Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 4, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 03:22:20

УДК 519.112.7+519.179.1

Д. А. Шабанов

О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов

Рассматривается известная экстремальная задача о полноцветных раскрасках гиперграфов. Раскраска в r цветов множества вершин гиперграфа называется полноцветной, если в ней каждое ребро содержит вершины всех цветов. Изучается величина $p(n, r)$, равная минимально возможному количеству ребер в n -равномерном гиперграфе, для которого не существует полноцветной r -раскраски. Получены новые нижние и верхние оценки величины $p(n, r)$, улучшающие предыдущие результаты при многих соотношениях между параметрами n и r . Кроме того, получено достаточное условие существования полноцветной r -раскраски у n -равномерного гиперграфа.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: гиперграф, полноцветная раскраска, метод случайной раскраски.

§ 1. Введение и история задачи

В работе исследуется известная задача экстремальной теории гиперграфов. Напомним, что *гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность каких-то подмножеств множества V , называемых *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин гиперграфа в r цветов (r -раскраска) называется *полноцветной* для H , если в ней каждое ребро из E содержит вершины всех цветов. В работе А. В. Косточки [1] (см. также [2]) была поставлена задача об отыскании величины $p(n, r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, не имеющих полноцветных r -раскрасок, т.е.

$$p(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-равномерный гиперграф, для которого не существует полноцветных } r\text{-раскрасок}\}.$$

Одно из первых достаточных условий существования полноцветной r -раскраски было получено П. Эрдемем и Л. Ловасом в их знаменитой работе [3]. Они доказали, что если каждое ребро n -равномерного гиперграфа H пересекается не более, чем с $r^{n-1}/(4(r-1)^n)$ другими ребрами, то для H существует

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8784.2010.1) и гранта Президента РФ (грант № МК-3429.2010.1).

полноцветная r -раскраска. Таким образом, ими фактически была получена следующая нижняя оценка величины $p(n, r)$:

$$p(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4(r-1)^n} + 1.$$

Эту оценку можно улучшить, используя простые вероятностные соображения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ таких, что $r \leq n$, выполнена оценка*

$$p(n, r) \geq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения может быть легко получено рассмотрением случайной r -цветной раскраски множества вершин (с равномерным распределением) произвольного гиперграфа, имеющего менее $r^{n-1}/(r-1)^n$ ребер.

Задача об отыскании величины $p(n, r)$ хорошо известна в частном случае $r = 2$. В этом случае $p(n, 2)$ совпадает с классической величиной $m(n)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, для которых не существует правильных двухцветных раскрасок (раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра гиперграфа являются неоднородными). Действительно, любая полноцветная 2-раскраска является правильной двухцветной и, наоборот, любая правильная двухцветная является полноцветной 2-раскраской. Таким образом, $p(n, 2) = m(n)$. Для $m(n)$ известны следующие оценки:

$$(\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^{n-1} \leq m(n) = p(n, 2) \leq \frac{e \ln 2}{2} n^2 2^{n-1} (1 + o(1)). \quad (2)$$

Верхнюю оценку впервые доказал П. Эрдеш (см. [4]), нижнюю – Дж. Радахкришнан и А. Сринивазан (см. [5]). Эти оценки являются наилучшими из известных.

Общие соотношения для произвольного r были получены А. В. Косточкой. Используя связь между полноцветными r -раскрасками n -равномерных гиперграфов и предписанными раскрасками полных r -дольных графов, он обосновал (см. [1]) следующие оценки для $p(n, r)$ при $r \geq 2$ и $n \geq 2$:

$$\frac{1}{r} e^{c_1 n/r} \leq p(n, r) \leq r e^{c_2 n/r}, \quad (3)$$

где c_1 и c_2 – некоторые абсолютные положительные константы, причем $c_1 < c_2$.

Наконец, в работах [6], [7] были доказаны неравенства для случая $r = 3$ (в этих статьях использовалось другое обозначение: $m_1^3(n)$ вместо $p(n, 3)$):

$$c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} \right)^n \leq p(n, 3) \leq \frac{e \ln 3}{12} n^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n (1 + o(1)), \quad (4)$$

где c – некоторая положительная константа.

§ 2. Основные результаты

В настоящей работе получены новые оценки величины $p(n, r)$, улучшающие ранее известные оценки при многих значениях параметра r . Теорема 1 дает нижнюю оценку для $p(n, r)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$p(n, r) \geq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что, вообще говоря, константа $(\sqrt{21} - 3)/4$ в оценке (5) не является оптимальной. Ее можно заменить на большую величину при условии, что параметры n или r достаточно велики. В настоящей работе нам более интересен порядок роста величины $p(n, r)$, чем точное вычисление констант при растущих множителях.

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующего достаточного условия существования полноцветной r -раскраски у n -равномерного гиперграфа, которое в силу его важности с точки зрения метода доказательства мы тоже формулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $H = (V, E)$ – произвольный n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер. Если для некоторого числа $p \in [0, 1/r]$ выполняется неравенство*

$$m \left(\frac{r-1}{r} \right)^n r \left((1-p)^n + (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1} \right)^n \right) + m^2 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} p(r-1)r^2(1+p)^n < 1, \quad (6)$$

то для H существует полноцветная r -раскраска.

Доказательство теоремы 2 основано на применении метода случайной раскраски, который является одним из лучших способов получения содержательных результатов в задачах подобного рода, т.е. в экстремальных задачах о раскрасках гиперграфов.

Следующая теорема дает верхнюю оценку величины в случае не очень большого роста r по сравнению с n .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть задана функция $r = r(n)$, удовлетворяющая условию $r \geq 3$. Пусть, кроме того, функция $d = d(n) := r^3/n^2$ не превосходит некоторой константы $0 < c < 1/2$ при всех $n > n_0$. Тогда существует такая функция $\varphi = \varphi(n)$, зависящая от функции r и стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство*

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3r(r-1)}}{4(r-1)} \varphi. \quad (7)$$

В следствии 1 поясняется порядок роста правой части неравенства (7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. 1) Если $r = r(n) = o(\sqrt{n})$, то

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2}{2(r-1)} \varphi_1, \quad (8)$$

где φ_1 – некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$.

2) Если $r = r(n) \gg \sqrt{n}$ (т.е. $n = o(r^2)$), то

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) n^{3/2} \varphi_2, \quad (9)$$

где φ_2 – некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$.

Соотношения (8) и (9) легко вытекают из (7) и в особых пояснениях не нуждаются. Посмотрим теперь, как соотносятся полученные нами оценки (5), (8) и (9) величины $p(n, r)$ с тем, что было известно ранее – с неравенствами (1)–(4).

1) Если $r = 2$, то неравенство (8) дает точно такую же верхнюю оценку $p(n, 2)$, что и (2). Нижняя оценка (5) в этом случае оказывается хуже, чем наилучшая из известных оценок для $p(n, 2)$.

2) При $r = 3$ оценки (5) и (8) совпадают с ранее полученными соотношениями (4).

3) Наконец, в случае $r > 3$ были известны лишь неравенства (3). Предположим, что r фиксировано. Тогда из оценок (5) и (8) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln p(n, r)}{n} = \ln \left(\frac{r}{r-1} \right).$$

Далее, из (3) вытекает, что для всех $r \geq 2$ выполнены соотношения

$$c_1 \leq r \ln \left(\frac{r}{r-1} \right) \leq c_2. \quad (10)$$

Следовательно, $c_2 \geq 2 \ln 2 > 1$, а $c_1 \leq 1$.

Если $r = r(n) \leq (\sqrt{21} - 3)^3 n / (64 \ln n)$, то (5) улучшает нижнюю оценку из (3). Действительно, из (10) получаем, что

$$\frac{1}{r} \exp \left\{ c_1 \frac{n}{r} \right\} \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n < \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n.$$

Если же $r = r(n) \geq 4$ удовлетворяет условию теоремы 3, т.е. $r = O(n^{2/3})$, то оценка (7) улучшает верхнюю оценку из (3). Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3 r(r-1)}}{4(r-1)} (1 + o(1)) &\leq \exp \left\{ \frac{n}{r-1} (1 + o(1)) \right\} \\ &\ll \exp \left\{ (2 \ln 2) \frac{n}{r} \right\} \leq r \exp \left\{ c_2 \frac{n}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили улучшение известных оценок величины $p(n, r)$ в следующих случаях:

- 1) при $3 < r = r(n) \leq (\sqrt{21} - 3)^3 n / (64 \ln n)$ теорема 1 дает наилучшую нижнюю оценку для $p(n, r)$;
- 2) при $3 < r = r(n) = O(n^{2/3})$ теорема 3 дает наилучшую верхнюю оценку для $p(n, r)$.

§ 3. Следствия из полученных результатов

В этом параграфе мы приведем некоторые простые следствия из теорем 1–3.

3.1. Достаточное условие существования полноцветных раскрасок.

Напомним, что П. Эрдешем и Л. Ловасом в [3] было получено одно из первых достаточных условий существования полноцветных раскрасок у равномерных гиперграфов. Ими было доказано, что если каждое ребро n -равномерного гиперграфа H пересекается не более, чем с $r^{n-1}/(4(r-1)^n)$ другими ребрами, то для H существует полноцветная r -раскраска. С помощью построенной в доказательстве теоремы 2 случайной раскраски можно усилить это утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H – n -равномерный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более, чем с d другими ребрами, где

$$d = \frac{\sqrt{12} - 3}{8r} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (11)$$

Тогда если $r \leq n/(8 \ln n)$, то для H существует полноцветная r -раскраска.

При $r = o(n/\ln n)$ теорема 4 существенно улучшает классический результат Эрдеша и Ловаса. Другие результаты, касающиеся достаточных условий существования полноцветных раскрасок, можно найти, например, в [8].

3.2. Предписанные раскраски r -дольных графов. Напомним ряд определений. Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф с множеством вершин V и множеством ребер E , а C – некоторое множество, элементы которого называются цветами. Вершинным предписанием A будем называть некоторое отображение, которое каждой вершине v сопоставляет в соответствие некоторое подмножество $A(v) \subseteq C$. Если $|A(v)| = k$ для любой вершины $v \in V$, то будем говорить, что мощность предписания равна k .

Раскраской f вершин графа G , соответствующей предписанию A , называется такое однозначное отображение $f: V \rightarrow C$, что $f(v) \in A(v)$. При этом будем говорить, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Как и раньше, раскраска называется правильной для графа G , если любые две вершины G , соединенные ребром, покрашены в разные цвета. Граф называется предписанно k -раскрашиваемым, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности k найдется правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. Предписанным хроматическим числом графа G называется минимальное натуральное число k такое, что G является предписанно k -раскрашиваемым.

Изучение предписанного хроматического числа было инициировано работами В. Г. Визинга [9], а также П. Эрдеша, А. Л. Рубина и Х. Тейлора [10]. В статье [10] была поставлена задача об отыскании величины $N(r, n)$ – минимального числа вершин в полном r -дольном графе, предписанное хроматическое

число которого превышает n . Эрдешем, Рубиным и Тейлором была доказана (см. [10]) тесная связь $N(2, n)$ и классической величины $m(n)$, а именно, они доказали, что имеет место соотношение

$$m(n) \leq N(2, n) \leq 2m(n).$$

Косточка в работе [1] обобщил это неравенство на случай произвольного числа r :

$$p(n, r) \leq N(r, n) \leq rp(n, r). \quad (12)$$

Из неравенств, полученных Н. Алоном (см. [11]) для предписанных хроматических чисел полных r -дольных графов, вытекают следующие оценки величины $N(r, n)$:

$$\exp\left\{c_1 \frac{n}{r}\right\} \leq N(r, n) \leq \exp\left\{c_2 \frac{n}{r}\right\}, \quad (13)$$

где c_1, c_2 – те же самые константы, что и в (3).

Из соотношений (12) и полученных нами результатов (5), (8) и (9) вытекают следующие оценки для $N(r, n)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Для любых $r \geq 2, n \geq 2$ выполняется неравенство

$$N(r, n) \geq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (14)$$

2) Если $r = r(n) = o(\sqrt{n})$, то

$$N(r, n) \leq \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2}{2(r-1)} \varphi_1, \quad (15)$$

где φ_1 – некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$.

3) Если $r = r(n) \gg \sqrt{n}$ (т.е. $n = o(r^2)$) и выполнены условия теоремы 3, то

$$N(r, n) \leq \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) n^{3/2} \varphi_2, \quad (16)$$

где φ_2 – некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$.

Несложно проверить, что при малых значениях r неравенство (14) дает лучшую оценку, чем (13). Например, при $r = o((n/\ln n)^{1/4})$ имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \exp\left\{c_1 \frac{n}{r}\right\} &\ll \frac{\sqrt{21} - 3}{4} \left(\frac{n}{r^4 \ln n} \right)^{1/3} \exp\left\{c_1 \frac{n}{r}\right\} \\ &\leq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \end{aligned}$$

Оценки же (15), (16) заметно улучшают (13). Сравнение оценок можно проводить так же, как это было сделано в § 2 при сравнении верхних оценок величины $p(n, r)$.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Без ограничения общности можно считать, что

$$V = \{1, 2, 3, \dots, w\},$$

причем $w \leq mn$. Действительно, если n -равномерный гиперграф имеет m ребер, то он содержит не более mn вершин ненулевой степени. Остальные вершины имеют степень нуль и никак не влияют на существование у H вершинной раскраски необходимого вида, а потому их можно отбросить. Мы построим некоторую случайную r -цветную раскраску множества V , которая с положительной вероятностью будет полноцветной.

4.1. Построение случайной раскраски. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан следующий набор независимых в совокупности случайных величин:

- 1) $\xi_1, \dots, \xi_w$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с равной вероятностью $1/r$;
- 2) $\eta_1, \dots, \eta_w$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p и значение нуль с вероятностью $1 - rp$.

Существование такого вероятностного пространства очевидно. Отметим, что именно здесь мы использовали то, что по условию теоремы $p \in [0, 1/r]$.

Пусть $i \in V$ – произвольная вершина гиперграфа. Обозначим через D_i следующее событие:

$$D_i = \bigcup_{e \in E: i \in e} \bigcup_{j=1}^r \bigcap_{s \in e} \{\xi_s \neq j\}.$$

Далее, положим

$$\zeta_i = \xi_i I\{\overline{D_i} \cup \{\eta_i = 0\}\} + \eta_i I\{D_i \cap \{\eta_i > 0\}\}, \quad i = 1, 2, \dots, w.$$

Из определения следует, что случайные величины ζ_i могут принимать только значения $1, 2, \dots, r$. Поэтому случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_w)$ можно интерпретировать как случайную r -цветную раскраску множества V . Если удастся показать, что выполняется неравенство

$$P\left(\bigcap_{e \in E} \bigcap_{j=1}^r \left\{ \bigcup_{s \in e} \{\zeta_s = j\} \right\}\right) > 0, \quad (17)$$

то мы докажем существование полноцветной r -раскраски для гиперграфа H . Неравенство (17) эквивалентно тому, что вероятность дополнительного события $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{j=1}^r \left\{ \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s \neq j\} \right\},$$

строго меньше единицы.

Для каждого ребра e и каждого $j = 1, \dots, r$ введем события U_e^j и V_e^j :

$$U_e^j = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s \neq j\}, \quad V_e^j = \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s \neq j\}.$$

Обозначим через $A_e^{l,j}$ и C_e^j следующие события:

$$A_e^{l,j} = U_e^l \cap V_e^j, \quad C_e^j = \left(\bigcap_{l=1}^r \bar{U}_e^l \right) \cap V_e^j.$$

Из определения событий следует, что выполняются равенства

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{j=1}^r V_e^j = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{j=1}^r \left(\left(\bigcup_{l=1}^r A_e^{l,j} \right) \cup C_e^j \right). \quad (18)$$

Далее мы оценим вероятности событий $A_e^{l,j}$ и C_e^j .

4.2. Нахождение вероятности события $A_e^{l,j}$. Рассмотрим два случая:

1) $l = j$, 2) $l \neq j$.

Случай 1). Пусть $l = j$. Из события U_e^j вытекают события D_s для всех $s \in e$. Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} A_e^{j,j} &= \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s \neq j\} \cap \{\zeta_s \neq j\}) = \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s \neq j\} \cap \{\xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\}) \\ &= \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s \neq j\} \cap \{\eta_s \neq j\}). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом,

$$P(A_e^{j,j}) = \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n. \quad (20)$$

Случай 2). Пусть $l \neq j$. Как и в первом случае, из события U_e^l вытекают события D_s , $s \in e$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} A_e^{l,j} &= \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s \neq l\} \cap \{\zeta_s \neq j\}) = \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s \neq l\} \cap \{\xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\}) \\ &= \bigcap_{s \in e} (\{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} \cup \{\xi_s \notin \{j, l\}, \eta_s \neq j\}). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом,

$$P(A_e^{l,j}) = \left(\frac{(r-1)p}{r} + \frac{(r-2)(1-p)}{r} \right)^n = \left(\frac{r-2+p}{r} \right)^n. \quad (22)$$

4.3. Оценка вероятности события C_e^j . Если произошло событие C_e^j , то для некоторого подмножества вершин $e_1 \subset e$ выполняется событие $\bigcap_{s \in e_1} \{\xi_s = j, \zeta_s \neq j\}$. Отсюда следует, что для всех $s \in e_1$ выполняются события D_s . Эти события, в свою очередь, влекут выполнение событий U_f^l для некоторых ребер

$f \in E$, $e_1 \cap f \neq \emptyset$ и $l \neq j$. Таким образом, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} C_e^j &\subset \bigcup_{f \in E: |f \cap e| \geq 1} \bigcup_{l=1, l \neq j}^r \left(U_f^l \cap \left\{ \bigcup_{s \in f \cap e} \{\xi_s = j, \zeta_s \neq j\} \right\} \cap V_e^j \right) \\ &= \bigcup_{f \in E: |f \cap e| \geq 1} \bigcup_{l=1, l \neq j}^r \left(\bigcap_{s \in f} \{\xi_s \neq l\} \cap \bigcup_{s \in f \cap e} \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} \cap V_e^j \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение для последнего события:

$$\tilde{B}_{e,f}^{l,j} = \bigcap_{s \in f} \{\xi_s \neq l\} \cap \bigcup_{s \in f \cap e} \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} \cap V_e^j.$$

Таким образом,

$$C_e^j \subset \bigcup_{f \in E: |f \cap e| \geq 1} \bigcup_{l=1, l \neq j}^r \tilde{B}_{e,f}^{l,j}. \quad (23)$$

Далее, для любой вершины $s \in V$ выполняется соотношение $\{\zeta_s \neq j\} \subset \{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}$. Рассмотрим пересечение ребер e и f . Для всех $s \in e \cap f$ в силу события U_f^l должно выполняться условие $\xi_s \neq l$, а из события V_e^j вытекает условие

$$\zeta_s = \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j.$$

Кроме того, хотя бы для одной из вершин должно быть выполнено равенство $\xi_s = j$. Получаем соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{e,f}^{l,j} &\subset \bigcap_{s \in f \setminus e} \{\xi_s \neq l\} \cap \bigcap_{s \in f \cap e} \{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \\ &\cap \left\{ \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j\} \geq 1 \right\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus f} \{\{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}\} = B_{e,f}^{l,j}. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим через h мощность пересечения ребер e и f , т.е. $h = |e \cap f|$. Тогда для вероятности события $B_{e,f}^{l,j}$ выполнено следующее равенство:

$$\begin{aligned} P(B_{e,f}^{l,j}) &= P\left(\bigcap_{s \in f \setminus e} \{\xi_s \neq l\} \cap \bigcap_{s \in f \cap e} \{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \right. \\ &\quad \left. \cap \left\{ \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j\} \geq 1 \right\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus f} \{\{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}\} \right) \\ &= P\left(\bigcap_{s \in f \setminus e} \{\xi_s \neq l\} \right) P\left(\bigcap_{s \in e \setminus f} \{\{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}\} \right) \\ &\quad \times P\left(\bigcap_{s \in f \cap e} \{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \cap \left\{ \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j\} \geq 1 \right\} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее равенство выполняется в силу совокупной независимости случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_w, \eta_1, \dots, \eta_w$. Первые две вероятности легко считаются. Имеем

$$P\left(\bigcap_{s \in f \setminus e} \{\xi_s \neq l\}\right) = \prod_{s \in f \setminus e} P(\xi_s \neq l) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-h}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{s \in e \setminus f} \{\{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}\}\right) \\ &= \prod_{s \in e \setminus f} P(\{\xi_s \neq j\} \cup \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\}) \\ &= \left(\frac{r-1}{r} + \frac{1}{r}(r-1)p\right)^{n-h} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-h} (1+p)^{n-h}. \end{aligned} \quad (27)$$

Осталось определить, чему равен третий множитель в правой части оценки (25). Рассмотрим событие $\{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\}$. Разобьем его на два события в зависимости от значения ξ_s . Имеем

$$\begin{aligned} & \{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \\ &= \{\xi_s = j, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \\ & \quad \sqcup \{\xi_s \notin \{j, l\}, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \\ &= \{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} \sqcup \{\xi_s \notin \{j, l\}, \eta_s \neq j\}. \end{aligned}$$

В силу последнего равенства получаем следующего цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{s \in f \cap e} \{\xi_s \neq l, \xi_s I\{\eta_s = 0\} + \eta_s I\{\eta_s \neq 0\} \neq j\} \cap \left\{\sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j\} \geq 1\right\}\right) \\ &= P\left(\sum_{s \in f \cap e} (I\{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} + I\{\xi_s \notin \{j, l\}, \eta_s \neq j\}) = h, \right. \\ & \quad \left. \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j\} \geq 1\right) \\ &= P\left(\sum_{s \in f \cap e} (I\{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} + I\{\xi_s \notin \{j, l\}, \eta_s \neq j\}) = h, \right. \\ & \quad \left. \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} \geq 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^h P\left(\sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s = j, \eta_s \notin \{0, j\}\} = i, \sum_{s \in f \cap e} I\{\xi_s \notin \{j, l\}, \eta_s \neq j\} = h-i\right) \\ &= \sum_{i=1}^h \binom{h}{i} \left(\frac{(r-1)p}{r}\right)^i \left(\frac{(r-2)(1-p)}{r}\right)^{h-i} \\ &= \left(\frac{r-2+p}{r}\right)^h - \left(\frac{(r-2)(1-p)}{r}\right)^h \leq h \frac{(r-1)p}{r} \left(\frac{r-2+p}{r}\right)^{h-1} \\ &\leq hp \left(\frac{r-1}{r}\right)^h. \end{aligned} \quad (28)$$

Из оценки (28) и равенств (25)–(27) вытекает следующее соотношение для вероятности события $B_{e,f}^{l,j}$:

$$\begin{aligned} P(B_{e,f}^{l,j}) &\leq \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-h} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-h} (1+p)^{n-h} h p \left(\frac{r-1}{r}\right)^h \\ &\leq h p (1+p)^n \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-h}. \end{aligned} \quad (29)$$

Найдем максимум по h правой части оценки (29). Отношение значений выражения при h и $h+1$ равно величине

$$\frac{r h}{(r-1)(h+1)}.$$

При $h \leq r-1$ эта величина не превосходит единицы, в противном случае она строго больше единицы. Значит, максимум достигается при $h = r$. Таким образом, для любых ребер e и f , независимо от мощности их пересечения, выполнена следующая оценка вероятности события $B_{e,f}^{l,j}$:

$$P(B_{e,f}^{l,j}) \leq r p (1+p)^n \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-r}. \quad (30)$$

Из этого неравенства и соотношений (23), (24) следует, наконец, оценка вероятности события C_e^j :

$$P(C_e^j) \leq \sum_{f \in E: |f \cap e| \geq 1} \sum_{l=1, l \neq j}^r P(B_{e,f}^{l,j}) \leq m(r-1) r p (1+p)^n \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-r}. \quad (31)$$

4.4. Оценка вероятности события $\mathcal{F}$. Объединим полученные в предыдущих пунктах оценки вероятностей различных событий. С помощью неравенств (20), (22), (31) и соотношения (18) получаем, что

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{l=1}^r P(A_e^{l,j}) + P(C_e^j) \right) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^r P(A_e^{j,j}) + \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^r \sum_{l=1, l \neq j}^r P(A_e^{l,j}) + \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^r P(C_e^j) \\ &\leq m r \left(\frac{r-1}{r}\right)^n (1-p)^n + m r (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r}\right)^n \\ &\quad + m r m (r-1) r p (1+p)^n \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-r} \\ &= m \left(\frac{r-1}{r}\right)^n r \left((1-p)^n + (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1}\right)^n \right) \\ &\quad + m^2 \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-r} p (r-1) r^2 (1+p)^n < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу условия (6) теоремы 1. Из него следует выполнение эквивалентного соотношения (17), которое доказывает существование полноцветной r -раскраски для гиперграфа H . Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство нижней оценки для $p(n, r)$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть константы $c > 0$ и $\delta \in (0, 1)$ удовлетворяют неравенству

$$2c + 4\delta c^2 < 1. \quad (32)$$

Тогда для любых $\varepsilon \in (0, \delta)$, $r \geq 2$, $n \geq 2$ выполнено неравенство

$$p(n, r) \geq \frac{c}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\}. \quad (33)$$

5.1. Доказательство леммы 1. Итак, пусть заданы $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \delta)$, натуральные $r \geq 2$, $n \geq 2$ и $c > 0$, удовлетворяющее неравенству (32). Рассмотрим три различных случая, в зависимости от поведения параметров r , n и ε .

Случай 1). Предположим сначала, что

$$\min \left\{ \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1-\varepsilon}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} \leq 2.$$

Тогда

$$c \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} \leq 2c < 1.$$

Следовательно, в силу оценки (1) неравенство (33) будет выполнено.

Случай 2). Пусть $r > (n/\ln n)^{1-\varepsilon}$ и, кроме того,

$$\min \left\{ \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1-\varepsilon}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} \geq 2. \quad (34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} c \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} &\leq \frac{c}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2} \\ &< c \left(\frac{(n/\ln n)^{1-\varepsilon}}{(n/\ln n)^{1-\varepsilon} - 1} \right)^{1/2} \leq c\sqrt{2} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в первом случае, из оценки (1) следует выполнение неравенства (33) во втором случае.

Случай 3). Остается рассмотреть вариант, когда $r \leq (n/\ln n)^{1-\varepsilon}$ и выполнено условие (34).

Из теоремы 2 следует, что если натуральное число m удовлетворяет неравенству (6) для некоторого $p \in [0, 1/r]$, то

$$p(n, r) > m.$$

Возьмем m “почти” равным правой части (33), а именно,

$$m = \left\lfloor \frac{c}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} \right\rfloor. \quad (35)$$

Положим

$$p = \frac{\varepsilon \ln(n/\ln n)}{n}. \quad (36)$$

Проверим выполнение условия $rp \leq 1$ — одного из необходимых условий теоремы 2. В силу ограничения на величину r получаем

$$rp \leq \varepsilon \left(\frac{\ln n}{n} \right)^\varepsilon < 1.$$

Остается показать, что для параметров m и p , задаваемых формулами (35) и (36), выполняется неравенство (6).

Рассмотрим первое слагаемое левой части (6), имеющее вид

$$m \left(\frac{r-1}{r} \right)^n r \left((1-p)^n + (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1} \right)^n \right).$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1} \right)^n &\leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1-\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{n(1-p)}{r-1} \right\} \\ &\leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1-\varepsilon} \exp \{ -n^\varepsilon (\ln n)^{1-\varepsilon} (1-p) \} \\ &\leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{-\varepsilon} \exp \{ -n^\varepsilon (\ln n)^{1-\varepsilon} (1-p) + \ln n \} \leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (37)$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что $-n^\varepsilon (\ln n)^{1-\varepsilon} (1-p) + \ln n \leq 0$. Действительно,

$$\frac{n^\varepsilon (\ln n)^{1-\varepsilon} (1-p)}{\ln n} = \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon (1-p) \geq 2(1-p) \geq 1.$$

Здесь мы воспользовались условием (34) и тем, что $p \leq (\ln n)/n < 1/2$.

В итоге, из (35)–(37) получаем следующую оценку первого слагаемого левой части неравенства (6):

$$\begin{aligned} m \left(\frac{r-1}{r} \right)^n r \left((1-p)^n + (r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1} \right)^n \right) \\ \leq m \left(\frac{r-1}{r} \right)^n r \left(e^{-pn} + \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{-\varepsilon} \right) = 2m \left(\frac{r-1}{r} \right)^n r \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{-\varepsilon} \leq 2c. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя выражения (35), (36) для m и p во второе слагаемое левой части (6), получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} m^2 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} p(r-1)r^2(1+p)^n &\leq m^2 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} (r-1)r^2 \delta \left(\frac{\ln n}{n} \right) e^{pn} \\ &= m^2 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} (r-1)r^2 \delta \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{1-\varepsilon} \leq \delta c^2 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{-r} \leq 4\delta c^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Итак, в случае 3) для выбранных параметров m и p выполнено неравенство (6) теоремы 2, вытекающее из оценок (38), (39) и условия (32). Поэтому можно применить теорему 2. Из нее следует, что

$$p(n, r) > m = \left\lfloor \frac{c}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(1-\varepsilon)/2}, \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\varepsilon \right\} \right\rfloor.$$

Из последнего неравенства и вытекает утверждение (33) леммы 1. Лемма 1 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства достаточно осуществить подбор параметров ε , c и δ в лемме 1. Если $r-1 > n/\ln n$, то оценка (5) вытекает из (1). Если же $r-1 \leq n/\ln n$, то выберем ε таким, чтобы величины, из которых выбирается минимум в правой части неравенства (33), совпадали. В этом случае каждая из них будет равна $(n/[(r-1)\ln n])^{1/3}$. Искомым значением является

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\ln(r-1)}{\ln n - \ln \ln n} \right). \quad (40)$$

Ясно, что такой выбор ε оптимален. Возьмем $\delta = 1/3$. Далее, неравенство (33) выполняется для всех $c > 0$, удовлетворяющих условию (32) при $\delta = 1/3$, т.е. для всех $c < (\sqrt{21} - 3)/4$. Но тогда оно же будет выполняться и для $c = (\sqrt{21} - 3)/4$. Теорема 1 доказана.

§ 6. Доказательство верхней оценки для $p(n, r)$

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится некоторая техническая лемма, которую мы сформулируем в том месте доказательства, где она будет использоваться, а докажем ее в п. 6.2.

6.1. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим множество $V = \{1, \dots, v\}$. В качестве v возьмем величину $v = \lceil \tilde{v} \rceil$, где

$$\tilde{v} = \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3r(r-1)}}{4(r-1)}. \quad (41)$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех n -подмножеств множества V , которые мы будем называть *ребрами*. Ясно, что

$$|\mathcal{R}| = \binom{v}{n}.$$

На множестве V существует в точности r^v различных r -цветных раскрасок. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_{r^v}$ – все эти раскраски. Выберем произвольную раскраску σ_i . Назовем ребро $f \in \mathcal{R}$ *плохим относительно раскраски σ_i* , если в этой раскраске в f отсутствуют вершины хотя бы одного из цветов. Обозначим через E_i множество всех ребер, являющихся плохими относительно σ_i . Далее, нам понадобятся некоторые факты из теории систем общих представителей.

Напомним, что *системой общих представителей* для некоторого семейства $\mathcal{A}$ подмножеств множества K называется такое подмножество $S \subseteq K$,

которое имеет непустое пересечение со всеми $A \in \mathcal{A}$. Следующая теорема дает оценку на мощность минимальной системы общих представителей в произвольном случае.

ТЕОРЕМА 5. *Для произвольного множества K и любой системы его подмножеств $\mathcal{A}$ существует такая система общих представителей S , что*

$$|S| \leq \max \left\{ \frac{|K|}{\min_{A \in \mathcal{A}} |A|}, \frac{|K|}{\min_{A \in \mathcal{A}} |A|} \ln \frac{|\mathcal{A}| \min_{A \in \mathcal{A}} |A|}{|K|} \right\} + \frac{|K|}{\min_{A \in \mathcal{A}} |A|} + 1.$$

Доказательство теоремы 5 можно найти, например, в [12] и [13]. Другие оценки мощности минимальной системы общих представителей были получены в [14] и [15].

Обозначим через E какую-нибудь систему общих представителей для совокупности $\{E_i\}_{i=1}^v$. Поскольку E – это множество элементов из $\mathcal{R}$, т.е. ребер, то можно рассмотреть n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$. Покажем, что для H не существует полноцветных r -раскрасок.

Действительно, пусть σ – произвольная r -цветная раскраска V . Тогда σ совпадает с некоторой σ_i . В E есть ребро из E_i . По определению множества E_i все ребра, входящие в него, являются плохими относительно раскраски σ_i . Значит, в E есть плохое ребро в σ_i или в σ . Таким образом, в любой r -цветной раскраске множества V найдется ребро, покрашенное не более, чем в $r - 1$ цвет, т.е. для H не существует полноцветных r -раскрасок.

Из определения величины $p(n, r)$ следует, что для любого гиперграфа H , построенного вышеуказанным способом, выполняется неравенство

$$p(n, r) \leq |E|. \quad (42)$$

Теперь осталось оценить сверху величину $|E|$. Для решения этой задачи воспользуемся теоремой 5, согласно которой можно выбрать такую систему E , что

$$|E| \leq \frac{|\mathcal{R}|}{\min_i |E_i|} \left(\ln \frac{r^v \min_i |E_i|}{|\mathcal{R}|} + 2 \right), \quad (43)$$

если выражение под знаком логарифма больше числа e . Это условие, очевидно, выполняется.

Рассмотрим произвольную раскраску σ_i и соответствующее множество плохих ребер E_i . Обозначим через v_j , $j = 1, \dots, r$, количество элементов из V , имеющих цвет j в σ_i . Ясно, что $\sum_{j=1}^r v_j = v$. По формуле включений и исключений получаем равенство:

$$|E_i| = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k+1} S_k, \quad S_k = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r}} \binom{v_{j_1} + \dots + v_{j_k}}{n}.$$

Найдем $\min_i |E_i|$, который мы обозначим через $M(v, n, r)$.

Введем функцию

$$E(n_1, \dots, n_r; n, r) = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k+1} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r}} \binom{n_{j_1} + \dots + n_{j_k}}{n},$$

где $n_1, \dots, n_r$ – произвольные натуральные числа. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть для некоторых $i_1 < i_2$ выполнено $n_{i_1} > n_{i_2}$. Тогда

$$E(n_1, \dots, n_{i_1}, \dots, n_{i_2}, \dots, n_r; n, r) \geq E(n_1, \dots, n_{i_1} - 1, \dots, n_{i_2} + 1, \dots, n_r; n, r).$$

Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} M(v, n, r) &= \min_i |E_i| = \min_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \dots + n_r = v}} E(n_1, \dots, n_r; n, r) \\ &= E(\underbrace{q+1, \dots, q+1}_a \text{ раз}, q, \dots, q), \end{aligned}$$

где $q = \lfloor v/r \rfloor$ – это частное от деления v на r , а $a = v - rq$ – остаток. Оценим снизу величину $M(v, n, r)$. Далее будем считать, что $n \geq n_0$ и, следовательно, выполнено условие $d \leq c < 1/2$.

Простейшим применением неравенств Бонферрони (см., например, [16; § 1.1]) получаем

$$\begin{aligned} M(v, n, r) &\geq (r-a) \binom{v-q}{n} + a \binom{v-q-1}{n} - \binom{a}{2} \binom{v-2q-2}{n} \\ &\quad - (r-a)a \binom{v-2q-1}{n} - \binom{r-a}{2} \binom{v-2q}{n} \\ &\geq r \binom{v-q-1}{n} - \binom{r}{2} \binom{v-2q}{n} \geq r \binom{v-v/r-1}{n} - \binom{r}{2} \binom{v-2v/r+2}{n}. \end{aligned} \quad (44)$$

Отметим, что в последнем выражении используются обобщенные биномиальные коэффициенты, определяемые для каждого действительного числа x формулой

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n!}.$$

Рассмотрим отношение произведений биномиальных коэффициентов в правой части оценки (44):

$$\begin{aligned} \frac{\binom{r}{2} \binom{v-2v/r+2}{n}}{r \binom{v-v/r-1}{n}} &\leq r \prod_{i=0}^{n-1} \frac{v-2v/r+2-i}{v-v/r-1-i} \\ &\leq r \prod_{i=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{2}{r} + \frac{2}{v} - \frac{i}{v} + \frac{1/r + (1+i)/v}{1-1/r-(i+1)/v} \right\} \\ &\leq r \prod_{i=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{2}{r} + \frac{2}{v} - \frac{i}{v} + \frac{1/r + (1+i)/v}{1-1/r-n/v} \right\} \\ &= r \prod_{i=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{2}{r} + \frac{2}{v} + \frac{i}{v} \left(\frac{v+rn}{vr-v-rn} \right) + \frac{v+r}{vr-v-rn} \right\} \\ &\leq r \exp \left\{ -\frac{2n}{r} + \frac{2n}{v} + \frac{n^2}{2v} \left(\frac{v+rn}{vr-v-rn} \right) + \frac{(v+r)n}{vr-v-rn} \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Так как $v \geq n^2/(2r)$, $r \leq n^{2/3}$, то отношение $n/v \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, $n^2/(2v) \leq r$, поэтому третье слагаемое в экспоненте не превосходит

$$\frac{vr + r^2n}{vr - v - rn}.$$

Отношение $vr/(vr - v - rn)$, очевидно, ограничено сверху некоторой константой. Вторая часть выражения равна

$$\frac{r^2n}{vr - v - rn} = \frac{rn}{v} + \frac{rnv}{v(vr - v - rn)} + \frac{r^2n^2}{v(vr - v - rn)}.$$

Первое слагаемое в этом выражении не превосходит $dn/r \leq cn/r$, второе стремится к нулю, третье ограничено некоторой константой в силу того, что ограничена величина $d = r^3/n^2$. Осталось понять, что представляет собой четвертое слагаемое в экспоненте из соотношения (45). Представим его следующим образом

$$\frac{(v + r)n}{vr - v - r} = \frac{n}{r - 1} + \frac{rn}{(vr - v - r)(r - 1)} + \frac{rn}{vr - v - r}.$$

Последние два слагаемых стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Первое же слагаемое $n/(r - 1)$ в силу того, что $r \geq 3$, не превосходит $3n/(2r)$.

В итоге правая часть соотношения (45) оценивается так:

$$\begin{aligned} r \exp \left\{ -\frac{2n}{r} + \frac{2n}{v} + \frac{n^2}{2v} \left(\frac{v + rn}{vr - v - rn} \right) + \frac{(v + r)n}{vr - v - rn} \right\} \\ \leq r \exp \left\{ -\frac{2n}{r} + \frac{cn}{r} + \frac{3n}{2r} + \psi_1(n) \right\}, \end{aligned}$$

где величина $\psi_1(n)$ является ограниченной. Далее,

$$\begin{aligned} r \exp \left\{ -\frac{2n}{r} + \frac{cn}{r} + \frac{3n}{2r} + \psi_1(n) \right\} &\leq \exp \left\{ -\frac{n}{r} \left(\frac{1}{2} - c \right) + \ln n + \psi_1(n) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -n^{1/3} \left(\frac{1}{2} - c \right) + \ln n + \psi_1(n) \right\} = \psi_2(n), \end{aligned} \quad (46)$$

причем функция $\psi_2 = \psi_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из неравенств (44)–(46) следует нижняя оценка для $M(v, n, r)$:

$$M(v, n, r) \geq r \binom{v - v/r - 1}{n} (1 - \psi_2).$$

Отсюда, ввиду соотношений (42) и (43) вытекает оценка исследуемой величины $p(n, r)$:

$$p(n, r) \leq \frac{\binom{v}{n}}{r \binom{v - v/r - 1}{n} (1 - \psi_2)} (v \ln r + 2). \quad (47)$$

Остается рассмотреть отношение биномиальных коэффициентов. Рассуждая, как и при обосновании (45), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 \frac{\binom{v}{n}}{\binom{v-v/r-1}{n}} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} \frac{v-i}{v-v/r-1-i} \\
 &\leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^n \prod_{i=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{i}{v} + \frac{(1+i)r/(v(r-1))}{1-(1+i)r/(v(r-1))}\right\} \\
 &\leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^n \prod_{i=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{i}{v} + \frac{(1+i)r}{v(r-1)-nr}\right\} \\
 &\leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^n \exp\left\{\frac{n^2}{2}\left(\frac{r}{v(r-1)-nr} - \frac{1}{v}\right) + \frac{rn}{v(r-1)-nr}\right\} \\
 &= \left(\frac{r}{r-1}\right)^n \exp\left\{\frac{(v+nr)n^2}{2(v(r-1)-nr)v} + \frac{rn}{v(r-1)-nr}\right\}. \tag{48}
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое, очевидно, стремится к нулю. Теперь рассмотрим первое слагаемое:

$$\frac{(v+nr)n^2}{2(v(r-1)-nr)v} = \frac{(v+nr)n^2}{2(r-1)v^2} \left(\frac{v(r-1)}{v(r-1)-nr}\right) = \frac{(v+nr)n^2}{2(r-1)v^2} \psi_3,$$

где $\psi_3 = \psi_3(n) = v(r-1)/(v(r-1)-nr) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Несложно проверить, что величина $\tilde{v}$ удовлетворяет уравнению

$$n^2(\tilde{v} + 2nr) = 2\tilde{v}^2(r-1).$$

В силу того, что $v \geq \tilde{v}$, а $\tilde{v}$ – больший корень уравнения, получаем неравенство

$$n^2(v + 2nr) \leq 2v^2(r-1).$$

Таким образом, первое слагаемое в экспоненте (48) оценивается сверху величиной ψ_3 и, следовательно, выполнено соотношение

$$\exp\left\{\frac{(v+nr)n^2}{2(v(r-1)-nr)v} + \frac{r}{v(r-1)-nr}\right\} \leq e\psi_4, \tag{49}$$

где $\psi_4 = \psi_4(n) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, из неравенств (47)–(49) и равенства (41) вытекает искомое утверждение (7) теоремы, т.е.

$$\begin{aligned}
 p(n, r) &\leq \frac{\binom{v}{n}}{r^{\binom{v-v/r-1}{n}}(1-\psi_2)}(v \ln r + 2) \\
 &\leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1}\right)^n e\psi_4(v \ln r + 2)(1-\psi_2)^{-1} = \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1}\right)^n e(\ln r)\tilde{v}\varphi,
 \end{aligned}$$

причем

$$\varphi = (1-\psi_2)^{-1}\psi_4 \frac{v \ln r + 2}{\tilde{v} \ln r} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 доказана.

6.2. Доказательство леммы 2. В силу того, что значение функции $E(n_1, \dots, n_r; n; r)$ не меняется при перестановке аргументов $(n_1, \dots, n_r)$, можно считать, что $i_1 = 1, i_2 = 2$. Рассмотрим разность $E(n_1, n_2, \dots, n_r; n; r) - E(n_1 - 1, n_2 + 1, \dots, n_r; n; r)$:

$$\begin{aligned} & E(n_1, n_2, \dots, n_r; n; r) - E(n_1 - 1, n_2 + 1, \dots, n_r; n; r) \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k+1} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r}} \left[\binom{n_{j_1} + \dots + n_{j_k}}{n} - \binom{\tilde{n}_{j_1} + \dots + \tilde{n}_{j_k}}{n} \right], \quad (50) \end{aligned}$$

где $\tilde{n}_j$ равно n_j , если $j > 2$, и совпадает с $n_j + (-1)^j$ при $j = 1, 2$. Если набор $(j_1, \dots, j_k)$ содержит и единицы, и двойки (т.е. $j_1 = 1, j_2 = 2$) или же, наоборот, не содержит ни единицу, ни двойку (т.е. $j_1 > 2$), то суммы $n_{j_1} + \dots + n_{j_k} = \tilde{n}_{j_1} + \dots + \tilde{n}_{j_k}$. Таким образом, выражение (50) равно

$$\begin{aligned} & E(n_1, n_2, \dots, n_r; n; r) - E(n_1 - 1, n_2 + 1, \dots, n_r; n; r) \\ &= \sum_{k=2}^{r-1} (-1)^{r-k+1} \sum_{\substack{(j_2, \dots, j_k): \\ 3 \leq j_2 < \dots < j_k \leq r}} \left[\binom{n_1 + n_{j_2} + \dots + n_{j_k}}{n} + \binom{n_2 + n_{j_2} + \dots + n_{j_k}}{n} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n_1 - 1 + n_{j_2} + \dots + n_{j_k}}{n} - \binom{n_2 + 1 + n_{j_2} + \dots + n_{j_k}}{n} \right] \\ &\quad + (-1)^r \left[\binom{n_1}{n} + \binom{n_2}{n} - \binom{n_1 - 1}{n} - \binom{n_2 + 1}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{r-k} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r-2}} \left[\binom{n_1 - 1 + n_{j_2+2} + \dots + n_{j_k+2}}{n-1} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n_2 + n_{j_2+2} + \dots + n_{j_k+2}}{n-1} \right] + (-1)^r \left[\binom{n_1 - 1}{n-1} - \binom{n_2}{n-1} \right] \\ &= \tilde{E}(n_1 - 1; n_3, \dots, n_r; n-1, r-2) - \tilde{E}(n_2; n_3, \dots, n_r; n-1, r-2), \end{aligned}$$

где функция $\tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m, s)$ определяется так:

$$\begin{aligned} & \tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m, s) \\ &= \sum_{k=1}^s (-1)^{s-k} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s}} \left(\binom{x + m_{j_1} + \dots + m_{j_k}}{m} + (-1)^s \binom{x}{m} \right). \end{aligned}$$

В силу того, что $n_1 - 1 \geq n_2$, для доказательства леммы достаточно показать, что функция $\tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m, s)$ возрастает по x . Для этого удобно проинтерпретировать значение функции $\tilde{E}$ как решение следующей комбинаторной задачи.

Пусть задано N пронумерованных шаров, $N = x + m_1 + \dots + m_s$, причем среди них $m_i, i = 1, \dots, s$, шаров покрашены в цвет i , а оставшиеся x являются бесцветными. Сколькими способами можно так выбрать m шаров, что в выбранном наборе будут шары всех цветов?

Покажем, что ответ на этот вопрос дает $\tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m)$. Действительно, обозначим через A_i , $i = 1, \dots, s$, — количество способов выбрать m шаров, которые не покрашены в цвет i . Тогда для любого $k = 1, \dots, s$ и набора $(j_1, \dots, j_k)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s$, имеет место равенство

$$|A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}| = \binom{N - m_{j_1} - \dots - m_{j_k}}{m}.$$

Искомое количество способов выбора m шаров, среди которых есть шары всех цветов, равно $|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_s|$, и поэтому оно легко находится по формуле включений и исключений. Имеем

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_s| &= \binom{N}{m} + \sum_{k=1}^s (-1)^k \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s}} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}| \\ &= \binom{N}{m} + \sum_{k=1}^s (-1)^k \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s}} \binom{N - m_{j_1} - \dots - m_{j_k}}{m} \\ &= \binom{N}{m} + (-1)^s \binom{x}{m} + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s}} \binom{N - m_{j_1} - \dots - m_{j_k}}{m} \\ &= \binom{N}{m} + (-1)^s \binom{x}{m} + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{s-k} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s}} \binom{x + m_{j_1} + \dots + m_{j_k}}{m} \\ &= \tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m, s). \end{aligned}$$

Ясно, что число способов выбрать m шаров так, чтобы в наборе были шары всех цветов, растет с ростом числа x , равного количеству бесцветных шаров. Значит, и функция $\tilde{E}(x; m_1, \dots, m_s; m, s)$ является возрастающей функцией по x . Этот факт завершает доказательство леммы. Лемма 2 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 4

Для доказательства нам понадобится классическое утверждение, носящее название “локальной леммы”. Впервые оно было доказано в работе Эрдеша и Ловаса [3]. Мы сформулируем эту теорему в специальном случае, удобном для дальнейших рассуждений.

ТЕОРЕМА 6. Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы события $Q_1, \dots, Q_N$. Пусть $S_1, \dots, S_N$ — такие подмножества множества $\mathcal{R}_N = \{1, \dots, N\}$, что для любого $i = 1, \dots, N$ событие Q_i не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{Q_j, j \in \mathcal{R}_N \setminus S_i\}$. Если для каждого $i = 1, \dots, N$ выполнены неравенства

$$1) \ P(Q_i) < \frac{1}{2}, \quad 2) \ \sum_{j \in S_i} P(Q_j) \leq \frac{1}{4}, \quad (51)$$

то $P(\bigcap_{j=1}^N \overline{Q}_j) > 0$.

Доказательство “локальной леммы” можно найти в [17] и [18]. Отметим также, что если в условии теоремы 5 каждое $j \in \mathcal{R}_N$ принадлежит хотя бы одному из множеств S_i , $i = 1, \dots, N$, то неравенство 1) следует из 2), поэтому для применения теоремы достаточно проверить только 2).

Итак, пусть задан произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условию теоремы 4. Как и раньше, без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, \dots, w\}$ для некоторого натурального числа w . Построим точно так же случайную раскраску $\{\zeta_s\}_{s \in V}$ для H , как это было сделано в доказательстве теоремы 2 (см. п. 4.1). Параметр p возьмем равным

$$p = \frac{\ln(n/((r-1)\ln n))}{3n}.$$

В силу условия $r \leq n/\ln n$ такой выбор p является корректным и выполнено неравенство $rp \leq 1$. Далее, рассмотрим следующие наборы событий:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A_e^{l,j} : l, j = 1, \dots, r, e \in E\}, \\ \mathcal{B} &= \{B_{e,f}^{l,j} : l, j = 1, \dots, r, l \neq j, e, f \in E, e \cap f \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Из соотношений (18), (23), (24) следует, что

$$\bigcap_{e \in E} \bigcap_{j=1}^r \left\{ \bigcup_{s \in e} \{\zeta_s = j\} \right\} \supset \bigcap_{Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \bar{Q}.$$

Если нам удастся показать, что вероятность последнего события строго больше нуля, то мы докажем, что случайная раскраска $\{\zeta_s\}_{s \in V}$ с положительной вероятностью является полноцветной r -раскраской для H .

Определим для каждого события $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ такое подмножество событий $S(Q) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, что Q не зависит от алгебры, порожденной $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \setminus S(Q)$, и выполнено условие (51), которое в наших обозначениях выглядит так: для каждого $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ справедливы неравенства

$$1) \ P(Q) < \frac{1}{2}, \quad 2) \ \sum_{Q_0 \in S(Q)} P(Q_0) \leq \frac{1}{4}. \quad (52)$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1). Пусть сначала $Q \in \mathcal{A}$, т.е. $Q = A_e^{k,t}$ для некоторого $e \in E$ и цветов k и t , которые, вообще говоря, могут и совпадать. Из равенств (19) и (21) следует, что событие $A_e^{k,t}$ лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in e\}$. Поэтому оно не зависит от всех событий $A_f^{l,j}$, если $f \cap e = \emptyset$, от всех событий $B_{g,f}^{l,j}$ при условии $g \cap e = \emptyset$ и $f \cap e = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus e\}$. Таким образом, в качестве $S(A_e^{k,t})$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из событий $A_f^{l,j}$, $f \cap e \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий $B_{g,f}^{l,j}$ с условием либо $f \cap e \neq \emptyset$, либо $g \cap e \neq \emptyset$. Из равенств (20), (22) и оценки (30)

получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{Q \in S(A_e^{k,t})} P(Q) &\leq \sum_{j=1}^r \sum_{f: |f \cap e| \geq 1} P(A_f^{j,j}) + \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{f: |f \cap e| \geq 1} P(A_f^{l,j}) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{f: |f \cap e| \geq 1} \sum_{g: |f \cap g| \geq 1} (P(B_{f,g}^{l,j}) + P(B_{g,f}^{l,j})) \\
 &\leq rd \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n + r(r-1)d \left(\frac{r-2+p}{r} \right)^n \\
 &\quad + 2r(r-1)d^2rp(1+p)^n \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} \\
 &\leq 2 \frac{\sqrt{12}-3}{8} + 2 \left(\frac{\sqrt{12}-3}{8} \right)^2 \frac{4}{3} = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство в цепочке выполняется в силу равенства (11) для величины d , равенства

$$\exp\{pn\} = \left(\frac{n}{[(r-1) \ln n]} \right)^{1/3}$$

и соотношения

$$(r-1) \left(\frac{r-2+p}{r-1} \right)^n \leq e^{-pn},$$

которое доказывается точно так же, как и (37), если взять ε равным выражению (40), соответствующему нашему выбору параметра p (т.е. будет выполнено равенство (36)). Отметим, что условия, в рамках которых обосновывалось неравенство (37), также будут выполнены. Несложно проверить, что из требования $r \leq n/(8 \ln n)$ следуют необходимые соотношения

$$r-1 \leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1-\varepsilon}, \quad \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\varepsilon} \geq 2.$$

Таким образом, в случае, когда $Q = A_e^{k,t}$, мы доказали выполнение условия 2) из (52). Условие 1) также, очевидно, будет выполнено для любого $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Случай 2). Остается разобрать случай, когда $Q \in \mathcal{B}$, т.е. $Q = B_{e,f}^{k,t}$. Из определения события $B_{e,f}^{k,t}$ (см. (24)) следует, что оно лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in e \cup f\}$. Отсюда получаем, что данное событие не зависит от всех событий $A_g^{l,j}$, если $g \cap (e \cup f) = \emptyset$, от всех событий $B_{g,h}^{l,j}$ при условии $(g \cup h) \cap (e \cap f) = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus (e \cup f)\}$. Таким образом, в качестве $S(B_{e,f}^{k,t})$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из событий $A_g^{l,j}$, $g \cap (e \cup f) \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий $B_{g,h}^{l,j}$ с условием $(g \cup h) \cap (e \cup f) \neq \emptyset$.

Из равенств (20), (22) и оценки (30) получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{Q \in S(B_{e,f}^{k,t})} P(Q) &\leq \sum_{j=1}^r \sum_{g: |g \cap e| \geq 1} P(A_g^{j,j}) + \sum_{j=1}^r \sum_{g: |g \cap f| \geq 1} P(A_g^{j,j}) \\
 &+ \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{g: |g \cap e| \geq 1} P(A_g^{l,j}) + \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{g: |g \cap f| \geq 1} P(A_g^{l,j}) \\
 &+ \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{g: |g \cap e| \geq 1} \sum_{h: |h \cap g| \geq 1} (P(B_{g,h}^{l,j}) + P(B_{h,g}^{l,j})) \\
 &+ \sum_{j=1}^r \sum_{l: l \neq j} \sum_{g: |g \cap f| \geq 1} \sum_{h: |h \cap g| \geq 1} (P(B_{g,h}^{l,j}) + P(B_{h,g}^{l,j})) \\
 &\leq 2rd \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n + 2r(r-1)d \left(\frac{r-2+p}{r} \right)^n \\
 &\quad + 4r(r-1)d^2rp(1+p)^n \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-r} \\
 &\leq 4 \frac{\sqrt{12}-3}{8} + 4 \left(\frac{\sqrt{12}-3}{8} \right)^2 \frac{4}{3} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Неравенство 2) из (52) доказано и во втором случае.

Итак, для системы событий $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ выполнено условие (51) “локальной леммы”. Из нее следует, что с положительной вероятностью не случится ни одно из этих событий, поэтому для H существует полноцветная r -раскраска. Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] A. Kostochka, “On a theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs”, *Electron. J. Combin.*, **9**:1 (2002).
- [2] A. Kostochka, “Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey”, *More sets, graphs and numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 175–197.
- [3] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and finite sets* (Keszthely, 1973), North Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.
- [4] P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **15**:3–4 (1964), 445–447.
- [5] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
- [6] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On one combinatorial problem of Erdős”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 359–362.
- [7] Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Extremal problems for colourings of uniform hypergraphs”, *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1253–1290.

- [8] A. V. Kostochka, D. R. Woodall, “Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs”, *Combinatorica*, **21**:4 (2001), 515–541.
- [9] В. Г. Визинг, “Раскраска вершин графа в предписанные цвета”, *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов*, **29**, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 3–10.
- [10] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, “Choosability in graphs”, *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics* (Humboldt State Univ., Arcata, CA, 1979), Congress. Numer., **26**, Utilitas Math., Winnipeg, MA, 1980, 125–157.
- [11] N. Alon, “Choice numbers of graphs: a probabilistic approach”, *Combin. Probab. Comput.*, **1**:2 (1992), 107–114.
- [12] П. Эрдеш, Дж. Спенсер, *Вероятностные методы в комбинаторике*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: P. Erdős, J. Spencer, *Probabilistic methods in combinatorics*, Academic Press, New York–London, 1974.
- [13] Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, *Задачи и упражнения по дискретной математике*, Физматлит, М., 2004.
- [14] А. М. Райгородский, “Системы общих представителей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:3 (1999), 851–860.
- [15] Н. Н. Кузюрин, “Асимптотическое исследование задачи о покрытии”, *Проблемы кибернетики*, **37** (1980), 19–56.
- [16] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, 3-е изд., МЦНМО, М., 2004; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [17] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [18] T. Tao, V. H. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **105**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

Д. А. Шабанов (D. A. Shabanov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gold-amber@yandex.ru

Поступила в редакцию

05.11.2008