Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, Внешне-геометрические свойства поверхности Розендорна – изометрического погружения плоскости Лобачевского в E^5 , *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 11, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:36:52

УДК 514.752.44

Ю. А. Аминов

Внешне-геометрические свойства поверхности Розендорна – изометрического погружения плоскости Лобачевского в E^5

Доказывается, что на поверхности Розендорна F^2 все модули векторов нормальной кривизны ограничены сверху равномерно на всей поверхности. Построено регулярное трехмерное подмногообразие $F^3 \subset E^5$ в виде некоторого регулярного слоя, содержащее F^2 , кривизна которого по двумерным площадкам, касательным к F^2 , строго отрицательна и отделена от нуля.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: эллипс нормальной кривизны, нормальная связность, кривизна площадок.

§ 1. Введение

1953–1955 гг. отмечены в теории поверхностей отрицательной кривизны двумя событиями.

В 1953 г. были опубликованы работы Н. В. Ефимова [1], [2], в которых доказывалась следующая теорема: *если кусок поверхности $z = z(x, y)$ имеет гауссову кривизну $K \leq -\alpha < 0$ и если его проекция однозначно покрывает круг радиуса R , то R не превышает некоторой константы Q , которая зависит только от α : $R \leq Q(\alpha)$* . Эта теорема явилась первым важным шагом на пути к доказательству Н. В. Ефимовым его знаменитого обобщения теоремы Гильберта (см. [3]).

В 1955 г. появилась гениальная работа югославского геометра Д. Блануши [4], в которой было построено изометрическое вложение плоскости Лобачевского L^2 в шестимерное евклидово пространство E^6 . Вложение плоскости Лобачевского принадлежит классу регулярности C^∞ .

В 1960 г. в журнале “Математическое просвещение” (вып. 5) были напечатаны две статьи: А. С. Солодовникова “Д. Блануша. Новая модель плоскости Лобачевского” и Н. В. Ефимова “Н. В. Ефимов, Е. Гейнц. Исследования возможности вложения поверхности отрицательной кривизны в трехмерное пространство”. В статье Н. В. Ефимова написано: “До последнего времени представлялось вероятным, что теорема Гильберта сохраняет силу для любых конечномерных евклидовых пространств, т.е. что ни при каком n в n -мерное евклидово пространство нельзя вложить даже двумерную плоскость Лобачевского”. Но в настоящее время интуитивные представления о возможных изометрических погружениях совершенно изменились, и гипотеза о возможности построения регулярного изометрического погружения любой регулярной двумерной метрики в E^4 сейчас представляется правдоподобной.

Далее Н. В. Ефимов добавляет: “В действительности же дело оказалось совсем иным. Не так давно югославским математиком Д. Бланушей было показано, что плоскость Лобачевского допускает регулярное, даже бесконечно дифференцируемое, т.е. осуществляемое с помощью бесконечно дифференцируемой векторной функции $r(u, v)$, вложение в шестимерное евклидово пространство”.

Э. Г. Позняк в обзорной статье [5] написал по этому поводу: “Несомненно, что этот результат Д. Блануши относится к числу наиболее изящных в теории погружения двумерных многообразий в евклидовы пространства”.

В 1960 г. Э. Р. Розендорн в [6], используя метод Блануши, построил изометрическое погружение L^2 (и даже больше – любой метрики поверхности вращения) в E^5 в классе регулярности C^∞ . Другое доказательство существования погружения плоскости Лобачевского L^2 в E^5 предложил М. Громов (см. [7; п. 3.2.2]).

Нами проведено изучение внешне-геометрических свойств поверхности Розендорна F^2 таких, как поведение векторов нормальной кривизны и эллипса нормальной кривизны и расположение плоскости этого эллипса. Доказана

ТЕОРЕМА. *На поверхности Розендорна модули векторов нормальной кривизны ограничены сверху равномерно на всей поверхности.*

СЛЕДСТВИЕ. *Модуль вектора средней кривизны H этой поверхности ограничен сверху.*

Для сравнения заметим, что в работе Д. В. Болотова [8] доказано следующее утверждение: *пространство Лобачевского L^n не допускает изометрического погружения в E^{n+m} при условиях: 1) $|H| \leq \text{const}$; 2) нормальная связность погружения плоская.*

Условию 1) поверхность F^2 удовлетворяет. Таким образом, нормальная связность на поверхности F^2 не плоская.

Поверхность F^2 использована нами как базовая для построения трехмерных подмногообразий отрицательной кривизны в E^5 , содержащих F^2 . Доказано следующее утверждение: *F^2 не может быть вполне геодезическим подмногообразием ни в каком регулярном $F^3 \subset E^5$.* Интересным также является вопрос о возможности построения подмногообразия $F^3 \subset E^5$ строго отрицательной кривизны (быть может, постоянной отрицательной, равной -1), содержащего все F^2 . В настоящей работе строится трехмерное подмногообразие F^3 , содержащее F^2 , в виде некоторого регулярного слоя, кривизна которого по двумерным площадкам, касательным к F^2 , строго отрицательна и отделена от нуля. Было бы также интересно исследовать вопрос о возможности включения поверхности в локально евклидову гиперповерхность F^4 .

§ 2. Свойства поверхности Розендорна

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим, как строится поверхность Розендорна. Введем следующие функции одного аргумента, где функции $\Phi(t)$, $\varphi_i(u)$

и число A были определены в работе Д. Блануши [4]:

$$\begin{aligned} f(u) &= \operatorname{ch} u, & \Phi(t) &= e^{-1/(\sin^2 \pi t)} \sin \pi t, \\ \varphi_1(u) &= \frac{1}{A} \left(\int_0^{u+1} \Phi(t) dt \right)^{1/2}, & \varphi_2(u) &= \frac{1}{A} \left(\int_0^u \Phi(t) dt \right)^{1/2}, \\ A &= \left(\int_0^1 \Phi(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что функции $\varphi_i(u)$ периодические с периодом 2, причем

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

Кроме того, введем следующие две ступенчатые функции – аналоги ступенчатых функций Блануши:

$$\psi_1(u) = \left(\left[\max_{2n-1 \leq u < 2n+1} f \right] + 1 \right) Na, \quad \psi_2(u) = \left(\left[\max_{2n-2 \leq u < 2n} f \right] + \sqrt{2} \right) Na,$$

где $N \geq 2$ – фиксированное целое число (некоторый параметр погружения) и число a такое:

$$a = [\max |\varphi'_i|] + 2.$$

Квадратные скобки здесь обозначают целую часть числа. Пусть x_i – декартовы координаты в E^5 . Поверхность Розендорна имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= f \frac{\varphi_1}{\psi_1} \cos(v\psi_1), & x_2 &= f \frac{\varphi_1}{\psi_1} \sin(v\psi_1), & x_3 &= f \frac{\varphi_2}{\psi_2} \cos(v\psi_2), \\ x_4 &= f \frac{\varphi_2}{\psi_2} \sin(v\psi_2), & x_5 &= \int_0^u \sqrt{1 - \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{\psi_i(t)} \frac{d}{dt}(f(t)\varphi_i(t)) \right\}^2} dt, \end{aligned}$$

где $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

Как отмечает Э. Р. Розендорн, подынтегральное выражение в формуле для x_5 имеет смысл, так как по построению ψ_i

$$\left| \frac{1}{\psi_i(u)} \frac{df(u) \varphi_i(u)}{du} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Проверим, что эта поверхность действительно дает погружение плоскости Лобачевского L^2 в E^5 . Удобно ввести следующие функции от u :

$$\alpha_i = \frac{f\varphi_i}{\psi_i}, \quad i = 1, 2, \quad \Lambda(u) = \sqrt{1 - (\alpha'_1)^2 - (\alpha'_2)^2},$$

и такие векторы единичной длины, ортогональные друг другу:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos(v\psi_1) \\ \sin(v\psi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -\sin(v\psi_1) \\ \cos(v\psi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(v\psi_2) \\ \sin(v\psi_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(v\psi_2) \\ \cos(v\psi_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что согласно указанной выше оценке Розендорна $\Lambda^2(u) \geq 1/2$. Это неравенство будет использовано в дальнейшем.

Так как функции ψ_i ступенчатые, то векторы a_i и b_i на участках постоянства обеих функций ψ_i не зависят от u . Будем рассматривать поверхность на таких участках. Имеем следующие выражения производных этих векторов:

$$a_{iu} = 0, \quad b_{iu} = 0, \quad a_{iv} = b_i \psi_i, \quad b_{iv} = -a_i \psi_i.$$

Тогда радиус-вектор $\rho = \rho(u, v)$ поверхности F^2 можно записать в виде

$$\rho(u, v) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + e_5 \int_0^u \Lambda(t) dt.$$

Для производных радиус-вектора получаем выражения

$$\rho_u = \alpha'_1 a_1 + \alpha'_2 a_2 + e_5 \Lambda, \quad \rho_v = f(b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2).$$

Следовательно, для коэффициентов метрики имеем

$$\rho_u^2 = 1, \quad (\rho_u \rho_v) = 0, \quad \rho_v^2 = f^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \text{ch}^2 u.$$

Итак, поверхность F^2 несет метрику плоскости Лобачевского $ds^2 = du^2 + \text{ch}^2 u dv^2$.

Как следует из работы Д. Блануши, на тех линиях, где функции ψ_i имеют скачки, происходит склейка кусков поверхности в поверхность класса C^∞ , так как функции $\varphi_i(u)$ обладают свойствами

$$\varphi_1(1) = \varphi_1^{(k)}(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция φ_i имеет нуль вместе со всеми своими производными точно в тех точках, где функция ψ_i совершает скачок. Поэтому координаты x_j радиус-вектора поверхности принадлежат классу регулярности C^∞ . А так как метрика регулярна, то касательные векторы ρ_u и ρ_v не коллинеарны и поверхность регулярная класса C^∞ . Поверхность расположена внутри цилиндра

$$x_1^2 + \dots + x_4^2 = f^2 \left(\frac{\varphi_1^2}{\psi_1^2} + \frac{\varphi_2^2}{\psi_2^2} \right) \leq \frac{2}{(Na)^2}.$$

Зафиксируем координату u , т.е. положим $x_5 = \text{const}$. Получим кривую в четырехмерном пространстве E^4 , лежащую на торе Клиффорда

$$x_1^2 + x_2^2 = C_1(u), \quad x_3^2 + x_4^2 = C_2(u),$$

т.е. поверхность образуется из семейства кривых, расположенных на торах Клиффорда, у которых радиусы образующих окружностей зависят от параметра u .

Э. Р. Розендорн отмечает, что на поверхности лежит счетное число линий – окружностей $u = k$ (где k – целое число), являющихся линиями самоприкосновения поверхности. В каждой точке такой линии счетное число областей поверхности, соответствующих разным значениям v , касаются друг друга, причем имеют бесконечный порядок соприкосновения.

Перейдем к рассмотрению эллипса нормальной кривизны поверхности. Для этого нужно найти вторые квадратичные формы, которые определяются вторыми производными радиус-вектора ρ и нормальными. При этом нормали выбираются так, чтобы выражения вторых квадратичных форм были наиболее простыми. Запишем выражения вторых производных радиус-вектора:

$$\begin{aligned} \rho_{uu} &= \alpha_1'' a_1 + \alpha_2'' a_2 + \Lambda' e_5, & \rho_{uv} &= (f\varphi_1)' b_1 + (f\varphi_2)' b_2, \\ \rho_{vv} &= -f\varphi_1 \psi_1 a_1 - f\varphi_2 \psi_2 a_2. \end{aligned}$$

Обозначим $\varphi_1 = \cos \theta$, $\varphi_2 = \sin \theta$.

Единичные нормали к поверхности обозначим n_1, n_2, n_3 . Нормаль n_1 запишем как линейную комбинацию a_1, a_2, e_5 ; n_2 – как линейную комбинацию b_1, b_2 ; n_3 – как комбинацию a_1, a_2 . Возможность такого выбора нормалей будет ясна ниже. Положим $\Lambda = \cos \sigma$. Тогда

$$(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 = 1 - \Lambda^2.$$

Далее обозначим

$$\alpha_1' = \sin \sigma \cos \omega, \quad \alpha_2' = \sin \sigma \sin \omega.$$

Заметим, что функция $\sin \sigma$ при $u \neq 0$ в нуль не обращается. В противном случае в той точке, где $\sin \sigma = 0$, имеем

$$\varphi_1 \operatorname{sh} u + \varphi_1' \operatorname{ch} u = 0, \quad \varphi_2 \operatorname{sh} u + \varphi_2' \operatorname{ch} u = 0.$$

Умножим первое уравнение на φ_1 , второе на φ_2 и сложим их. В результате получим $\operatorname{sh} u = 0$, т.е. $u = 0$. При $u > 0$ положим $\sin \sigma = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2}$. Так как функции α_i' нечетные, то при $u < 0$ имеем $\sin \sigma = -\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2}$. Таким образом, функция $\sin \sigma(u)$ нечетная.

Теперь базис касательной плоскости перепишем в виде

$$\rho_u = \sin \sigma (\cos \omega a_1 + \sin \omega a_2) + \cos \sigma e_5, \quad \rho_v = f (\cos \omega b_1 + \sin \omega b_2).$$

Базис нормалей можно взять в виде

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \sigma (\cos \omega a_1 + \sin \omega a_2) - \sin \sigma e_5, & n_2 &= -\sin \theta b_1 + \cos \theta b_2, \\ n_3 &= \sin \omega a_1 - \cos \omega a_2. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что эти векторы взаимно ортогональны и ортогональны к касательной плоскости поверхности. Получаем выражения коэффициентов вторых квадратичных форм

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= \sigma', & L_{12}^1 &= 0, & L_{22}^1 &= -f \cos \sigma (\psi_1 \cos \theta \cos \omega + \psi_2 \sin \theta \sin \omega), \\ L_{11}^2 &= 0, & L_{12}^2 &= f \theta', & L_{22}^2 &= 0, \\ L_{11}^3 &= -\sin \sigma \omega', & L_{12}^3 &= 0, & L_{22}^3 &= -f (\psi_1 \cos \theta \sin \omega - \psi_2 \sin \theta \cos \omega). \end{aligned}$$

Таким образом, для форм Π^1 и Π^3 направления координатных линий главные, а для формы Π^2 асимптотические. Так как $L_{12}^2 \neq 0$, то нормальная связность поверхности не плоская.

Заметим, что нормальная связность поверхности называется *плоской*, если в каждой точке поверхности существуют два главных направления, т.е. если взять эти направления за координатные, то матрицы коэффициентов всех вторых квадратичных форм и ds^2 записываются в диагональном виде.

В нашем случае главные направления двух вторых квадратичных форм уже определены, а при повороте базиса нормалей величины L_{12}^i преобразуются самостоятельно – отдельно от величин L_{jj}^i . Поэтому если бы они были равны нулю при некотором выборе базиса нормалей, то они были бы равны нулю и при любом другом выборе. Вторая квадратичная форма для нормали n_2 в выбранных координатах на поверхности имеет коэффициент $L_{12}^2 \neq 0$.

Оценим сверху модуль вектора средней кривизны $|H|$ поверхности. По определению

$$H = \frac{1}{2} L_{ij}^\alpha g^{ij} n_\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(L_{11}^1 + \frac{L_{22}^1}{f^2} \right)^2 + \left(L_{11}^3 + \frac{L_{22}^3}{f^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\sigma' - \frac{\cos \sigma}{f} (\psi_1 \cos \theta \cos \omega + \psi_2 \sin \theta \sin \omega) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\sin \sigma \omega' + \frac{1}{f} (\psi_1 \cos \theta \sin \omega - \psi_2 \sin \theta \cos \omega) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $|\sigma'|$ ограничен сверху. Имеем

$$\sigma' = \frac{\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_2 \alpha''_2}{\sin \sigma \cos \sigma}.$$

Отсюда получаем

$$\left| \frac{\alpha'_i}{\sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2}} \right| \leq 1.$$

В силу построения ψ_i получаем

$$\left| \frac{(f \varphi_i)'}{\psi_i} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Поэтому $(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 \leq 1/2$ и $1 - (\alpha'_1)^2 - (\alpha'_2)^2 \geq 1/2$. Оценим α''_i :

$$\alpha''_i = \left(\frac{f\varphi_i}{\psi_i} \right)'' = \frac{1}{\psi_i} (\varphi_i \operatorname{ch} u + 2\varphi'_i \operatorname{sh} u + \varphi''_i \operatorname{ch} u).$$

По построению $|f/\psi_i| \leq 1$. Так как функции φ_i периодические, то $\varphi_i, \varphi'_i, \varphi''_i$ ограничены по модулю. Итак, модуль $|\sigma'|$ ограничен сверху. Покажем ограниченность отношений ψ_i/f . Пусть $i = 1$. Рассмотрим отрезок постоянства функции ψ_1 : $2n - 1 \leq u < 2n + 1$. Очевидно,

$$\frac{\psi_1}{f} \leq \frac{Na([\max f] + 1)}{\min f}.$$

Здесь a такое же, как в начале § 2. На этом участке имеем

$$\frac{\max f}{\min f} = \frac{e^{2n+1} + e^{-2n-1}}{e^{2n-1} + e^{-2n+1}}.$$

При $n \rightarrow \infty$ предел этого отношения равен e^2 . При $n \rightarrow -\infty$, а также при $i = 2$ рассуждения аналогичные. Следовательно, величины ψ_i/f ограничены сверху. Оценим $\sin \sigma\omega'$. Так как $\operatorname{tg} \omega = \alpha'_2/\alpha'_1$, то

$$\sin \sigma\omega' = \alpha''_2 \frac{\alpha'_1}{\sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2}} - \alpha''_1 \frac{\alpha'_2}{\sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2}}.$$

В силу доказанной выше ограниченности модулей α''_i выражение $\sin \sigma\omega'$ тоже ограничено по модулю. Итак, модуль вектора средней кривизны H ограничен сверху. Так как имеют место формулы

$$H^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad -1 = K = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2,$$

где α, β, γ – координаты центра эллипса нормальной кривизны относительно специально выбранного базиса нормального пространства (две нормали берутся параллельными осям эллипса, а третья ортогональна его плоскости), a и b – его полуоси, то из ограниченности $|H|$ следует ограниченность длины осей эллипса нормальной кривизны. Поэтому модули всех векторов нормальной кривизны ограничены сверху на всей поверхности одним и тем же числом.

Теорема доказана.

Заметим, что одновременно мы доказали ограниченность сверху модулей величин $L_{11}^1, L_{11}^3, L_{22}^1/f^2, L_{22}^3/f^2$.

Мы проводили оценки на участках постоянства ступенчатых функций ψ_i . Но так как эти оценки одни и те же на всех таких участках, а поверхность регулярна во всех точках, то полученные оценки годятся для всей поверхности.

Выясним, как расположена плоскость эллипса нормальной кривизны. Одна ось эллипса, очевидно, направлена перпендикулярно плоскости векторов n_1, n_3 , т.е. параллельно вектору n_2 . Если в плоскости векторов n_1, n_3 ввести координаты X_1, X_3 , то проекция нормального вектора поверхности для касательного направления, составляющего угол φ с направлением u -линии, на эту плоскость имеет координаты

$$X_1 = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi, \quad X_3 = c \cos^2 \varphi + d \sin^2 \varphi,$$

где

$$a = L_{11}^1, \quad b = \frac{L_{22}^1}{f^2}, \quad c = L_{11}^3, \quad d = \frac{L_{22}^3}{f^2}.$$

Легко видеть, что конец этого вектора, отложенного от точки x , при изменении касательного направления описывает отрезок прямой. При этом расстояние от точки x до этой прямой вычисляется по формуле

$$\gamma = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a - b)^2 + (c - d)^2}}.$$

Длина оси эллипса нормальной кривизны, лежащей в плоскости векторов n_1, n_3 , равна $\sqrt{(a - b)^2 + (c - d)^2}$.

Покажем, что на поверхности существуют точки, расстояние от которых до плоскости эллипса нормальной кривизны отлично от нуля. Действительно, если для некоторой точки x имеет место $\gamma = 0$, то

$$L_{11}^1 L_{22}^3 - L_{11}^3 L_{22}^1 = 0.$$

Используя выражения коэффициентов вторых квадратичных форм, получим

$$\sigma'(\psi_1 \cos \theta \sin \omega - \psi_2 \sin \theta \cos \omega) + \sin \sigma \cos \sigma \omega'(\psi_1 \cos \theta \cos \omega + \psi_2 \sin \theta \sin \omega) = 0.$$

Произведя некоторые элементарные преобразования и сокращения, получим

$$\psi_1 \varphi_1(\alpha_2'' + \alpha_1' P) - \psi_2 \varphi_2(\alpha_1'' - \alpha_2' P) = 0,$$

где $P = \alpha_1'' \alpha_2' - \alpha_2'' \alpha_1'$. Рассмотрим точку, в которой $\varphi_1 = \varphi_2 = 1/\sqrt{2}$. Компьютерные вычисления показывают, что это значение достигается при $u = 1/2$. Возьмем в определении функций ψ_i числа $N = 2$, $a = 4$, а сами эти ступенчатые функции на отрезке $[0, 1)$ можно положить такими: $\psi_1 = 16$, $\psi_2 = 36$. При этом $\alpha_1' = -0,107$, $\alpha_2' = 0,069$, $\alpha_1'' = -0,408$, $\alpha_2'' = -0,761$. Подставив эти значения в левую часть уравнения, выражающего условие $\gamma = 0$, мы получим $\gamma \neq 0$. Противоречие.

Таким образом, плоскость эллипса нормальной кривизны при $u = 1/2$ не проходит через соответствующую точку поверхности. Это свойство (т.е. то, что плоскость эллипса нормальной кривизны не проходит через соответствующую точку поверхности) влечет невозможность включения этой поверхности ни в какое трехмерное подмногообразие $F^3 \subset E^5$ в виде вполне геодезической поверхности. Действительно, так как индикатриса кривизны F^3 в каждой точке x лежит в ее нормальной плоскости, проходящей через точку x , то если F^2 вполне геодезическая, то ее индикатриса тоже лежит в этой плоскости. Но мы показали выше, что это невозможно. Заметим также, что существуют точки, в которых плоскость эллипса нормальной кривизны проходит через эти точки.

§ 3. Трехмерная надстройка над поверхностью Розендорна

Построим трехмерное линейчатое подмногообразие F^3 в E^5 с поверхностью Розендорна F^2 в качестве базовой. Радиус-вектор F^3 обозначим $r = r(u^1, u^2, u^3)$.

Пусть $\xi = \xi(u^1, u^2) = \cos \tau n_1 + \sin \tau n_3$ – единичное нормальное векторное поле на F^2 . Положим

$$r(u^1, u^2, u^3) = \rho(u^1, u^2) + u^3 \xi(u^1, u^2).$$

Найдем метрику F^3 . Имеем

$$r_{u^i} = \rho_{u^i} + u^3 \xi_{u^i}, \quad i = 1, 2, \quad r_{u^3} = \xi.$$

Коэффициенты метрики F^2 обозначим g_{ij} , а коэффициенты метрики F^3 соответственно a_{ij} . При $i, j = 1, 2$ имеем

$$a_{ij} = (\rho_{u^i} + u^3 \xi_{u^i}, \rho_{u^j} + u^3 \xi_{u^j}) = g_{ij} + u^3 ((\xi_{u^i} \rho_{u^j}) + (\xi_{u^j} \rho_{u^i})) + (u^3)^2 (\xi_{u^i} \xi_{u^j}).$$

Далее, при $i = 1, 2$ находим

$$a_{i3} = (r_{u^i} r_{u^3}) = (\rho_{u^i} + u^3 \xi_{u^i}, \xi) = 0, \quad a_{33} = 1.$$

В дальнейшем удобно использовать коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{a_{ii}}$.

Рассмотрим коэффициент при u^3 в выражении для a_{ij} . Он равен

$$-2(\xi, \rho_{u^i u^j}) = -2(\cos \tau \cdot L_{ij}^1 + \sin \tau \cdot L_{ij}^3).$$

Если $i \neq j$, то $L_{ij}^1 = L_{ij}^3 = 0$. Следовательно, коэффициент при u^3 в выражении для a_{12} равен нулю. Рассмотрим скалярное произведение (ξ_{u^1}, ξ_{u^2}) – коэффициент при $(u^3)^2$. В дальнейшем будем предполагать, что функция τ зависит только от u^1 . Покажем, что $a_{12} = 0$.

Так как ξ есть линейная комбинация полей n_1 и n_3 , которые в свою очередь являются комбинациями a_1, a_2 и e_5 , то можно записать

$$\xi = A^1 a_1 + A^2 a_2 + A^5 e_5.$$

В выражениях n_1 и n_3 через a_1, a_2, e_5 коэффициенты зависят только от u^1 , а так как τ тоже зависит только от u^1 , то и коэффициенты A^i зависят только от u^1 . Имеем

$$\xi_{u^1} = A_{u^1}^1 a_1 + A_{u^1}^2 a_2 + A_{u^1}^5 e_5, \quad \xi_{u^2} = A^1 b_1 \psi_1 + A^2 b_2 \psi_2.$$

Следовательно,

$$(\xi_{u^1}, \xi_{u^2}) = 0.$$

Поэтому $a_{12} = 0$. Метрика подмногообразия F^3 записывается в виде суммы квадратов:

$$ds^2 = a_{11}(du^1)^2 + a_{22}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

где

$$a_{11} = 1 - 2L_{11}(\xi)u^3 + (\xi_{u^1})^2(u^3)^2, \quad a_{22} = \operatorname{ch}^2 u^1 - 2L_{22}(\xi)u^3 + (\xi_{u^2})^2(u^3)^2, \\ a_{33} = 1.$$

Здесь $L_{ii}(\xi) = \cos \tau \cdot L_{ii}^1 + \sin \tau \cdot L_{ii}^3$ – коэффициенты второй квадратичной формы F^2 по отношению к нормали ξ . Все коэффициенты при u^3 и $(u^3)^2$ зависят

только от u^1 . Это обстоятельство, а также простой вид метрики значительно облегчают дальнейшее рассмотрение. Так как выше доказана ограниченность модулей L_{ii}^α , L_{22}^α/f^2 , где $\alpha = 1, 3$, то $L_{11}(\xi)$ и $L_{22}(\xi)/f^2$ тоже ограничены по модулю. Отсюда вытекает, что найдется достаточно малое $\epsilon > 0$ такое, что в полосе $|u^3| < \epsilon$ коэффициенты a_{ii} больше нуля. Следовательно, в этой полосе подмногообразие F^3 будет регулярным, если функция τ регулярна.

В дальнейшем будем предполагать, что вектор ξ направлен перпендикулярно плоскости эллипса нормальной кривизны. Тогда нетрудно показать, что $L_{11}(\xi) = L_{22}(\xi)/f^2$. Векторное поле ξ определено во всех тех точках, в которых ось эллипса нормальной кривизны, лежащая в плоскости векторов n_1, n_3 , не вырождается в точку. Напомним, что в определении функций ψ_i фигурирует число N . Имеет место следующая

ЛЕММА. *При достаточно большом N ось эллипса нормальной кривизны, лежащая в плоскости векторов n_1, n_3 , не вырождается в точку.*

Доказательство этой леммы приведем в конце статьи.

Теперь найдем матрицу кривизны метрики подмногообразия F^3 (которую обозначим Q) в точках поверхности F^2 , т.е. при $u^3 = 0$

$$Q = \begin{pmatrix} R_{2323} & R_{1323} & R_{1232} \\ * & R_{1313} & R_{1213} \\ * & * & R_{1212} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления компонент тензора Римана воспользуемся формулами из [9; § 37].

Поскольку $a_{33} = 1$, то $R_{1323} = 0$. Так как все коэффициенты метрики не зависят от u^2 , то $R_{1213} = 0$. Оставшийся внедиагональный элемент R_{1232} , вообще говоря, не равен нулю. Перейдем к его вычислению. Имеем

$$R_{1232} = -H_2 \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial u^1 \partial u^3} - \frac{\partial H_2}{\partial u^1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial u^3} \right).$$

С помощью этой формулы находим

$$\begin{aligned} 2H_1^2 H_2^2 R_{1232} &= - \left[H_1^2 H_2^2 \frac{\partial^2 H_2^2}{\partial u^1 \partial u^3} - \frac{1}{2} H_1^2 \frac{\partial H_2^2}{\partial u^1} \frac{\partial H_2^2}{\partial u^3} - \frac{1}{2} H_2^2 \frac{\partial H_2^2}{\partial u^1} \frac{\partial H_1^2}{\partial u^3} \right] \\ &= -2 \left[-f^2 (L_{22}(\xi))' + f f' L_{22}(\xi) + f^3 f' L_{11}(\xi) \right], \\ R_{1232} &= -H_2^2 \left[- \left(\frac{L_{22}(\xi)}{f^2} \right)' + \left(L_{11}(\xi) - \frac{L_{22}(\xi)}{f^2} \right) (\ln f)' \right] = H_2^2 \gamma'. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство $L_{11}(\xi) = L_{22}(\xi)/f^2 = \gamma$, где γ – расстояние от точки поверхности F^2 до плоскости эллипса нормальной кривизны.

Рассмотрим диагональные элементы матрицы Q . Имеем

$$R_{1212} = -H_1 H_2 \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u^1} + \frac{\partial H_1}{\partial u^3} \frac{\partial H_2}{\partial u^3} \right] = -\operatorname{ch} u^1 \left[\operatorname{ch} u^1 + \frac{L_{11}(\xi) L_{22}(\xi)}{\operatorname{ch} u^1} \right].$$

Следовательно, кривизна K_{12} площадки, касательной к координатным линиям u^1, u^2 , есть

$$K_{12} = \frac{R_{1212}}{H_1^2 H_2^2} = -1 - (\gamma)^2 \leq -1.$$

Теперь получим

$$R_{1313} = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial^2 u^3} = -(\xi_{u^1})^2 + (L_{11}(\xi))^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство имеет место, так как $L_{11}(\xi) = -(\xi_{u^1}, \rho_{u^1})$. Следовательно, $K_{13} \leq 0$. Аналогично получим

$$K_{23} = \frac{R_{2323}}{H_2^2} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial^2 u^3} = -\frac{1}{H_2^2} \left[(\xi_{u^2})^2 - \left(\frac{L_{22}(\xi)}{H_2} \right)^2 \right].$$

В силу неравенства $(\xi_{u^2})^2 \geq (\xi_{u^2}, \rho_{u^2}/H_2)^2$ кривизна соответствующей площадки $K_{23} \leq 0$.

Итак, кривизны K_{12} , K_{13} , K_{23} построенного трехмерного подмногообразия F^3 всех диагональных площадок неположительны, а площадок, касательных к F^2 , не больше -1 .

Запишем в ортонормированных координатах в фиксированной точке матрицу кривизны F^3 (обозначим ее $\overline{Q}$):

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} -(\xi_{s^2})^2 + \gamma^2 & 0 & \gamma_{s^1} \\ 0 & -(\xi_{s^1})^2 + \gamma^2 & 0 \\ \gamma_{s^1} & 0 & -1 - \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь ξ – единичное векторное поле на F^2 , в каждой точке $x \in F^2$ ортогональное плоскости эллипса нормальной кривизны этой точки, γ – расстояние от точки x до плоскости этого эллипса, ∂s^i – дифференцирование по длине дуги в направлении u^i -линии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Легко показать, что длина оси эллипса нормальной кривизны, лежащей в плоскости векторов n_1, n_3 , равна

$$\sqrt{\left(L_{11}^1 - \frac{L_{22}^1}{f^2} \right)^2 + \left(L_{11}^3 - \frac{L_{22}^3}{f^2} \right)^2}.$$

Преобразуем первое слагаемое под знаком корня:

$$\begin{aligned} L_{11}^1 - \frac{L_{22}^1}{f^2} &= \sigma' + \frac{\cos \sigma}{f} (\psi_1 \cos \theta \cos \omega + \psi_2 \sin \theta \sin \omega) \\ &= \sigma' + \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} (f\varphi_1(f\varphi_1)' + f\varphi_2(f\varphi_2)') \\ &= \frac{\alpha_1' \alpha_1'' + \alpha_2' \alpha_2''}{\sin \sigma \cos \sigma} + \frac{\cos \sigma \operatorname{sh} u}{\sin \sigma \operatorname{ch} u} = \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} \left(\ln \frac{\operatorname{ch} u}{\cos \sigma} \right)'. \end{aligned}$$

Как мы отмечали выше, функция $\sin \sigma$ при $u \neq 0$ в нуль не обращается. Из выписанного выражения следует, что функция $L_{11}^1 - L_{22}^1/f^2$ четная.

Покажем, что при достаточно большом числе N функция $y(u) = (\operatorname{ch} u / \cos \sigma)^2$ монотонно возрастает на полупрямой $(0, \infty)$. Для этого рассмотрим производную этой функции. После сокращения на $2f$ получаем выражение для числителя получаемой дроби

$$f' \left[1 - \sum_{i=1}^2 \left(\left(\frac{f\varphi_i}{\psi_i} \right)' \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^2 f \frac{(f'\varphi_i + f\varphi_i')(f(\varphi_i + \varphi_i'') + 2f'\varphi_i')}{\psi_i^2}.$$

Выражение в квадратных скобках при f' больше $1/2$. Обозначим его через $A(u)$. Все выражение преобразуем к виду

$$f' \left[A(u) + \sum_{i=1}^2 \frac{f^2(\varphi_i^2 + 2(\varphi_i')^2 + \varphi_i \varphi_i'') + 2f f' \varphi_i \varphi_i'}{\psi_i^2} \right] + \sum_{i=1}^2 f \frac{f^2}{(\psi_i)^2} \varphi_i' (\varphi_i + \varphi_i').$$

Так как функции φ_i и их производные ограничены, то коэффициент в квадратных скобках при f' за счет выбора числа N может быть сделан больше определенного положительного числа, а коэффициент при f в последнем слагаемом – достаточно малым так, чтобы все выражение было положительно при $u > u_0$, где u_0 – некоторое положительное число. В то же время это выражение будет положительно и при $u < u_0$ за счет того, что φ_i' убывает к нулю значительно быстрее, чем $f' = \operatorname{sh} u$. При $u \rightarrow 0$ предел выражения $L_{11}^1 - L_{22}^1/f^2$ положителен и равен $1/\psi_1(0) + \psi_1(0)$.

Итак, эта функция в нуль не обращается и, следовательно, ось эллипса нормальной кривизны, лежащая в плоскости векторов n_1, n_3 , не вырождается в точку.

Лемма доказана.

Список литературы

- [1] Н. В. Ефимов, “Исследование полной поверхности отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **93**:3 (1953), 393–395.
- [2] Н. В. Ефимов, “Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **93**:4 (1953), 609–611.
- [3] Н. В. Ефимов, “Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны”, *Матем. сб.*, **64(106)**:2 (1964), 286–320.
- [4] D. Blauša, “Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume”, *Monatsh. Math.*, **59**:3 (1955), 217–229.
- [5] Э. Г. Позняк, “Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства”, *УМН*, **28**:4 (1973), 47–76; англ. пер.: E. G. Poznyak, “Isometric immersions of two-dimensional riemannian metrics in Euclidean space”, *Russian Math. Surveys*, **28**:4 (1973), 47–77.
- [6] Э. Р. Розендорн, “Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве”, *Докл. АН АрмССР*, **30**:4 (1960), 197–199.
- [7] М. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: M. Gromov, *Partial differential relations*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **9**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [8] Д. В. Болотов, “Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m} ”, *Матем. заметки*, **82**:1 (2007), 11–13; англ. пер.: D. V. Bolotov, “On isometric immersions with flat normal connection of the hyperbolic space L^n into Euclidean space E^{n+m} ”, *Math. Notes*, **82**:1–2 (2007), 10–12.
- [9] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ГИИЛ, М., 1948; пер. с англ.: L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1926.

Ю. А. Аминов (Yu. A. Aminov)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию

05.11.2008 и 02.07.2009