Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сатаев, Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 3, 107–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 08:06:45

УДК 517.938

Е. А. Сатаев

Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов

Работа продолжает предыдущую статью автора, в которой для сингулярно гиперболического аттрактора были построены строго неустойчивые пространства. В настоящей работе доказывается существование локальных строго неустойчивых многообразий и инвариантных мер типа Синая–Боуэна–Рюэлля. Исследуются свойства таких мер. Доказывается конечность количества эргодических компонент, плотность множества периодических траекторий.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: сингулярные гиперболические системы, неустойчивые многообразия, инвариантные меры, эргодичность.

§ 1. Введение

Определение сингулярно гиперболического потока было дано в [1]. Похожее определение было дано Д. В. Тураевым и Л. П. Шильниковым в работе [2] (см. также [3]). Ниже мы приведем определение сингулярно гиперболического потока в терминах инвариантного семейства конусов; это определение следует работе [1].

Настоящая работа посвящена построению инвариантного семейства строго неустойчивых многообразий на достаточно представительном множестве, существованию инвариантных мер типа Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-мер) для сингулярно гиперболических потоков и разложению на эргодические компоненты. Доказывается плотность множества периодических траекторий на эргодической компоненте.

В настоящей работе используются обозначения и терминология, введенные в предыдущей работе (см. [4]). По необходимости они повторяются в настоящей работе.

1.1. Определение сингулярно гиперболического аттрактора. В настоящей работе рассматривается локальный поток Φ_t , определенный на открытом множестве U n -мерного ориентируемого риманова многообразия M , порожденный гладким (класса C^2) векторным полем $X(x)$. Возможно, что M – многообразие с краем.

Касательное пространство в точке $x \in M$ обозначается через $T_x M$. Дифференциал отображения Φ_t обозначается через $d\Phi_t$. Длина вектора $v \in T_x M$ обозначается через $|v|$, угол между векторами $u, v \in T_x M$ обозначается через

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3038.2008.01).

$\angle(u, v)$, расстояние между точками $x, y \in M$ обозначается через $\rho(x, y)$. Риманову метрику мы считаем заданной. Через $\text{clos } A$ обозначается замыкание множества A .

Множество U предполагается инвариантным, т.е. если $t > 0$, то $\Phi_t(x)$ определено для всех точек $x \in U$, и множество $\text{clos } \Phi_t(U)$ – компактное множество, принадлежащее U и не содержащее точек края. Следовательно, локальный поток Φ_t является полупотоком. Предполагается, что рассматриваемый поток является сингулярно гиперболическим (определение сингулярно гиперболического потока см. в определении 1.1).

Аттрактором называется множество

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U).$$

Конусом в евклидовом пространстве T с осевым пространством $E \subset T$ называется множество $\mathcal{K} \subset T$, состоящее из ненулевых векторов v таких, что $\angle(v, E) < \alpha$.

Размерностью конуса $\mathcal{K}$ называется размерность пространства E . Величина α называется *углом* раствора конуса.

Мы предполагаем, что на U определено семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss} \subset T_x M$ (эти конусы называются *строго устойчивыми*) размерности $n - 2$; семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ непрерывно зависит от x и инвариантно при движении назад (инвариантность при движении назад означает, что если $t < 0$, $\Phi_t(x)$ определено, то $d\Phi_t(\mathcal{K}_x^{ss}) \subset \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$).

Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, что для любой точки $x \in U$, любого $t > 0$ и любого вектора $v \in \mathcal{K}_x^{ss}$ такого, что $d\Phi_t(v) \in \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$, справедливо неравенство

$$|d\Phi_t(v)| < c_1 e^{-\gamma_1 t} |v|.$$

Множество векторов $u \in T_x M$, не принадлежащих конусу $\mathcal{K}_x^{ss}$, является двумерным конусом, который называется *центрально-неустойчивым* и обозначается через $\mathcal{K}_x^c$. Семейство конусов $\mathcal{K}_x^c$ инвариантно при движении вперед.

В следующем определении через $S(v_1, v_2)$ обозначается площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1, v_2 \in T_x M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Поток Φ_t , порожденный векторным полем $X(x)$ на множестве $U \in M$, называется *сингулярно гиперболическим*, если на U имеется инвариантное семейство строго устойчивых конусов и кроме того:

- 1) существуют такие константы $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $T_0 > 0$, что для любой точки $x \in U$, любого $t > T_0$, любого вектора v такого, что $d\Phi_t(v) \in \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$, и любого $u \in \mathcal{K}_x^c$ имеет место неравенство

$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} > c_2 e^{\gamma_2 t} \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|};$$

- 2) все неподвижные точки гиперболичны;
- 3) существуют такие константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, что для любого $t > 0$, любой точки $x \in U$ и любых $v_1, v_2 \in \mathcal{K}_x^c$ таких, что пространство, порожденное векторами v_1, v_2 , принадлежит $\mathcal{K}_x^c$, справедливо неравенство

$$S(d\Phi_t(v_1), d\Phi_t(v_2)) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(v_1, v_2), \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Комментарии по поводу этого определения и соотношения с другими определениями см. в работе [4].

1.2. Инвариантные семейства пространств и многообразий.

Строго устойчивые пространства и многообразия. Из существования системы конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ следует существование семейства $(n-2)$ -мерных подпространств $E_x^{ss} = \bigcap_{t>0} d\Phi_{-t}(\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss})$, определенных на множестве U , и семейства двумерных подпространств $E_x^c = \bigcap_{t>0} d\Phi_t(\mathcal{K}_{\Phi_{-t}(x)}^c)$, определенных на Λ . Пространство E_x^{ss} называется *строго устойчивым пространством*, пространство E_x^c называется *центрально-неустойчивым пространством*.

Семейство пространств E_x^{ss} порождает семейство многообразий $W^{ss}(x)$, которые называются *строго устойчивыми многообразиями*. Многообразие $W^{ss}(x)$ является гладким (класса C^2) многообразием, которое в каждой точке $y \in W^{ss}(x)$ касается пространства E_y^{ss} (точнее, пространство E_y^{ss} является касательным пространством к многообразию $W^{ss}(x)$ в точке $y \in W^{ss}(x)$). В общем случае гладкого частично гиперболического потока класс гладкости многообразия $W^{ss}(x)$ такой же, как и класс гладкости векторного поля, задающего поток.

Для систем Аносова существование строго устойчивых многообразий доказано Д. В. Аносовым (см. [5]); теория инвариантных многообразий изложена в [6].

Многообразия $W^{ss}(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^{ss}(x)$, то

$$\rho(x(t), y(t)) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow +\infty.$$

Различают локальные и глобальные многообразия. *Локальное строго устойчивое многообразие* $W_\varepsilon^{ss}(x)$ – это часть строго устойчивого многообразия, являющаяся шаром радиуса ε относительно внутренней метрики многообразия $W^{ss}(x)$. *Глобальным строго устойчивым многообразием* называется множество

$$W_{gl}^{ss}(x) = \bigcup_{t>0} d\Phi_{-t}(W_\varepsilon^{ss}(\Phi_t(x))).$$

Под многообразием $W^{ss}(x)$ мы понимаем локальное многообразие неопределенного размера, обычно такого, какой нужен.

Ориентируемость. В каждом пространстве E_x^{ss} можно выбрать одну из двух ориентаций. Семейство пространств называется *ориентируемым*, если можно выбрать ориентацию, непрерывно зависящую от точки $x \in U$.

Если семейство пространств E_x^{ss} неориентируемо, то существует двуслойное накрытие множества U , на котором семейство пространств E_x^{ss} является ориентируемым.

Следует отметить, что это накрытие не обязательно продолжается до накрытия всего многообразия M .

Мы предполагаем, что семейство пространств E_x^{ss} ориентируемо. Если оно оказалось неориентируемым, то мы перейдем к двуслойному накрытию множества U . Нетрудно показать, что для двуслойного накрытия все свойства сохраняются.

Устойчивые пространства и многообразия. Обозначим через E_x^0 одномерное подпространство пространства $T_x M$, порожденное вектором $X(x)$.

Устойчивым пространством называется пространство $E_y^s = E_y^{ss} \oplus E_y^0$. Устойчивое многообразие $W^s(x)$ – это многообразие, которое в каждой точке y касается пространства E_y^s . Многообразия $W^s(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^s(x)$, то существует такое $\tau \in \mathbb{R}$, что

$$\rho(x(t), y(t + \tau)) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow +\infty.$$

Многообразие $W^s(x)$ является объединением строго устойчивых многообразий, проходящих через точки траектории $x(t)$. Это почти то же самое, что и объединение траекторий, проходящих через многообразие $W^{ss}(x)$.

Неподвижные точки. Нетрудно видеть, что любая неподвижная точка $Q \in U$ принадлежит аттрактору.

Неподвижные точки могут быть одного из двух типов. Первый тип, назовем его *типом* (L) , характеризуется тем, что собственные числа линеаризованного потока в окрестности неподвижной точки таковы, что имеются два собственных числа $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, а остальная часть собственных значений лежит в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. Для неподвижной точки Q типа (L) пространство E_Q^{ss} совпадает с подпространством пространства $T_Q M$, порожденным такими собственными векторами, что соответствующие собственные числа лежат в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$; пространство E_Q^c порождено собственными векторами, соответствующими собственным числам λ_1, λ_2 .

Второй тип неподвижных точек назовем *типом* (F) . Как обосновывалось в [4], неподвижные точки типа (F) могут быть исключены из рассмотрения вместе с некоторой окрестностью и входящими в нее траекториями.

Множества $M(b; \delta)$. Далее раз и навсегда фиксируются константа δ , $2\delta < \gamma_3$ (γ_3 участвует в определении сингулярно гиперболического потока), и окрестности V_j неподвижных точек Q_j . От константы δ и окрестностей V_j зависят константы, участвующие в оценках.

В работе [4] для каждого $b \in (0, b_0)$ (b_0 – достаточно малое положительное число) определено множество $M(b; \delta)$; определение множеств $M(b; \delta)$ приведено ниже (формулы (2.14), (2.15)).

Для формулировки теоремы мы вместо множеств $M(b; \delta)$ рассмотрим множества

$$\widehat{M}(b; \delta) = \left\{ x \notin \bigcup_j V_j : \rho(x(t), \operatorname{Fix}) \geq b e^{\delta t}, t < 0 \right\}, \quad (1.2)$$

где $x(t)$ – траектория точки $x \in \Lambda$, Fix – множество неподвижных точек. Соотношения между множествами $M(b; \delta)$ и $\widehat{M}(b; \delta)$ можно выразить в следующем утверждении, которое оставим без доказательства.

Существует такая константа $C > 0$, что для любого $b \in (0, b_0)$ справедливы включения

$$\widehat{M}\left(\frac{b}{C}; \delta\right) \subset M(b; \delta) \subset \widehat{M}(Cb; \delta).$$

Строго неустойчивые пространства. В работе [4] доказано существование семейства строго неустойчивых пространств E_x^{uu} . Пространства E_x^{uu} определены для точек $x \in M(b; \delta)$, непрерывно зависят от точки x на каждом множестве $M(b; \delta)$ и для каждого $b \in (0, b_0)$ существует такая константа $c(b)$, что если $v \in E_x^{uu}$, $t < 0$, то

$$|d\Phi_t(v)| < c(b)e^{-|t|(\gamma_3 - 2\delta)}.$$

Строго неустойчивые многообразия. Строго неустойчивым многообразием точки $x \in \Lambda$ называется многообразие $W^{uu}(x)$, состоящее из таких точек $y \in \Lambda$, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Существует такая константа $\varepsilon_1 > 0$, что для каждой точки $x \in \widehat{M}(b, \delta)$ определена кривая $W^{uu}(x)$, называемая строго неустойчивым многообразием; при этом справедливы свойства:

- 1) $W^{uu}(x) \subset \widehat{M}(\varepsilon_1 b; \delta)$;
- 2) касательная к кривой $W^{uu}(x)$ в каждой точке $y \in W^{uu}(x)$ совпадает с пространством E_y^{uu} ;
- 3) семейство многообразий $W^{uu}(x)$ непрерывно зависит от x в C^1 -топологии на каждом множестве $\widehat{M}(b, \delta)$;
- 4) если $y \in W^{uu}(x)$, то $\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0$.

Особенность сингулярно гиперболических потоков состоит в том, что угол между вектором $X(x)$ и пространством E_x^{uu} может быть сколь угодно малым. Кроме того, нет непрерывной зависимости пространства E_x^{uu} и многообразия $W^{uu}(x)$ от точки x ; однако многообразие $W^{uu}(x)$ непрерывно зависит от точки x на каждом множестве $M(b; \delta)$.

Теорема о возвратности. Теорема о возвратности имеет то же самое значение для доказательства существования инвариантных SBR-мер, что и свойство возвратности цепи Маркова с бесконечным числом состояний для доказательства существования финального распределения. Это является причиной такого выбора названия теоремы.

Обозначим через μ_I , где I – кривая, такую меру на кривой I , что для любой кривой $I_1 \subset I$ справедливо $\mu_I(I_1) = l(I_1)/l(I)$, где через l обозначена длина.

ТЕОРЕМА 1.3 (теорема о возвратности). Существуют константы $N_1 > 0$, $\varkappa > 0$ со следующими свойствами.

Для любых $b_1, b_2 > 0$ существуют такие $T_0 > 0$, $\tau > 0$, что для любого $T_1 > T_0$ и для каждого многообразия $W = W^{uu}(x)$, $x \in \widehat{M}(b_2, \delta)$, найдется множество $\Delta \subset W$, состоящее из непересекающихся отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ таких, что:

- 1) $\mu_W(\Delta) > (1 - N_0 b_1^\varkappa)$;
- 2) для каждого отрезка Δ_j существует такое $T \in [T_1, T_1 + \tau]$, что $\Phi_T(\Delta_j) \subset \widehat{M}(b_1; \delta; T)$;
- 3) $\Phi_T(\Delta_j)$ является строго неустойчивым многообразием.

Следствия из теоремы о возвратности. При формулировке следствия мы изменим множества $\widehat{M}(b; \delta)$, добавив к ним те точки, принадлежащие окрестностям неподвижных точек, положительные полутраектории которых, выходя из окрестностей, попадают в множество $\widehat{M}(b; \delta)$. Это изменение касается только формулировки следствия и определения SBR-мер. Новые множества обозначим через $\widetilde{M}(b; \delta)$.

Пусть W – строго неустойчивое многообразие некоторой точки $x \in M(b; \delta)$. Определим меру $\widehat{\mu}_W$, которая сосредоточена на кривой W ; мера всякой кривой $I_1 \subset W$ определяется как $\widehat{\mu}_W(I_1) = l(I_1)/l(I)$. Согласно теореме о возвратности для любого $b_1 > 0$ найдется такое $T > 0$, что если $t > T$, то существует множество $\Delta \subset W$ такое, что

$$\Phi_t(\Delta) \subset \widetilde{M}(b_1; \delta; T), \quad l(\Delta) > (1 - N_1 b_1^\varepsilon) l(I).$$

Из этого соотношения следует, что для всякой предельной меры μ семейства

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_\tau(\widehat{\mu}_W) d\tau$$

верно неравенство

$$\mu(\widetilde{M}(b_1; \delta; T)) \geq (1 - N_1 b_1^\varepsilon). \quad (1.3)$$

Действительно, если t достаточно велико, то для любого фиксированного $b_1 > 0$

$$\mu_t(\widetilde{M}(b_1; \delta; T)) \geq 1 - N_1 b_1^\varepsilon.$$

Следовательно, то же самое равенство верно и для предельной меры семейства μ_t (так как для любого замкнутого множества G и любой последовательности мер μ_n , сходящейся к мере μ , справедливо неравенство $\mu(G) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G)$). Так как множества $\widetilde{M}(b_1; \delta; T)$ вложены друг в друга, то для любой меры справедливо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu(\widetilde{M}(b_1; \delta; T)) = \mu(\widetilde{M}(b_1; \delta)).$$

Из неравенства (1.3) следует, что для любой предельной меры семейства μ_t справедливо неравенство

$$\mu(\widetilde{M}(b_1; \delta)) \geq (1 - N_1 b_1^\varepsilon).$$

Поэтому множества $\widetilde{M}(b_1; \delta)$ (соответственно множества $M(b_1; \delta)$) для достаточно малых $b_1 > 0$ являются непустыми. Следовательно, множество тех точек, для которых существуют строго неустойчивые многообразия $W^{uu}(x)$, непусто.

1.3. Инвариантные меры типа Синая–Боуэна–Рюэлля. Меры Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-меры) впервые были построены Я. Г. Синаем для диффеоморфизмов Аносова (см. работы [7], [8]). Позднее Р. Боуэн и Д. Рюэбль (R. Bowen, D. Ruelle) распространили их построение на А-системы, введенные С. Смейлом (S. Smale). Еще позднее построение модифицировалось другими авторами для широкого класса систем, удовлетворяющих различного рода ослаблениям условий гиперболичности.

SBR-меры для диффеоморфизмов. Опишем сложившуюся точку зрения на то, что такое инвариантная SBR-мера для гиперболического аттрактора диффеоморфизма Φ .

Пусть Φ – диффеоморфизм, у которого существует гиперболический аттрактор Λ . Тогда для каждой точки $x \in \Lambda$ существуют многообразия $W^s(x)$ (устойчивые многообразия) и $W^u(x)$ (неустойчивые многообразия). Для точки $x \in \Lambda$ рассмотрим множество $A_\varepsilon(x)$, которое строится следующим образом.

Пусть $W_\varepsilon^s(x)$ – ε -окрестность точки x в многообразии $W^s(x)$, а $W_\varepsilon^u(y)$ – ε -окрестность точки y в многообразии $W^u(y)$. Множество $A_\varepsilon(x)$ является объединением множеств $W_\varepsilon^u(y)$ по всем точкам $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda$. На $W_\varepsilon^u(y)$ имеется мера, порожденная римановым объемом; эта мера называется *мерой Лебега*.

Пусть μ – борелевская мера на Λ , $x \in \Lambda$ – такая точка, что $\mu(A_\varepsilon(x)) > 0$. Тогда разбиение множества A_ε на многообразия $W_\varepsilon^u(y)$, $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda$, является измеримым. Согласно теории измеримых разбиений на почти каждом множестве $W_\varepsilon^u(y)$ существует условная мера, которую обозначим через μ_y .

Говорят, что мера μ на Λ обладает свойством *условной абсолютной непрерывности* на многообразиях $W_\varepsilon^u(y)$, если для каждого множества $A_\varepsilon(x)$ положительной меры и почти каждого многообразия $W_\varepsilon^u(y)$, $y \in W_\varepsilon^s(x)$, определенная выше условная мера μ_y абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $W_\varepsilon^u(y)$.

Мера μ называется *SBR-мерой*, если она инвариантна и обладает свойством условной абсолютной непрерывности на многообразиях $W_\varepsilon^u(y)$.

SBR-мера на аттракторе интересна, потому что она является “физической”. Это означает следующее.

Пусть ν – мера Лебега на некоторой окрестности U аттрактора Λ . Предполагается, что U – такая окрестность, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^k(U) = \Lambda$. Мера μ называется “физической”, если предел последовательности мер

$$\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(\nu)$$

в $*$ -слабой топологии существует и равен μ .

Если существует “физическая” инвариантная эргодическая мера μ , то существует множество $A \subset U$ полной меры (полнота меры в данном случае означает, что дополнение к множеству A в U имеет нулевую меру Лебега) такое, что для всякой точки $x \in A$ и всякой непрерывной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\Phi^k(x)) = \int_{\Lambda} f(x) d\mu(x).$$

SBR-мера для потоков. “Физическая” мера для потоков – это предел при $T \rightarrow +\infty$ семейства

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(\nu) dt.$$

Если мера μ “физическая” (для потока Φ_t), то существует множество $A \subset U$ полной меры такое, что для любой непрерывной функции $f(x)$ и любой точки $x \in A$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(x)) dt = \int_{\Lambda} f(x) d\mu(x).$$

Обычный способ построения SBR-меры для потоков состоит в следующем.

Сначала доказывается существование глобального сечения, состоящего из конечного числа поверхностей, на котором отображение последования Φ является гиперболическим в каком-либо смысле. Поэтому существует инвариантная SBR-мера для отображения последования.

Поток Φ_t является специальным потоком над отображением Φ (употребляется также термин “надстройка”). Имеется стандартный способ построения инвариантной меры для специального потока по инвариантной мере для отображения. Согласно такому построению по инвариантной мере для отображения последования строится инвариантная мера для потока.

В настоящей работе мы отступаем от традиции строить SBR-меру для потока через отображение последования. Мы строим инвариантную SBR-меру сразу для потока.

Определение SBR-меры для гиперболического потока по существу остается таким же, как и для гиперболического диффеоморфизма. Для полноты приведем это определение применительно к сингулярно гиперболическому потоку.

Определим множества $A_{\varepsilon, b}$ следующим образом.

Пусть $W_\varepsilon^s(x)$ – ε -окрестность точки x в устойчивом многообразии точки x (обратим внимание на то, что для потока (в отличие от диффеоморфизма) понятия устойчивого и строго устойчивого многообразия существенно различаются; напомним, что устойчивое многообразие является объединением траекторий, проходящих через точки строго устойчивого многообразия). Для точек $y \in M(b; \delta) \cap W_\varepsilon^s(x)$ существует строго неустойчивое многообразие $W^{uu}(y)$. Обозначим через $A_{\varepsilon, b}$ объединение множеств $W^{uu}(y)$ по всем $y \in M(b; \delta) \cap W_\varepsilon^s(x)$. Из непрерывной зависимости многообразий $W^{uu}(y)$ от точки y на множестве $M(b; \delta)$ следует, что разбиение множества $A_{\varepsilon, b}$ на элементы $W^{uu}(y)$ измеримо (по отношению к любой борелевской мере). Следовательно, для сужения любой борелевской меры μ на множество $A_{\varepsilon, b}$ на почти каждом многообразии $W = W^{uu}(y)$ определена условная мера μ_W .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Мера μ , инвариантная относительно потока Φ_t , называется SBR-мерой, если выполнены следующие условия:

- 1) $\lim_{b \rightarrow 0} \mu(\widetilde{M}(b; \delta)) = 1$;
- 2) для всякого множества $A_{\varepsilon, b}$ положительной меры условная мера на почти каждом многообразии $W^{uu}(y) \subset A_{\varepsilon, b}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $W^{uu}(y)$.

Основная теорема. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.5. *Существует конечное число компактных инвариантных множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ (эти множества называются эргодическими компонентами), которые являются подмножествами аттрактора Λ , и инвариантных мер $\mu_1, \dots, \mu_k$, сосредоточенных на множествах Λ_j , таких, что:*

- 1) мера μ_j на Λ_j является SBR-мерой;
- 2) поток Φ_t на каждом множестве Λ_j с мерой μ_j эргодичен;
- 3) траектория почти любой точки $x \in U$ притягивается к одному из множеств Λ_j ;
- 4) если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j – гиперболический аттрактор;

- 5) если два множества Λ_i, Λ_j имеют общую точку, то каждое из них содержит неподвижную точку;
- 6) всякая инвариантная SBR-мера имеет вид $\mu = p_1\mu_1 + \dots + p_k\mu_k$ с некоторыми коэффициентами $p_1, \dots, p_k, p_j \geq 0, p_1 + \dots + p_k = 1$;
- 7) если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на U , то семейство мер

$$\nu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t \nu \, dt$$

сходится к мере $p_1\mu_1 + \dots + p_k\mu_k$ с некоторыми коэффициентами $p_1, \dots, p_k, p_j \geq 0, p_1 + \dots + p_k = 1$;

- 8) периодические точки всюду плотны в каждом множестве Λ_j .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В качестве дополнения к последней теореме отметим, что энтропия потока Φ_t на множестве Λ_j с мерой μ_j определяется формулой

$$h(\mu_j) = \int_{\Lambda_j} \theta(x) \, d\mu_j(x).$$

Построение SBR-меры. SBR-мера строится следующим способом.

Пусть I – некоторая кривая, трансверсальная устойчивым многообразиям, $\hat{\mu}_I$ – мера, сосредоточенная на кривой I и совпадающая на I с мерой Лебега.

Рассмотрим семейство мер

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(\hat{\mu}_I) \, dt.$$

Из теоремы о возвратности следует, что для предельной меры μ семейства μ_T и для любого (достаточно малого) $b > 0$ справедливо неравенство

$$\mu(\widetilde{M}(b; \delta)) > 1 - N_0 b^{\varkappa}.$$

Ниже будет доказано, что предельная мера обладает свойством условной абсолютной непрерывности. Для этого доказывалось, что предельная мера имеет условные плотности на многообразиях $W^{uu}(x)$, определяющиеся плотностью относительно определенных выше мер $\hat{\mu}_W$, где $W = W^{uu}(x)$. Формула для плотности выражает плотность через определенную в работе [4] функцию $\theta(x)$.

1.4. Близкие результаты. Следует упомянуть о значительном количестве работ, в которых изучалась геометрическая модель системы Лоренца (см. [9], [10]). Эта модель до сих пор является весьма популярной. Она изучалась в работах [11]–[16].

Существование инвариантных мер для этой модели при предположении достаточной гладкости слоения доказывалось в различных работах. В некоторых работах предположение о достаточной гладкости не формулировалось, а предполагалось как бы само собой разумеющимся.

Существование инвариантных мер для модели аттрактора Лоренца без предположения гладкости слоения, но при различных дополнительных предположениях доказывалось в работах [17]–[19]. Перешивание для аттрактора Лоренца доказано в [20]. В [21] доказана центральная предельная теорема для потока типа Лоренца.

Во всех цитированных работах существование инвариантных мер доказывалось по схеме, в которой используется отображение последования на некоторой гиперплоскости.

Сингулярно гиперболические потоки изучались в работах [22]–[32].

Результаты, наиболее близкие к результатам настоящей работы, получены в работе [22]. В этой работе доказано существование инвариантных SBR-мер для произвольного сингулярно гиперболического топологически транзитивного аттрактора. Поэтому укажем на отличия работы [22] от настоящей работы.

1. В работе [22] существенно использовалось то, что многообразие имеет размерность три. В настоящей работе рассматривается многомерный случай.
2. В работе [22] существование инвариантных мер доказывалось по схеме, использующей отображение последования на некоторой гиперплоскости. Для этого сначала строится специальное сечение, состоящее из конечного числа непересекающихся двумерных поверхностей (именно в этом месте использовалась трехмерность многообразия и топологическая транзитивность потока). Отображение последования, определенное на этом сечении, является равномерно гиперболическим отображением с особенностями, похожим на рассмотренные в [18], [19]. Дополнительным свойством этого отображения является наличие инвариантного гладкого устойчивого слоения. Благодаря наличию устойчивого слоения доказательство существования SBR-мер упрощается, так как сводится к известным результатам для одномерных отображений.

После построения инвариантной меры для отображения последования с помощью стандартной процедуры строится инвариантная мера для потока.

В настоящей работе мы отступаем от традиции и строим инвариантные меры сразу для потока.

3. В работе [22] рассматривается случай топологически транзитивного аттрактора. Это уменьшает общность результата, так как в области могут существовать, например, два инвариантных множества (их уместно называть *полуаттракторами*), которые в сумме составляют один аттрактор и имеют общую сепаратрису неподвижной точки.

Схема доказательства существования инвариантных SBR-мер, изложенная в настоящей работе, принята по той причине, что есть надежда распространить ее на неавтономные возмущения. Например, можно рассмотреть следующую задачу.

Пусть векторное поле $X(x)$ определяет сингулярно гиперболический поток, $h(x, t)$ – периодическая по t функция. Имеется ли инвариантная относительно уравнения $\dot{x} = X(x) + \varepsilon h(x, t)$ мера? Если да, то будет ли она близка к мере, инвариантной относительно потока, порожденного векторным полем $X(x)$?

Первым шагом для решения этих задач является построение инвариантной меры, не связанной с сечением, так как при неавтономном возмущении отображение последования разрушается.

1.5. Структура работы. В § 2 вводятся необходимые сведения из работы [4]. В § 3 доказывается существование строго неустойчивых многообразий. В § 4 доказывается теорема о возвратности. В § 5 доказывается теорема 1.5.

В § 6 обсуждаются дополнительные свойства; анонсируются свойства перемешивания, бернуллиевости и непрерывной зависимости инвариантных мер от потока.

§ 2. Предварительные конструкции

2.1. Дифференциальные формы. Напомним некоторые минимальные сведения из теории дифференциальных форм, которые в дальнейшем будем использовать.

Пусть T – конечномерное векторное пространство. 1-форма p , определенная на T , – это линейный функционал, определенный на T . Значение формы p на векторе v мы будем обозначать через $\langle p; v \rangle$.

Множество 1-форм, определенных на пространстве T , образует линейное пространство, обозначаемое через T^* ; пространство T^* называется *пространством, сопряженным* (или *двойственным*) *пространству* T .

Если в пространстве T определен базис, а в пространстве T^* определен двойственный базис, то вектор v записывается как вектор-столбец, а 1-форма p – как вектор-строка:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in T, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in T^*.$$

m -форма φ – это m -линейный кососимметрический функционал от переменных $v_1, \dots, v_m \in T$. Значение m -формы φ на векторах v_1, v_2 обозначается через $\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle$.

В настоящей работе используются только 1-формы и 2-формы.

Пространство m -форм обозначается через $\Lambda^m T_x^* M$. Дифференциальная m -форма – это функция $\varphi(x)$, определенная на множестве U , со значениями в пространстве m -форм. Если в любой гладкой локальной системе координат координаты формы являются гладкими функциями, то форма называется *гладкой*. Если координаты формы непрерывны, то форма называется *непрерывной*.

Каждая дифференциальная 1-форма определяет интеграл по гладкой кривой. А именно, пусть I – гладкая кривая, лежащая в области определения дифференциальной 1-формы p и параметризованная параметром τ (т.е. $I = \{h(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$). Обозначим через $h'(\tau)$ вектор $dh/d\tau$. *Интегралом от формы p по кривой I* называется интеграл

$$\int_I p = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle p(h(\tau)); h'(\tau) \rangle d\tau.$$

Этот интеграл не меняется при замене параметризации, не меняющей ориентацию кривой; если же при замене параметра ориентация кривой меняется на противоположную, то интеграл меняет знак.

Каждая дифференциальная 2-форма определяет интеграл по гладкой поверхности. А именно, если Π – гладкая поверхность, лежащая в области определения дифференциальной 2-формы φ и параметризованная параметрами s, τ (т.е. $\Pi = \{h(s, \tau); (s, \tau) \in G \subset \mathbb{R}^2\}$), то

$$\int_{\Pi} \varphi = \int_G \left\langle \varphi(h(s, \tau)); \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial \tau} \right\rangle ds d\tau.$$

Этот интеграл не меняется при замене параметризации, не меняющей ориентацию поверхности; если же при замене параметра ориентация поверхности меняется на противоположную, то интеграл меняет знак.

Векторные поля и формы, возникающие в настоящей работе, являются всего лишь непрерывными, но дифференцируемыми вдоль траекторий.

Уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях. Введение локальной системы координат позволяет отождествить все пространства $T_x M$ (точка x принадлежит рассматриваемой окрестности) с пространством $\mathbb{R}^n$. В локальной системе координат 1-форма p записывается как вектор-строка. Векторное поле $X(x)$ записывается как вектор-столбец с координатами $(X_1(x), \dots, X_n(x))^T$. Обозначим через $D(x)$ матрицу с элементами

$$d_{ij} = \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\}.$$

Матрица $D(x)$ действует на векторы обычным образом – как умножение матрицы на вектор-столбец. Она же действует на 1-формы как умножение вектор-строки $q = (q_1, \dots, q_n)$ на матрицу. Поэтому действие матрицы $D(x)$ на форму $q(x)$ мы записываем как $qD(x)$, так как это согласовывается с обычным произведением матриц.

Хорошо известно, что в локальных координатах вектор $v(t) = d\Phi_t(v)$ является решением уравнения в вариациях

$$\dot{v}(t) = D(x(t))v(t).$$

Действие дифференциала на m -форму $\varphi \in \wedge^m T_x^* M$ обозначается через $d_{*m}\Phi_t(\varphi)$; это действие определяется так, что для любых векторов $v_1, \dots, v_m \in T_x M$ и любого t , для которого $\Phi_t(x)$ определено, имеет место равенство

$$\langle d_{*m}\Phi_t(\varphi); d\Phi_t(v_1), \dots, d\Phi_t(v_m) \rangle = \langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Действие d_{*1} мы будем обозначать через d_* . Хорошо известно, что в локальных координатах форма $q(t) = d_*\Phi_t(q)$ (которая представляется как вектор-строка) является решением уравнения

$$\dot{q}(t) = -q(t)D(x(t));$$

это уравнение называется *сопряженным уравнением в вариациях* (см., например, [33]).

ЛЕММА 2.1. Пусть $v(t), q(t)$ – решения уравнения в вариациях и сопряженного уравнения в вариациях вдоль одной и той же траектории $x(t)$. Тогда $\langle q(t), v(t) \rangle = \text{const}$.

Из леммы следует, что определение сопряженного уравнения в вариациях согласовано с определением действия $d_*\Phi_t$.

Уравнение в вариациях для 2-форм. Обозначим через D_2 оператор, который действует на 2-формы следующим образом.

Пусть φ – разложимая 2-форма, представленная в виде $\varphi = p_1 \wedge p_2$, где p_1, p_2 – 1-формы. Тогда положим

$$\varphi D_2 = p_1 D \wedge p_2 + p_1 \wedge p_2 D.$$

Действие оператора D_2 на неразложимые 2-формы определяется по линейности.

Уравнение в вариациях для 2-форм имеет вид

$$\dot{\varphi} = -\varphi D_2. \quad (2.1)$$

Форма $\omega(x)$. Пусть Ω – форма объема, т.е. такая n -форма, что величина $\langle \Omega; v_1, \dots, v_n \rangle$ равна объему параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n \in T_x M$. Как говорилось выше, многообразие M предполагается ориентируемым и ориентация фиксирована; эта ориентация определяет знак величины $\langle \Omega; v_1, \dots, v_n \rangle$. Семейство пространств E_x^{ss} тоже предполагалось ориентированным. Зафиксируем какую-либо ориентацию пространств E_x^{ss} .

Через ω обозначим 2-форму, значение которой на векторах $v_1, v_2 \in T_x M$ определяется равенством

$$\langle \omega; v_1, v_2 \rangle = \langle \Omega; v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle, \quad (2.2)$$

где векторы $v_3, \dots, v_n$ образуют базис в E_x^{ss} , выбранный так, что векторы $v_3, \dots, v_n$ порождают параллелепипед единичного объема и выбранную ориентацию пространства E_x^{ss} .

В [4] показано, что существует такая функция $\theta(x)$, что

$$\dot{\omega}(x) = -\omega(x)D_2(x) + \theta(x)\omega(x). \quad (2.3)$$

Так как семейство пространств E_x^{ss} гёльдерово, то и форма ω и функция $\theta(x)$ гёльдеровы.

Форма $\omega(x)$ дает способ измерения площади параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 такими, что двумерное пространство, порожденное векторами v_1, v_2 , принадлежит конусу $\mathcal{K}_x^c$. Нетрудно показать, что существуют такие константы C_1, C_2 , что для таких векторов v_1, v_2 справедливы неравенства

$$C_1 |\langle \omega; v_1, v_2 \rangle| < S(v_1, v_2) < C_2 |\langle \omega; v_1, v_2 \rangle|,$$

где через $S(v_1, v_2)$ обозначена площадь, определяемая римановой метрикой.

Форма $r(x)$. Обозначим через $r(x)$ 1-форму, которая для каждого $v \in T_x M$ определяется равенством

$$\langle r(x); v \rangle = \langle \omega(x); X(x), v \rangle.$$

В [4] показано, что $r(x) \neq 0$ для всех точек, кроме неподвижных точек и их строго устойчивых многообразий.

Форма $r(x)$ порождает семейство одномерных пространств $E_x^{u*} \subset T_x^* M$, ортогональных вектору $X(x)$ и пространству E_x^{ss} . Пространства E_x^{u*} определены для всех точек, кроме тех, в которых $X(x) \in E_x^{ss}$. Из инвариантности семейства пространств E_x^{ss} и семейства пространств E_x^0 , порожденных вектором $X(x)$, следует, что семейство пространств E_x^{u*} , порожденных формой r , инвариантно.

Нетрудно показать, что форма $r(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{r}(x) = -r(x)D(x) + \theta(x)r(x) \quad (2.4)$$

с той же самой функцией $\theta(x)$, что определена с формой ω уравнением (2.3).

Отметим, что форма $r(x)$ гёльдерова и дифференцируема вдоль траекторий.

Форма r имеет смысл масштаба, в котором измеряется в данной точке расстояние до устойчивого многообразия близкой точки. Функция $\theta(x)$ имеет смысл скорости убегания близкой траектории от устойчивого многообразия точки x , если расстояние измерять в масштабе, определяемом формой r .

Адаптированные координаты. Через E_x^{c*} обозначается подпространство пространства T_x^*M , состоящее из 1-форм, ортогональных пространству E_x^{ss} . Очевидно, что размерность пространства E_x^{c*} равна 2.

В [4] показано, что существует такая 1-форма $p_0(x)$, что:

- 1) $p_0(x)$ непрерывна и дифференцируема вдоль траекторий;
- 2) $p_0(x) \in E_x^{c*}$;
- 3) $\langle p_0(x); X(x) \rangle = 1$;
- 4) $\omega = p_0 \wedge r$;
- 5) форма $p_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{p}_0(x) + p_0(x)D(x) = \sigma(x)r(x), \quad (2.5)$$

где $\sigma(x)$ – некоторая функция, которая вне окрестностей неподвижных точек ограничена.

Адаптированными координатами вектора $v \in T_x M$ назовем величины

$$\xi_r(v) = \langle r(x); v \rangle, \quad \xi_0(v) = \langle p_0(x); v \rangle. \quad (2.6)$$

Для вектора $v \in \mathcal{K}_x^c$ определяется новая норма

$$\|v\| = \sqrt{\xi_0^2(v) + \xi_r^2(v)},$$

которую мы будем называть *адаптированной нормой*. Старую норму (порожденную римановой метрикой) мы будем называть *римановой нормой*.

ЛЕММА 2.2. Пусть $v(t)$ – решение уравнения в вариациях вдоль некоторой траектории $x(t)$, а $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ – соответствующие адаптированные координаты вектора $v(t)$. Тогда $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ являются решениями системы уравнений

$$\dot{\xi}_0 = \sigma(x(t))\xi_r(t), \quad \dot{\xi}_r = \theta(x(t))\xi_r(t). \quad (2.7)$$

2.2. Частичная линеаризация. Пусть Q – неподвижная точка типа (L) . Согласно определению у матрицы $D(Q)$ имеются собственные числа λ_1 , λ_2 кратности 1 такие, что

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3 > 0, \quad (2.8)$$

а остальная часть собственных чисел матрицы $D(Q)$ лежит в области, определяемой неравенствами $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_1$, $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. Здесь величины γ_1 , γ_3 участвуют в определении сингулярной гиперболичности (см. определение 1.1).

ТЕОРЕМА 2.3 (теорема о частичной линеаризации). Пусть Q – неподвижная точка типа (L) сингулярно гиперболического потока, порожденного уравнением $\dot{x} = X(x)$.

Тогда существует окрестность $\tilde{V}$ точки Q , в которой определены функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, гладкая поверхность Σ , состоящая из отрезков траекторий, и 1-формы p_1 , p_2 такие, что:

- 1) касательная плоскость к поверхности Σ лежит в конусе $\mathcal{K}_x^c$;
- 2) $y_1(x), y_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы вдоль траекторий;
- 3) $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$;
- 4) уравнение $y_1(x) = 0$ определяет устойчивое многообразие $W^s(Q)$ точки Q ;
- 5) уравнение $y_2(x) = 0$ определяет объединение строго устойчивых многообразий точек $x \in W^u(Q)$;
- 6) уравнения $y_1(x) = c_1, y_2(x) = c_2$ определяют строго устойчивое многообразие $W^{ss}(z)$ некоторой точки $z \in \Sigma$;
- 7) $p_1(x), p_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы вдоль траекторий;
- 8) $p_1(x), p_2(x)$ ортогональны пространствам E_x^{ss} ;
- 9) $\dot{p}_1 = -p_1 D(x) + \lambda_1 p_1, \dot{p}_2 = -p_2 D(x) + \lambda_2 p_2$;
- 10) $y_1(x) = \langle p_1(x); X(x) \rangle, y_2(x) = \langle p_2(x); X(x) \rangle$;
- 11) сужение функций y_1, y_2 на поверхность Σ имеет непрерывный дифференциал, причем на Σ выполнены равенства $dy_1 = \lambda_1 p_1, dy_2 = \lambda_2 p_2$.

Для нас главным является не столько существование координат y_1, y_2 , сколько существование форм p_1, p_2 , которые определяют систему координат в каждой плоскости пространства $T_x M$, трансверсальной пространству E_x^{ss} . Координаты y_1, y_2 через формы p_1, p_2 легко выражаются формулами из п. 10).

Адаптированные координаты в окрестности неподвижных точек. Пусть $Q_1, \dots, Q_m$ – все неподвижные точки. Выше для каждой точки Q_j была построена окрестность, которую мы будем обозначать через $\tilde{V}_j$. В этой окрестности построена система координат (y_1, y_2) (индекс, соответствующий номеру окрестности у координат и других величин, связанных с этой окрестностью, мы опускаем). Предполагается, что окрестность $\tilde{V}_j$ определяется неравенствами $|y_1| < 2, |y_2| < 2$. Этого всегда можно добиться, так как определенные выше формы p_1, p_2 и функции y_1, y_2 можно умножить на некоторое число, а окрестность $\tilde{V}_j$ можно сузить. Внутри окрестности $\tilde{V}_j$ определим окрестность V_j неравенствами $|y_1| \leq 3/2, |y_2| \leq 3/2$. Определим окрестность $\bar{V}_j$ неравенствами $|y_1| \leq 1, |y_2| \leq 1$, а множество $\tilde{V}_0$ – соотношением

$$\tilde{V}_0 = U \setminus \bigcup_{j=1}^m V_j.$$

Множества $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_m$ образуют открытое покрытие множества U .

Изменим форму ω , умножив ее на такую функцию $b(x)$, что $b(x)$ непрерывна, дифференцируема вдоль траекторий, $b(x) = 1$ вне окрестностей $\tilde{V}_j$, а в окрестности V_j функция $b(x)$ такова, что новая форма ω имеет вид $\omega = Lp_1 \wedge p_2$, где L – некоторая константа (своя для каждой окрестности V_j).

Новую форму обозначим также через ω . Недоразумений не возникнет, так как старая форма ω далее использоваться не будет. Новой форме ω соответствует новая функция $\theta(x)$, которая гомологична старой.

Далее мы изменим константу c_3 в определении сингулярной гиперболичности. Старая константа c_3 далее использоваться не будет. Новая константа c_3 определяется так, что для всякого $T > 0$ справедливо неравенство

$$\exp\left(\int_0^T \theta(x(t)) dt\right) > c_3 e^{\gamma_3 T}. \quad (2.9)$$

После переопределения формы ω форма $r(x)$ в окрестности V_j определяется соотношением

$$r(x) = -Ly_2p_1(x) + Ly_1p_2(x), \quad (2.10)$$

где L – константа, своя для каждой окрестности V_j (та же самая, что и в новом определении формы ω).

Соответственно, функция $\theta(x)$ в окрестности V_j имеет вид

$$\theta(x) = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.11)$$

В окрестности $\tilde{V}_j$ форма $p_0(x)$ определяется равенством

$$p_0(x) = \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} p_1 + \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} p_2. \quad (2.12)$$

Функция $\sigma(x)$, определенная формулой (2.5), вне окрестностей V_j ограничена, а в окрестности V_j определяется равенством

$$\sigma(x) = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)y_1y_2}{L(y_1^2 + y_2^2)^2}. \quad (2.13)$$

2.3. Строго неустойчивые пространства.

Поверхность $\mathcal{N}$. Для каждой окрестности V_j неподвижной точки Q_j построим поверхность $\mathcal{N}^{(j)}$, определяемую уравнением $|y_1| = |y_2|$, где y_1, y_2 – построенные при линеаризации потока в окрестности V_j функции. Поверхности $\mathcal{N}^{(j)}$ определены только в окрестности V_j . Через $\mathcal{N}$ обозначим поверхность $\mathcal{N} = \bigcup_j \mathcal{N}^{(j)}$.

Множества $M(b; \delta)$. Далее через δ обозначается положительная константа, $\delta < \gamma_3/2$.

Пусть $b > 0$, $T > 0$ (предполагается, что b – достаточно малое число, а T – достаточно большое число). Предположим, что траектория $\{x(t); t \in (-T, 0]\}$ пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в моменты $t_1, \dots, t_m$, где $0 > t_1 > t_2 > \dots > t_m$ в точках $x_k = x(t_k)$, причем имеется такое $\tau_m > -T$, что $\{x(t); t \in (-T, \tau_m)\}$ не принадлежит объединению окрестностей V_j . Обозначим через $d_1, \dots, d_m$ величины $d_k = |y_1(x_k)|$ (по определению поверхности $\mathcal{N}$ также справедливо $|y_2(x_k)| = d_k$).

Рассмотрим множества

$$M(b; \delta; T) = \{x \in \Lambda \cap V_0 : d_i \geq be^{\delta t_i} \text{ для всех } i \in \{1, \dots, m\}\}, \quad (2.14)$$

$$M(b; \delta) = \bigcap_{T>0} M(b; \delta; T) = \{x \in \Lambda \cap V_0 : d_i \geq be^{\delta t_i} \text{ для всех } t_i\}, \quad (2.15)$$

$$M(0; \delta) = \bigcup_{b>0} M(b; \delta). \quad (2.16)$$

Очевидно, что если $x \in M(b; \delta)$, то полутраектория $\{x(t); t \in (-\infty, 0)\}$ определена, принадлежит U и пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в моменты $\dots < t_m < \dots < t_1 < 0$ (возможно, что количество моментов пересечения конечно или они вообще отсутствуют). Из существования $\{x(t) : t \in (-\infty, 0)\}$ следует, что $M(b; \delta) \subset \Lambda$.

Отметим следующие очевидные включения:

- 1) если $T_1 > T_2$, то $M(b; \delta; T_1) \subset M(b; \delta; T_2)$;
- 2) если $b_1 < b_2$, то $M(b_2; \delta; T) \subset M(b_1; \delta; T)$, $M(b_2; \delta) \subset M(b_1; \delta)$;
- 3) $\Phi_{-t}(M(b; \delta)) \cap V_0 \subset M(be^{-\delta t}; \delta)$, $t > 0$.

Множества $M(b; \delta)$, $M(b; \delta; T)$ замкнуты, но не инвариантны. Множество $M(0; \delta)$ инвариантно, но не замкнуто. Инвариантность множества $M(0; \delta)$ следует из указанных выше включений.

Функция $\eta(x)$. Определим функцию $\eta(x)$ для некоторых точек $x \in \Lambda$ следующим образом. Пусть $\{x(t) : t \in (-\infty, 0]\}$ – отрицательная полутраектория, $x(0) = x$. Положим

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^0 \sigma(x(t)) \exp\left(-\int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt. \quad (2.17)$$

Функция $\eta(x)$ определена, если интеграл в правой части сходится.

Построение строго неустойчивых подпространств. Определим пространство E_x^{uu} как множество таких векторов $v \in E_x^c$, что адаптированные координаты $\xi_0(v)$ и $\xi_r(v)$ вектора v удовлетворяют равенству $\xi_0(v) = \eta(x)\xi_r(v)$.

Очевидно, что пространство E_x^{uu} определено только для тех точек, для которых определена функция $\eta(x)$, а это как раз те точки, для которых интеграл в правой части (2.17) сходится.

Из следующей леммы выводится, что если $x \in M(b; \delta)$, то пространство E_x^{uu} существует.

ЛЕММА 2.4. *Существуют такие константы $b_0 > 0$, $B > 0$, что если $b < b_0$, $x \in M(b; \delta)$, то:*

- 1) *интеграл в правой части (2.17) сходится;*
- 2) *сходимость равномерная на каждом множестве $M(b; \delta)$;*
- 3) *справедливо неравенство $|\eta(x)| < B/b^2$.*

ЛЕММА 2.5. *Для каждой точки $x \in M(b; \delta)$, каждого вектора $v \in E_x^{uu}$ и любого $t < 0$ справедливо неравенство*

$$\|d\Phi_t(v)\| < \frac{B}{c_3 b^2} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t|}.$$

2.4. Абсолютная непрерывность строго устойчивого слоения. Для построения строго неустойчивых многообразий и доказательства некоторых свойств инвариантной меры нам потребуется свойство абсолютной непрерывности семейства строго устойчивых многообразий.

Определение абсолютной непрерывности. Общее свойство абсолютной непрерывности слоения на многообразия $W^{ss}(x)$ формулируется следующим образом.

Пусть Π_1, Π_2 – две гладкие двумерные поверхности (площадки), трансверсальные многообразиям $W^{ss}(x)$. Мы будем предполагать, что рассмотрение производится в некоторой достаточно малой окрестности точки, так что они рассматриваются локально. Определим отображение $\pi: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ так, что точки $x, \pi(x)$ принадлежат одному многообразию $W^{ss}(x)$; это отображение называется *отображением голономии* или *отображением последования* вдоль строго устойчивых многообразий. Из трансверсальности следует, что Π_2 и $W^{ss}(x)$

пересекаются в единственной точке. Поэтому отображение π определено однозначно.

Отображение π определено на самом деле не на всей поверхности Π_1 , а только на некотором открытом множестве.

На поверхностях Π_1, Π_2 определена мера Лебега (обозначим ее через μ_{Π_1}, μ_{Π_2}); эта мера определяется так, что для всякой двумерной области $G \subset \Pi_j$ величина $\mu_{\Pi_j}(G)$ равна двумерной площади множества G .

Слоение на многообразия $W^{ss}(x)$ называется *абсолютно непрерывным*, если π переводит меру μ_{Π_1} в меру, абсолютно непрерывную относительно меры μ_{Π_2} .

Далее вместо меры Лебега мы будем использовать эквивалентную ей меру, порожденную формой ω (определение формы ω приведено выше), т.е. такую меру, что мера подмножества $G \subset \Pi_j$ определяется равенством $\mu_{\Pi_j}(G) = \int_G \omega$. Обозначать эту меру мы будем также через μ_{Π} . Недоразумений не возникнет, так как мера Лебега далее использоваться не будет.

Обозначим через μ_{π} образ меры μ_{Π_1} под действием отображения π .

Напомним, что абсолютная непрерывность меры μ_1 относительно меры μ_2 означает, что всякое множество меры 0 относительно μ_2 является множеством меры 0 относительно меры μ_1 . Согласно теореме Радона–Никодима если мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры μ_2 , то существует функция $h(x)$ (которая называется *плотностью меры μ_1 относительно меры μ_2* или *производной Радона–Никодима*) такая, что для всякого измеримого множества G

$$\mu_1(G) = \int_G h(x) d\mu_2(x).$$

Мера $\mu_{\pi} = \pi(\mu_{\Pi_1})$ определяется так, что для всякого множества $G \subset \Pi_1$ справедливо равенство $\mu_{\pi}(\pi(G)) = \mu_{\Pi_1}(G)$. Поэтому абсолютная непрерывность меры μ_{π} относительно меры μ_{Π_2} означает, что существует такая функция $J(y)$ (называемая *обобщенным якобианом отображения π* ; мы будем называть ее якобианом), что для всякого множества $G \subset \Pi_1$ справедливо равенство

$$\int_G \omega = \mu_{\Pi_1}(G) = \mu_{\pi}(\pi(G)) = \int_{\pi(G)} J(y) \omega.$$

Формула для якобиана. Вообще говоря, якобиан $J(y)$ зависит от площадок Π_1, Π_2 и от точки y (точка x по точке y определяется однозначно). Мы покажем, что если слоение на многообразия $W^{ss}(x)$ гладкое, а меру на площадках Π_1, Π_2 определять с помощью формы ω , то якобиан определяется формулой

$$J_2(x, y) = \exp\left(\int_0^\infty (\theta(y(t)) - \theta(x(t))) dt\right), \quad y \in W^{ss}(x). \quad (2.18)$$

В случае негладкого слоения формула остается верной, но доказывать ее для негладкого слоения мы не будем.

Аналоги формулы (2.18) в литературе известны. В основном это выражения якобиана отображения голономии через якобиан ограничения динамической системы на пространство E_x^c . По-видимому, первая формула подобного вида приведена в [5]. В явном виде эта формула для диффеоморфизма приведена, например, в [34] (см. там формулу (7.3)).

Из формулы (2.18) следует, что якобиан не зависит от площадок Π_1, Π_2 , а зависит только от точек x, y , лежащих на одном строго устойчивом многообразии.

Перейдем к доказательству формулы (2.18).

Параметризуем плоскость Π_1 параметрами (τ, s) так, что поверхность Π_1 определяется функцией $x = \psi(\tau, s)$, где (τ, s) принадлежат некоторой области $H \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим через $v_1(\tau, s)$ и $v_2(\tau, s)$ векторы $\partial\psi/\partial\tau$ и $\partial\psi/\partial s$ соответственно. Поверхность Π_2 параметризована теми же параметрами (τ, s) и определяется уравнением $x = \pi(\psi(\tau, s))$.

Так как слоение гладкое, то и отображение π гладкое, и потому определено отображение $d\pi$. Обозначим $u_1 = d\pi(v_1)$, $u_2 = d\pi(v_2)$. Будем считать, что π определено на всей поверхности Π_1 и отображает Π_1 на всю поверхность Π_2 .

Пусть $G \subset \Pi_1$ – некоторое открытое подмножество. Ему соответствует некоторое подмножество $H_G \subset H$. Величина $\mu_\pi(\pi(G))$ определяется соотношением

$$\mu_\pi(\pi(G)) = \mu_{\Pi_1}(G) = \iint_{H_G} \langle \omega(x); v_1, v_2 \rangle d\tau ds.$$

С другой стороны,

$$\mu_\pi(\pi(G)) = \int_{\pi(G)} J(y) \omega = \iint_{H_G} J_2(x; \pi(x)) \langle \omega(\pi(x)); u_1, u_2 \rangle d\tau ds.$$

Так как выражения справедливы для любой области $G \subset \Pi_1$, то справедливо соотношение

$$J_2(x; \pi(x)) \langle \omega(\pi(x)); u_1, u_2 \rangle = \langle \omega(x); v_1, v_2 \rangle.$$

Из этих соотношений с учетом того, что $u_1 = d\pi(v_1)$, $u_2 = d\pi(v_2)$, получаем равенство

$$J_2(x; \pi(x)) = \frac{\langle \omega(x); v_1, v_2 \rangle}{\langle \omega(\pi(x)); d\pi(v_1), d\pi(v_2) \rangle}.$$

Выражение в правой части не изменится, если к векторам v_1, v_2 добавить векторы, принадлежащие пространству E_x^{ss} , а к векторам $u_1 = d\pi(v_1)$, $u_2 = d\pi(v_2)$ добавить векторы, принадлежащие пространству $E_{\pi(x)}^{ss}$. Поэтому величина $J_2(x, \pi(x))$ зависит только от точек $x, y = \pi(x)$ и не зависит от поверхностей, проходящих через эти точки.

Закончим доказательство формулы (2.18). Для этого заметим, что если $\tilde{\Pi}_1 = \Phi_T(\Pi_1)$, $\tilde{\Pi}_2 = \Phi_T(\Pi_2)$, то из инвариантности слоения на многообразия $W^{ss}(x)$ следует, что

$$\Phi_T(\pi(x)) = \tilde{\pi}(\Phi_T(x)),$$

где $\tilde{\pi}: \tilde{\Pi}_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_2$ – отображение вдоль многообразий W^{ss} .

Из последнего соотношения получаем

$$J_2(\Phi_T(x); \tilde{\pi}(\Phi_T(x))) = \frac{\langle \omega(\Phi_T(x)); d\Phi_T(v_1), d\Phi_T(v_2) \rangle}{\langle \omega(\Phi_T(\pi(x))); d\Phi_T(u_1), d\Phi_T(u_2) \rangle}.$$

Из леммы 2.9 работы [4] следует, что

$$J_2(\Phi_T(x); \tilde{\pi}(\Phi_T(x))) = \frac{\langle \omega(x); v_1, v_2 \rangle \exp\left(\int_0^T \theta(x(t)) dt\right)}{\langle \omega(\pi(x)); u_1, u_2 \rangle \exp\left(\int_0^T \theta(y(t)) dt\right)},$$

где $x(t)$ – траектория точки x , $y(t)$ – траектория точки $y = \pi(x)$. Следовательно,

$$J_2(\Phi_T(x); \Phi_T(\pi(x))) = J_2(x; y) \exp\left(\int_0^T (\theta(x(t)) - \theta(y(t))) dt\right). \quad (2.19)$$

Отметим, что расстояние между точками $\Phi_T(x)$, $\Phi_T(\pi(x))$ экспоненциально убывает, и потому

$$J_2(\Phi_T(x); \Phi_T(\pi(x))) \rightarrow 1 \quad \text{при } T \rightarrow +\infty.$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow +\infty$ в равенстве (2.19), получаем (2.18).

Абсолютная непрерывность слоения на многообразия $W^s(x)$. Нам требуется свойство абсолютной непрерывности слоения на многообразия $W^s(x)$, которые получаются, если через каждую точку траектории провести строго устойчивое многообразие. Это почти то же самое, что если через все точки строго устойчивого многообразия провести траектории.

Пусть I_1 , I_2 – две кривые, трансверсальные многообразиям $W^s(x)$. Мету (ненормированную) на таких кривых определим формой r ; мера, определяемая на кривой I формой r , определяется так, что мера отрезка $\tilde{I} \subset I$ равна величине $\int_{\tilde{I}} r$.

Определим отображение π так, что π отображает точку $x \in I_1$ в точку $y \in I_2$, которая является пересечением многообразия $W^s(x)$ и кривой I_2 . Определим точку x_1 , лежащую на пересечении траектории точки y и многообразия $W^{ss}(x)$. Положим

$$J_1(x, y) = J_2(x, x_1) \exp\left(-\int_0^\tau \theta(y(t)) dt\right), \quad (2.20)$$

где τ – такое число, что $y(\tau) = x_1$.

Функция $J_1(x, y)$ является якобианом отображения голономии кривой I_1 на кривую I_2 .

§ 3. Доказательство существования строго неустойчивых многообразий

В этом параграфе мы докажем теорему 1.2. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные построения. Поэтому мы сначала приведем общую схему построения, затем дополнительные конструкции и в конце параграфа – доказательство теоремы. Некоторые дополнительные конструкции приведем сейчас.

Поперечная длина кривой. Кривую I , параметризованную параметром s (т.е. $I = \psi(s)$, $s \in [s_1, s_2]$), мы называем *b-неустойчивой*, если для адаптированных координат вектора $\psi'(s)$ справедливо неравенство

$$\xi_r(\psi'(s)) > \frac{b^2}{B} \xi_0(\psi'(s)),$$

где B – константа из леммы 2.5.

Кривая I называется *неустойчивой*, если она является b -неустойчивой при некотором $b > 0$.

Поперечной длиной неустойчивой кривой I называется величина

$$R(I) = \int_I r.$$

Семейства кривых. Пусть I – некоторая кривая (подразумевается, что кривая I является неустойчивой). Вместе с кривой I рассмотрим семейство кривых $I_t = \Phi_t(I)$. Семейство мы будем параметризовать параметрами (s, t) ; точка кривой I_t обозначается через $\psi(s, t)$. Параметризация такова, что $\psi(s, t) = \Phi_t(\psi(s, 0))$. В этих обозначениях кривая $\Phi_t(I)$ совпадает с множеством $\{\psi(s, t) : s \in [s_1, s_2]\}$ (здесь t фиксировано). Производную по параметру s будем обозначать $\psi'(s, t)$, а производную по параметру t будем обозначать через $\dot{\psi}(s, t)$. Очевидно, что $\dot{\psi}(s, t) = d\Phi_t(\dot{\psi}(s, 0))$, $\dot{\psi}(s, t) = X(\psi(s, t))$.

ЛЕММА 3.1. *Поперечная длина кривой $\Phi_T(I)$ определяется равенством*

$$R(\Phi_T(I)) = \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(\exp \left(\int_0^T \theta(\psi(s; t)) dt \right) \langle r(\psi(s; 0)); \psi'(s, 0) \rangle \right) ds \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величина $R(\Phi_T(I))$ выражается через интеграл:

$$R(\Phi_T(I)) = \int_{s_1}^{s_2} \langle r(\psi(s; T)); \psi'(s, T) \rangle ds.$$

Но так как $\dot{\psi}(s, T) = d\Phi_T \dot{\psi}(s, 0)$ и, как установлено в работе [4],

$$r(\psi(s, T)) = \exp \left(\int_0^T \theta(\psi(s; t)) dt \right) d_* \Phi_T(r(\psi(s; 0))),$$

то

$$R(\Phi_T(I)) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\exp \left(\int_0^T \theta(\psi(s; t)) dt \right) \langle d_* \Phi_T r(\psi(s; 0)); d\Phi_T \psi'(s, 0) \rangle \right) ds.$$

Применив равенство

$$\langle r(\psi(s; 0)); \psi'(s, 0) \rangle = \langle d_* \Phi_T r(\psi(s; 0)); d\Phi_T \psi'(s, 0) \rangle,$$

получим утверждение леммы.

Лемма 3.1 доказана.

3.1. Схема построения строго неустойчивых многообразий. Напомним, что в окрестности неподвижной точки Q_j построена частичная линеаризация, определенная координатами y_1, y_2 . В окрестности V_j поверхность $\mathcal{N}_j$ определена уравнением $|y_1| = |y_2|$. Через $\mathcal{N}$ обозначается поверхность $\mathcal{N} = \bigcup \mathcal{N}_j$.

Пусть $\{x(t) : t \leq 0\}$ – отрицательная полутраектория точки $x_0 \in M(b; \delta)$. Предположим, что она пересекается с поверхностью $\mathcal{N}$ в точках $x_1 = x(t_1), \dots, x_k = x(t_k), \dots$, причем $0 > t_1 > t_2 > \dots > t_k > \dots$. Для точек x_k определены координаты y_1, y_2 . Из определения поверхности $\mathcal{N}$ следует, что $|y_1(x_k)| = |y_2(x_k)|$. Как и выше, обозначим $d_k = |y_1(x_k)|$ (очевидно, что также $d_k = |y_2(x_k)|$). Так как $x \in M(b; \delta)$, то $d_k \geq be^{-\delta|t_k|}$.

Определим моменты $t'_k < t_k < t''_k$ пересечения полутраектории $x(t)$ с поверхностями $\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1$ (напомним, что поверхности $\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1$ определяются уравнениями $|y_2| = 1$ и $|y_1| = 1$). Соответствующие точки полутраектории обозначим через $x'_k = x(t'_k)$, $x''_k = x(t''_k)$. Определим последовательность τ_k так, что $t''_{k+1} < \tau_k < t'_k$ и $x(\tau_k)$ не принадлежит объединению окрестностей V_j .

Если количество пересечений полутраектории $x(t)$ с поверхностью $\mathcal{N}$ конечно, то последовательность τ_k начиная с некоторого номера определим произвольно, лишь бы последовательность τ_k была монотонна и $\tau_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим последовательность $(be^{-\delta|\tau_m|})$ -неустойчивых кривых I_m , проходящих через точки $x(\tau_m)$ и таких, что

$$R(\Phi_{|\tau_m|}(I_m)) = \frac{(\varepsilon_1 b)^2}{B},$$

где ε_1 – достаточно малая константа (она будет определена ниже). Величину $(\varepsilon_1 b)^2/B$ обозначим через s_0 .

Обозначим через $I_m^{(0)}$ кривую $\Phi_{|\tau_m|}(I_m)$.

Запараметризуем семейство кривых $d\Phi_t(I_m^{(0)})$ параметрами s, t ($s \in [-s_0, s_0]$, $t \in [\tau_m, 0]$) так, что

$$I_m^{(0)} = \{\psi_m(s, 0)\}, \quad \Phi_t(\psi_m(s, 0)) = \psi_m(s, t), \quad \xi_r(\psi'_m(s, 0)) = 1.$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что последовательность кривых $I_m^{(0)}$ удовлетворяет условиям:*

- 1) $I_m^{(0)} \subset M(\varepsilon_1 b; \delta; \tau_m)$;
- 2) $I_m^{(0)}$ является $(\varepsilon_1 b)$ -неустойчивой кривой;
- 3) последовательность кривых $I_m^{(0)}$ сходится в C^1 -топологии к кривой $I_\infty^{(0)}$, причем сходимость является равномерной на каждом множестве $M(b; \delta)$;
- 4) $\psi'(s, 0) \in E_{\psi(s, 0)}^{uu}$.

Доказательство теоремы мы приведем ниже. Сейчас отметим, что кривая $I_\infty^{(0)}$ – это и есть многообразие $W^{uu}(x)$.

3.2. Дополнительные построения для доказательства теоремы 3.2.

Поперечная длина некоторых негладких кривых. Предположим, что I – такая непрерывная кривая, что отрезки траекторий, проходящих через эту кривую, пересекаются с ней в единственной точке и образуют гладкую поверхность. Обозначим эту поверхность через Π_I .

Определим поверхность I_ε так, что

$$I_\varepsilon = \bigcup_{x \in I} \{x(t) : t \in (-\varepsilon, \varepsilon), x = x(0) \in I\}.$$

Интеграл от формы r по кривой I определим соотношением

$$\int_I r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{I_\varepsilon} \omega. \quad (3.1)$$

Покажем, что для гладкой неустойчивой кривой последняя формула дает такой же результат, что и определенный ранее интеграл.

Пусть I – гладкая кривая. Определим параметризацию поверхности I_ε так, что

$$I_\varepsilon = \{\psi(s, t) : s \in [s_1, s_2], t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

причем

$$I = \{\psi(s, 0) : s \in [s_1, s_2]\}, \quad \Phi_t(I) = \{\psi(s, t) : s \in [s_1, s_2]\}, \quad \psi(s, t) = \Phi_t(\psi(s, 0)).$$

Так как $\dot{\psi}(s, t) = X(\psi(s, t))$, то по определению формы r

$$\int_{I_\varepsilon} \omega = \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle \omega; X(\psi(s, t)), \psi'(s, t) \rangle dt \right) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle r; \psi'(s, t) \rangle dt \right) ds.$$

Из непрерывности формы r и вектора $\psi'(s, t)$ следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle r; \psi'(s, t) \rangle dt = \langle r; \psi'(s, 0) \rangle.$$

Тем самым, формула (3.1) для гладких кривых доказана.

Преобразование величины $R(I)$ при отображении голономии в окрестности неподвижной точки. Пусть Q – неподвижная точка (одна из точек $Q_1, \dots, Q_m$), а $\tilde{V}$ – окрестность точки Q , построенная в работе [4] (см. п. 2.2; в окрестности $\tilde{V}$ определены координаты y_1, y_2 , определяющие линеаризацию). Напомним, что в этой окрестности построена поверхность Σ .

Обозначим через π отображение голономии вдоль строго устойчивых многообразий $W^{ss}(x)$ на поверхность Σ , определенное в окрестности $\tilde{V}$.

ЛЕММА 3.3. *Существует такая константа $\bar{J}$, что для всякой гладкой неустойчивой кривой $I \subset \tilde{V}$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\bar{J}} R(I) \leq R(\pi(I)) \leq \bar{J} R(I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что константа $\bar{J}$ равна максимальному значению якобиана $J_2(x, z)$ ($z \in \Sigma$, $x \in W^{ss}(z)$) отображения голономии на поверхность Σ .

Для поверхности I_ε , построенной выше по кривой I , справедлива формула

$$\int_{\pi(I_\varepsilon)} \omega = \int_{I_\varepsilon} J_2(x; \pi(x)) \omega,$$

где $J_2(x; \pi(x))$ – якобиан отображения π . Из непрерывности якобиана следует его ограниченность. Пусть он ограничен сверху и снизу, так что

$$\frac{1}{\bar{J}} \leq J_2(x; \pi(x)) \leq \bar{J}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\frac{1}{\bar{J}} \int_{I_\varepsilon} \omega \leq \int_{\pi(I_\varepsilon)} \omega \leq \bar{J} \int_{I_\varepsilon} \omega.$$

Для окончания доказательства леммы осталось поделить неравенства на 2ε и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 3.3 доказана.

Покажем, что если I – неустойчивая кривая, величина $R(I)$ достаточно мала и I не лежит в окрестности неподвижной точки, то и обычная (риманова) длина кривой I мала. Точнее, из эквивалентности $|v|$ и $\|v\|$ вне окрестностей $\tilde{V}_j$ неподвижных точек следует такое утверждение.

ЛЕММА 3.4. *Существует константа $G_1 > 0$ такая, что если I – гладкая b -неустойчивая кривая, лежащая вне множеств $\tilde{V}_j$, $R(I) < \varepsilon b^2$, то I лежит в $(G_1\varepsilon)$ -окрестности некоторой точки $x_0 \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим адаптированную длину $\mathcal{L}_a(I)$ кривой I . Пусть кривая I параметризована параметром s , так что $I = \{\psi(s), s \in [s_1, s_2]\}$. По определению b -неустойчивой кривой

$$|\xi_0(\psi'(s))| \leq \frac{B}{b^2} |\xi_r(\psi'(s))|.$$

Отсюда нетрудно вывести, что $\|\psi'(s)\| \leq (1 + B/b^2) |\xi_r(\psi'(s))|$, и поэтому

$$\mathcal{L}_a(I) \leq \left(1 + \frac{B}{b^2}\right) R(I).$$

Если $R(I) < \varepsilon b^2$, то

$$\mathcal{L}_a(I) \leq \left(1 + \frac{B}{b^2}\right) \varepsilon b^2 = (b^2 + B)\varepsilon.$$

Утверждение леммы легко выводится из эквивалентности адаптированной и римановой длины кривой I и из неравенства $b < b_0$.

Лемма 3.4 доказана.

Функция $H(x)$. Определим в окрестности $\tilde{V}_j$ функцию $H(x)$ так, что

$$H(x) = |y_1|^{\beta_1} |y_2|^{\beta_2},$$

где y_1, y_2 – координаты, построенные в окрестности неподвижной точки, а числа β_1, β_2 таковы, что

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 2.$$

Из этих равенств следует, что

$$\beta_1 = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta_2 = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Покажем, что $H(x)$ постоянна на траекториях. Мы докажем это для случая, когда траектория лежит в области, определяемой неравенствами $y_1 > 0, y_2 > 0$.

Действительно, учитывая, что y_1, y_2 дифференцируемы вдоль траекторий и что $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$, получаем

$$\dot{H} = \beta_1 y_1^{\beta_1-1} y_2^{\beta_2} \dot{y}_1 + \beta_2 y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2-1} \dot{y}_2 = \beta_1 \lambda_1 y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} + \beta_2 \lambda_2 y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} = 0.$$

Так как $\dot{H}(x) = 0$, то функция $H(x)$ действительно постоянна на траекториях.

Так как функции y_1, y_2 постоянны на $W^{ss}(x)$, то и функция $H(x)$ постоянна на многообразиях $W^{ss}(x)$. Если бы функция $H(x)$ была гладкой, то форма dH принадлежала бы пространству, порожденному формой r . К сожалению, эта функция негладкая, и поэтому форма dH не определена. Но на поверхности Σ , построенной выше, функции y_1, y_2 гладкие, и потому ограничение функции $H(x)$ на поверхность Σ является гладкой функцией. Для ограничения функции $H(x)$ на поверхность Σ справедливо равенство (в области $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$)

$$dH = \frac{|y_1|^{\beta_1}|y_2|^{\beta_2}}{|y_1||y_2|}(\beta_1|y_2|d|y_1| + \beta_2|y_1|d|y_2|).$$

Учитывая, что для сужений функций y_1, y_2 на поверхность Σ справедливы равенства $dy_1 = \lambda_1 p_1, dy_2 = \lambda_2 p_2$, а также принимая во внимание вид формы $r(x)$ в окрестности $\tilde{V}_j$ (см. (2.10)), после элементарных вычислений получаем, что для ограничения функции $H(x)$ на поверхность Σ справедливо равенство

$$dH = \frac{H\lambda_1\lambda_2}{|y_1||y_2|(\lambda_1 - \lambda_2)L} r.$$

Последнее неравенство преобразовывается в

$$\frac{|y_1|dH}{H} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{|y_2|(\lambda_1 - \lambda_2)L} r.$$

Из определения функции $H(x)$ имеем $|y_1| = H^{1/\beta_1}|y_2|^{-\beta_2/\beta_1}$. Следовательно,

$$\frac{H^{1/\beta_1}|y_2|^{-\beta_2/\beta_1}dH}{H} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{|y_2|(\lambda_1 - \lambda_2)L} r,$$

откуда

$$d((H)^{1/\beta_1}) = \frac{\lambda_1\lambda_2|y_2|^{\beta_2/\beta_1-1}}{\beta_1(\lambda_1 - \lambda_2)L} r = -\frac{\lambda_1|y_2|^{\beta_2/\beta_1-1}}{2L} r.$$

ЛЕММА 3.5. *Существуют константы $K > 0, \alpha_0 \in (0, 1)$ со следующими свойствами.*

Пусть I – неустойчивая кривая, проходящая через точку x_0 и принадлежащая области, определяемой неравенствами

$$1 < |y_2| < \frac{3}{2}, \quad |y_1| < 1,$$

$\alpha \in (0, \alpha_0)$, и пусть $R(I) < \alpha(H(x_0))^{1/\beta_1}$.

Тогда кривая I лежит в области, определяемой неравенством

$$(H(x))^{1/\beta_1} > (1 - K\alpha)(H(x_0))^{1/\beta_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели, на поверхности Σ функция $H(x)$ дифференцируема и справедливо равенство

$$d(H^{1/\beta_1}) = |y_2|^{\beta_2/\beta_1-1} \frac{\lambda_1}{2L} r.$$

Отсюда, учитывая, что в рассматриваемой области величина $|y_2|^{\beta_2/\beta_1-1} \frac{\lambda_1}{2L}$ ограничена, получаем, что для некоторой константы K_1 и проекции $\pi(I)$ кривой I на поверхность Σ справедливо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\pi(I)} d(H^{1/\beta_1}) \right| &= \left| \int_{\pi(I)} |y_2|^{\beta_2/\beta_1-1} \frac{\lambda_1}{2L} r \right| \leq K_1 \left| \int_{\pi(I)} r \right| \leq K_1 \bar{J} \left| \int_I r \right| \\ &= K_1 \cdot \bar{J} \cdot R(I) \leq K_1 \cdot \bar{J} \cdot \alpha(H(x_0))^{1/\beta_1}, \end{aligned}$$

откуда

$$|(H(x))^{1/\beta_1} - (H(x_0))^{1/\beta_1}| < K \alpha(H(x_0))^{1/\beta_1},$$

где $K = K_1 \cdot \bar{J}$. Следовательно,

$$(H(x))^{1/\beta_1} \geq (1 - K\alpha)(H(x_0))^{1/\beta_1},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.5 доказана.

Точно так же доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 3.6. Пусть I – b -неустойчивая кривая, проходящая через точку x_0 и принадлежащая области, определяемой неравенствами $1 \leq |y_1| \leq \frac{3}{2}$, $|y_2| < 1$, и пусть $R(I) < \alpha(H(x_0))^{1/\beta_2}$.

Тогда кривая I лежит в области, определяемой неравенствами

$$(H(x))^{1/\beta_2} > (1 - K\alpha)(H(x_0))^{1/\beta_2}.$$

Функция $\eta_m(s, T_1, T_2)$. Через $\eta_m(s, T_1, T_2)$, где $s \in [-s_0, s_0]$, $T_1 < T_2$, обозначим величину

$$\int_{T_1}^{T_2} \sigma(\psi_m(s, t)) \exp\left(-\int_t^{T_2} \theta(\psi_m(s, \tau)) d\tau\right) dt$$

(функция $\sigma(x)$ определена выше; см. формулу (2.15)).

Через $\xi_0(s, t)$, $\xi_r(s, t)$ обозначим адаптированные координаты вектора $\psi'_m(s, t)$.

3.3. Доказательство теоремы 3.2. Обозначим

$$I'_{k,m} = \Phi_{t'_k - \tau_m}(I_m), \quad I''_{k,m} = \Phi_{t''_k - \tau_m}(I_m), \quad \tilde{I}_{k,m} = \Phi_{t_k - \tau_m}(I_m).$$

Оценка меры устойчивости кривой $I'_{k,m}$. Как мы видели выше,

$$\xi_0(s, t'_k) = \eta_m(s, \tau_m, t'_k) \xi_r(s, \tau_m) + \xi_0(s, \tau_m).$$

По определению $(be^{\delta\tau_m})$ -неустойчивой кривой

$$|\xi_0(s, \tau_m)| \leq \frac{B}{b^2 e^{-2\delta|\tau_m|}} |\xi_r(s, \tau_m)|.$$

Величину $\xi_r(s, \tau_m)$ мы оценим, исходя из того, что

$$|\xi_r(s, t'_k)| = \exp\left(\int_{\tau_m}^{t'_k} \theta(\psi_m(s, t)) dt\right) |\xi_r(s, \tau_m)| \geq c_3 e^{\gamma_3(t'_k - \tau_m)} |\xi_r(s, \tau_m)|.$$

Следовательно,

$$|\xi_r(s, \tau_m)| \leq \frac{e^{-\gamma_3(t'_k - \tau_m)}}{c_3} |\xi_r(s, t'_k)|.$$

Из полученных оценок нетрудно вывести, что

$$|\xi_0(s, \tau_m)| \leq \frac{B}{b^2 e^{-2\delta|t'_k|}} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - \tau_m)} |\xi_r(s, t'_k)|. \quad (3.2)$$

Таким образом,

$$|\xi_0(s, t'_k)| \leq \left(\eta_m(s, \tau_m, t'_k) + \frac{B e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - \tau_m)}}{c_3 b^2 e^{-2\delta|t'_k|}} \right) |\xi_r(s, t'_k)|.$$

Отсюда следует, что кривая $I'_{k,m}$ является $(a_k b e^{-\delta|t'_k|})$ -неустойчивой, где

$$\frac{1}{a_k^2} = \frac{\eta_m(s, \tau_m, t'_k) b^2 e^{-2\delta|t'_k|}}{B} + \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - \tau_m)}}{c_3}. \quad (3.3)$$

Оценка величины $\eta_m(s, \tau_m, t'_k)$. Для оценки величины $\eta_m(s, \tau_m, t'_k)$ воспользуемся теми же оценками, что и при доказательстве существования неустойчивых пространств. А именно, представим интеграл, через который выражается величина $\eta_m(s, \tau_m, t'_k)$, в виде

$$\begin{aligned} \eta_m(s, \tau_m, t'_k) &= \sum_{i=k+1}^m \int_{t'_i}^{t''_i} \sigma(\psi(s, t)) \exp\left(-\int_t^{t'_k} \theta(\psi(s, \tau)) d\tau\right) dt \\ &+ \int_{t \notin \bigcup [t'_i, t''_i]} \sigma(\psi(s, t)) \exp\left(-\int_t^{t'_k} \theta(\psi(s, \tau)) d\tau\right) dt = \sum_{i=k+1}^m J_i + J_0. \end{aligned}$$

Как и при доказательстве существования семейства строго неустойчивых пространств (см. [4]),

$$|J_0| \leq \frac{A}{c_3 \gamma_3},$$

где величины c_3, γ_3 участвуют в определении сингулярно гиперболического потока, A – такая константа, что вне окрестностей неподвижных точек справедливо неравенство $|\sigma(x)| \leq A$.

Для оценки величины J_i воспользуемся оценкой (32) из [4].

Пусть отрезок траектории $\psi(s, t)$, $t \in [t'_i, t''_i]$, пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в момент $t_i(s)$ в точке, в которой $|y_1| = |y_2| = d_i(s)$. В этих обозначениях определенная ранее величина t_i равна $t_i(0)$. Согласно неравенству (32) из [4]

$$|J_i| \leq \frac{1}{L d_i^2(s)} \exp\left(-\int_{t_i(s)}^{t'_k} \theta(\psi(s, \tau)) d\tau\right). \quad (3.4)$$

Оценка величины $d_i(s)$. Величину $d_i(s)$ оценим в предположении, что кривая $I'_{i,m}$ принадлежит области $\{x : 1.1 \leq |y_2(x)| \leq 1.3\}$. Ниже мы покажем, что это действительно так.

При оценке величины $d_i(s)$ будем исходить из того, что величина $R(I'_{i,m})$ мала и поэтому изменение функции $H(x)$ на кривой $I'_{i,m}$ согласно лемме 3.5 мало.

Оценивать $R(I'_{i,m})$ будем исходя из оценки $R(\tilde{I}_{i,m})$.

Очевидно, что $\Phi_{|t_i|}(\tilde{I}_{i,m}) = I_m^0$. Согласно лемме 3.1

$$\begin{aligned} R(\tilde{I}_{i,m}) &= \int_{-s_0}^{s_0} \exp\left(-\int_{t_i}^0 \theta(\psi(s, t)) dt\right) \langle r(\psi(s, 0)); \psi'(s, 0) \rangle ds \\ &\leq \frac{e^{-\gamma_3|t_i|}}{c_3} R(I_{0,m}) = \frac{\varepsilon_1^2 b^2}{c_3 B} e^{-\gamma_3|t_i|}. \end{aligned}$$

Величину $R(I'_{i,m})$ оценим исходя из того, что в области $\tilde{V}_j$ справедливо равенство $\theta(x) = \lambda_1 + \lambda_2$. Следовательно,

$$R(I'_{i,m}) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} R(\tilde{I}_{i,m}) \leq e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} \frac{\varepsilon_1^2 b^2}{c_3 B} e^{-\gamma_3|t_i|}. \quad (3.5)$$

Из равенств

$$d_i = |y_2(t_i)| = |y_2(t'_i)| e^{\lambda_2(t_i - t'_i)} = 1.2 \cdot e^{\lambda_2(t_i - t'_i)}$$

получаем, что $d_i = 1.2 \cdot e^{\lambda_2(t_i - t'_i)}$.

На траектории $\{x_0(t); t \in (t'_i, t''_i)\}$ справедливо равенство $H(x) = d_i^2$. Следовательно,

$$H(x'_i) = d_i^2 = (1.2)^2 e^{2\lambda_2(t_i - t'_i)},$$

и поэтому

$$(H(x'_i))^{1/\beta_1} = (1.2)^{2/\beta_1} e^{(2\lambda_2/\beta_1)(t_i - t'_i)}.$$

Исходя из выражения для β_1 получаем

$$\begin{aligned} (H(x'_i))^{1/\beta_1} &= (1.2)^{2/\beta_1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} = (1.2)^{2/\beta_1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} e^{2\lambda_2(t_i - t'_i)} \\ &= (1.2)^{2/\beta_1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} d_i^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $d_i^2 \geq b^2 e^{-2\delta|t_i|}$, получаем

$$(H(x'_i))^{1/\beta_1} \geq (1.2)^{2/\beta_1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(t_i - t'_i)} b^2 e^{-2\delta|t_i|}.$$

Отсюда и из неравенства (3.5) следует, что

$$(1.2)^{-2/\beta_1} \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B} (H(x'_i))^{1/\beta_1} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t_i|} \geq R(I'_{i,m}).$$

Согласно лемме 3.5 для каждой точки $x \in I'_{i,m}$ справедливо

$$(H(x))^{1/\beta_1} \geq (H(x'_i))^{1/\beta_1} \left(1 - G_0 \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t_i|}\right),$$

где $G_0 = K \cdot (1.2)^{-2/\beta_1}$, K определено в лемме 3.5.

Из неравенства $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3 > 0$ следует, что $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, и поэтому $\beta_1 < 1$. Следовательно, для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливо $(1 - \alpha)^{\beta_1} \geq 1 - \alpha$. Отсюда следует, что для любой точки $x \in I'_{i,m}$

$$H(x) \geq H(x'_i) \left(1 - G_0 \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t_i|}\right),$$

и потому

$$d_i^2(s) \geq d_i^2 \cdot \left(1 - G_0 \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t_i|}\right).$$

Закончим оценку величины J_i . Подставляя в (3.4) последнее неравенство, получаем

$$|J_i| \leq \frac{1}{c_3 L d_i^2 (1 - \alpha_i)} e^{-\gamma_3(t'_k - t_i(s))},$$

где

$$\alpha_i = G_0 \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t_i|}.$$

Учитывая, что $d_i \geq b e^{-\delta|t_i|}$, получаем

$$|J_i| \leq \frac{e^{-2\delta|t_i| - \gamma_3(t'_k - t_i(s))}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2}.$$

Преобразовывая правую часть двумя способами, получим два неравенства:

$$\begin{aligned} |J_i| &\leq \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - t_i(0))} e^{-2\delta t'_k(0)}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2} e^{\gamma_3(t_i(s) - t_i(0))}, \\ |J_i| &\leq \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - t_i(s))} e^{-2\delta t'_k(0)}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2} e^{\gamma_3(t_i(0) - t_i(s))}. \end{aligned}$$

Если $t_i(s) - t_i(0) \leq 0$, то используем первое неравенство. Если же $t_i(s) - t_i(0) > 0$, то используем второе неравенство. Пусть s_i – величина, определяемая как $s_i = 0$, если $t_i(s) - t_i(0) \leq 0$, и как $s_i = s$, если $t_i(s) - t_i(0) > 0$. Тогда

$$|J_i| \leq \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - t_i(s_i))} e^{-2\delta t'_k(0)}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2}.$$

Учитывая, что $\gamma_3 - 2\delta > 0$, $t'_k - t_i(s_i) \geq (i - k)\tau_0$ с некоторой константой $\tau_0 > 0$, получаем

$$\sum_{i=k+1}^m |J_i| \leq \frac{e^{-2\delta t'_k(0)}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2} \sum_{i=k+1}^m e^{-(\gamma_3 - 2\delta)\tau_0(i-k)} \leq \frac{e^{-2\delta t'_k(0)}}{c_3 L (1 - \alpha_i) b^2} \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)\tau_0}}{1 - e^{-(\gamma_3 - 2\delta)\tau_0}}.$$

Оценка величины a_k . Из равенства (3.3) и неравенств $\alpha_i \leq \tilde{\alpha}_0$, где $\tilde{\alpha}_0 = G_0 \frac{\varepsilon_1^2}{c_3 B}$, получаем

$$\frac{1}{a_k^2} = \frac{B_1}{(1 - \tilde{\alpha}_0)B} + \frac{A e^{-2\delta|t'_k(0)|} b^2}{c_3 \gamma_3 B} + \frac{e^{-(\gamma_3 - 2\delta)(t'_k - \tau_m)}}{c_3}.$$

Из этого соотношения видно, что величина $1/a_k^2$ ограничена. Следовательно, существует такая константа $a_0 > 0$, что $a_k \geq a_0$ при любом k . Можно отметить, что константа a_0 зависит от δ , b_0 и величин, относящихся к потоку в целом, т.е. a_0 не зависит от b и от точки $x \in M(b, \delta)$.

Завершение доказательства. Как мы видели ранее, кривая $I'_{m,m}$ является $(a_m b e^{-\delta|t'_m|})$ -неустойчивой. Поэтому для адаптированных координат $\xi_0(s, t)$, $\xi_r(s, t)$ вектора $\psi'_m(s, t)$ при $t = t'_{m,m}$ справедливо неравенство

$$|\xi_0(s, t'_{m,m})| \leq \frac{B e^{2\delta|t'_{m,m}|}}{a_m^2 b^2} |\xi_r(s, t'_{m,m})|.$$

Следовательно, адаптированная длина кривой $I'_{m,m}$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}_a(I'_{m,m}) \leq \sqrt{1 + \left(\frac{B e^{2\delta|t'_{m,m}|}}{a_m^2 b^2} \right)^2} R(I'_{m,m}).$$

Так как

$$R(I'_{m,m}) \leq \frac{\varepsilon_1^2 b^2 e^{-\gamma_3|t'_{m,m}|}}{c_3 B},$$

то адаптированная длина кривой удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}_a(I'_{m,m}) \leq 2 \frac{\varepsilon_1^2}{a_m^2} e^{-(\gamma_3 - 2\delta)|t'_m|}.$$

Если ε_1 достаточно мало, то из ограниченности снизу величины a_m^2 следует, что величина $\mathcal{L}_a(I'_{m,m})$ тоже мала. Следовательно, кривая $I'_{m,m}$ лежит в области, определяемой неравенством $1.1 < |y_2| < 1.3$.

Далее, из того, что $I'_{m,m}$ лежит в области $1.1 < |y_2| < 1.3$, следует, что $I'_{m-1,m}$ является $(a_{m-1} b e^{-\delta|t'_{m-1}|})$ -неустойчивой. Используя предыдущие рассуждения, видим, что кривая $I'_{m-1,m}$ попадает в область $1.1 < |y_2| < 1.3$. Продолжим индуктивный процесс. Получим, что все кривые I_k являются $(a_k b e^{-\delta t'_k})$ -неустойчивыми и принадлежат области $1.1 < |y_2| < 1.3$. Окончательно получаем, что кривая $I_m^{(0)}$ является $(a_0 b)$ -неустойчивой. Тем самым, доказаны утверждения 1) и 2) теоремы 3.2.

Докажем утверждения 3) и 4).

Покажем, что $|\psi_m(s, 0) - \psi_{m_1}(s, 0)| \rightarrow 0$, если $m, m_1 \rightarrow \infty$. Тем самым будет доказана сходимость кривых $\varphi_m(s)$ в C^0 -топологии.

Пусть m, m_1 фиксированы, $m < m_1$. Обозначим $\tilde{I}_m = \Phi_{\tau_m - \tau_{m_1}}(I_{m_1})$. Очевидно, что кривые $I_m, \tilde{I}_m$ проходят через точку $x(\tau_m)$. Согласно доказанному ранее адаптированные длины кривых $I_m, \tilde{I}_m$ экспоненциально убывают. Следовательно, риманова длина этих кривых тоже экспоненциально убывает.

Обозначим через $\tilde{s}(s)$ такое значение параметра s , что точки $\psi_m(s, \tau_m), \psi_{m_1}(\tilde{s}, \tau_m)$ лежат на одном устойчивом многообразии. Через Δt обозначим время движения от точки $\psi_{m_1}(\tilde{s}, \tau_m)$ до точки $\psi_m(s, \tau_m)$. Так как расстояние между точками $\psi_m(s, \tau_m), \psi_{m_1}(\tilde{s}, \tau_m)$ экспоненциально убывает, то и величина Δt тоже экспоненциально убывает.

Очевидно, что величина Δt является в то же время временем движения от точки $\psi_{m_1}(\tilde{s}, 0)$ до многообразия $W^{ss}(\psi_m(s, 0))$. Таким образом, расстояние между точками $\psi_m(s, 0), \psi_{m_1}(\tilde{s}, 0)$ экспоненциально убывает с ростом m, m_1 . Следовательно, последовательность кривых $I_m^{(0)}$ сходится в C^0 -топологии.

Сходимость в C^1 -топологии следует из того, что последовательность величин $\eta_m(s, 0, \tau_m)$ равномерно сходится при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $\psi'_m(s, 0)$ сходится. Отсюда и следует сходимость последовательности кривых $I_m^{(0)}$ в C^1 -топологии.

Тем самым, теорема 3.2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы о возвратности

Теорема о возвратности (теорема 1.3) выводится из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.1. *Существуют константы $N_0 > 0$, $\varkappa > 0$ со следующими свойствами.*

Для любых $b_1, b_2 \in (0, b_0)$ существуют такие $T_0 > 0, \tau > 0$, что для любого $T_1 > T_0$ и любой b_2 -неустойчивой кривой I , $R(I) \geq b_2^2/B$, не лежащей в множестве $\bigcup V_j$, найдется множество $\Delta \subset I$, состоящее из непересекающихся отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ таких, что:

- 1) $R(\Delta) > R(I)(1 - N_0 b_1^{\varkappa})$;
- 2) для каждого отрезка Δ_j существует такое $T \in [T_1, T_1 + \tau]$, что $\Phi_T(\Delta_j) \subset M(b_1; \delta; T)$;
- 3) $\Phi_T(\Delta_j)$ — b_1 -неустойчивая кривая, $R(\Phi_T(\Delta_j)) \geq b_1^2/B$.

4.1. Константы $\alpha, \beta, \varkappa$. Зафиксируем величины $\alpha > 0, \beta > 0$ так, чтобы для любой неподвижной точки Q_j и соответствующих собственных чисел λ_1, λ_2 матрицы $D(Q_j)$ выполнялись неравенства

$$\gamma_3 > \alpha > 2\delta, \quad \alpha + \beta < \delta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{|\lambda_2| + \delta}, \quad \alpha(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha) > \beta. \quad (4.1)$$

Такие α, β существуют. Действительно, из неравенства $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3$ и из $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ следует, что $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$; из неравенства $2\delta < \gamma_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$ следует, что

$$|\lambda_2| + \delta < |\lambda_2| + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

и, следовательно,

$$\delta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{|\lambda_2| + \delta} > 2\delta.$$

Поэтому для выбора α, β мы можем сначала выбрать α так, что $\gamma_3 > \alpha > 2\delta$, $\alpha < \delta(\lambda_1 - \lambda_2)/(|\lambda_2| + \delta)$. Из этого неравенства и из

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha \geq \gamma_3 - \alpha > 0$$

следует существование такого $\beta > 0$, что условия (4.1) выполнены.

Для каждой неподвижной точки Q_j определим величины

$$h_j = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{|\lambda_2| + \delta}, \quad a_j = \frac{\lambda_1 - \delta}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (4.2)$$

Нетрудно проверить, что $h_j(1 - a_j) = 1, \beta_2/\beta_1 - a_j h_j > 0$.

Определим величину $\varkappa$, участвующую в формулировке теоремы 4.1, соотношением

$$\varkappa = \min_j (h_j - 2).$$

Покажем, что $h_j > 2$ (отсюда следует, что $\varkappa > 0$).

Действительно, нетрудно показать, что неравенство $h_j > 2$ эквивалентно неравенству $\lambda_1 - \lambda_2 > 2|\lambda_2| + 2\delta$. Учитывая, что $\lambda_2 < 0$, получаем, что последнее неравенство эквивалентно неравенству $\lambda_1 + \lambda_2 > 2\delta$, которое следует из определения величины δ ($2\delta < \gamma_3$) и из неравенства $\gamma_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$.

4.2. Анализ в окрестности неподвижной точки. Пусть Q – неподвижная точка (одна из точек $Q_1, \dots, Q_m$), $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ – собственные значения матрицы $D(Q)$. В данном пункте индекс j у неподвижной точки и величин, связанных с этой неподвижной точкой, мы опускаем. В частности, величины h_j , a_j обозначаются через h , a .

Выше (см. п. 2.2) в окрестности точки Q были построены координаты y_1, y_2 . Пусть точка x принадлежит области, определяемой неравенствами $|y_1| < 1$, $1.1 < |y_2| < 1.3$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы о возвратности играет следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. Пусть Q – неподвижная точка, $T_2 > 0$ – такое число, что

$$e^{(\lambda_1 - (\alpha + \beta))T_2} \geq b_1^{-h} \cdot (1.3)^{1 + \beta_2/\beta_1}, \quad (4.3)$$

Δ – $(b_1 e^{-\delta T_2})$ -неустойчивая кривая, принадлежащая области, определяемой неравенствами $|y_1| < 1$, $1.1 < |y_2| < 1.3$, $R(\Delta) \geq (b_1^2/B)e^{-\alpha T_2}$.

Тогда существует разбиение кривой Δ на отрезки $\Delta_B, \Delta_1, \dots, \Delta_m$ и числа $\tau'_1, \dots, \tau'_m$ такие, что:

- 1) $R(\Delta_B) \leq N_1 b_1^{h-2} e^{-\beta T_2} R(I)$;
- 2) $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)$ принадлежит области, определяемой неравенствами $|y_2| < 1$, $1.1 < |y_1| < 1.3$;
- 3) $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j) \subset M(b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}; \delta; \tau'_j)$;
- 4) $R(\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)) \geq (b_1^2/B)e^{-\alpha(T_2 - \tau'_j)}$;
- 5) $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)$ является $b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}$ -неустойчивой кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательство довольно длинное, то поделим его на несколько шагов.

Шаг 1: деление кривой Δ на отрезки. Отрезок кривой Δ , лежащий в области, определяемой неравенством

$$(H(x))^{1/\beta_1} < b_1^h e^{-(\alpha + \beta)T_2} \cdot (1.3)^{\beta_2/\beta_1 - ah},$$

назовем *плохим* и обозначим через Δ_B . Для плохого отрезка справедливо

$$R(\Delta_B) \leq 2G_0 b_1^h e^{-(\alpha + \beta)T_2} \leq 2G_0 B b_1^{h-2} e^{-\beta T_2} R(I), \quad (4.4)$$

где $G_0 = K \cdot (1.2)^{-2/\beta_1}$, константа K определена в лемме 3.5.

Оставшуюся часть кривой Δ назовем *хорошей*. Хорошую часть кривой Δ поделим на отрезки Δ_j . В каждом отрезке Δ_j выберем точку x_j с координатами $(y_{1,j}, y_{2,j})$ описанным ниже способом. Для каждой точки x_j определим

число τ'_j так, что $\Phi_{\tau'_j}(x_j)$ принадлежит отрезку, определяемому соотношениями $|y_1| = 1.2$, $|y_2| < 1$.

Покажем, что $\tau'_j < T_2$. Действительно, по определению плохого отрезка $(H(x_j))^{1/\beta_1} > b_1^h e^{-(\alpha+\beta)T_2}$. Выражая $(H(x_j))^{1/\beta_1}$ через y_1, y_2 (напомним, что $(H(x_j))^{1/\beta_1} = |y_1| |y_2|^{\beta_2/\beta_1}$), получаем

$$|y_1(x_j)| = (H(x_j))^{1/\beta_1} |y_2|^{-\beta_2/\beta_1} > b_1^h e^{-(\alpha+\beta)T_2} |y_2|^{-\beta_2/\beta_1}.$$

По определению величины τ'_j справедливо неравенство $|y_1(x_j)| e^{\lambda_1 \tau'_j} = 1.2$. Следовательно,

$$|y_1(x_j)| e^{\lambda_1 \tau'_j} = 1.2 > b_1^h e^{-(\alpha+\beta)T_2 + \lambda_1 \tau'_j} |y_2|^{-\beta_2/\beta_1},$$

откуда

$$e^{-(\alpha+\beta)T_2 + \lambda_1 \tau'_j} < b_1^{-h} \cdot 1.2 \cdot |y_2|^{\beta_2/\beta_1} < b_1^{-h} \cdot (1.3)^{1+\beta_2/\beta_1}.$$

Учитывая (4.3), получаем, что $\tau'_j < T_2$; если бы это было не так, то последнее неравенство сменилось бы на противоположное.

Отрезки Δ_j построим так, чтобы они были не слишком малыми и не слишком большими. Потребуем, чтобы

$$2 \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha(T_2 - \tau'_j)} \geq R(\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)) \geq \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha(T_2 - \tau'_j)}.$$

Так как $\Phi_t(\Delta_j)$ принадлежит области V при $t \in (0, \tau'_j)$, то $R(\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\tau'_j} R(\Delta_j)$, и последнее неравенство будет выполнено, если

$$2 \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha(T_2 - \tau'_j)} \geq R(\Delta_j) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\tau'_j} \geq \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha(T_2 - \tau'_j)}.$$

Это неравенство преобразовывается в

$$2 \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha)\tau'_j} \geq R(\Delta_j) \geq \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha)\tau'_j}. \quad (4.5)$$

Покажем, что деление на такие отрезки возможно.

Действительно, кривая $\Delta \setminus \Delta_B$ состоит из двух частей: части, лежащей в области $y_1 > 0$ (обозначим ее Δ_r^+), и части, лежащей в области $y_1 < 0$ (обозначим ее Δ_r^-). Покажем, как поделить на отрезки Δ_j кривую Δ_r^+ .

Деление кривой Δ_r^+ на части осуществляется с помощью индуктивного процесса. Опишем первый шаг этого процесса. Если

$$R(\Delta_r^+) < \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha)\tau'_1}, \quad (4.6)$$

то добавляем кривую Δ_r^+ к отрезку Δ_B и на этом процесс заканчиваем.

Если

$$R(\Delta_r) \geq \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha)\tau'_1}, \quad (4.7)$$

то в качестве точки x_1 выберем такую точку кривой Δ_r^+ , что $H(x_1)$ – минимальное значение функции $H(x)$ на отрезке Δ_r^+ . Определим τ'_1 так, что

$$e^{\lambda_1 \tau'_1} |y_1(x_1)| = 1.2.$$

В качестве отрезка Δ_1 выберем такой отрезок кривой Δ_r^+ , содержащий точку x_1 , что

$$R(\Delta_1) = \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha)\tau'_1}, \quad (4.8)$$

и удаляем его из отрезка Δ_r^+ .

Следующие шаги выполняются аналогично первому. На j -м шаге у нас имеется отрезок Δ_r^+ (из которого уже были удалены отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_{j-1}$). Пусть $x_j \in \Delta_r^+$ – такая точка, что $H(x_j)$ имеет минимальное значение среди всех точек $x \in \Delta_r^+$, τ'_j – такое число, что $|y_1(x_j)|e^{\lambda_1 \tau'_j} = 1.2$.

Если выполнено неравенство (4.6), в котором x_1 заменено на x_j , то добавляем отрезок Δ_r^+ к отрезку Δ_{j-1} и на этом индуктивный процесс заканчиваем. Если же выполнено неравенство (4.7), в котором x_1 заменено на x_j , то в качестве отрезка Δ_j выбираем такой отрезок кривой Δ_r^+ , что выполнено равенство (4.8), в котором τ'_1 заменено на τ'_j .

Индуктивный процесс рано или поздно закончится, так как в силу неравенства $\tau'_j < T_2$ и неравенства (2.10) величины $R(\Delta_j)$ ограничены снизу.

Шаг 2: кривая $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)$ принадлежит множеству $M(b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}; \delta; \tau'_j)$. Пусть точка x принадлежит отрезку Δ_j ; тогда точка x принадлежит области, определяемой неравенствами $1.1 < |y_2| < 1.3$, $|y_1| < 1$.

Пусть $x(t)$ – часть траектории точки x , лежащая в области V . Для координат $y_1(t)$, $y_2(t)$ точки $x(t)$ справедливо $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$. Следовательно, $|y_1(t)| = e^{\lambda_1 t} |y_1(0)|$, $|y_2(t)| = e^{\lambda_2 t} |y_2(0)|$. Определим величины $\tau(x)$, $d(x)$ так, что $|y_1(\tau(x))| = |y_2(\tau(x))| = d(x)$.

Очевидно, что $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j) \subset M(b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}; \delta; \tau'_j)$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \Delta_j$ имеет место

$$d(x) \geq b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)} e^{-\delta(\tau'(x) - \tau(x))} = b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau(x))}.$$

Покажем, что $d(x) \geq b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau(x))}$ тогда и только тогда, когда

$$(H(x))^{1/\beta_1} \geq b_1^h e^{-\delta h T_2} |y_2|^{\beta_2/\beta_1 - ah}. \quad (4.9)$$

Действительно, для величины $\tau(x)$ имеем уравнение $d(x) = |y_1| e^{\lambda_1 \tau(x)} = |y_2| e^{\lambda_2 \tau(x)}$, откуда $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau(x)} = |y_2|/|y_1|$. Следовательно,

$$e^{(\lambda_1 - \delta)\tau(x)} = \left(\frac{|y_2|}{|y_1|} \right)^a.$$

Поэтому

$$d(x) e^{-\delta \tau(x)} = |y_1| e^{(\lambda_1 - \delta)\tau(x)} = |y_1| \left(\frac{|y_2|}{|y_1|} \right)^a = |y_1|^{1-a} |y_2|^a.$$

Очевидно, что неравенство $d(x) \geq b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau(x))}$ равносильно неравенству $d(x) e^{-\delta \tau(x)} \geq b_1 e^{-\delta T_2}$. Из предыдущего равенства следует, что последнее неравенство равносильно неравенству

$$|y_1|^{1-a} |y_2|^a \geq b_1 e^{-\delta T_2}. \quad (4.10)$$

Возведя обе части в степень h и замечая, что $h(1-a) = 1$, получаем равносильное неравенство

$$|y_1| \geq b_1^h e^{-h\delta T_2} |y_2|^{-ah}.$$

Умножив обе части на $|y_2|^{\beta_2/\beta_1}$ и учитывая, что $|y_1| |y_2|^{\beta_2/\beta_1} = (H(x))^{1/\beta_1}$, получаем неравенство (4.9).

Таким образом, (4.9) равносильно неравенству $d(x) \geq b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau(x))}$, и, тем самым, утверждение доказано.

Для окончания доказательства утверждения шага 2 осталось заметить, что в силу шага 1 отрезок Δ_j принадлежит области, определяемой неравенством $(H(x))^{1/\beta_1} \geq b_1^h e^{-(\alpha+\beta)T_2}$. Но из определения величин α, β, h следует, что $\delta h > \alpha + \beta$, и потому $e^{-\delta h T_2} < e^{-(\alpha+\beta)T_2}$. С учетом того, что $|y_2| < 1.3$, $\beta_2/\beta_1 - ah > 0$, получаем, что для любой точки $x \in \Delta_j$ справедливо неравенство (4.9).

Из вышесказанного следует, что кривая $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)$ принадлежит множеству $M(b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}; \delta; \tau'_j)$.

Шаг 3: кривая $\Phi_{\tau_j}(\Delta_j)$ является $b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau'_j)}$ -неустойчивой. Пусть семейство кривых $\Phi_t(\Delta_j)$ параметризовано параметрами $s \in [s_1, s_2]$, $t \in [0, \tau'_j]$, так что

$$\Phi_t(\Delta_j) = \{\psi(s, t) : s \in [s_1, s_2]\}.$$

Как и выше, производную по параметру s обозначим через $\psi'(s, t)$, производную по параметру t обозначим через $\dot{\psi}(s, t)$. Через $\xi_0(s, t)$, $\xi_r(s, t)$ обозначим адаптированные координаты вектора $\psi'(s, t)$.

Определим величину $\eta(s, 0, \tau'_j)$ как

$$\int_0^{\tau'_j} \sigma(\psi(s, t)) \exp\left(-\int_t^{\tau'_j} \theta(\psi(s, \tau)) d\tau\right) dt.$$

Как мы видели ранее, для адаптированных координат $\xi_0(s, \tau'_j)$, $\xi_r(s, \tau'_j)$ вектора $\psi'(s, \tau'_j)$ справедливо равенство

$$\xi_0(s, \tau'_j) = \eta(s, 0, \tau'_j) \xi_r(s, \tau'_j) + \xi_0(s, 0). \quad (4.11)$$

Так как кривая Δ_j является $(b_1 e^{-\delta T_2})$ -неустойчивой кривой, то

$$|\xi_0(s, 0)| \leq |\xi_r(s, 0)| \frac{B e^{2\delta T_2}}{b_1^2}.$$

Исходя из вида системы уравнений для адаптированных координат в окрестности V (см. (2.7)) и из вида функций $\theta(x)$, $\sigma(x)$ в окрестности V (см. (2.11), (2.13)) получаем

$$\xi_r(s, \tau'_j) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\tau'_j} \xi_r(s, 0).$$

Следовательно,

$$|\xi_0(s, 0)| \leq |\xi_r(s, \tau'_j)| \frac{B}{b_1^2} e^{2\delta T_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\tau'_j}.$$

Оценим величину $\eta(s, 0, \tau'_j)$. В ходе вывода соответствующей оценки мы будем обозначать величину $\tau(\psi(s, 0))$ через τ .

Согласно неравенству (32) из работы [4]

$$|\eta(s, 0, \tau'_j)| \leq \frac{1}{Ld^2(\psi(s, 0))} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(\tau'_j - \tau)}.$$

Заметим, что Δ_j принадлежит хорошей части кривой Δ . По ходу шага 2 мы показали, что на хорошей части кривой Δ справедливо неравенство

$$d(\psi(s, 0)) \geq b_1 e^{-\delta(T_2 - \tau)}. \quad (4.12)$$

Поэтому

$$|\eta(s, 0, \tau'_j)| \leq \frac{e^{2\delta(T_2 - \tau)}}{Lb_1^2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(\tau'_j - \tau)}.$$

Подставляя полученную оценку в (4.11), получаем

$$|\xi_0(s, \tau'_j)| \leq \left(\frac{e^{2\delta(T_2 - \tau)}}{Lb_1^2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(\tau'_j - \tau)} + \frac{Be^{2\delta T_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\tau'_j}}{b_1^2} \right) |\xi_r(s, \tau'_j)|.$$

Последнее неравенство без труда преобразовывается в

$$|\xi_0(s, \tau'_j)| \leq \frac{B}{b_1^2} e^{2\delta(T_2 - \tau'_j)} |\xi_r(s, \tau'_j)| \left(\frac{e^{(2\delta - (\lambda_1 + \lambda_2))(\tau'_j - \tau)}}{LB} + e^{(2\delta - (\lambda_1 + \lambda_2))\tau'_j} \right).$$

Если B выбрать достаточно большим, то выражение в скобках меньше 1, так как показатели в экспонентах отрицательны.

Таким образом, мы доказали, что кривая $\Phi_{\tau'_j}(\Delta_j)$ является $(b_1 e^{-\delta(T_1 - \tau'_j)})$ -неустойчивой.

Лемма 4.2 доказана.

4.3. Завершение доказательства теоремы о возвратности. Теорема 1.3 следует из следующего утверждения.

ЛЕММА 4.3. Пусть $T > 0$ – некоторое число, I – такая $(b_1 e^{-\delta T})$ -неустойчивая кривая, что I не принадлежит множеству $\bigcup V_i$ и $R(I) \geq (b_1^2/B) e^{-\alpha T}$. Тогда существует множество $\Delta \subset I$, состоящее из непересекающихся отрезков Δ_j , такое, что выполнены условия:

- 1) если $\Phi_T(\Delta_j)$ не принадлежит множеству $\bigcup V_i$, то $\Phi_T(\Delta_j) \subset M(b_1; \delta; T)$;
- 2) $R(\Phi_T(\Delta_j)) \geq b_1^2/B$;
- 3) $R(\bigcup \Delta_j) \geq R(I)(1 - N_0 b_1^h)$;
- 4) если $\Phi_T(\Delta_j) \subset V_i$, то существует такое τ , что $\Phi_{T+\tau}(\Delta_j) \subset M(b_1; \delta; T)$.

Оставшаяся часть § 4 будет посвящена доказательству этой леммы. При этом будет использоваться сформулированная ниже лемма 4.4, доказательство которой будет приведено в п. 5.1.

Общее описание процесса деления кривой на отрезки. Обозначим через $\mathcal{S}$ поверхность, определяемую соотношениями $|y_2| = 1.2$, $|y_1| \leq 1$.

Деление кривой I на отрезки будет получено в ходе некоторого индуктивного процесса, который описан ниже.

На первом шаге строится разбиение кривой I на отрезки ранга 0, которые нумеруются индексом j_0 и обозначаются через Δ_{j_0} .

Некоторые отрезки ранга 0 делятся на плохое множество ранга 1, которое обозначается через $\Delta_{j_0 B}$, и отрезки ранга 1, которые нумеруются индексом j_1 и обозначаются через $\Delta_{j_0 j_1}$. Множество значений, которые принимает индекс j_1 , для каждого отрезка Δ_{j_0} свое.

Некоторые отрезки ранга 1 делятся на плохое множество ранга 2, которое обозначается через $\Delta_{j_0 j_1 B}$, и отрезки ранга 2, которые нумеруются индексом j_2 и обозначаются через $\Delta_{j_0 j_1 j_2}$. Множество значений, которые принимает индекс j_2 , для каждого отрезка $\Delta_{j_0 j_1}$ свое.

На k -м шаге строятся отрезки ранга k . Эти отрезки нумеруются индексами $j_0, \dots, j_k$ и обозначаются $\Delta_{j_0 \dots j_k}$. Некоторые отрезки ранга k делятся на плохой отрезок $\Delta_{j_0 \dots j_k B}$ и отрезки $\Delta_{j_0 \dots j_k j_{k+1}}$ ранга $k+1$.

В каждом отрезке $\Delta_{j_0 \dots j_k}$ выделяется точка $x_{j_0 \dots j_k}$. Ранг отрезка равен числу пересечений траектории точки $x_{j_0 \dots j_k}$ с поверхностью $\mathcal{S}$ (напомним, что через $\mathcal{S}$ обозначается поверхность, определяемая уравнением $|y_2| = 1$).

Отрезок $\Delta_{j_0 \dots j_k}$ называется *отрезком максимального ранга*, если он не содержит отрезков большего ранга.

Деление кривой на отрезки ранга 0. Деление на отрезки ранга 0 осуществляется в два этапа.

На первом этапе делим кривую I на отрезки Δ_{j_0} произвольно, лишь бы было справедливо

$$2 \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T} > R(\Delta_{j_0}) \geq \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha T}.$$

В каждом отрезке Δ_{j_0} выделим точку x_{j_0} произвольно. Возможны следующие случаи.

1. Для всех $t \in [0, T]$ справедливо:

- a) $\Phi_t(x_{j_0}) \notin \mathcal{S}$;
- b) $R(\Phi_t(\Delta_{j_0})) < 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t)}$.

Такие отрезки назовем *неделимыми*. Эти отрезки имеют максимальный ранг и далее на отрезки ранга 1 не делятся.

2. Существует такое $t_1 \in (0, T)$, что:

- a) $\Phi_{t_1}(x_{j_0}) \in \mathcal{S}$;
- b) $R(\Phi_t(\Delta_{j_0})) < 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t)}$, $t \in (0, t_1)$.

Такой отрезок назовем *делимым*.

3. Существует такое $t_1 \in (0, T)$, что:

- a) $\Phi_t(x_{j_0}) \notin \mathcal{S}$, $t \in [0, t_1]$;
- b) $R(\Phi_{t_1}(\Delta_{j_0})) = 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t_1)}$.

В этом случае получим новое деление на отрезки ранга 0, поделив данный отрезок Δ_{j_0} на два отрезка так, что для каждого из них справедливо

$$R(\Phi_{t_1}(\Delta_{j_0})) = \frac{b_1^2}{B} e^{-\alpha(T-t_1)}.$$

Естественно, что при этом номера отрезков Δ_{j_0} придется изменить. Соответствующую выделенную точку в каждом новом отрезке выберем произвольно.

Очевидно, что после применения процедуры деления отрезков типа 3 конечное число раз мы получим деление кривой I на отрезки, для каждого из которых выполнен либо случай 1, либо 2. Полученное окончательное деление кривой I на отрезки является делением на отрезки ранга 0.

Деление отрезка ранга 0 на отрезки ранга 1. Пусть Δ_{j_0} – такой отрезок ранга 0, что $\Phi_{t_1}(x_{j_0}) \in \mathcal{S}$. В этом случае применим к отрезку $\tilde{\Delta}_{j_0} = \Phi_{t_1}(\Delta_{j_0})$ процедуру деления в окрестности неподвижной точки, описанную в лемме 4.2. В качестве величины T_2 рассмотрим величину $T_2 = T_1 - t_1 + \tau$, где $\tau \geq 0$ выбирается минимальным из таких чисел, что для величины T_2 выполнено неравенство (4.3).

В результате применения процедуры деления к отрезку $\Delta = \tilde{\Delta}_{j_0}$ мы поделим отрезок $\tilde{\Delta}_{j_0}$ на отрезок $\tilde{\Delta}_{j_0 B}$ и отрезки $\tilde{\Delta}_{j_0 j_1}$. Таким образом, для каждого отрезка $\tilde{\Delta}_{j_0 j_1}$ определяются величина τ'_{j_1} и точка $\tilde{x}_{j_0 j_1} \in \tilde{\Delta}_{j_0}$. Соответственно этому делению отрезок Δ_{j_0} поделится на плохой отрезок $\Delta_{j_0 B} = \Phi_{-t_1}(\tilde{\Delta}_{j_0 B})$ и отрезки $\Delta_{j_0 j_1} = \Phi_{-t_1}(\tilde{\Delta}_{j_0 j_1})$.

Для каждого отрезка $\Delta_{j_0 j_1}$ определим величину $t'_1 = t_1 + \tau'_{j_0 j_1}$. При этом отрезок $\Delta'_{j_0 j_1} = \Phi_{t'_1}(\Delta_{j_0 j_1})$ принадлежит множеству, определяемому неравенствами

$$1.1 < |y_1| < 1.3, \quad |y_2| < 1.$$

Для отрезка $\Delta_{j_0 j_1}$ возможны следующие случаи.

1. Неделимые отрезки характеризуются тем, что:

- а) $\Phi_t(\Delta_{j_0 j_1})$ при $t \in [t'_1, T]$ не пересекается с множеством $\mathcal{S}$;
- б) $R(\Phi_t(\Delta_{j_0 j_1})) < 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t_1)}$, $t \in (t'_1, T)$.

2. Делимые отрезки характеризуются тем, что существует такое $t_2 \in (t'_1, T)$, что:

- а) $\Phi_{t_2}(x_{j_0 j_1}) \in \mathcal{S}$;
 - б) $R(\Phi_t(\Delta_{j_0 j_1})) < 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t_1)}$, $t \in (t'_1, t_2)$.
3. Существует такое $t_2 \in (t'_1, T)$, что:
- а) $\Phi_t(x_{j_0 j_1}) \notin \mathcal{S}$, $t \in (t'_1, t_2)$;
 - б) $R(\Phi_{t_2}(\Delta_{j_0 j_1})) = 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t_2)}$;
 - с) $R(\Phi_t(\Delta_{j_0 j_1})) < 2(b_1^2/B)e^{-\alpha(T-t)}$, $t \in (t'_1, t_2)$.

В случае 3 отрезок $\Delta_{j_0 j_1}$, как и ранее, делим на два отрезка так, что

$$R(\Phi_{t_2}(\Delta_{j_0 j_1})) = R(\Phi_{t_2}(\Delta_{j_0 j_1+1})) = \frac{b_1^2}{B}e^{-\alpha(T-t_2)}.$$

Выделенные точки в отрезках выбираем произвольно.

Очевидно, что после конечного числа шагов деления отрезков типа 3 мы получим отрезки ранга 1 только типов 1 и 2.

Деление отрезков ранга k на отрезки ранга $k+1$. Процедура деления отрезков ранга k на отрезки ранга $k+1$ аналогична процедуре деления отрезков ранга 0 на отрезки ранга 1, поэтому описание этой процедуры мы не приводим.

Оценка меры плохого множества. Как мы видели из процедуры деления отрезка $\Delta_{j_0 j_1 \dots j_k}$ на отрезки $\Delta_{j_0 j_1 \dots j_k B}$ и отрезки $\Delta_{j_0 j_1 \dots j_k+1}$, плохое множество появляется при делении отрезка $\tilde{\Delta}_{j_0 j_1 \dots j_k} = \Phi_{t_1}(\Delta_{j_0 j_1 \dots j_k})$ на отрезки $\tilde{\Delta}_{j_0 j_1 \dots j_k B}$ и $\tilde{\Delta}_{j_0 j_1 \dots j_k j_{k+1}}$. В ходе доказательства леммы 4.2 было показано, что

$$R(\tilde{\Delta}_{j_0 j_1 \dots j_k B}) < N_1 b_1^{\varkappa} e^{-\beta(T-t_1)} R(\tilde{\Delta}_{j_0 j_1 \dots j_k}). \quad (4.13)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на следующей лемме, которую мы докажем ниже.

ЛЕММА 4.4. *Существует константа $C > 0$ со следующими свойствами. Пусть Δ – такая кривая, что:*

- 1) Δ является b -неустойчивой кривой;
- 2) $\Delta \subset M(b; \delta; \tau)$;
- 3) $R(\Delta) < b^2/B$;
- 4) кривая $\Phi_{-\tau}(\Delta)$ является $(be^{-\delta\tau})$ -неустойчивой кривой.

Тогда для любой кривой $\Delta_1 \subset \Delta$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{C} \frac{R(\Phi_{-\tau}(\Delta_1))}{R(\Phi_{-\tau}(\Delta))} < \frac{R(\Delta_1)}{R(\Delta)} < C \frac{R(\Phi_{-\tau}(\Delta_1))}{R(\Phi_{-\tau}(\Delta))}.$$

Из этой леммы и неравенства (4.13) следует, что

$$R(\Delta_{j_0 \dots j_k B}) < N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta(T-t_1)} R(\Delta_{j_0 \dots j_k}), \quad (4.14)$$

где $N_0 = CN_1$.

Действительно, по построению условия леммы выполнены для кривых $\hat{\Delta}_{j_0 \dots j_k}$, $\hat{\Delta}_{j_0 \dots j_k B}$.

Таким образом, для хороших отрезков $\Delta_{j_0 \dots j_{k+1}}$, содержащихся в отрезке $\Delta_{j_0 \dots j_k}$, справедливо неравенство

$$R\left(\bigcup_{j_{k+1}} \Delta_{j_0 \dots j_{k+1}}\right) > (1 - N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta(T-t_1)}) R(\Delta_{j_0 \dots j_k}).$$

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что если отрезок ранга k содержит отрезки более высоких рангов, то величина $T - t_1$ будет достаточно велика.

Действительно, пусть отрезок ранга m содержится в отрезке ранга $k < m$. Тогда в соответствующем отрезке ранга k существует такая точка x , что ее траектория пересекает окрестности неподвижных точек не менее m раз. Промежутки между попаданиями не меньше некоторой величины τ_0 . Поэтому $T - t_1 \geq (m - k)\tau_0$. Если m – максимальный ранг отрезка, содержащегося в отрезке ранга k , то для множества всех отрезков максимального ранга, содержащихся в $\Delta_{j_0 \dots j_k}$, справедлива оценка

$$R(\hat{\Delta}_{j_0 \dots j_k}) > \prod_{l=1}^{m-k} (1 - N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta l \tau_0}) R(\Delta_{j_0 \dots j_k}).$$

Таким образом, для отрезков ранга 0 справедливо неравенство

$$R(\hat{\Delta}_{j_0}) > \prod_{l=1}^m (1 - N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta l \tau_0}) R(\Delta_{j_0}).$$

Так как произведение сходится и для него справедлива оценка

$$\prod_{l=1}^m (1 - N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta l \tau_0}) > \prod_{l=1}^{\infty} (1 - N_0 b_1^\varkappa e^{-\beta l \tau_0}),$$

а для бесконечного произведения справедлива оценка

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 - N_0 b_1^{\varkappa} e^{-\beta l \tau_0}) > 1 - N_2 b_1^{\varkappa}$$

с некоторой константой N_2 , то для объединения отрезков максимального ранга, содержащихся в Δ_{j_0} (обозначим объединение отрезков максимального ранга, содержащихся в отрезке Δ_{j_0} , через $\Delta_{j_0 M}$), справедливо неравенство

$$R(\Delta_{j_0 M}) > (1 - N_2 b_1^{\varkappa}) R(\Delta_{j_0}).$$

Суммируя все отрезки ранга 0, получаем

$$R(\Delta_M) > (1 - N_2 b_1^{\varkappa}) R(I).$$

Тем самым, теорема 1.3 доказана.

§ 5. Инвариантные меры типа мер Синая–Боуэна–Рюэлля

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 1.5.

5.1. Инвариантное семейство условных мер.

Преобразование плотностей. Пусть I – неустойчивая кривая. Напомним, что выше мы определили меру $\hat{\mu}_I$ на множестве U так, что эта мера сосредоточена на кривой I и мера любой кривой $I_1 \subset I$ определяется равенством

$$\hat{\mu}_I(I_1) = \frac{R(I_1)}{R(I)},$$

где $R(I)$ – поперечная длина кривой I .

Пусть $g(x)$ – непрерывная функция, определенная на кривой I (предполагается, что I – неустойчивая кривая). Обозначим

$$R_g(I) = \left| \int_I g r \right|,$$

а через μ_I^g обозначим меру на кривой I , абсолютно непрерывную относительно меры $\hat{\mu}_I$ и имеющую плотность $g(x)$. Очевидно, что мера μ_I^g определяется так, что для любой кривой $I_1 \subset I$ справедливо равенство

$$\mu_I^g(I_1) = \frac{R_g(I_1)}{R_g(I)} = \frac{\left| \int_{I_1} g r \right|}{\left| \int_I g r \right|}.$$

Выведем формулу преобразования мер μ_I^g под действием потока Φ_t .

Пусть I – неустойчивая кривая. Параметризуем семейство кривых $\Phi_t(I)$ параметрами $t \in [0, \tau]$, $s \in [s_1, s_2]$ так, что для каждой точки $x \in \Phi_t(I)$ справедливо $x = \psi(t, s)$, $\Phi_t(\psi(s, 0)) = \psi(s, t)$. При такой параметризации семейства $\Phi_t(I)$ кривой I соответствует $t = 0$, кривой $\Phi_\tau(I)$ соответствует $t = \tau$.

Пусть $g(x)$ – плотность меры μ_I^g , $\widehat{g}(x)$ – плотность меры $\Phi_\tau(\mu_I^g)$. Аналогично формуле, полученной при доказательстве леммы 3.1, можно показать, что для любой кривой $I_1 \subset I$, соответствующей значениям параметра $s \in [s'_1, s'_2]$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_g(I_1) &= \int_{s'_1}^{s'_2} g(\psi(s, 0)) \langle r(\psi(s, 0)); \psi'(s, 0) \rangle ds \\ &= \int_{s'_1}^{s'_2} \widehat{g}(\psi(s, \tau)) \cdot \langle r(\psi(s, \tau)); \psi'(s, \tau) \rangle ds, \end{aligned}$$

где

$$\widehat{g}(\psi(s, \tau)) = \exp\left(-\int_0^\tau \theta(\psi(s, t)) dt\right) \cdot g(\psi(s, 0)).$$

Из этой формулы следует, что для точки $x \in \Phi_t(I)$ плотность $\widehat{g}(x)$ определяется соотношением

$$\widehat{g}(x) = \exp\left(-\int_{-\tau}^0 \theta(x(t)) dt\right) g(x(-\tau)),$$

где $x(t)$ – траектория точки x .

Отметим, что функции $g(x)$ определяют ненормированные меры на кривых, если меру на кривой I определять как интеграл $\int_I gr$. Очевидно, что две функции $g(x)$, $\widetilde{g}(x)$ определяют одну и ту же меру на кривой I , если для любых точек $x, y \in I$ имеет место равенство

$$\frac{g(x)}{g(y)} = \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{g}(y)}.$$

Поэтому на самом деле мера определяется частными $g(x)/g(y)$. Для таких частных имеет место следующее соотношение: если $x, y \in \Phi_\tau(I)$, $x(t)$, $y(t)$ – траектории точек x , y , то

$$\frac{\widehat{g}(x)}{\widehat{g}(y)} = \exp\left(\int_{-\tau}^0 (\theta(y(t)) - \theta(x(t))) dt\right) \frac{g(x(-\tau))}{g(y(-\tau))}. \quad (5.1)$$

Доказательство леммы 4.4. Предположим, что при условиях леммы 4.4 мера μ_Δ на кривой Δ определяется плотностью, равной 1. Тогда мера $\Phi_{-\tau}(\mu_\Delta)$ определяется плотностью $g(x)$, для которой справедливо соотношение

$$\frac{g(x(-\tau))}{g(y(-\tau))} = \exp\left(\int_{-\tau}^0 \theta(x(t)) - \theta(y(t)) dt\right), \quad (5.2)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – траектории точек $x, y \in \Delta$.

Покажем, что интеграл в правой части равенства является ограниченной функцией.

Действительно, при условиях леммы адаптированная длина кривой $\Phi_{-t}(\Delta)$ экспоненциально убывает, причем оценка адаптированной длины равномерная по всем $b < b_0$. В окрестностях неподвижных точек подынтегральная величина

равна 0 (действительно, в окрестности неподвижной точки $\theta(x) = \lambda_1 + \lambda_2$). Следовательно, так как $\theta(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то подынтегральная величина экспоненциально убывает, причем оценки равномерны на множестве $M(b; \delta; T)$ по всем T . Из равномерной сходимости следует ограниченность, т.е. существует такая константа $C > 0$, что

$$\frac{1}{C} < \frac{g(x(-\tau))}{g(y(-\tau))} < C.$$

Тем самым, лемма 4.4 доказана.

Условная мера на строго неустойчивом многообразии. Пусть $x \in M(b; \delta)$, $W^{uu}(x)$ – строго неустойчивое многообразие точки x , x_0 – произвольная точка, принадлежащая многообразию $W^{uu}(x)$. Для точек $y \in W^{uu}(x)$ обозначим

$$l(x_0, y) = \exp\left(\int_{-\infty}^0 (\theta(x_0(t)) - \theta(y(t))) dt\right).$$

В силу экспоненциального убывания расстояния между точками $x_0(t)$, $y(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ интеграл в правой части сходится. Более того, интеграл сходится равномерно на множестве

$$\{(x, y) : x \in M(b; \delta), y \in W^{uu}(x)\}.$$

Поэтому функция $l(x_0, y)$ является непрерывной.

Определим условную меру на некоторой кривой $W \subset W^{uu}(x)$ так, что мера μ_W совпадает с мерой μ_W^l , определенной выше. Очевидно, что эта мера определяется соотношением

$$\mu_W(I) = \int_I \tilde{r} \left(\int_W \tilde{r} \right)^{-1},$$

где $\tilde{r}(x) = l(x_0, x)r(x)$.

Из очевидного соотношения $l(x_1, x_0)l(x_0, y) = l(x_1, y)$ следует, что мера μ_W не зависит от выбора точки $x_0 \in W^{uu}(x)$.

Инвариантность семейства условных мер. Инвариантность семейства мер μ_W означает, что

$$\Phi_{t*}\mu_W = \mu_{\Phi_t(W)}.$$

Это означает, что для каждого многообразия W и каждой кривой $I \subset W$ справедливо

$$\mu_W(I) = \mu_{\Phi_t(W)}(\Phi_t(I)).$$

Свойство инвариантности семейства условных мер легко выводится из формулы (5.1) преобразования плотностей.

Непрерывность семейства условных мер. Непрерывность семейства условных мер означает следующее.

Для каждой непрерывной функции f , для любой точки $x \in M(b; \delta)$ и строго неустойчивого многообразия $W = W_\varepsilon^{uu}(x)$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1 b)^2/B$, определим величину

$$\bar{f}(x) = \int_W f(y) d\mu_W(y).$$

Семейство условных мер называется *непрерывным* на множествах $M(b; \delta)$, если для всякой непрерывной функции f построенная таким образом функция $\bar{f}(x)$ является непрерывной на множестве $M(b; \delta)$.

Непрерывность семейства условных мер является следствием непрерывной зависимости многообразия $W^{uu}(x)$ от точки x на множестве $M(b; \delta)$ и непрерывности функции $l(x_0, x)$.

Следствием непрерывности семейства условных мер является следующее утверждение.

ЛЕММА 5.1. Пусть x_n – последовательность точек, принадлежащая некоторому множеству $M(b; \delta)$ и сходящаяся к точке x . Обозначим через W_n многообразие $W_\varepsilon^{uu}(x_n)$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1 b)^2/B$, через W обозначим многообразие $W_\varepsilon^{uu}(x)$. Тогда последовательность мер μ_{W_n} сходится к мере μ_W в $*$ -слабой топологии.

Существование SBR-мер. Рассмотрим произвольную точку $x \in M(b; \delta)$ и кривую $I = W^{uu}(x)$. Обозначим через μ_t меру, сосредоточенную на кривой $\Phi_t(I)$ и определенную равенством $\mu_t = \Phi_t(\mu_I)$.

Из теоремы о возвратности следует, что для любого $b \in (0, b_0)$ найдется такое $T = T(b)$, что если $t > T(b)$, то

$$\mu_t(\widetilde{M}(b; \delta)) \geq 1 - N_0 b^\varkappa. \quad (5.3)$$

Следовательно, это же неравенство имеет место при достаточно больших T и для меры $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t dt$.

Нетрудно показать, что для предела последовательности мер в $*$ -слабой топологии мера компактного множества не может быть ниже предела мер этого множества. Поэтому неравенство (5.3) имеет место и для предельной меры последовательности $\tilde{\mu}_m = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \mu_t dt$ для любой последовательности $T_m \rightarrow \infty$. Предельная мера является инвариантной.

Так как семейство многообразий $W^{uu}(x)$ непрерывно зависит от точки x на множестве $M(b; \delta)$ и семейство условных мер на $W^{uu}(x)$ тоже непрерывно зависит от точки x на множестве $M(b; \delta)$, то предельная мера последовательности $\tilde{\mu}_m$ обладает свойством условной абсолютной непрерывности. Следовательно, предельная мера – это SBR-мера.

Итак, существование SBR-мер доказано.

5.2. Разбиение на эргодические компоненты. Для описания разбиения на эргодические компоненты мы будем использовать идею, восходящую к Хопфу; при доказательстве эргодичности геодезического потока он использовал тот факт, что все точки устойчивого или неустойчивого многообразия принадлежат одной эргодической компоненте.

Обозначим через Λ^+ множество таких точек $x \in \widetilde{M}(0, \delta)$, что для всякой непрерывной функции f существует предел

$$f_+(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \quad (5.4)$$

(здесь $x(t)$ – траектория точки x); через Λ^- обозначим множество таких точек $x \in M(\delta)$, что для всякой непрерывной функции f существует предел

$$f_-(x) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{|T|} \int_T^0 f(x(t)) dt. \quad (5.5)$$

Согласно эргодической теореме Биркгофа–Хинчина множества Λ^+ и Λ^- имеют полную меру относительно любой инвариантной меры. Следовательно, эти множества непусты.

Очевидно, что множества Λ^+ , Λ^- инвариантны. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Если $x \in \Lambda^+$, $y \in W^{ss}(x)$, то y тоже принадлежит множеству Λ^+ и для всякой непрерывной функции f справедливо равенство $f_+(x) = f_+(y)$; если $x \in M(b; \delta) \cap \Lambda^-$, $y \in W^{uu}(x)$, то $y \in \Lambda^-$ и для всякой непрерывной функции f имеет место равенство $f_-(x) = f_-(y)$.

Обозначим через Λ^0 множество, состоящее из таких точек $x \in \widetilde{M}(0, \delta)$, что выполнено следующее свойство.

Существует такое множество $A \subset W_{gl}^{uu}(x)$ полной меры, что $A \subset \Lambda^+$ и для всякой непрерывной функции f и любых точек $z_1, z_2 \in A$ имеет место равенство $f_+(z_1) = f_+(z_2)$.

Множество Λ^0 имеет полную меру. Покажем, что множество Λ^0 имеет полную меру относительно любой SBR-меры.

Обозначим через Λ' множество таких точек $x \in \Lambda^- \cap M(0, \delta)$, что для всякой непрерывной функции f имеет место равенство $f_-(x) = f_+(x)$. Из эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина следует, что множество Λ' имеет полную меру (по отношению к любой инвариантной мере).

Через $\Lambda^{0'}$ обозначим множество таких точек $x \in \Lambda'$, что:

- 1) почти все точки многообразия $W^{uu}(x)$ (по отношению к построенной выше условной мере) принадлежат множеству Λ^+ ;
- 2) существует множество $A \subset W^{uu}(x)$ полной условной меры такое, что $A \subset \Lambda^+$ и для всякой непрерывной функции f и для всех точек $z \in A$ справедливо равенство $f_+(z) = f_-(z)$.

Так как величины $f_-(z)$ для всех точек $z \in W^{uu}(x)$ одинаковы, то и величины $f_+(z)$, $z \in A$, одинаковы.

Пусть $x \in M(b; \delta)$. Определим множество A_ε как объединение локальных многообразий $W_\varepsilon^{uu}(y)$, $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap M(b; \delta)$ (см. определение SBR-меры во введении). Если множество A_ε имеет положительную меру, то разбиение на множества $W_\varepsilon^{uu}(y)$ измеримо, и условная мера на многообразиях $W_\varepsilon^{uu}(y)$ совпадает с построенной выше.

Так как множество Λ' является множеством полной меры, то объединение многообразий $W_\varepsilon^{uu}(y)$, $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap M(b; \delta)$, содержащих множество полной условной меры, принадлежащее множеству Λ' , имеет полную меру.

Из этих рассуждений следует, что множество $\Lambda^{0'}$ является множеством полной меры.

Очевидно, что если отрицательная полутраектория точки x попадает в множество $\Lambda^{0'} \cap M(b; \delta)$ бесконечное число раз, то $x \in \Lambda^0$. Следовательно, множество Λ^0 является множеством полной меры.

Множество $\Lambda^0 \cap M(b; \delta)$ замкнуто. Действительно, если последовательность точек $x_n \in \Lambda^0 \cap M(b; \delta)$ сходится к точке x , то $x \in M(b; \delta)$, а из абсолютной непрерывности семейства многообразий $W^s(y)$ и сходимости $W^{uu}(x_n)$ к многообразию $W^{uu}(x)$ следует, что $x \in \Lambda^0$.

Классы эквивалентности. Для точек $x \in \Lambda^0$ мы будем обозначать через $f_+(W^{uu}(x))$ величину $f_+(y)$ для точек $y \in W^{uu}(x)$, образующих множество полной условной меры в $W^{uu}(x)$.

Разобьем множество Λ^0 на классы эквивалентности. Точки $x, y \in \Lambda^+$ будем называть *эквивалентными* ($x \sim y$), если для всякой непрерывной функции f имеет место равенство $f_+(W^{uu}(x)) = f_+(W^{uu}(y))$.

Из абсолютной непрерывности семейства многообразий $W^s(x)$ следует, что если $x \in \Lambda^0$, $z \in W^s(x) \cap \Lambda^0$, то $x \sim z$. Отсюда следует, что на самом деле все точки множества $W^s(x) \cap M(0, \delta)$ лежат в множестве Λ^0 и эквивалентны.

Очевидно, что каждый класс эквивалентности инвариантен.

Пусть Λ_1^0 – некоторый класс эквивалентности, $x \in M(b; \delta) \cap \Lambda_1^0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $y \in \Lambda^0 \cap M(b, \delta)$ принадлежит ε -окрестности точки x , то $y \in \Lambda_1^0$.

Действительно, пусть точка y принадлежит ε -окрестности точки x , B_ε – ε -окрестность точки x в центрально-неустойчивом многообразии $W^{cu}(x)$. Тогда для каждой точки $z \in B_\varepsilon$ найдется единственная точка $z_1 \in W^{cu}(y) \cap W^{ss}(z)$. Обозначим через π отображение множества B_ε в множество $W^{cu}(y)$, переводящее точку z в точку $z_1 = W^{cu}(y) \cap W^{ss}(z)$ (напомним, что отображение π называется *отображением голономии*).

Пусть $A \subset B_\varepsilon$ – множество таких точек $z \in B_\varepsilon$, что для любой непрерывной функции f имеет место равенство $f_+(z) = f_-(x)$. Из определения множества Λ^0 следует, что множество A имеет полную меру в B_ε . Из абсолютной непрерывности слоения на множества $W^{ss}(z)$ следует, что $\pi(A)$ имеет полную меру в множестве $\pi(B_\varepsilon)$. Так как для любой непрерывной функции f имеет место равенство $f_+(z) = f_+(\pi(z))$, то для почти всех точек $z_1 \in \pi(B_\varepsilon)$ имеет место равенство $f_+(z_1) = f_-(x)$. Но по определению множества Λ^0 для почти всех точек $z_1 \in W^{uu}(y)$ имеет место равенство $f_+(z_1) = f_-(y)$. Следовательно, $f_-(x) = f_-(y)$, и потому $x \sim y$.

В качестве следствия из этих рассуждений получаем, что для любого $b > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что если Λ_1^0, Λ_2^0 – различные классы эквивалентности, то расстояние между множествами $\Lambda_1^0 \cap M(b; \delta)$, $\Lambda_2^0 \cap M(b; \delta)$ больше чем ε . Так как мера множества $M(b; \delta)$ для любого достаточно малого $b > 0$ и любой SBR-меры положительна, то количество классов эквивалентности конечно.

Обозначим через $\Lambda_1^0, \dots, \Lambda_m^0$ построенные выше классы эквивалентности. Очевидно, что всякое множество Λ_j^0 инвариантно. Определим SRB-меру μ_j , сосредоточенную на множестве Λ_j^0 , так, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\int f(x) d\mu_j(x) = f_+(W^{uu}(x)).$$

Мера μ_j эргодическая, так как имеется множество N полной меры такое, что для точек $x, y \in N$ и для всякой непрерывной функции f имеет место равенство $f_+(x) = f_+(y)$.

Существенные точки. Назовем точку $x \in \Lambda_j^0$ *b-существенной*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu_j(O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)) > 0.$$

Отметим, что определение существенной точки похоже на определение точки плотности. На самом деле существенная точка – это точка плотности сужения меры μ_j на множество $M(b; \delta)$.

Далее обозначим через $\Lambda_{j,b}$ множество *b-существенных* точек $x \in \Lambda_j^0$. Очевидно, что $\Lambda_{j,b}$ – носитель сужения меры μ_j на множество $M(b, \delta)$ (напомним, что носитель меры – это множество таких точек, что любая их окрестность имеет положительную меру). Точку назовем *существенной*, если она является *b-существенной* для какого-нибудь $b > 0$. Множество существенных точек, принадлежащих классу Λ_j^0 , обозначим через $\hat{\Lambda}_j$. Очевидно, что

$$\hat{\Lambda}_j = \bigcup_{b>0} \Lambda_{j,b}.$$

Множества $\hat{\Lambda}_j$ обладают следующими свойствами.

1. Если $x \in \hat{\Lambda}_j$, то $W^{uu}(x) \subset \hat{\Lambda}_j$.
2. Любая окрестность точки $x \in \hat{\Lambda}_j$ имеет положительную меру.
3. Множества $\hat{\Lambda}_j \cap M(b; \delta)$ замкнутые.
4. Если $x \in \hat{\Lambda}_j$, то некоторая окрестность точки x лежит в области притяжения множества $\hat{\Lambda}_j$.
5. Если $\hat{\Lambda}_j$ не содержит неподвижных точек, то $\hat{\Lambda}_j$ – гиперболический аттрактор.

В качестве следствия получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 5.2. *Для всякой SRB-меры существует не более конечного количества эргодических компонент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного выше следует, что имеется не более конечного количества классов эквивалентности Λ_i . Каждый класс эквивалентности, очевидно, инвариантен. Поток на каждом классе эквивалентности эргодичен, так как для любой непрерывной функции f и почти всех точек $x \in \Lambda_i$ величины $f_+(x)$, $f_-(x)$ одинаковы.

Лемма 5.2 доказана.

Определение множеств Λ_j . Положим

$$\Lambda_j = \text{clos}(\hat{\Lambda}_j).$$

Плотность множества периодических траекторий. Доказательство плотности множества периодических траекторий основано на известных идеях. Первая идея состоит в том, что мы применяем теорему А. Пуанкаре о возвращении. Вторая идея состоит в использовании теоремы о существовании гиперболической неподвижной точки. Приведенное ниже доказательство по существу моделирует доказательство Д. В. Аносова плотности множества периодических траекторий для потока Аносова с гладкой инвариантной мерой (см. [5]).

По определению множеств Λ_j и мер μ_j в любой окрестности любой точки $x \in \Lambda_j$ имеется существенная точка. Поэтому достаточно доказать, что в любой

окрестности любой существенной точки имеется периодическая точка, которая в свою очередь является существенной.

Пусть x – b -существенная точка, ε – достаточно малое число. Согласно теореме А. Пуанкаре о возвращении почти любая точка из множества $O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)$ возвращается в это множество.

Пусть $x_1 \in O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)$ – такая точка, а $T > 0$ – такое число, что $x_2 = \Phi_T(x_1) \in O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)$, причем T достаточно велико. Обозначим через F отображение голономии вдоль многообразий $W^s(y)$ множества $W^{uu}(x_1)$ в множество $W^{uu}(x_2)$. Из абсолютной непрерывности слоения на многообразия $W^s(y)$ и из ограниченности якобиана следует, что найдется такая константа $C > 0$, что для любых точек $y_1, y_2 \in W^{uu}(x_2)$ справедливо неравенство $R[F(y_1), F(y_2)] < CR[y_1, y_2]$, где через $[y_1, y_2]$ (соответственно $[F(y_1), F(y_2)]$) обозначается отрезок кривой $W^{uu}(x_2)$, заключенный между точками y_1, y_2 (соответственно отрезок кривой $W^{uu}(x_1)$, заключенный между точками $F(y_1), F(y_2)$), а $R[y_1, y_2]$, как и выше, равно интегралу от формы r по соответствующей кривой.

Если T достаточно велико, то отображение $G = F \cdot \Phi_{-T}$ многообразия $W^{uu}(x_2)$ на себя является сжимающим по отношению к метрике, определяемой величиной $R(\cdot)$. Действительно, из предыдущего следует, что

$$R[\Phi_{-T}(y_1), \Phi_{-T}(y_2)] < \frac{e^{-\gamma_3 T}}{c_3} R[y_1, y_2],$$

откуда

$$R[G(y_1), G(y_2)] < \frac{Ce^{-\gamma_3 T}}{c_3}.$$

Из последнего неравенства видно, что если $(Ce^{-\gamma_3 T})/c_3 < 1$, то отображение G является сжимающим.

Из сжимаемости отображения G следует, что имеется единственная неподвижная точка этого отображения. Следовательно, существует такая точка y и такое τ , что $\Phi_{T+\tau}(y) \in W^{ss}(y)$. Так как отображение $\Phi_{t+\tau}$ является сжимающим на $W^{ss}(y)$, то существует неподвижная точка, принадлежащая многообразию $W^{ss}(y)$.

Мы показали, что в любой окрестности точки x существует периодическая точка z . Эта точка не обязательно принадлежит множеству Λ_j .

Покажем, что точка z существенная. Это следует из сформулированных далее очевидных утверждений.

ЛЕММА 5.3. *Если x – существенная точка, а точка $y = \Phi_t(x)$ принадлежит множеству $M(b; \delta)$, то y – тоже существенная точка.*

ЛЕММА 5.4. *Если y – существенная точка, а $x_1 \in W^{uu}(y)$, то x_1 – тоже существенная точка.*

ЛЕММА 5.5. *Если z – периодическая точка и многообразие $W^{ss}(z)$ содержит существенную точку, то z – тоже существенная точка.*

ЛЕММА 5.6. *Почти все точки $x \in U$ принадлежат области притяжения множеств $\bigcup_j \Lambda_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует множество A ненулевой меры, принадлежащее множеству U и состоящее из точек, не притягивающихся к множествам Λ_j . В этом случае существует неустойчивая кривая I такая, что $R(I \cap A) > 0.99 R(I)$. Рассмотрим семейство мер

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(\hat{\mu}_I) dt.$$

Как мы видели выше, предельная точка семейства мер μ_T — SBR-мера. Если бы эта мера представлялась в виде линейной комбинации мер μ_j , то почти все точки кривой I притягивались бы к одному из множеств Λ_j , что противоречит тому, что $R(I \cap A) > 0.99 R(I)$.

Лемма 5.6 доказана.

§ 6. Дальнейшие результаты и нерешенные задачи

6.1. Собственные функции, слабое перемешивание и перемешивание. Напомним некоторые определения.

Пусть Φ_t — поток, определенный на некотором множестве G с инвариантной мерой μ . Собственная функция $h(x)$, соответствующая собственному значению λ , — это такая функция, принадлежащая пространству $L_1(G, \mu)$, что для почти всех точек $x \in G$ справедливо равенство

$$h(\Phi_t(x)) = e^{i\lambda t} h(x).$$

Поток Φ_t называется *перемешивающим*, если для любых измеримых множеств A, B справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\Phi_t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Поток Φ_t называется *слабо перемешивающим*, если существует множество $K \subset \mathbb{R}$ такое, что плотность множества K равна 1 и предыдущее равенство имеет место при $t \rightarrow \infty, t \in K$.

Хорошо известно, что если эргодический поток не имеет собственных функций, то он слабо перемешивающий.

ТЕОРЕМА 6.1 (см. [5]). Пусть Φ_t — поток Аносова на замкнутом римановом многообразии M с инвариантной мерой μ такой, что для любого открытого множества $A \subset M$ справедливо $\mu(A) > 0$. Тогда либо существует собственная функция, либо поток является перемешивающим.

В первом случае существует компактное многообразие $\Pi \subset M$ такое, что:

- 1) если $x \in \Pi$, то $W^{ss}(x) \subset \Pi$, $W^{uu}(x) \subset \Pi$;
- 2) траектория всякой точки $x \in \Pi$ возвращается на Π , причем время возвращения одно и то же для всех точек $x \in \Pi$ (обозначим время возвращения через T);
- 3) диффеоморфизм Φ_T на Π является диффеоморфизмом Аносова.

В случае существования собственной функции многообразие M получается из многообразия Π с помощью следующей конструкции.

Рассмотрим множество $\Pi \times [0, T]$. В этом множестве склеим “нижнее основание” $\Pi \times \{0\}$ с “верхним основанием” $\Pi \times \{T\}$ так, что точка (x, T) склеивается с точкой $(\Phi_T(x), 0)$.

Формально в работе [5] теорема доказана для меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Но доказательство без изменений переносится на случай, рассмотренный в теореме 6.1.

Для сингулярно гиперболического потока справедлив следующий аналог теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если сингулярно гиперболический поток на эргодической компоненте Λ_j с инвариантной мерой μ_j не имеет собственной функции, то он перемешивающий.*

Известно (см. [5]), что если у потока Аносова имеется собственная функция, то ее можно изменить на множестве меры 0 так, что она станет непрерывной. Кроме того, собственная функция постоянна на строго устойчивых и строго неустойчивых многообразиях.

Для сингулярно гиперболического потока на эргодической компоненте, содержащей неподвижную точку, собственная функция не может быть непрерывной. Действительно, если предположить, что собственная функция $h(x)$ непрерывна, то на траектории $x(t)$ справедливо равенство $h(x(t)) = Ce^{i\lambda t}$, где λ – собственное число. Если $x(t)$ – траектория, приближающаяся к неподвижной точке, то в неподвижной точке имеет место разрыв.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.3. *Собственную функцию можно изменить на множестве меры 0 так, что она будет постоянной на строго устойчивых многообразиях, постоянной на строго неустойчивых многообразиях существенных точек и непрерывной на множестве b -существенных точек при любом $b > 0$.*

В работе [20] доказано, что поток типа потока Лоренца является перемешивающим. В связи с этой теоремой может показаться, что любой сингулярно гиперболический поток на эргодической компоненте, содержащей неподвижную точку, является перемешивающим. Однако это не так: имеется пример (статья готовится к печати) потока типа потока Лоренца, имеющего собственную функцию. Существенно, что в этом примере существует периодическая траектория такая, что собственная функция не постоянна на строго неустойчивом многообразии этой точки.

Пример не противоречит результату работы [20], так как в [20] использовалась модель аттрактора Лоренца, в которой поток удовлетворяет дополнительному условию.

Приведем соответствующее достаточное условие перемешивания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Неподвижная точка Q называется *перемешивающей*, если устойчивое многообразие этой точки содержит существенную точку и одна из неустойчивых сепаратрис содержит точку, принадлежащую строго неустойчивому многообразию другой существенной точки.

ТЕОРЕМА 6.5 (теорема о перемешивании). *Пусть Λ_j – эргодическая компонента сингулярно гиперболического потока, μ_j – SBR-мера на Λ_j .*

Если Λ_j содержит перемешивающую неподвижную точку, то поток на Λ_j с мерой μ_j является перемешивающим и изоморфен потоку Бернулли.

6.2. Финальные меры. Пусть K – метрический компакт с метрикой ρ . Обозначим через $C^0(K)$ множество непрерывных функций с нормой $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Пусть $L > 0$ – некоторая константа. Через $C_L(K)$ обозначим множество функций $f(x) \in C^0(K)$, удовлетворяющих условию Липшица с константой L и неравенству $\|f\| \leq 1$. Из теоремы Арцелла–Асколи следует, что $C_L(K)$ компактно в $C^0(K)$. Нетрудно показать, что линейное подпространство, порожденное функциями $f(x) \in C_L(K)$, всюду плотно в $C^0(K)$.

На множестве борелевских мер на компакте K метрики ρ_0, ρ_L определены следующими соотношениями:

$$\rho_0(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\|f\|=1} \left| \int_K f(x) d\mu_1(x) - \int_K f(x) d\mu_2(x) \right|,$$

$$\rho_L(\mu_1, \mu_2) = \sup_{f \in C_L(K)} \left| \int_K f(x) d\mu_1(x) - \int_K f(x) d\mu_2(x) \right|.$$

Кроме того, в пространстве борелевских мер на K определена топология, называемая **-слабой топологией*. Она определяется так, что последовательность мер μ_n сходится к мере μ_0 , если для каждой функции $f(x) \in C^0(K)$ справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f(x) d\mu_n(x) = \int_K f(x) d\mu(x).$$

Хорошо известно, что множество борелевских мер на K является компактным в *-слабой топологии. Можно показать, что топология в множестве мер, порожденная метрикой ρ_L , совпадает с топологией *-слабой сходимости.

Обозначим через $\mathcal{M}(b_1)$ множество мер на Λ (отметим, что не на Λ_j) таких, что:

- 1) $\mu(M(b; \delta)) > 1 - N_0 b^\varkappa$, $b \in (0, b_1)$;
- 2) μ удовлетворяет условию абсолютной непрерывности условных мер.

Через $\mathcal{M}_0$ обозначим множество $\bigcup_{b_1 > 0} \mathcal{M}(b_1)$.

Мера μ^f называется *финальной*, если она является пределом (в *-слабой топологии) некоторой последовательности мер $\Phi_{t_k}(\mu)$, $t_k \rightarrow \infty$, $\mu \in \mathcal{M}_0$.

Множество финальных мер обозначим через $\mathcal{M}^f$. Через $\rho_L(\mu, \mathcal{M}^f)$ обозначим расстояние от меры μ до множества финальных мер, т.е.

$$\rho_L(\mu, \mathcal{M}^f) = \sup_{\mu^f \in \mathcal{M}^f} \rho_L(\mu, \mu^f).$$

ТЕОРЕМА 6.6. 1. *Множество инвариантных финальных мер компактно в топологии, определяемой метрикой ρ_0 .*

2. *Для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}_0$ справедливо*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_L(\Phi_t(\mu), \mathcal{M}^f) = 0,$$

причем сходимость равномерная на каждом множестве $\mathcal{M}(b_1)$.

Финальная мера не обязательно инвариантная. Если поток слабо перемешивающий, то всякая финальная мера инвариантна. Из сформулированной теоремы и слабого перемешивания можно вывести бернуллиевость.

6.3. Возмущения сингулярно гиперболического потока. Из определения сингулярно гиперболического потока через конусы видно, что свойство потока быть сингулярно гиперболическим сохраняется при автономных возмущениях. Далее мы обсудим вопросы о сохранении некоторых свойств потока при возмущениях.

Непрерывная зависимость инвариантных мер от потока.

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть последовательность векторных полей $X_n(x)$ сходится в C^1 -топологии к векторному полю $X(x)$, причем все векторные поля $X_n(x)$ равномерно ограничены в C^2 -топологии. Обозначим через $\mathcal{M}_n^f$ множество финальных мер, соответствующих векторному полю $X_n(x)$. Пусть μ – предельная точка последовательности мер $\mu_n \in \mathcal{M}_n^f$. Тогда $\mu \in \mathcal{M}^f$.

Доказательство теоремы основано на следующих утверждениях.

1. Константы $c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, участвующие в определении сингулярно гиперболического потока, можно выбрать одинаковыми для потока, порожденного векторным полем $X(x)$, и для потоков, порожденных векторными полями $X_n(x)$.

2. Пусть $M(b; \delta), M_n(b; \delta)$ – множества, определенные выше (см. п. 2.3) для векторного поля $X(x)$ и векторных полей $X_n(x)$ соответственно. Если последовательность точек $x_n \in M_n(b; \delta)$ сходится к точке x , то $x \in M(b; \delta)$. Соответственно последовательность строго неустойчивых многообразий $W_n^{uu}(x_n)$ сходится в C^1 -топологии к многообразию $W^{uu}(x)$.

Определим на многообразиях $W_n^{uu}(x_n), W^{uu}(x)$ соответствующие условные меры $\mu_W, \mu_{n,W}$. Тогда последовательность мер $\mu_{n,W}$ сходится к мере μ_W в топологии, порожденной метрикой ρ_L .

3. При условиях предыдущего пункта для любого $T > 0$ последовательность мер $\Phi_{T,n}(\mu_{W,n})$ сходится к мере $\Phi_T(\mu_W)$.

4. Для каждого $b > 0$ сходимость (в метрике ρ_L) $\Phi_T(\mu_W) \rightarrow \mathcal{M}^f$ равномерна по всем $x \in M(b; \delta)$.

Количество эргодических компонент при возмущении. Покажем, что при возмущении потока количество эргодических компонент не увеличивается.

Действительно, пусть последовательность векторных полей $X_n(x)$ сходится к векторному полю $X(x)$. Если $\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_m^{(n)}$ – эргодические меры для потока, порожденного векторным полем $X_n(x)$, то найдутся замкнутые множества $M_1^{(n)}, \dots, M_m^{(n)}$ такие, что эти множества находятся друг от друга на расстоянии, ограниченном снизу некоторой константой ε_0 и $\mu_j^{(n)}(M_j^{(n)}) > 9/10$. В качестве этих множеств можно рассмотреть множества $M_n(b; \delta) \cap \hat{\Lambda}_j^{(n)}$ при подходящем выборе b . Если n_k – такая последовательность, что каждая мера $\mu_j^{(n)}$ сходится, то предельные меры будут таковы, что их сужения на множество $M(b; \delta)$ попарно сингулярны. Следовательно, количество эргодических компонент у потока, порожденного векторным полем $X(x)$, будет не менее m . Поэтому количество эргодических компонент у предельного потока может только увеличиться.

В частности, если предельный поток эргодический, то и все потоки, порожденные векторными полями $X_n(x)$ при достаточно больших n , эргодические. Следовательно, достаточно малое возмущение сингулярно гиперболического эргодического потока является эргодическим.

Имеются примеры, в которых количество эргодических компонент при возмущении уменьшается. В этих примерах множества Λ_1, Λ_2 имеют общие точки.

Можно показать, что если эргодические компоненты $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ являются аттракторами (т.е. существуют такие открытые множества $U_1, \dots, U_m$, что $\Lambda_j = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U_j)$), то количество эргодических компонент при возмущении сохраняется.

Устойчивость перемешивания. Аналогично определению перемешивающей неподвижной точки приведем определение устойчиво перемешивающей неподвижной точки.

Неподвижная точка Q называется *устойчиво перемешивающей*, если ее устойчивое многообразие содержит существенную точку и обе неустойчивые сепаратрисы содержат точки, принадлежащие строго устойчивым многообразиям существенных точек.

Согласно теореме о перемешивании, если все неподвижные точки являются устойчиво перемешивающими, то поток является перемешивающим на каждой эргодической компоненте, содержащей неподвижную точку.

Можно показать, что если все неподвижные точки, содержащиеся в эргодической компоненте, являются устойчиво перемешивающими, то эта эргодическая компонента является аттрактором.

Инвариантное множество Λ называется *перемешивающим аттрактором*, если на множестве Λ поток является перемешивающим (относительно SBR-меры) и существует такое открытое множество $U_0 \supset \Lambda$, что $\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U_0)$.

ТЕОРЕМА 6.8. *Если все неподвижные точки сингулярно гиперболического потока являются устойчиво перемешивающими, то каждая эргодическая компонента, содержащая неподвижную точку, является устойчиво перемешивающим аттрактором.*

С удовольствием выражаю благодарность Р. В. Плыкину, Н. Э. Клишпонт, С. В. Гонченко, Д. В. Аносову, А. М. Стёпину за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326**:1 (1998), 81–86.
- [2] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 137–160; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “An example of a wild strange attractor”, *Sb. Math.*, **189**:2 (1998), 291–314.
- [3] L. Shilnikov, “Bifurcations and strange attractors”, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, Vol. III (Beijing, China, 2002), Higher Education Press, Beijing, 2002, 349–372; [arXiv:math/0304457](#).
- [4] Е. А. Сатаев, “Некоторые свойства сингулярно гиперболических аттракторов”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 37–80; англ. пер.: E. A. Sataev, “Some properties of singular hyperbolic attractors”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 35–76.
- [5] Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. МИАН, **90**, Наука, М., 1967; англ. пер.: D. V. Anosov, “Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90** (1967).

- [6] M. W. Hirsh, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
- [7] Я. Г. Синай, “Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:1 (1968), 64–89; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Markov partitions and C-diffeomorphisms”, *Funct. Anal. Appl.*, **2**:1 (1968), 61–82.
- [8] Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, “Некоторые гладкие эргодические системы”, *УМН*, **22**:5 (1967), 107–172; англ. пер.: D. V. Anosov, Ya. G. Sinai, “Some smooth ergodic systems”, *Russian Math. Surveys*, **22**:5 (1967), 103–167.
- [9] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmospheric Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [10] B. Saltzman, “Finite amplitude free convections as an initial value problem – I”, *J. Atmospheric Sci.*, **19**:2 (1962), 329–341.
- [11] В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, “О возникновении и структуре аттрактора Лоренца”, *Докл. АН СССР*, **234**:2 (1977), 336–339; англ. пер.: V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, L. P. Shil’nikov, “On the origin and structure of the Lorenz attractor”, *Sov. Phys. Dokl.*, **22** (1977), 253–255.
- [12] В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, Тр. ММО, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 150–212; англ. пер.: V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, L. P. Shil’nikov, “On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2** (1983), 153–216.
- [13] J. Guckenheimer, “A strange, strange attractor”, *The Hopf bifurcation and its applications*, New York–Heidelberg–Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [14] J. Guckenheimer, R. F. Williams, “Structural stability of Lorenz attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50**:1 (1979), 59–72.
- [15] J. A. Yorke, E. D. Yorke, “Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model”, *J. Statist. Phys.*, **21**:3 (1979), 263–277.
- [16] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, “Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz”, *Comm. Math. Phys.*, **67**:2 (1979), 93–108.
- [17] Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, “Стохастичность аттрактора в модели Лоренца”, *Нелинейные волны*, М., Наука, 1979, 212–226.
- [18] Ya. B. Pesin, “Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**:1 (1992), 123–151.
- [19] Е. А. Сатаев, “Гиббсовские меры для одномерных аттракторов гиперболических отображений с особенностями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1328–1344; англ. пер.: E. A. Sataev, “Gibbs measures for one-dimensional attractors of hyperbolic mappings with singularities”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:3 (1993), 567–580.
- [20] S. Luzzatto, I. Melbourne, F. Paccaut, “The Lorenz attractor is mixing”, *Comm. Math. Phys.*, **260**:2 (2005), 393–401.
- [21] M. Holland, I. Melbourne, “Central limit theorems and invariance principles for Lorenz attractors”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **76**:2 (2007), 345–364.
- [22] V. Araujo, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, M. Viana, “Singular-hyperbolic attractors are chaotic”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:5 (2009), 2431–2485.
- [23] A. Arroyo, E. R. Pujals, “Dynamical properties of singular-hyperbolic attractors”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:1 (2007), 67–87.
- [24] C. Bonatti, L. Díaz, E. R. Pujals, “A C^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources”, *Ann. of Math.* (2), **158**:2 (2003), 355–418.
- [25] L. J. Díaz, E. R. Pujals, R. Ures, “Partial hyperbolicity and robust transitivity”, *Acta Math.*, **183**:1 (1999), 1–43.

- [26] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Singular hyperbolic systems”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:11 (1999), 3393–3401.
- [27] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers”, *Ann. of Math. (2)*, **160**:2 (2004), 375–432.
- [28] C. A. Morales, M. J. Pacifico, “Mixing attractors for 3-flows”, *Nonlinearity*, **14**:2 (2001), 359–378.
- [29] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Strange attractors across the boundary of hyperbolic systems”, *Comm. Math. Phys.*, **211**:3 (2000), 527–558.
- [30] C. A. Morales, M. J. Pacifico, “A dichotomy for three-dimensional vector fields”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:5 (1575–1600).
- [31] C. M. Carballo, C. A. Morales, M. J. Pacifico, “Homoclinic classes for generic C^1 vector fields”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:2 (2003), 403–415.
- [32] M. J. Pacifico, E. R. Pujals, J. L. Vieitez, “Robustly expansive homoclinic classes”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **25**:1 (2005), 271–300.
- [33] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
- [34] Я. Б. Песин, *Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности*, М., МЦНМО, 2006; пер. с англ.: Ya. B. Pesin, *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*, Zur. Lect. Adv. Math., European Math. Soc., Zürich, 2004.

Е. А. Сатаев (E. A. Sataev)

Обнинский государственный

технический университет атомной энергетики

E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию

10.11.2008 и 21.09.2009