

Для гладких областей аналогичный пример можно построить и при $p \neq 2$.

ПРИМЕР 2.3. Нетрудно проверить, что при произвольном $p > 1$, $\alpha \leq q + 1$ и

$$N < 1 + \frac{(q + 1 - \alpha)(p - 1)}{q - p + 1}$$

в области $\Omega = \{x \in B_1(0) : x_1 > 0\}$ существует нетривиальное решение $u \in S_{p,q}^a(\Omega) \cap C(\Omega)$ эллиптического неравенства (2.2) с $A(x, u, Du) = |Du|^{p-2} Du$ вида $u(x) = c|x|^{(\alpha-p)/(q-p+1)}$, где $c > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Примеры 2.2 и 2.3 показывают, что условие $\alpha > q + 1$ в теореме 2.1 является существенным. Однако его можно ослабить за счет сужения рассматриваемых классов областей и решений. Так, если Ω удовлетворяет условию внутренней сферы в нуле, то при $\alpha > q$ имеет место отсутствие решений u задачи (2.2) в классе функций из $C^2(\bar{\Omega})$ таких, что $\Delta_p u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ и $\delta_{\theta, 0}(u) = |Du(0)| > 0$. Действительно, в этом случае любое нетривиальное положительное решение в точках $(x_1, 0, \dots, 0)$ с достаточно малым $x_1 > 0$, где ось Ox_1 направлена вдоль вектора внутренней нормали к внутренней сфере

в нуле, в силу принципа максимума Хопфа удовлетворяет оценке $u(x) \geq c_2|x|$, где $c_2 > 0$. Отсюда имеем

$$-\Delta_p u \geq cc_2^q |x|^{q-\alpha} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0,$$

что противоречит предположениям о гладкости u .

§ 3. Системы эллиптических неравенств

Обобщим результаты предыдущего параграфа на квазилинейные эллиптические системы второго порядка.

В частности, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\mathcal{A}u := -\operatorname{div}(A(x, u, Du)Du) \geq a(x)v^{q_1}, & x \in \Omega, \\ -\mathcal{B}u := -\operatorname{div}(B(x, v, Dv)Dv) \geq b(x)u^{p_1}, & x \in \Omega, \\ u(x), v(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Мы предполагаем, что Ω – такая же область, как и в предыдущем параграфе, оператор $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$) p -коэрцитивен (соответственно q -коэрцитивен) и $p, q, p_1, q_1 > 1$, причем $p-1 < p_1$, $q-1 < q_1$, а $a, b \in C(\Omega)$ – неотрицательные функции такие, что $a(x) \geq a_0|x|^{-\alpha}$, $b(x) \geq b_0|x|^{-\beta}$ при $x \in \Omega$, где $a_0, b_0 > 0$.

Определим класс $T(\Omega)$ допустимых решений системы (3.1) в смысле распределений так:

$$T(\Omega) := S_{p,p_1}^b(\Omega) \times S_{q,q_1}^a(\Omega).$$

Тогда имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если выполнено хотя бы одно из двух условий*

$$\begin{cases} (\alpha-1)(q-1) + (\beta-q-p_1)q_1 > 0, \\ (\beta-1)(p-1) + (\alpha-p-q_1)p_1 > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

то задача (3.1) не имеет решений $(u, v) \in T(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При $p = q$, $p_1 = q_1$ и $\alpha = \beta$ любое из условий (3.2) равносильно условию $\alpha > p_1 + 1$.

ПРИМЕР 3.1. Для системы эллиптических неравенств с операторами Лапласа ($A(x, u, Du) \equiv B(x, u, Du) \equiv 1$) условия (3.2) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \alpha - 1 + (\beta - 2 - p_1)q_1 &> 0, \\ \beta - 1 + (\alpha - 2 - q_1)p_1 &> 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $(u, v) \in T(\Omega)$ – решение системы (3.1), $\varphi_k \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_+)$ – стандартная пробная функция, выбранная, как и в § 2.

Умножив первое неравенство (3.1) на $u_\varepsilon^\gamma \varphi_k$, а второе – на $v_\varepsilon^\gamma \varphi_k$, где $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $\max\{1-p, 1-q\} < \gamma < 0$, аналогично (2.6) получаем

$$\int a(x)v^{q_1}u_\varepsilon^\gamma \varphi_k dx \leq c\gamma \int |Du|^p u_\varepsilon^{\gamma-1} \varphi_k dx + \int |Du|^{p-1} |D\varphi_k| u_\varepsilon^\gamma dx, \quad (3.4)$$

$$\int b(x)u^{p_1}v_\varepsilon^\gamma \varphi_k dx \leq c\gamma \int |Dv|^q v_\varepsilon^{\gamma-1} \varphi_k dx + \int |Dv|^{q-1} |D\varphi_k| v_\varepsilon^\gamma dx. \quad (3.5)$$

Применение параметрического неравенства Юнга приводит к следующим оценкам:

$$\int a(x)v^{q_1}u_\varepsilon^\gamma\varphi_k dx + \frac{c|\gamma|}{2} \int |Du|^p u_\varepsilon^{\gamma-1}\varphi_k dx \leq c_\gamma \int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u_\varepsilon^{\gamma+p-1} dx, \quad (3.6)$$

$$\int b(x)u^{p_1}v_\varepsilon^\gamma\varphi_k dx + \frac{c|\gamma|}{2} \int |Dv|^q v_\varepsilon^{\gamma-1}\varphi_k dx \leq d_\gamma \int \frac{|D\varphi_k|^q}{\varphi_k^{q-1}} v_\varepsilon^{\gamma+q-1} dx, \quad (3.7)$$

где константы c_γ и d_γ зависят только от p , q и γ . Далее, умножив оба дифференциальных неравенства (3.1) на φ_k и проинтегрировав их по частям, в силу неравенства Гёльдера получаем

$$\int a(x)v^{q_1}\varphi_k dx \leq \left(\int |Du|^p u_\varepsilon^{\gamma-1}\varphi_k dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u_\varepsilon^{(1-\gamma)(p-1)} dx \right)^{1/p}, \quad (3.8)$$

$$\int b(x)u^{p_1}\varphi_k dx \leq \left(\int |Dv|^q v_\varepsilon^{\gamma-1}\varphi_k dx \right)^{(q-1)/q} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^q}{\varphi_k^{q-1}} v_\varepsilon^{(1-\gamma)(q-1)} dx \right)^{1/q}. \quad (3.9)$$

Используя (3.6) и (3.7) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем из предыдущих оценок

$$\int a(x)v^{q_1}\varphi_k dx \leq D_\gamma \left(\int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u^{\gamma+p-1} dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u^{(1-\gamma)(p-1)} dx \right)^{1/p}, \quad (3.10)$$

$$\int b(x)u^{p_1}\varphi_k dx \leq E_\gamma \left(\int \frac{|D\varphi_k|^q}{\varphi_k^{q-1}} v^{\gamma+q-1} dx \right)^{(q-1)/q} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^q}{\varphi_k^{q-1}} v^{(1-\gamma)(q-1)} dx \right)^{1/q}, \quad (3.11)$$

где $D_\gamma, E_\gamma > 0$ зависят только от p , q и γ .

Теперь, применяя неравенство Гёльдера с показателем r к первому интегралу в правой части (3.10), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u^{\gamma+p-1} dx \right)^{(p-1)/p} &\leq \left(\int b(x)u^{(\gamma+p-1)r}\varphi_k dx \right)^{(p-1)/(pr)} \\ &\times \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{(p-1)/(pr')}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $1/r + 1/r' = 1$. Выбрав показатель r так, что $(\gamma + p - 1)r = p_1$, из (3.10) и (3.12) имеем

$$\begin{aligned} \int a(x)v^{q_1}\varphi_k dx &\leq D_\gamma \left(\int b(x)u^{p_1}\varphi_k dx \right)^{(p-1)/(pr)} \\ &\times \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{(p-1)/(pr')} \left(\int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u^{(1-\gamma)(p-1)} dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Повторяя эту процедуру с показателем $y > 1$ применительно к третьему интегралу в правой части (3.13), получаем

$$\begin{aligned} & \int \frac{|D\varphi_k|^p}{\varphi_k^{p-1}} u^{(1-\gamma)(p-1)} dx \\ & \leq \left(\int b(x) u^{(1-\gamma)(p-1)y} \varphi_k dx \right)^{1/y} \left(\int b(x)^{-y'/y} \frac{|D\varphi_k|^{py'}}{\varphi_k^{py'-1}} dx \right)^{1/y'}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $1/y + 1/y' = 1$.

Выбирая y в (3.14) так, что $(1-\gamma)(p-1)y = p_1$, и учитывая (3.13), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \int a(x) v^{q_1} \varphi_k dx \\ & \leq D_\gamma \left(\int b(x) u^{p_1} \varphi_k dx \right)^{(p-1)/(pr)} \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{(p-1)/(pr')} \\ & \quad \times \left(\int b(x) u^{p_1} \varphi_k dx \right)^{1/(py)} \left(\int b^{-y'/y}(x) \frac{|D\varphi_k|^{py'}}{\varphi_k^{py'-1}} dx \right)^{1/(py')}, \end{aligned}$$

из которой получаем, что

$$\begin{aligned} & \int a(x) v^{q_1} \varphi_k dx \leq D_\gamma \left(\int b(x) u^{p_1} \varphi_k dx \right)^{(p-1)/(pr)+1/(py)} \\ & \quad \times \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{(p-1)/(pr')} \left(\int b^{-y'/y}(x) \frac{|D\varphi_k|^{py'}}{\varphi_k^{py'-1}} dx \right)^{1/(py')}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где показатели r и y выбраны так, что

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = 1, & (1-\gamma)(p-1)y = p_1, \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, & (\gamma+p-1)r = p_1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Заметим, что этот выбор r и y допустим в силу наших предположений относительно p и p_1 при условии, что $\gamma < 0$ достаточно мало. Вводя новые показатели s и z такие, что

$$\begin{cases} \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, & (\gamma+q-1)s = q_1, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = 1, & (1-\gamma)(q-1)z = q_1, \end{cases} \quad (3.17)$$

и оценивая правую часть (3.11), получаем

$$\begin{aligned} & \int b(x) u^{p_1} \varphi_k dx \leq E_\gamma \left(\int a(x) v^{q_1} \varphi_k dx \right)^{(q-1)/(qs)+1/(qz)} \\ & \quad \times \left(\int a^{-s'/s}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qs'}}{\varphi_k^{qs'-1}} dx \right)^{(q-1)/(qs')} \left(\int a^{-z'/z}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qz'}}{\varphi_k^{qz'-1}} dx \right)^{1/(qz')}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Объединяя (3.15) и (3.18), окончательно приходим к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} \left(\int a(x) v^{q_1} \varphi_k dx \right)^{1-mn} &\leq D_\gamma E_\gamma^n \left(\int a^{-s'/s}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qs'}}{\varphi_k^{qs'-1}} dx \right)^{n(q-1)/(qs')} \\ &\times \left(\int a^{-z'/z}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qz'}}{\varphi_k^{qz'-1}} dx \right)^{n/(qz')} \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{(p-1)/(pr')} \\ &\times \left(\int b^{-y'/y}(x) \frac{|D\varphi_k|^{py'}}{\varphi_k^{py'-1}} dx \right)^{1/(py')}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \left(\int b(x) u^{p_1} \varphi_k dx \right)^{1-mn} &\leq E_\gamma D_\gamma^m \left(\int b^{-r'/r}(x) \frac{|D\varphi_k|^{pr'}}{\varphi_k^{pr'-1}} dx \right)^{m(p-1)/(pr')} \\ &\times \left(\int b^{-y'/y}(x) \frac{|D\varphi_k|^{py'}}{\varphi_k^{py'-1}} dx \right)^{m/(py')} \left(\int a^{-s'/s}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qs'}}{\varphi_k^{qs'-1}} dx \right)^{(q-1)/(qs')} \\ &\times \left(\int a^{-z'/z}(x) \frac{|D\varphi_k|^{qz'}}{\varphi_k^{qz'-1}} dx \right)^{1/(qz')}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$n := \frac{p-1}{pr} + \frac{1}{py}, \quad m := \frac{q-1}{qs} + \frac{1}{qz}. \quad (3.21)$$

Несложные вычисления с учетом (3.16) и (3.17) дают явные значения m и n , а именно,

$$m = \frac{q-1}{q_1}, \quad n = \frac{p-1}{p_1}. \quad (3.22)$$

Из наших предположений вытекает, что показатель в левой части (3.19), (3.20) таков, что

$$1 - mn = \frac{p_1 q_1 - (p-1)(q-1)}{p_1 q_1} > 0.$$

Таким образом, из (2.5) и (3.20) следует, что

$$\int_{B_k} a(x) v^{q_1} dx \leq C \eta_k^{N+\sigma_1}, \quad \int_{B_k} b(x) u^{p_1} dx \leq C \eta_k^{N+\sigma_2}, \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(\alpha(q-1) + (\beta-q)q_1)(p-1) - pp_1 q_1}{p_1 q_1 - (p-1)(q-1)}, \\ \sigma_2 &= \frac{(\beta(p-1) + (\alpha-p)p_1)(q-1) - qp_1 q_1}{p_1 q_1 - (p-1)(q-1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Применяя к правым частям (3.6) и (3.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ неравенство Гёльдера с показателями $r_1 = p_1/(\gamma + p - 1)$, $r'_1 = r_1/(r_1 - 1)$ и $r_2 = q_1/(\gamma + q - 1)$, $r'_2 = r_2/(r_2 - 1)$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} \int |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi_k dx &\leq \left(\int u^{p_1} \varphi_k dx \right)^{1/r_1} \left(\int |D\varphi_k|^{pr'_1} \varphi_k^{1-pr'_1} dx \right)^{1/r'_1}, \\ \int |Dv|^q v^{\gamma-1} \varphi_k dx &\leq \left(\int v^{q_1} \varphi_k dx \right)^{1/r_2} \left(\int |D\varphi_k|^{qr'_2} \varphi_k^{1-qr'_2} dx \right)^{1/r'_2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

учитывая неравенства

$$\int_{B_k} u^{p_1} dx \leq c\eta_k^\beta \int_{B_k} b(x)u^{p_1} dx, \quad \int_{B_k} v^{q_1} dx \leq c\eta_k^\alpha \int_{B_k} a(x)v^{q_1} dx \quad (3.26)$$

и (3.23), приходим к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} \int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx &\leq c\eta_k^{N-p+(\sigma_2+\beta)(\gamma+p-1)/p_1}, \\ \int_{B_k} |Dv|^q v^{\gamma-1} dx &\leq c\eta_k^{N-q+(\sigma_1+\alpha)(\gamma+q-1)/q_1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Вновь пользуясь неравенством Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{B_k} |Du|^{s_1} dx &\leq \left(\int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx \right)^{s_1/p} \cdot \left(\int_{B_k} u^{p_1} dx \right)^{1-s_1/p}, \\ \int_{B_k} |Dv|^{s_2} dx &\leq \left(\int_{B_k} |Dv|^q v^{\gamma-1} dx \right)^{s_2/q} \cdot \left(\int_{B_k} v^{q_1} dx \right)^{1-s_2/q} \end{aligned} \quad (3.28)$$

с показателями

$$s_1 = \frac{pp_1}{p_1 - \gamma + 1}, \quad s_2 = \frac{qq_1}{q_1 - \gamma + 1},$$

из (3.23)–(3.27) получаем оценки

$$\begin{aligned} \int_{B_k} |Du|^{s_1} dx &\leq c\eta_k^{N+p(\sigma_2+\beta-p_1)/(p_1-\gamma+1)}, \\ \int_{B_k} |Dv|^{s_2} dx &\leq c\eta_k^{N+q(\sigma_1+\alpha-q_1)/(q_1-\gamma+1)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

При условиях (3.2) и достаточно малом $\gamma < 0$ по крайней мере один из показателей степени в правой части (3.29) больше N . Следовательно, переход к пределу при $k \rightarrow \infty$ дает равенство

$$\min\{\delta_{\theta,0}(u), \delta_{\theta,0}(v)\} = 0,$$

что противоречит определению класса допустимых решений. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В случае, когда $\alpha > q_1$ или $\beta > p_1$, можно доказать отсутствие решений $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ системы (3.1), используя рассуждения, аналогичные приведенным в замечании 2.2. Существенность условий (3.2) можно показать так же, как и в примерах 2.2, 2.3.

§ 4. Параболические неравенства

Рассмотрим параболическое неравенство

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(A(x, u, Du)Du) \geq a(x)u^q, & (x, t) \in Q := \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\mathcal{A} : \mathcal{A}u = \operatorname{div}(A(x, u, Du)Du) - p$ -коэрцитивный оператор и $a(x) \geq a_0|x|^{-\alpha}$, $x \in \Omega$, $a_0 > 0$.

Определим множества K_θ и $M_{\theta,\varepsilon}$ так же, как и в предыдущих параграфах. Обозначим

$$\delta_{\theta,\varepsilon,t}(u) := \operatorname{ess\,inf}_{x \in M_{\theta,\varepsilon}} |Du(x, t)| \quad (t > 0), \quad \delta_{\theta,0,0}(u) := \lim_{\varepsilon, t \rightarrow 0+} \inf \delta_{\theta,\varepsilon,t}(u).$$

Введем класс допустимых решений задачи (4.1) в смысле распределений так:

$$S_{p,q}^a(Q) := \{u : Q \rightarrow \mathbb{R}_+, a(x)u^q, |Du|^p \in L_{\operatorname{loc}}^1(Q), \exists \theta > 0 : \delta_{\theta,0,0}(u) > 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Неотрицательная функция $u \in S_{p,q}^a(Q) \cap C(Q)$ называется (локальным по времени) решением задачи (4.1), если для некоторого $T > 0$ и любой пробной функции $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}_+)$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi(\cdot, t) \subset \Omega$ для почти всех $t \in [0, T]$, выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)u^p \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega u_0 \varphi \, dx \leq \int_0^T \int_\Omega (-u\varphi_t + A(x, u, Du)(Du, D\varphi)) \, dx \, dt \quad (4.2)$$

и $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = u_0(x)$, $x \in \Omega$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. При $q > \max\{p-1, 1\}$, $\alpha > q+1$ и

$$\alpha(2-p) + p(q-1) > 0 \quad (4.3)$$

задача (4.1) не имеет решений в классе $S_{p,q}^a(Q) \cap C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решение $u \in S_{p,q}^a(Q)$ задачи (4.1) существует. Как и в §2, рассмотрим последовательность положительных чисел $\eta_k \rightarrow 0$, точек $x_k \rightarrow 0$, удовлетворяющих (2.3), и срезающих функций $\varphi_k(x) := \xi^\lambda(|(x - x_k)/\eta_k|)$, для которых выполнены условия (2.4) и (2.5). Введем также срезающую функцию по времени

$$\tau_k(t) := \varphi\left(\frac{t}{\eta_k^\mu}\right), \quad (4.4)$$

где значение параметра $\mu > 0$ будет выбрано ниже.

Умножив обе части неравенства (4.1) на функцию $u_\varepsilon^\gamma \varphi_k \tau_k$, где $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $\max\{1-p, -1\} < \gamma < 0$, и проинтегрировав по Q , получим

$$\begin{aligned} & a_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_\Omega u_\varepsilon^\gamma |x|^{-\alpha} \varphi_k \tau_k \, dx \, dt + c_1 |\gamma| \int_{\mathbb{R}_+} \int_\Omega |Du|^p u_\varepsilon^{\gamma-1} \varphi_k \tau_k \, dx \, dt \\ & + \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega u_{0\varepsilon}^{\gamma+1} \varphi_k \, dx \\ & \leq c_2 \int_\Omega |Du|^{p-1} |D\varphi_k| u_\varepsilon^\gamma \tau_k \, dx + \frac{1}{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}_+} \int_\Omega u_\varepsilon^{\gamma+1} \varphi_k |\tau_k'| \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $u_{0\varepsilon} = u_0 + \varepsilon$. Оценим первый интеграл в правой части (4.5) аналогично тому, как это было сделано в § 2, а второй – по неравенству Юнга с показателем

$$y = \frac{q + \gamma}{\gamma + 1}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = 1. \quad (4.6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^{\gamma+1} \varphi_k |\tau'_k| dx dt &\leq \frac{a_0}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^{q+\gamma} |x|^{-\alpha} \varphi_k dx dt \\ &+ c(a_0, \gamma) \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |x|^{\alpha(\gamma+1)/(q-1)} \varphi_k |\tau'_k|^{(q+\gamma)/(q-1)} dx dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Учитывая выбор x_k , φ_k , λ и условия (2.4), (2.5), из (4.4)–(4.7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{q+\gamma} |x|^{-\alpha} \varphi_k \tau_k dx dt + \frac{c_1 |\gamma|}{2} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi_k \tau_k dx dt \\ + \frac{1}{\gamma + 1} \int_{\Omega} u_0^{\gamma+1} \varphi_k dx \\ \leq C \left(\eta_k^{N+\mu+(\alpha(\gamma+p-1)-p(q+\gamma))/(q-p+1)} + \eta_k^{N+\mu(1-(q+\gamma)/(q-1))+\alpha(\gamma+1)/(q-1)} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Легко убедиться в том, что правая часть этого неравенства минимальна тогда и только тогда, когда показатели степени в обоих слагаемых равны, т.е. при

$$\mu = \frac{\alpha(2-p) + p(q-1)}{q-p+1}. \quad (4.9)$$

Заметим, что $\mu > 0$ в силу условия (4.3). С учетом (4.9) оценку (4.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{q+\gamma} |x|^{-\alpha} \varphi_k \tau_k dx dt + \frac{c_1 |\gamma|}{2} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi_k \tau_k dx dt \\ + \frac{1}{\gamma + 1} \int_{\Omega} u_0^{\gamma+1} \varphi_k dx \leq C \eta_k^{N+(\alpha-p)(\gamma+1)/(q-p+1)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обозначая

$$I_k := \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} u^{q+\gamma} dx dt, \quad J_k := \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx dt,$$

завершаем доказательство теоремы 4.1 аналогично тому, как это было сделано в § 2.

Покажем, что условия теоремы являются существенными.

ПРИМЕР 4.1. Пусть в задаче (4.1) $A(x, u, Du) \equiv 1$ (т.е. левая часть представляет собой оператор теплопроводности) и $N \geq 2$. Если при этом $\alpha \leq q + 1$, а начальные данные имеют вид функции $u_0 \equiv u_\mu$ из примера 2.2, то задача (4.1) имеет стационарное решение $u(x, t) = u_\mu(x)$.

ПРИМЕР 4.2. Нетрудно убедиться в том, что при нарушении условия (4.3) (т.е. если $\alpha(2-p) + p(q-1) \leq 0$) на множестве $\Omega = \{x \in B_{1/2}(0) : x_1 > 0\}$ существует решение задачи

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u \geq |x|^{-\alpha} u^q, & (x, t) \in Q := \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) \geq 0, & x \in Q, \\ u(x, 0) = |x|^{\alpha/(q-1)}, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.11)$$

имеющее вид $u(x, t) = |x|^{\alpha/(q-1)}(t+1)^\gamma$ с соответствующей константой $\gamma > 0$. При $1 < p < 2$ это решение принадлежит классу $S_{p,q}^a(Q) \cap C(Q)$ при $a(x) = |x|^{-\alpha}$.

Примеры 4.1 и 4.2 подтверждают существенность условий $\alpha > q+1$ и (4.3) в формулировке теоремы 4.1. Однако при дополнительных условиях на начальную функцию u_0 утверждение теоремы 4.1 можно усилить следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $q > \max\{p-1, 1\}$ и выполнено условие (4.3). Пусть существует константа $c > 0$ такая, что начальная функция u_0 удовлетворяет оценке

$$u_0(x) \geq c|x|^\sigma, \quad x \in \Omega, \quad (4.12)$$

где $\sigma < (\alpha-p)/(q-p+1)$.

Тогда задача (4.1) не имеет решений в классе $S_{p,q}^a(Q) \cap C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что оценки (4.10) и (4.12) противоречат друг другу. Отметим, что при $u_0 \in C^1(\Omega \cup \{0\})$ (что влечет равенство $\delta_{\theta,0,0} = |Du_0(0)|$) и $\sigma = 1$ из утверждения теоремы 4.2 следует справедливость теоремы 4.1.

§ 5. Параболические системы

Рассмотрим теперь начальную задачу для системы дифференциальных неравенств первого порядка по времени

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(A(x, u, Du)Du) \geq a(x)v^{q_1}, & (x, t) \in Q = \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_t - \operatorname{div}(B(x, v, Dv)Dv) \geq b(x)u^{p_1}, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь мы предполагаем, что $u_0, v_0 \in C(\Omega; \overline{\mathbb{R}}_+)$ и

$$p_1 > \max\{p-1, 1\}, \quad q_1 > \max\{q-1, 1\}. \quad (5.2)$$

Предполагается также, что операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, определенные, как и в предыдущих параграфах, являются соответственно p - и q -коэрцитивным, $a(x) \geq a_0|x|^{-\alpha}$, $b(x) \geq b_0|x|^{-\beta}$, $x \in \Omega$, где $a_0 > 0$, $b_0 > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пара неотрицательных функций

$$(u, v) \in (S_{p,p_1}^b(Q) \cap C(Q)) \times (S_{q,q_1}^a(Q) \cap C(Q))$$

называется (локальным по времени) решением задачи (5.1), если для некоторого $T > 0$ и любой пробной функции $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}_+)$ такой, что $\text{supp } \varphi(\cdot, t) \subset \Omega$ для почти всех $t \in [0, T]$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega a(x) v^{q_1} \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega u_0 \varphi \, dx &\leq \int_0^T \int_\Omega (-u \varphi_t + A(x, u, Du)(Du, D\varphi)) \, dx \, dt, \\ \int_0^T \int_\Omega b(x) u^{p_1} \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega v_0 \varphi \, dx &\leq \int_0^T \int_\Omega (-v \varphi_t + B(x, v, Dv)(Dv, D\varphi)) \, dx \, dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = u_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v(x, t) = v_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Пусть $\mu \geq 0$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu) &= \mu + \frac{(p-1)(\beta(q-1) + (\alpha-q)q_1) - pp_1q_1}{p_1q_1 - (p-1)(q-1)}, \\ \lambda_2(\mu) &= \mu + \frac{(p-1)((\alpha-\mu)q_1 + \beta) - pp_1q_1}{p_1q_1 - p + 1}, \\ \lambda_3(\mu) &= \frac{(\beta-\mu)(q-1) + (\alpha-q)q_1}{p_1q_1 - q + 1}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4(\mu) &= \frac{-\mu(q_1 + 1) + \alpha q_1 + \beta}{p_1q_1 - 1}, \\ \nu_1(\mu) &= \mu + \frac{(q-1)(\alpha(p-1) + (\beta-p)p_1) - qp_1q_1}{p_1q_1 - (p-1)(q-1)}, \\ \nu_2(\mu) &= \mu + \frac{(q-1)((\beta-\mu)p_1 + \alpha) - qp_1q_1}{p_1q_1 - q + 1}, \\ \nu_3(\mu) &= \frac{(\alpha-\mu)(p-1) + (\beta-p)p_1}{p_1q_1 - p + 1}, \\ \nu_4(\mu) &= \frac{-\mu(p_1 + 1) + \beta p_1 + \alpha}{p_1q_1 - 1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Кроме того, обозначим

$$\lambda = \lambda(\mu) := \min_{i=1,\dots,4} \lambda_i(\mu), \quad \nu = \nu(\mu) := \min_{i=1,\dots,4} \nu_i(\mu), \quad (5.6)$$

$$T(Q) := S_{p,p_1}^b(Q) \times S_{q,q_1}^a(Q),$$

где $S_{p,p_1}^b(Q)$ и $S_{q,q_1}^a(Q)$ определены, как в § 4.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются коэрцитивными операторами порядка p и q соответственно. Предположим, что справедливо условие (5.2) и для некоторого $\mu > 0$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\lambda(\mu) + \alpha > \mu + p_1 \max\left\{1, \frac{\mu}{2}\right\}, \quad \nu(\mu) + \beta > \mu + q_1 \max\left\{1, \frac{\mu}{2}\right\}. \quad (5.7)$$

с параметрами, определенными по формулам (5.4)–(5.6). Тогда задача (5.1) не имеет локальных решений из пространства $T(Q) \cap C(Q; \mathbb{R}^2)$ в смысле определения 5.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Оптимальный выбор параметра μ в формулировке теоремы 5.1 можно осуществить аналогично [10; теорема 40.6].

При $\mu \rightarrow 0_+$ из теоремы 5.1 по непрерывности получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Предположим, что выполнены соотношения (5.2) и хотя бы одно из неравенств

$$\lambda(0) > p_1 - \alpha, \quad \nu(0) > q_1 - \beta \quad (5.8)$$

с параметрами, определенными, как выше. Тогда справедливо утверждение теоремы 5.1.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим систему двух неравенств с операторами теплопроводности ($A(x, u, Du) \equiv B(x, v, Dv) \equiv 1$):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \geq |x|^{-\alpha} v^{q_1}, & (x, t) \in Q, \\ v_t - \Delta v \geq |x|^{-\beta} u^{p_1}, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Тогда в силу следствия 5.1 задача (5.9) не имеет решений в классе $T(Q)$, если либо

$$\alpha(q_1(p_1 + 1) - 1) + \beta > q_1(p_1(q_1 + 2) + 1),$$

либо

$$\beta(p_1(q_1 + 1) - 1) + \alpha > p_1(q_1(p_1 + 2) + 1).$$

При $\alpha = \beta$ и $p_1 = q_1$ эти условия принимают следующий вид: $\alpha > p_1 + 1$ (ср. теорему 4.1). Отметим, что при $p = 2$ и $q > p - 1 = 1$ условие (4.3) выполняется автоматически.

Утверждение теоремы 5.1 справедливо для любых неотрицательных начальных данных. Как и в случае теоремы 4.1, его можно усилить при дополнительных условиях на поведение начальных функций в окрестности нуля.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются коэрцитивными порядка p и q соответственно. Предположим, что выполнено соотношение (5.2) и существуют константы $c > 0$ и $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ такие, что либо

$$u_0(x) \geq c|x|^{\sigma_1}, \quad x \in \Omega, \quad (5.10)$$

где $\sigma_1 < \lambda(0)$, либо

$$v_0(x) \geq c|x|^{\sigma_2}, \quad x \in \Omega, \quad (5.11)$$

где $\sigma_2 < \nu(0)$, а параметры $\lambda(0)$, $\nu(0)$ определяются формулами (5.4)–(5.6). Тогда задача (5.1) не имеет локальных решений в смысле определения 5.1.

ПРИМЕР 5.2. Для задачи (5.9) условия на σ_1 , σ_2 , приведенные выше, принимают следующий вид:

$$\sigma_1 < \frac{\beta + (\alpha - 2 - 2p_1)q_1}{p_1 q_1 - 1}, \quad \sigma_2 < \frac{\alpha + (\beta - 2 - 2q_1)p_1}{p_1 q_1 - 1}.$$

Для доказательства теорем 5.1 и 5.2 нам потребуется

ЛЕММА 5.1. При условиях теоремы 5.1 справедливы следующие априорные оценки решений задачи (5.1):

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} v^{q_1} |x|^{-\alpha} dx dt + \int_{B_k} u_0 dx &\leq c \eta_k^N \sum_{i=1}^4 \eta_k^{\lambda_i(\mu)}, \\ b_0 \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} u^{p_1} |x|^{-\beta} dx dt + \int_{B_k} v_0 dx &\leq c \eta_k^N \sum_{i=1}^4 \eta_k^{\nu_i(\mu)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся модификацией метода доказательства теоремы 40.1 из работы [10], где коэффициенты регулярны ($a(x) \equiv b(x) \equiv 1$) и $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Предположим, что задача (5.1) имеет решение в смысле определения 5.1, и пусть φ – некоторая пробная функция. Умножая первое неравенство в (5.1) на $u^\gamma \varphi$, а второе – на $v^\gamma \varphi$ с $\max\{1-p, 1-q, -1\} < \gamma < 0$ и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} a_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} u^\gamma |x|^{-\alpha} \varphi dx dt + c_1 |\gamma| \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi dx dt \\ + \frac{1}{\gamma+1} \int_{\Omega} u_0^{\gamma+1} \varphi(x, 0) dx \\ \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Du|^{p-2} (Du, D\varphi) u^\gamma dx dt - \frac{1}{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{\gamma+1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt, \\ b_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} v^\gamma |x|^{-\beta} \varphi dx dt + c_2 |\gamma| \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Dv|^q v^{\gamma-1} \varphi dx dt \\ + \frac{1}{\gamma+1} \int_{\Omega} v_0^{\gamma+1} \varphi(x, 0) dx \\ \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Dv|^{q-2} (Dv, D\varphi) v^\gamma dx dt - \frac{1}{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{\gamma+1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \end{aligned}$$

и в силу неравенства Юнга с соответствующими параметрами имеем

$$\begin{aligned} a_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} u^\gamma |x|^{-\alpha} \varphi dx dt + \frac{c_1 |\gamma|}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi dx dt + \frac{1}{\gamma+1} \int_{\Omega} u_0^{\gamma+1} \varphi dx \\ \leq C_3(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left(u^{p+\gamma-1} |D\varphi|^p \varphi^{1-p} + u^{\gamma+1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \right) dx dt, \\ b_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} v^\gamma |x|^{-\beta} \varphi dx dt + \frac{c_2 |\gamma|}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Dv|^q v^{\gamma-1} \varphi dx dt + \frac{1}{\gamma+1} \int_{\Omega} v_0^{\gamma+1} \varphi dx \\ \leq C_4(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left(v^{q+\gamma-1} |D\varphi|^q \varphi^{1-q} + v^{\gamma+1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \right) dx dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

с некоторыми константами $c_1, c_2, C_3(\gamma), C_4(\gamma) > 0$.

Далее умножим (5.1) на пробную функцию φ . Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} & a_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} |x|^{-\alpha} \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0 \varphi \, dx \\ & \leq - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} A(x, u, Du) (Du, D\varphi) \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt, \\ & b_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} |x|^{-\beta} \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} v_0 \varphi \, dx \\ & \leq - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} B(x, v, Dv) (Dv, D\varphi) \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx \, dt, \end{aligned}$$

что в силу неравенства Гёльдера приводит к оценкам

$$\begin{aligned} & a_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} |x|^{-\alpha} \varphi \, dx \, dt \\ & \leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Du|^p u^{\gamma-1} \varphi \, dx \, dt \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{(1-\gamma)(p-1)} |D\varphi|^p \varphi^{1-p} \, dx \, dt \right)^{1/p} \\ & \quad + \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{p'_1} \varphi^{1-p'_1} |x|^{\alpha p'_1/p_1} \, dx \, dt \right)^{1/p'_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} |x|^{-\alpha} \varphi \, dx \, dt \right)^{1/p_1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & b_0 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} |x|^{-\beta} \varphi \, dx \, dt \\ & \leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |Dv|^q v^{\gamma-1} \varphi \, dx \, dt \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{(1-\gamma)(q-1)} |D\varphi|^q \varphi^{1-q} \, dx \, dt \right)^{1/q} \\ & \quad + \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'_1} \varphi^{1-q'_1} |x|^{\beta q'_1/q_1} \, dx \, dt \right)^{1/q'_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} |x|^{-\beta} \varphi \, dx \, dt \right)^{1/q_1}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Введем параметры

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{p_1}{p + \gamma - 1}, & y_1 &= \frac{p_1}{\gamma + 1}, & z_1 &= \frac{p_1}{(1 - \gamma)(p - 1)}, \\ \varkappa_2 &= \frac{q_1}{q + \gamma - 1}, & y_2 &= \frac{q_1}{\gamma + 1}, & z_2 &= \frac{q_1}{(1 - \gamma)(q - 1)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} X &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} v^{q_1} |x|^{-\alpha} \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0 \varphi \, dx, \\ Y &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} u^{p_1} |x|^{-\beta} \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} v_0 \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Тогда из (5.13)–(5.15) получим

$$\begin{aligned} X &\leq c \{ Y^{1/(p' \varkappa_1) + 1/(p z_1)} A + Y^{1/(p' y_1) + 1/(p z_1)} B + Y^{1/p_1} C \}, \\ Y &\leq c \{ X^{1/(q' \varkappa_2) + 1/(q z_2)} D + X^{1/(q' y_2) + 1/(q z_2)} E + Y^{1/q_1} F \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{p\kappa'_1} \varphi^{1-p\kappa'_1} |x|^{\alpha\kappa'_1/\kappa_1} dx dt \right)^{1/(p'\kappa'_1)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{pz'_1} \varphi^{1-pz'_1} |x|^{\alpha z'_1/z_1} dx dt \right)^{1/(pz'_1)}, \\
B &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{y'_1} \varphi^{1-y'_1} |x|^{\alpha y'_1/y_1} dx dt \right)^{1/(p'y'_1)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{pz'_1} \varphi^{1-pz'_1} |x|^{\alpha z'_1/z_1} dx dt \right)^{1/(pz'_1)}, \\
C &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{p'_1} \varphi^{1-p'_1} |x|^{\alpha p'_1/p_1} dx dt \right)^{1/p'_1}, \\
D &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{q\kappa'_2} \varphi^{1-q\kappa'_2} |x|^{\beta\kappa'_2/\kappa_2} dx dt \right)^{1/(q'\kappa'_2)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{qz'_2} \varphi^{1-qz'_2} |x|^{\beta z'_2/z_2} dx dt \right)^{1/(qz'_2)}, \\
E &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{y'_2} \varphi^{1-y'_2} |x|^{\beta y'_2/y_2} dx dt \right)^{1/(q'y'_2)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |D\varphi|^{qz'_2} \varphi^{1-qz'_2} |x|^{\beta z'_2/z_2} dx dt \right)^{1/(qz'_2)}, \\
F &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'_1} \varphi^{1-q'_1} |x|^{\beta q'_1/q_1} dx dt \right)^{1/q'_1}.
\end{aligned}$$

Используя определения κ_i , y_i и z_i , $i = 1, 2$, из (5.16), имеем

$$\begin{aligned}
X &\leq c(Y^{(p-1)/p_1} A + Y^{2(p-1)/(pp_1)} B + Y^{1/p_1} C), \\
Y &\leq c(X^{(q-1)/q_1} D + X^{2(q-1)/(qq_1)} E + X^{1/q_1} F),
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
X^{p_1} &\leq c(Y^{p-1} A^{p_1} + Y^{2(p-1)/p} B^{p_1} + Y C^{p_1}), \\
Y^{q_1} &\leq c(X^{q-1} D^{q_1} + X^{2(q-1)/q} E^{q_1} + X F^{q_1}).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Далее выберем семейство пробных функций

$$\varphi(x, t) = \xi_{\eta_k}^s(x) \tau_{\eta_k^\mu}(t)$$

с ξ_{η_k} и $T_\tau \in C_0^\infty([0, \tau]; [0, 1])$, как в § 4, где s достаточно велико. Это приводит к следующим оценкам:

$$\begin{aligned}
A &\leq c_A \eta_k^{L_1}, & B &\leq c_B \eta_k^{L_2}, & C &\leq c_C \eta_k^{L_3}, \\
D &\leq c_D \eta_k^{M_1}, & E &\leq c_E \eta_k^{M_2}, & F &\leq c_F \eta_k^{M_3},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{(N + \mu)(p_1 - p + 1) - pp_1 + \alpha(p - 1)}{p_1}, \\
L_2 &= \frac{(N + \mu)(pp_1 - 2(p - 1)) - \mu p_1(p - 1) - pp_1 + 2\alpha(p - 1)}{pp_1}, \\
L_3 &= \frac{N(p_1 - 1) - \mu + \alpha}{p_1}, \\
M_1 &= \frac{(N + \mu)(q_1 - q + 1) - qq_1 + \beta(q - 1)}{q_1}, \\
M_2 &= \frac{(N + \mu)(qq_1 - 2(q - 1)) - \mu q_1(q - 1) - qq_1 + 2\beta(q - 1)}{qq_1}, \\
M_3 &= \frac{N(q_1 - 1) - \mu + \beta}{q_1}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Отметим, что

$$L_2 = \frac{L_1}{p} + \frac{L_3}{p'}, \quad M_2 = \frac{M_1}{q} + \frac{M_3}{q'}. \tag{5.20}$$

Сопоставляя (5.17) и (5.18), получаем

$$\begin{aligned}
X^{p_1} &\leq c(Y^{p-1}\eta_k^{L_1 p_1} + Y^{2(p-1)/p}\eta_k^{L_2 p_1} + Y\eta_k^{L_3 p_1}), \\
Y^{q_1} &\leq c(X^{q-1}\eta_k^{M_1 q_1} + X^{2(q-1)/q}\eta_k^{M_2 q_1} + X\eta_k^{M_3 q_1}),
\end{aligned}$$

что в силу (5.20) и неравенства Юнга приводит к оценкам

$$X^{p_1} \leq c(Y^{p-1}\eta_k^{L_1 p_1} + Y\eta_k^{L_3 p_1}), \quad Y^{q_1} \leq c(X^{q-1}\eta_k^{M_1 q_1} + X\eta_k^{M_3 q_1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
X^{p_1} &\leq c(X^{(p-1)(q-1)/q_1}\eta_k^{M_1(p-1)+L_1 p_1} + X^{(p-1)/q_1}\eta_k^{M_3(p-1)+L_1 p_1} \\
&\quad + X^{(q-1)/q_1}\eta_k^{M_1+L_3 p_1} + X^{1/q_1}\eta_k^{M_3+L_3 p_1}), \\
Y^{q_1} &\leq c(Y^{(p-1)(q-1)/p_1}\eta_k^{L_1(q-1)+M_1 q_1} + Y^{(q-1)/p_1}\eta_k^{L_3(q-1)+M_1 q_1} \\
&\quad + Y^{(p-1)/p_1}\eta_k^{L_1+M_3 q_1} + Y^{1/p_1}\eta_k^{L_3+M_3 q_1}).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Применяя к (5.21) неравенство Юнга с показателями

$$\begin{aligned}
a_1 = b_1 &= \frac{p_1 q_1}{(p-1)(q-1)}, \quad a_2 = b_3 = \frac{p_1 q_1}{p-1}, \\
a_3 = b_2 &= \frac{p_1 q_1}{q-1}, \quad a_4 = b_4 = p_1 q_1,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

получаем

$$\begin{aligned}
X^{p_1} &\leq c(\eta_k^{(M_1(p-1)+L_1 p_1)a'_1} + \eta_k^{(M_3(p-1)+L_1 p_1)a'_2} + \eta_k^{(M_1+L_3 p_1)a'_3} + \eta_k^{(M_3+L_3 p_1)a'_4}), \\
Y^{q_1} &\leq c(\eta_k^{(L_1(q-1)+M_1 q_1)b'_1} + \eta_k^{(L_3(q-1)+M_1 q_1)b'_2} + \eta_k^{(L_1+M_3 q_1)b'_3} + \eta_k^{(L_3+M_3 q_1)b'_4}),
\end{aligned} \tag{5.23}$$

где $a'_i, b'_i, i = 1, \dots, 4$, – сопряженные показатели к a_i и b_i , введенным в (5.22). Сравнивая формулы (5.19) и (5.22) с (5.4) и (5.5), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{M_1(p-1) + L_1 p_1}{p_1} \cdot a'_1 &= N + \lambda_1, & \frac{L_1(q-1) + M_1 q_1}{q_1} \cdot b'_1 &= N + \nu_1, \\ \frac{M_3(p-1) + L_1 p_1}{p_1} \cdot a'_2 &= N + \lambda_2, & \frac{L_3(q-1) + M_1 q_1}{q_1} \cdot b'_2 &= N + \nu_2, \\ \frac{M_1 + L_3 p_1}{p_1} \cdot a'_3 &= N + \lambda_3, & \frac{L_1 + M_3 q_1}{q_1} \cdot b'_3 &= N + \nu_3, \\ \frac{M_3 + L_3 p_1}{p_1} \cdot a'_4 &= N + \lambda_4, & \frac{L_3 + M_3 q_1}{q_1} \cdot b'_1 &= N + \nu_4, \end{aligned} \quad (5.24)$$

что позволяет переписать оценки (5.23) в виде (5.12). Это доказывает лемму 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Применяя к обоим слагаемым в правых частях соотношений (5.13) неравенство Гёльдера с показателями κ_1, y_1, κ_2 и y_2 соответственно, с учетом (5.12) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx dt &\leq c(\eta_k^{N+\mu-p+(\nu+\beta-\mu)(p+\gamma-1)/p_1} + \eta_k^{N+(\nu+\beta-\mu)(\gamma+1)/p_1}), \\ \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Dv|^q v^{\gamma-1} dx dt &\leq c(\eta_k^{N+\mu-q+(\lambda+\alpha-\mu)(q+\gamma-1)/q_1} + \eta_k^{N+(\lambda+\alpha-\mu)(\gamma+1)/q_1}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Используя (5.12), (5.25) и неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Du|^{s_1} dx dt &\leq \left(\int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Du|^p u^{\gamma-1} dx dt \right)^{s_1/p} \left(\int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} u^{p_1} dx dt \right)^{(p-s_1)/p}, \\ \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Dv|^{s_2} dx dt &\leq \left(\int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Dv|^q v^{\gamma-1} dx dt \right)^{s_2/q} \left(\int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} v^{q_1} dx dt \right)^{(q-s_2)/q}, \end{aligned}$$

где

$$s_1 = \frac{pp_1}{p_1 - \gamma + 1}, \quad s_2 = \frac{qq_1}{q_1 - \gamma + 1}, \quad (5.26)$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Du|^{s_1} dx dt &\leq c(\eta_k^{N+\mu+(\nu+\beta-\mu)p/(p_1-\gamma+1)} + \eta_k^{N+\mu+2(\nu+\beta-\mu)/(p_1-\gamma+1)}), \\ \int_0^{\eta_k^\mu} \int_{B_k} |Dv|^{s_2} dx dt &\leq c(\eta_k^{N+\mu+(\lambda+\alpha-\mu)q/(q_1-\gamma+1)} + \eta_k^{N+\mu+2(\lambda+\alpha-\mu)/(q_1-\gamma+1)}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \inf_{B_k \times [0, \eta_k^\mu]} |Du(x, t)| &\leq c(\eta_k^{(\nu+\beta-\mu)/p_1-1} + \eta_k^{2(\nu+\beta-\mu)/(pp_1)}), \\ \inf_{B_k \times [0, \eta_k^\mu]} |Dv(x, t)| &\leq c(\eta_k^{(\lambda+\alpha-\mu)/q_1-1} + \eta_k^{2(\lambda+\alpha-\mu)/(qq_1)}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

что при условии (5.7), достаточно малых $\mu > 0$ и $\eta_k \rightarrow 0$ противоречит включению $(u, v) \in T(Q)$. Это завершает доказательство теоремы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. С учетом неотрицательности u , v и неравенств (5.10), (5.11) из соотношения (5.12) получаем

$$\eta_k^{\sigma_1} \leq c\eta_k^{\lambda(\mu)}, \quad \eta_k^{\sigma_2} \leq c\eta_k^{\nu(\mu)},$$

что при достаточно малых $\mu > 0$, $\eta_k \rightarrow 0$ и условиях (5.10), (5.11) приводит к противоречию.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Результаты этой работы сохраняют силу и для операторов с противоположными знаками A и B . Для доказательства достаточно повторить те же рассуждения для достаточно малых $\gamma > 0$.

Список литературы

- [1] И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of non-autonomous ordinary differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **89**, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [2] Дж. Хей, “О необходимых условиях существования локальных решений сингулярных обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств высокого порядка”, *Докл. РАН*, **388**:5 (2003), 599–604; англ. пер.: J. Hay, “Necessary conditions for the existence of local solutions to higher-order singular nonlinear ordinary differential equations and inequalities”, *Dokl. Math.*, **67**:1 (2003), 66–69.
- [3] Дж. Хей, “О необходимых условиях существования локальных решений сингулярных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 924–935; англ. пер.: J. Hay, “On necessary conditions for the existence of local solutions to singular nonlinear ordinary differential equations and inequalities”, *Math. Notes*, **72**:5–6 (2002), 847–857.
- [4] H. Brezis, X. Cabré, “Some simple nonlinear PDE’s without solutions”, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **1**:2 (1998), 223–262.
- [5] А. В. Демьянов, А. И. Назаров, “О разрешимости задачи Дирихле для полулинейного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 37, Записки науч. сем. ПОМИ, **336**, ПОМИ, СПб., 2006, 25–45; англ. пер.: A. V. Demyanov, A. I. Nazarov, “On solvability of the Dirichlet problem to the semilinear Schrödinger equation with singular potential”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **143**:2 (2007), 2857–2868.
- [6] I. Kombe, “Doubly nonlinear parabolic equations with singular lower order term”, *Nonlinear Anal.*, **56**:2 (2004), 185–199.
- [7] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств”, *Докл. РАН*, **359**:4 (1998), 456–460; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “The absence of global positive solutions of quasilinear elliptic inequalities”, *Dokl. Math.*, **57**:2 (1998), 250–253.
- [8] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие положительных решений для систем квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств в $\mathbb{R}^N$ ”, *Докл. РАН*, **366**:1 (1999), 13–17; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “Nonexistence of positive solutions for a system of quasilinear elliptic equations and inequalities in $\mathbb{R}^N$ ”, *Dokl. Math.*, **59**:3 (1999), 351–355.
- [9] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ ”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 18*, Тр. МИАН, **227**,

- Наука, М., 1999, 192–222; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **227**:4 (1999), 186–216.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234**:3 (2001), 1–362.
- [11] M.-F. Bidaut-Véron, S. Pohozaev, “Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems”, *J. Anal. Math.*, **84**:1 (2001), 1–49.
- [12] Е. И. Галахов, “О дифференциальных неравенствах с точечными особенностями на границе”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, Наука, М., 2008, 119–129; англ. пер.: E. I. Galakhov, “On differential inequalities with point singularities on the boundary”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **260**:1 (2008), 112–122.
- [13] J. Serrin, “Local behavior of solutions of quasi-linear equations”, *Acta Math.*, **111**:1 (1964), 247–302.
- [14] J. L. Vázquez, “A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations”, *Appl. Math. Optim.*, **12**:1 (1984), 191–202.

Е. И. Галахов (E. I. Galakhov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: galakhov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

29.10.2008 и 08.05.2009