Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Подвигин,
Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные
процессы с непрерывным временем, *Матем. сб.*, 2009,
том 200, номер 5, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:05:26

УДК 517.987+519.216

И. В. Подвигин**Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы с непрерывным временем**

В работе по унификации мартингалов и эргодических средних А. Г. Качуровским были введены дискретные унифицирующие мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы. Для них им были доказаны теоремы сходимости и установлены максимальные и доминантные неравенства. Цель настоящей работы – получить аналогичные результаты для этих процессов с непрерывным временем. Кроме того, полученные результаты используются для доказательства сходимости еще одного унифицирующего процесса, связанного с подходом Дж.-К. Рота к унификации мартингалов и абелевских эргодических средних.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: эргодические средние, регулярный мартингал, положительное $L_1 - L_\infty$ сжатие.

Проблемой унификации эргодических средних и обращенных мартингалов начали заниматься с середины прошлого века. Любопытное совпадение поведения и сходство доказательств теорем сходимости для этих стохастических процессов привели к задаче о нахождении суперструктуры, унифицирующей и мартингалы, и эргодические средние. Задача была поставлена С. Какутани в 1950 г. [1]. С тех пор было разработано шесть подходов к решению этой проблемы (М. Джерисон, Дж.-К. Рота, А. и К. Ионеску-Тулча, А. М. Вершик и А. М. Стёпин, А. Г. Качуровский).

М. Джерисон доказал, что эргодические средние можно рассматривать как мартингалы на некотором пространстве с σ -конечной мерой. Дж.-К. Рота рассмотрел так называемые обобщенные мартингалы, которые унифицируют мартингалы и эргодические средние относительно суммирования по Абелю (а не по Чезаро, как в обычной эргодической теореме), и доказал теорему сходимости для этих объектов. Абстрактная эргодическая теорема Ионеску-Тулча позволяет дать единое доказательство теоремы сходимости для мартингалов и эргодических средних. Подход А. М. Вершика и А. М. Стёпина основан на рассмотрении действий локально конечных групп. Последние два подхода А. Г. Качуровского состоят в нахождении унифицирующей суперструктуры для мартингалов и эргодических средних – мартингально-эргодических (пятый подход) и эргодико-мартингальных (шестой подход) стохастических процессов.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3038.2008.1).

Обстоятельный обзор всех результатов можно найти в [2]. Рассмотрению последних двух подходов в случае непрерывного времени посвящена настоящая работа.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 приведены необходимые понятия и определения. В § 2 доказаны теоремы сходимости почти всюду и по норме. Как частные случаи из этих теорем получаются известные теоремы Неймана и Биркгофа для эргодических средних и теоремы Дуба для мартингалов. Рассмотрению максимального и доминантного неравенств посвящен § 3. В § 4 в связи с рассмотрением подхода Дж.-К. Рота приведен процесс, унифицирующий регулярные мартингалы и усреднения по Абелю, для которого доказана теорема сходимости почти всюду и по норме.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_s\}_{s \geq 0}$ – монотонное семейство σ -подалгебр σ -алгебры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\bigvee_{s \geq 0} \mathfrak{F}_s)$ в случае возрастания и $\mathfrak{F}_\infty = \bigwedge_{s \geq 0} \mathfrak{F}_s$ в случае убывания σ -подалгебр.

Через $E(X|\mathfrak{F}_s)$ обозначим условное математическое ожидание случайной величины X относительно σ -алгебры $\mathfrak{F}_s$. Различные представители класса эквивалентности $[E(X|\mathfrak{F}_s)]$ (класс функций п.в. равных $E(X|\mathfrak{F}_s)$) будут обозначаться $E_1(X|\mathfrak{F}_s)$, $E_2(X|\mathfrak{F}_s)$ и т.д.

С понятием условного ожидания тесно связано понятие мартингала. Стохастический процесс $\{X_s, \mathfrak{F}_s, s \in S, S \subset \mathbb{R}\}$ называется *мартингалом (субмартингалом)*, если для любых $s, t \in S$, $s < t$,

$$E|X_s| < \infty, \quad E(X_t|\mathfrak{F}_s) = (\geq) X_s.$$

Стохастический процесс называется *обращенным мартингалом*, если в этом определении поменять условие $s < t$ на $t < s$. В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярные мартингалы, или мартингалы Леви, т.е. мартингалы вида $X_s = E(X|\mathfrak{F}_s)$, где $E|X| < \infty$.

Когда множество параметров $S = \mathbb{R}_+$ или $S = \mathbb{R}$, будем говорить о процессе с непрерывным временем. Для таких процессов полезным инструментом исследования является понятие сепарабельности (см. [3]).

Стохастический процесс $\{X_s, s \in \mathbb{R}_+\}$ называется *сепарабельным*, если существуют последовательность s_j значений параметра процесса и множество $\Lambda \subset \Omega$, $\lambda(\Lambda) = 0$, такие, что для любого $\omega \notin \Lambda$ и любого открытого интервала I

$$\sup_{s \in I} X_s(\omega) = \sup_{s_j \in I} X_{s_j}(\omega), \quad \inf_{s \in I} X_s(\omega) = \inf_{s_j \in I} X_{s_j}(\omega).$$

Можно считать, что последовательность s_j пробегает множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (более подробно об этом см. [3; гл. II]). Основным фактом, использующим это понятие, является утверждение о том, что регулярные мартингалы можно считать сепарабельными [3; гл. VII, § 11].

Определим теперь другой класс объектов. Пусть $\{U^t, t \geq 0\}$ – полугруппа положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий в L_1 , т.е.

$$U^t U^s = U^{t+s}, \quad t, s \geq 0, \quad U^0 = Id,$$

$$\|U^t\|_1 \leq 1, \|U^t\|_\infty \leq 1 \text{ для всех } t \geq 0, \quad U^t f \geq 0 \text{ при } f \geq 0 \text{ для всех } t \geq 0.$$

В § 3 мы будем считать рассматриваемую полугруппу $\{U^t, t \geq 0\}$ *сильно непрерывной*, т.е. удовлетворяющей условию $\lim_{s \rightarrow t} \|U^s f - U^t f\|_1 = 0$ для каждого $f \in L_1$ и $t \geq 0$.

Оператором усреднения, или усредняющим оператором A_t относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$ положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий, называется оператор, имеющий вид

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t U^\tau f(\omega) d\tau, \quad f \in L_1, \quad t > 0.$$

Здесь интеграл можно понимать в смысле Бохнера. Однако в § 4 мы будем подразумевать, что для почти каждого ω функция $U^t f(\omega)$ интегрируема по Лебегу на любом конечном интервале $[0, t]$. Такой подход рассматривался в [4; с. 149].

Используя операторы усреднения и условного математического ожидания и беря их композицию в любом порядке, получим процессы, называемые мартингалльно-эргодическими и эргодико-мартингалльными. Дадим формальное определение.

Мартингалльно-эргодическим процессом (см. [2]) называется двухпараметрический стохастический процесс вида $\{E(A_t f | \mathfrak{F}_s)\}_{t>0, s \geq 0}$, где $E(\cdot | \mathfrak{F}_s)$ – оператор условного ожидания, $\mathfrak{F}_s$ – монотонное семейство σ -подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$, A_t – усредняющий относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$ положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий оператор и $f \in L_1$.

Эргодико-мартингалльным процессом (см. [2]) называется двухпараметрический стохастический процесс вида $\{A_t E(f | \mathfrak{F}_s)\}_{t>0, s \geq 0}$. Здесь также $E(\cdot | \mathfrak{F}_s)$ – оператор условного ожидания, $\mathfrak{F}_s$ – монотонное семейство σ -подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$, A_t – усредняющий относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$ положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий оператор и $f \in L_1$.

Как видно из структуры этих процессов, они образуют естественную двойственную пару, каждый из них унифицирует как регулярные мартингалы, так и эргодические средние. Действительно, если $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ (в этом случае $E(A_t f | \mathfrak{F}_s) = A_t E(f | \mathfrak{F}_s) = A_t f$ для любого t), то данный стохастический процесс совпадает с эргодическими средними. Если же $U^t \equiv Id$ (в этом случае $E(A_t f | \mathfrak{F}_s) = A_t E(f | \mathfrak{F}_s) = E(f | \mathfrak{F}_s)$ для любого s), то получаем регулярный мартингал.

На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения для предельных функций:

$$f_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t f(\omega),$$

$$f^*(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} E(f_\infty | \mathfrak{F}_s)(\omega), \quad f_*(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t E(f | \mathfrak{F}_\infty)(\omega).$$

Обоснование существования этих пределов будет приведено ниже в доказательствах соответствующих теорем.

§ 2. Теоремы сходимости

Благодаря своей структуре оба рассматриваемых процесса оказываются сходящимися и по норме, и почти всюду. Этот факт показывает, что они унифицируют мартингалы и эргодические средние не только по форме, но и по характерным для этих процессов свойствам. В этом параграфе мы докажем их сходимость в L_p , $p \in [1, \infty)$, и почти всюду (теоремы 1 и 2).

2.1. Сходимость в L_p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$; тогда

$$E(A_t f | \mathfrak{F}_s) \rightarrow f^* \text{ в } L_p \text{ при } t, s \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$A_t E(f | \mathfrak{F}_s) \rightarrow f_* \text{ в } L_p \text{ при } t, s \rightarrow \infty. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 1 в вырожденном случае $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ совпадает с утверждением статистической эргодической теоремы. Вырожденный случай $U^t \equiv Id$ дает утверждения теорем о сходимости по норме прямого и обратного мартингалов.

Для доказательства теоремы 1 нам необходима следующая техническая

ЛЕММА 1. Пусть $\{a_t\}_{t>0}$ – семейство действительных чисел таких, что для любой последовательности t_n , сходящейся к ∞ , последовательность a_{t_n} сходится к a . Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t = a$.

Доказательство леммы 1 легко проводится от противного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Воспользуемся идеей доказательства аналогичной теоремы в дискретном случае (см. [2]). Докажем утверждение (1). Оценим норму разности:

$$\|E(A_t f | \mathfrak{F}_s) - f^*\|_p \leq \|E(A_t f | \mathfrak{F}_s) - E(f_\infty | \mathfrak{F}_s)\|_p + \|E(f_\infty | \mathfrak{F}_s) - E(f_\infty | \mathfrak{F}_\infty)\|_p.$$

Второе слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ в силу леммы 1 и теоремы Леви о сходимости регулярных мартингалов в L_p (см. [3]). Первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\|E(A_t f | \mathfrak{F}_s) - E(f_\infty | \mathfrak{F}_s)\|_p = \|E(A_t f - f_\infty | \mathfrak{F}_s)\|_p \leq \|A_t f - f_\infty\|_p,$$

в силу линейности и сжатия в L_p оператора условного математического ожидания (см. [5]). Правая часть в последнем неравенстве сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ по эргодической теореме Данфорда–Шварца (см. [4; с. 152]).

Аналогичные рассуждения применяем для доказательства утверждения (2).

Используя свойство сжатия в L_p оператора усреднения, получим неравенства

$$\begin{aligned} \|A_t E(f | \mathfrak{F}_s) - f_*\|_p &\leq \|A_t E(f | \mathfrak{F}_s) - A_t E(f | \mathfrak{F}_\infty)\|_p + \|A_t E(f | \mathfrak{F}_\infty) - f_*\|_p \\ &\leq \|E(f | \mathfrak{F}_s) - E(f | \mathfrak{F}_\infty)\|_p + \|A_t E(f | \mathfrak{F}_\infty) - f_*\|_p. \end{aligned}$$

По лемме 1, теореме Леви о сходимости регулярных мартингалов в L_p (см. [3]) и теореме Данфорда–Шварца (см. [4; с. 152]) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $t, s \rightarrow \infty$.

2.2. Сходимость почти всюду. В отличие от дискретного случая, когда при доказательстве сходимости может возникнуть лишь не более чем счетное число множеств меры нуль, на которых сходимости не будет, в непрерывном случае число таких множеств может быть несчетным. Поэтому основной идеей доказательства является выбор представителей из класса эквивалентных функций, для которых удается избежать такой несчетности. Если понимать сходимость стохастического процесса с непрерывным временем как сходимость вдоль любой последовательности значений параметра процесса, то можно доказать сходимость почти всюду мартингально-эргодических процессов, но для каждой такой последовательности будет существовать свое множество сходимости. В п. а) теоремы 2 находится одно множество для всех последовательностей значений параметра процесса. В эргодико-мартингальном случае (п. б) теоремы 2) мы опираемся на тот факт, что оператор условного ожидания является положительным оператором. Это утверждение по сути уже содержит выбор представителей из класса эквивалентных функций.

ТЕОРЕМА 2. Для функции $f \in L_1$ справедливы следующие утверждения.

- а) Если $\sup_{t>0} |A_t f| \leq h$, $Eh < \infty$, то для каждого $t > 0$ и $s \geq 0$ условные математические ожидания $E(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ можно выбрать таким образом, что $E(A_t f | \mathfrak{F}_s) \rightarrow f^*$ н.в. при $t, s \rightarrow \infty$.
- б) Если $\sup_{s \geq 0} |E(f | \mathfrak{F}_s)| \leq h$, $Eh < \infty$, то $A_t E(f | \mathfrak{F}_s) \rightarrow f_*$ н.в. при $t, s \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы 2 в вырожденном случае $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ содержит утверждения индивидуальной эргодической теоремы. Вырожденный случай $U^t \equiv Id$ включает утверждения теорем о сходимости почти всюду обращенного и регулярного прямого мартингалов. Кроме того, если $f \in L \log L$, то условия из п. а) и б) теоремы 2 выполняются.

Ключевым утверждением для доказательства п. а) теоремы 2, отличающим его от дискретного случая, является следующая

ЛЕММА 2. Пусть f – неотрицательная $\mathfrak{F}$ -измеримая функция такая, что $\sup_{t>0} |A_t f| \leq h$, $Eh < \infty$. Тогда для каждого $t > 0$ и $s \geq 0$ условные математические ожидания $E(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ можно выбрать таким образом, что для любых $\tau > 0$, $\sigma \geq 0$ справедливо равенство

$$\sup_{t>\tau} \sup_{s>\sigma} E(A_t f | \mathfrak{F}_s) = \sup_{t>\tau, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s>\sigma, s \in \mathbb{Q}} E(A_t f | \mathfrak{F}_s) \quad (3)$$

на множестве полной меры, не зависящем от τ и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея выбора представителей заключается в переопределении процесса $\{E(A_t f | \mathfrak{F}_s)\}_{t>0, s \geq 0}$ на тех множествах, где он обладает плохими свойствами, о которых речь пойдет ниже.

Выберем представителя $E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s) \in [E(A_t f | \mathfrak{F}_s)]$ таким образом, чтобы для любого $t > 0$ процесс $\{E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s)\}_{s \geq 0}$ стал сепарабельным мартингалом (см. [3]). Тогда найдется $\Omega_t \subset \Omega$, $\lambda(\Omega_t) = 0$, такое, что для любого $\sigma \geq 0$ на $\Omega \setminus \Omega_t$ справедливо равенство

$$\sup_{s>\sigma} E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s) = \sup_{s>\sigma, s \in \mathbb{Q}} E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s). \quad (4)$$

Первые множества с плохими свойствами – это множества Ω_t . Найдем еще несколько таких же множеств меры нуль.

а) Из того, что $f \geq 0$, следует, что для любого $t > 0$ в силу положительности оператора усреднения $A_t f \geq 0$. Далее, из свойств оператора условного математического ожидания следует, что найдутся множества $\Omega_{t,s} \subset \Omega$, $\lambda(\Omega_{t,s}) = 0$, такие, что на $\Omega \setminus \Omega_{t,s}$ верно неравенство $E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s) \geq 0$.

б) Из условия леммы $\sup_{t>0} |A_t f| \leq h$, $Eh < \infty$, по теореме о предельном переходе под знаком условного математического ожидания (см. [7]) следует, что найдутся множества $\Omega'_{t,s} \subset \Omega$, $\lambda(\Omega'_{t,s}) = 0$, такие, что на $\Omega \setminus \Omega'_{t,s}$ верно $E_1(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s) \rightarrow E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ для некоторой фиксированной последовательности $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, сходящейся к t при $n \rightarrow \infty$.

Из этих множеств сконструируем “большие” множества меры нуль:

$$\tilde{\Omega}_t = \Omega_t \cup \left(\bigcup_{\tau, \sigma \in \mathbb{Q}} \Omega_{\tau, \sigma} \right) \cup \left(\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} \Omega'_{t, s} \right), \quad 0 < t \leq \infty.$$

Множество $\tilde{\Omega}_\infty$ определяется оператором $A_\infty f = f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t f$.

Используя эти множества, выберем новых представителей, а именно

$$E_2(A_t f | F_s) = \begin{cases} E_1(A_t f | \mathfrak{F}_s) & \text{на } \Omega \setminus \tilde{\Omega}_t, \\ 0 & \text{на } \tilde{\Omega}_t. \end{cases} \quad (5)$$

Докажем, что это и есть искомый стохастический процесс. Для этого покажем, какими свойствами он обладает.

1. Всюду в Ω справедливо

$$\begin{aligned} (\forall s \in \mathbb{Q}^+)(\forall \tau > 0) \sup_{t > \tau, t \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) &\geq 0, \\ (\forall t \in \mathbb{Q}^+)(\forall \sigma \geq 0) \sup_{s > \sigma, s \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) &\geq 0, \\ (\forall \tau > 0)(\forall \sigma \geq 0) \sup_{s > \sigma, s \in \mathbb{Q}} \sup_{t > \tau, t \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) &\geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Для этого процесса всюду в Ω верно

$$(\forall \sigma \geq 0) \sup_{s > \sigma} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) = \sup_{s > \sigma, s \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s). \quad (7)$$

Действительно, если $\omega \notin \tilde{\Omega}_t$, то это следует из (5) и (4), если же $\omega \in \tilde{\Omega}_t$, то снова из (5).

3. Пусть $\Lambda = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}^+} \tilde{\Omega}_t$; тогда на $\Omega \setminus \Lambda$ верно

$$(\forall s \in \mathbb{Q}^+)(\forall \tau > 0) \sup_{t > \tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) = \sup_{t > \tau, t \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s). \quad (8)$$

Действительно, возьмем $\omega \notin \Lambda$. Нетрудно видеть, что существует $t' = t'(\omega, \tau)$, $\tau \leq t' \leq \infty$, такое, что верно одно из следующих двух условий:

- (i) $\sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = E_2(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega);$
- (ii) $(\exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \lim_{t_n \rightarrow t'} E_2(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega).$

Рассмотрим случай (i).

Пусть $\omega \notin \tilde{\Omega}_{t'}$; тогда $E_2(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = E_1(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega)$. Возьмем последовательность $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, участвующую в определении множества $\Omega'_{t',s}$. Тогда $E_1(A_{t'_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \rightarrow E_1(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\omega \notin \Lambda$, то

$$E_1(A_{t'_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = E_2(A_{t'_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega).$$

Собирая все вместе, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) &= E_2(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = E_1(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_1(A_{t'_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_2(A_{t'_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega), \end{aligned}$$

что и доказывает (8).

Если же $\omega \in \tilde{\Omega}_{t'}$, то (8) вытекает из следующей цепочки:

$$0 = E_2(A_{t'} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \geq \sup_{t>\tau, t \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \geq 0,$$

где последнее неравенство следует из (6).

Рассмотрим теперь случай (ii).

Если ω лежит в бесконечном числе $\tilde{\Omega}_{t_n}$, то $\lim_{t_n \rightarrow t'} E_2(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = 0$, и (8) следует из (6).

Пусть ω лежит в конечном числе $\tilde{\Omega}_{t_n}$ (можно даже считать, что не лежит ни в каком из них); тогда $E_2(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = E_1(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega)$. Для каждого t_n найдется последовательность $\{\tau_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, участвующая в определении множества $\Omega'_{t_n,s}$, такая, что $E_1(A_{\tau_{n,k}} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \rightarrow E_1(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega)$ при $k \rightarrow \infty$. Собирая все вместе, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) &= \lim_{t_n \rightarrow t'} E_2(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \lim_{t_n \rightarrow t'} E_1(A_{t_n} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} E_1(A_{\tau_{n,k}} f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} E_2(A_{\tau_{n,k}} f | \mathfrak{F}_s)(\omega), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (8).

Для $\omega \notin \Lambda$, используя (7) и (8), получаем равенство (3):

$$\begin{aligned} \sup_{t>\tau} \sup_{s>\sigma} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) &= \sup_{t>\tau} \sup_{s>\sigma, s \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \\ &= \sup_{s>\sigma, s \in \mathbb{Q}} \sup_{t>\tau} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) = \sup_{s>\sigma, s \in \mathbb{Q}} \sup_{t>\tau, t \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма 2 справедлива и в более общем случае, если вместо средних $\{A_t f\}_{t>0}$ рассматривать семейство $\{h_t\}_{t>0}$ неотрицательных $\mathfrak{F}$ -измеримых функций таких, что $\sup_{t>0} h_t \leq h$, $Eh < \infty$ и h_t непрерывна по t п.в.

Ключевым утверждением для доказательства п. б) теоремы 2 является лемма 3. Она позволит сделать переход от процессов с непрерывным временем к этим же процессам, когда параметр процесса пробегает счетное множество значений.

ЛЕММА 3 (см. [6; с. 66]). Пусть $\mathfrak{A}$ – счетное направленное множество, $L \subset L'$, где L, L' могут быть пространствами L_p , $p \geq 1$, или $L \log^m L$ на множестве конечной меры. Пусть, далее, $\{T_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – семейство положительных линейных операторов $T_\alpha: L \rightarrow L'$. Предположим, что для $f \in L$ предел $T_\infty f := \lim_\alpha T_\alpha$ существует п.в. и лежит в L' . Если $f_n \in L$, $\sup_n |f_n| \in L$ и $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ п.в., то $\lim_{\alpha, n} T_\alpha f_n = T_\infty f$ п.в.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем п. а). Пусть сначала $f \geq 0$; тогда по лемме 2 и замечанию 3 выберем условные ожидания $E(A_t f | \mathfrak{F}_s)$, $E(h_t | \mathfrak{F}_s)$ так, чтобы они удовлетворяли равенству (3). Здесь $h_t = \sup_{\tau > t} |A_\tau f - f_\infty|$. Обозначим их так же, как в лемме 2: $E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ и $E_2(h_t | \mathfrak{F}_s)$.

Из свойств условного математического ожидания следует, что найдутся множества $\Omega''_{t,s} \subset \Omega$, $\lambda(\Omega''_{t,s}) = 0$, такие, что на $\Omega \setminus \Omega''_{t,s}$ верно

$$E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) - E_1(f_\infty | \mathfrak{F}_s) \leq E_2(h_t | \mathfrak{F}_s).$$

Будем считать, что $\Omega''_{t,s}$ – минимальные по включению множества с таким свойством. Выберем теперь новых представителей:

$$E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s) = \begin{cases} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s) & \text{на } \Omega \setminus \Omega''_{t,s}, \\ E_2(h_t | \mathfrak{F}_s) + E_1(f_\infty | \mathfrak{F}_s) & \text{на } \Omega''_{t,s}. \end{cases} \quad (9)$$

Легко увидеть, что на Ω верно неравенство

$$E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s) \leq E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s). \quad (10)$$

Всюду в Ω справедливы также неравенства

$$\begin{aligned} |E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s) - f^*| &\leq |E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s) - E_1(f_\infty | \mathfrak{F}_s)| + |E_1(f_\infty | \mathfrak{F}_s) - f^*| \\ &\leq E_2(h_t | \mathfrak{F}_s) + |E_1(f_\infty | \mathfrak{F}_s) - f^*|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю п.в. при $s \rightarrow \infty$ по теореме Дуба для сепарабельных мартингалов (см. [3]).

Первое слагаемое тоже стремится к нулю п.в. при $t, s \rightarrow \infty$. Действительно, из замечания 3 следует, что п.в.

$$\lim_{t,s \rightarrow \infty} E_2(h_t | \mathfrak{F}_s) = \lim_{t,s \rightarrow \infty, t,s \in \mathbb{Q}} E_2(h_t | \mathfrak{F}_s).$$

А правая часть этого равенства равна нулю по лемме о сходимости дискретных процессов (см. [2]).

Пусть теперь f – произвольная $\mathfrak{F}$ -измеримая функция; тогда $f = f^+ - f^-$, где $f^-, f^+ \geq 0$. Выбирая условные математические ожидания $E(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ таким образом, чтобы всюду в Ω выполнялось равенство

$$E(A_t(f^+ - f^-) | \mathfrak{F}_s) = E_3(A_t f^+ | \mathfrak{F}_s) - E_3(A_t f^- | \mathfrak{F}_s),$$

и применяя доказанное утверждение для неотрицательных функций, завершаем доказательство п. а) теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для выбранных условных математических ожиданий $E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s)$ с неотрицательной функцией f справедливо п.в. равенство, аналогичное (3).

Действительно, пусть $\omega \notin \Lambda \cup \Lambda'$, где $\Lambda' = \bigcup_{t,s \in \mathbb{Q}^+} \Omega''_{t,s}$. Тогда из (3), (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{t > \tau, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s > \sigma, s \in \mathbb{Q}} E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) &= \sup_{t > \tau, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s > \sigma, s \in \mathbb{Q}} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \\ &= \sup_{t > \tau} \sup_{s > \sigma} E_2(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega) \geq \sup_{t > \tau} \sup_{s > \sigma} E_3(A_t f | \mathfrak{F}_s)(\omega), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение.

Перейдем к доказательству п. b) теоремы 2.

Шаг 1. Рассматриваем процесс $\{A_n E(f | \mathfrak{F}_k)\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ и $f \geq 0$. Применим к нему лемму 3, где $L = L' = L(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$, $T_\alpha = T_n = A_n$. По теореме Данфорда–Шварца (см. [4; с. 152]) $A_\infty f = T_\infty f = \lim_n T_n f$ существует п.в. и лежит в L' . Далее, $f_k = E(f | \mathfrak{F}_k)$, $\sup_k |f_k| \in L$ и по теореме Леви (см. [3]) $f_k \rightarrow f_\infty = E(f | \mathfrak{F}_\infty)$ п.в. при $k \rightarrow \infty$. Тогда из леммы 3 следует сходимость п.в. $A_n E(f | \mathfrak{F}_k) \rightarrow f_*$ при $n, k \rightarrow \infty$.

Шаг 2. Рассматриваем процесс $\{A_n E(f | \mathfrak{F}_s)\}_{n \in \mathbb{N}, s \geq 0}$ и $f \geq 0$. Оценим разность $|A_n E(f | \mathfrak{F}_s) - f_*|$:

$$|A_n E(f | \mathfrak{F}_s) - f_*| \leq |A_n E(f | \mathfrak{F}_s) - A_n E(f | \mathfrak{F}_k)| + |A_n E(f | \mathfrak{F}_k) - f_*|,$$

где $k = [s]$. Заметим, что $k \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, поэтому из шага 1 следует, что второе слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю п.в. Оценим первое слагаемое:

$$|A_n E(f | \mathfrak{F}_s) - A_n E(f | \mathfrak{F}_k)| = |A_n (E(f | \mathfrak{F}_s) - E(f | \mathfrak{F}_k))| \leq A_n h_k,$$

где $h_k = \sup_{k \leq s \leq k+1} |E(f | \mathfrak{F}_s) - E(f | \mathfrak{F}_k)|$. В силу сепарабельности $\{E(f | \mathfrak{F}_s)\}_{s \geq 0}$ функция h_k $\mathfrak{F}$ -измерима и, кроме того, $\sup_k h_k \leq 2h$ и $h_k \rightarrow 0$ п.в. при $k \rightarrow \infty$. Тогда из предыдущего шага вытекает $A_n h_k \rightarrow 0$, что завершает шаг 2.

Шаг 3. Рассматриваем процесс $\{A_t E(f | \mathfrak{F}_s)\}_{t > 0, s \geq 0}$ и $f \geq 0$. В силу неотрицательности $E(f | \mathfrak{F}_s)$ всюду в Ω верно

$$n A_n E(f | \mathfrak{F}_s) \leq t A_t E(f | \mathfrak{F}_s) \leq (n+1) A_{n+1} E(f | \mathfrak{F}_s),$$

где $n = [t]$. Откуда получаем

$$\frac{n}{t} A_n E(f | \mathfrak{F}_s) \leq A_t E(f | \mathfrak{F}_s) \leq \frac{n+1}{t} A_{n+1} E(f | \mathfrak{F}_s).$$

Используя шаг 2 для крайних процессов, получаем сходимость для среднего процесса к тому же пределу.

Шаг 4. Рассматриваем процесс $\{A_t E(f|\mathfrak{F}_s)\}_{t>0, s\geq 0}$, где f любая. Сходимость следует из шага 3 и представления $A_t E(f|\mathfrak{F}_s) = A_t E(f^+|\mathfrak{F}_s) - A_t E(f^-|\mathfrak{F}_s)$, которое можно считать определенным на всем Ω .

Теорема 2 доказана.

§ 3. Доминантное и максимальное неравенства

Еще одной характеристикой мартингалов и эргодических средних, подпадающих под унификацию, являются доминантное и максимальное неравенства. Полученные для мартингально-эргодических и эргодико-мартингалов процессов с дискретным временем оценки переносятся и на время непрерывное. Так как оба процесса получаются действием суперпозиции операторов эргодического усреднения и условного ожидания, то не удивительно, что константы в оценках получаются как суперпозиция констант соответствующих классических эргодических и мартингаловых оценок и полностью совпадают для обоих рассматриваемых унифицирующих процессов.

В этом параграфе мы полагаем полугруппу $\{U^t, t \geq 0\}$ сильно непрерывной. Доказанные утверждения приведены для каждого процесса в отдельности. В доказательствах использовались идеи из [2].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}_s \searrow \mathfrak{F}_\infty$. Тогда для $f \in L_p$, $p \in (1, \infty)$, справедливы неравенства

$$\left\| \sup_{t>0} \sup_{s\geq 0} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \right\|_p \leq q^2 \|f\|_p, \quad (11)$$

$$\lambda \left(\sup_{t>0} \sup_{s\geq 0} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \geq \varepsilon \right) \leq q \frac{\|f\|_p}{\varepsilon} \text{ для любого } \varepsilon > 0, \quad (12)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s)$ удовлетворяют п. а) теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 4 функция $G = \sup_{t>0} \sup_{s\geq 0} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s)$ $\mathfrak{F}$ -измерима и

$$\left\| \sup_{t>0} \sup_{s\geq 0} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \right\|_p = \left\| \sup_{t>0, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s\geq 0, s \in \mathbb{Q}} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \right\|_p.$$

Положим $g = \sup_{t>0} A_t|f|$. Тогда, применяя доминантное неравенство для обращенного сепарабельного мартингала $\{E_3(g|F_s)\}_{s \in \mathbb{Q}^+}$ (см. [3]), свойство сжатия в L_p оператора условного математического ожидания (см. [5]) и доминантное неравенство для сильно непрерывных полугрупп положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий в L_1 (см. [6; с. 59]), получим цепочку неравенств, доказывающих (11):

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{t>0, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s\geq 0, s \in \mathbb{Q}} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \right\|_p &\leq \left\| \sup_{s\geq 0, s \in \mathbb{Q}} E_3(g|\mathfrak{F}_s) \right\|_p \\ &\leq q \|E_3(g|\mathfrak{F}_0)\|_p \leq q \|g\|_p = q \left\| \sup_{t>0} A_t|f| \right\|_p \leq q^2 \|f\|_p. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда, используя замечание 4 и максимальное неравенство для сепарабельного мартингала $\{E_3(g|\mathfrak{F}_s)\}_{s \in \mathbb{Q}^+}$ (см. [3]), получаем (12):

$$\begin{aligned} \lambda\left(\sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \geq \varepsilon\right) &= \lambda\left(\sup_{t>0, t \in \mathbb{Q}} \sup_{s \geq 0, s \in \mathbb{Q}} E_3(A_t|f|\mathfrak{F}_s) \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \lambda\left(\sup_{s \geq 0, s \in \mathbb{Q}} E_3(g|\mathfrak{F}_s) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\|E_3(g|\mathfrak{F}_0)\|_1}{\varepsilon} \leq q \frac{\|f\|_p}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{F}_s \searrow \mathfrak{F}_\infty$, $f \in L_p$, $p \in (1, \infty)$, и пусть функция $G = \sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} A_t|E(f|\mathfrak{F}_s)|$ $\mathfrak{F}$ -измерима. Тогда справедливы неравенства

$$\left\| \sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} A_t|E(f|\mathfrak{F}_s)| \right\| \leq q^2 \|f\|_p, \quad (13)$$

$$\lambda\left(\sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} A_t|E(f|\mathfrak{F}_s)| \geq \varepsilon\right) \leq q \frac{\|f\|_p}{\varepsilon} \quad \text{для любого } \varepsilon > 0, \quad (14)$$

$$2de \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g = \sup_{s \geq 0} |E(f|\mathfrak{F}_s)|$. Тогда, применяя доминантное неравенство для сильно непрерывных полугрупп положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий в L_1 , доминантное неравенство для сепарабельного субмартингала $\{|E(f|\mathfrak{F}_s)|\}_{s \geq 0}$ и свойство сжатия в L_p оператора условного математического ожидания, получим цепочку неравенств, доказывающих (13):

$$\left\| \sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} A_t|E(f|\mathfrak{F}_s)| \right\|_p \leq \left\| \sup_{t>0} A_t g \right\|_p \leq q \|g\|_p = q \left\| \sup_{s \geq 0} |E(f|\mathfrak{F}_s)| \right\|_p \leq q^2 \|f\|_p.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда, используя максимальное неравенство для сильно непрерывных полугрупп положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий в L_1 (см. [6; с. 51, 59]), получим (14):

$$\lambda\left(\sup_{t>0} \sup_{s \geq 0} A_t|E(f|\mathfrak{F}_s)| \geq \varepsilon\right) \leq \lambda\left(\sup_{t>0} A_t g \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\|g\|_p}{\varepsilon} \leq q \frac{\|f\|_p}{\varepsilon}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В отличие от теоремы 3, где о максимальной функции G можно сказать, что она измерима в силу конкретного выбора представителей из класса эквивалентных функций, о теореме 4 такого сказать нельзя, так как определенного выбора представителей не происходит. Поэтому эта измеримость предполагается.

§ 4. Обобщенные мартингалы Рота и эргодико-мартингальные процессы

В этом параграфе мы рассмотрим подход Дж.-К. Рота (см. [8]) к унификации мартингалов и эргодических средних в их непосредственной связи с эргодико-мартингальными процессами. Целью этого рассмотрения является доказательство сходимости аналога эргодико-мартингального процесса относительно суммирования по Абелю (а не по Чезаро). Из этого утверждения как частные

случаи вытекают сразу утверждения о сходимости мартингалов и средних по Абелю относительно полугруппы $L_1 - L_\infty$ сжатий, которые не удалось получить в подходе Дж.-К. Рота.

Развитый впоследствии М. М. Рао (см. [9], [10]) подход основан на рассмотрении так называемых *операторов Рейнольдса* [11], удовлетворяющих определенным алгебраическим соотношениям. Этот класс операторов был назван *обобщенным мартингалом*, так как он включает в себя регулярные мартингалы. Было также показано, что к этому классу операторов принадлежат и усредняющие по Абелю операторы относительно полугруппы, порожденной сохраняющими меру преобразованиями.

Таким образом, в этом подходе был найден объект, унифицирующий регулярные мартингалы и усреднения по Абелю. Кроме того, для обобщенного мартингала была доказана теорема сходимости и по норме, и почти всюду (см. [10; с. 261]), из которой сразу вытекают теоремы сходимости для мартингалов и усреднений по Абелю. Чтобы это доказать, был найден аналитический вид операторов Рейнольдса (см. [10; с. 105]). А именно, каждый оператор Рейнольдса, сохраняющий единицу, сжимающий в L_p , $p \geq 1$, и слабо компактный в L_1 , представляется в виде

$$Rf = \int_0^\infty e^{-t} U^t \mathbf{E}(f|\mathcal{B}) dt, \quad (15)$$

где σ -алгебра $\mathcal{B}$ и полугруппа $\{U^t, t \geq 0\}$, порожденная сохраняющими меру преобразованиями, определяются оператором R однозначно.

То, что подход основан на изучении суперпозиции усредняющего по Абелю действующего преобразования и оператора условного математического ожидания (именно в таком порядке), а также то, что под унификацию попадают только регулярные мартингалы и эргодические средние для усредняемых функций класса Зигмунда $L \log L$, непосредственно сближает его с эргодико-мартингальными процессами.

Однако применение эргодико-мартингальных процессов позволяет доказать более общие утверждения об унификации мартингалов и эргодических средних, чем рассмотрение обобщенного мартингала. А именно, удастся доказать теорему сходимости в более общем случае, чем сохраняющие меру преобразования. О неприменимости подхода обобщенного мартингала в этом более общем случае упоминали и сами его разработчики (см. [9; с. 57]).

Для унификации абелевских усреднений относительно полугруппы операторов, не порожденных сохраняющими меру преобразованиями, и регулярных мартингалов рассмотрим класс операторов вида

$$V_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_\lambda) dt, \quad \lambda > 0, \quad (16)$$

где $\{U^t, t \geq 0\}$ — $L_1 - L_\infty$ сжатия, $\mathcal{B}_\lambda$ — монотонное семейство σ -подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$.

Построенный процесс действительно является унифицирующим. При $U^t \equiv Id$ получаем регулярный мартингал $V_\lambda f = E(f|\mathcal{B}_\lambda)$, а в случае $\mathcal{B}_\lambda \equiv \mathfrak{F}$ получаем усреднения по Абелю

$$V_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f dt$$

относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$. Стоит заметить, что оператор $V_\lambda f$, вообще говоря, не является усреднением по Абелю, так как усредняемая функция $E(f|\mathcal{B}_\lambda)$ зависит от параметра усреднения λ .

Напомним определения.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$ называется *суммируемым по Чезаро* (суммируемым по Абелю), если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ (соответственно предел $\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x) \sum_{n=1}^\infty a_n x^n = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda n}$). В непрерывном случае говорят о сходимости *средних по Чезаро* $\frac{1}{t} \int_0^t a_t dt$ при $t \rightarrow \infty$ (соответственно *средних по Абелю* $\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} a_t dt$ при $\lambda \rightarrow 0+$).

Так как из суммируемости по Чезаро следует суммируемость по Абелю, то сходимость процесса $V_\lambda f$ следует из сходимости соответствующих эргодико-мартингалов. А именно, непосредственно используя теоремы о сходимости эргодико-мартингалов, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{U^t, t \geq 0\}$ – полугруппа положительных L_1 – L_∞ сжатий в L_1 , $\mathcal{B}_\lambda$ – монотонное семейство σ -подалгебр σ -алгебры $\mathfrak{F}$. Если функция f такая, что $\sup_\lambda |E(f|\mathcal{B}_\lambda)| \leq h$, $Eh < \infty$ (что заведомо выполняется, когда $f \in L \log L$), то

$$V_\lambda f \rightarrow f_* \left(= \lim_{t \rightarrow \infty} A_t E(f|\mathcal{B}_0) \right) \text{ н.в. при } \lambda \rightarrow 0.$$

Если $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, то $V_\lambda f \rightarrow f_*$ и в L_p .

Заметим, что данное утверждение усиливает результаты подхода Дж.-К. Рота с точки зрения именно унификации, и из него не следует сходимость любого обобщенного мартингала.

Прежде чем доказывать эту теорему 5, необходимо установить существование класса операторов вида (16). Для этого нам нужны будут вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 4 (см. [4; с. 170]). Пусть $\beta(t)$ – положительная убывающая функция при $t \geq 0$. Тогда

$$\left| \int_0^R \beta(t) U^t f(\omega) dt \right| \leq \hat{f}(\omega) \int_0^R \beta(t) dt$$

для всех R и н.в. ω , для которых $\hat{f}(\omega) = \sup_{t>0} |A_t f(\omega)|$ конечна.

ЛЕММА 5 (см. [12; с. 36]). Пусть

$$\sup_{0 \leq R < \infty} \left| \int_0^R e^{-s_0 t} d\alpha(t) \right| \leq M.$$

Тогда интеграл $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ сходится при $s > \operatorname{Re} s_0$.

Здесь и далее $d\alpha$ – мера Лебега–Стилтьеса. Используя лемму 4 для функции $\beta(t) = e^{-st}$, $s > 0$, а вместо f беря $E(f|\mathcal{B}_\lambda)$, получаем

$$\left| \int_0^R \beta(t) U^t E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega) dt \right| \leq \widehat{E(f|\mathcal{B}_\lambda)}(\omega) \int_0^R \beta(t) du \leq \frac{1}{s} \hat{h}(\omega).$$

Теперь, применяя лемму 5 для

$$\alpha(t, \omega) = \int_0^t U^\tau E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega) d\tau$$

и $M = \frac{1}{s} \hat{h}(\omega)$, получаем существование интегралов

$$\int_0^\infty e^{-st} U^t E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega) dt$$

для всех $s > 0$, $\lambda \geq 0$ и п.в. ω , для которых $\hat{h}(\omega)$ конечна. При $s = \lambda$ получаем существование операторов вида (16).

Справедливость перехода от утверждения теоремы 2 (п. б)) к утверждению теоремы 5 показана в следующей лемме.

ЛЕММА 6 (см. [12; с. 181]). Пусть интеграл

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$$

сходится при любом $s > 0$. Тогда при любом $\gamma \geq 0$ и любой постоянной A

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 0+} |s^\gamma F(s) - A| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t) t^{-\gamma} \Gamma(\gamma + 1) - A|,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Сначала докажем сходимост почти всюду. Применяя теорему 2 для семейства $\mathfrak{F}_s = \mathcal{B}_{1/s}$, получим сходимост $A_t E(f|\mathcal{B}_\lambda)$ к f_* п.в. при $t \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$.

Применяя лемму 6 для $\gamma = 1$, $A = f_*(\omega)$ и

$$\alpha(t, \omega) = \int_0^t U^\tau E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega) d\tau = t A_t E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega),$$

получим неравенство

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 0+, \lambda \rightarrow 0} |sF(s, \lambda, \omega) - f_*(\omega)| \leq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |A_t E(f|\mathcal{B}_\lambda)(\omega) - f_*(\omega)|.$$

Правая часть этого неравенства равна нулю для п.в. ω , откуда следует сходимост $sF(s, \lambda)$ к f_* п.в. при $s \rightarrow 0+$, $\lambda \rightarrow 0$. Так как s и λ независимо стремятся к нулю, то, полагая $s = \lambda$, получим требуемое утверждение.

Сходимость по норме следует из представления

$$V_\lambda f = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_\lambda),$$

где

$$\mathbf{A}_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f dt,$$

и цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|V_\lambda f - f_*\|_p &\leq \|V_\lambda f - \mathbf{A}_\lambda \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0)\|_p + \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0) - f_*\|_p \\ &= \|\mathbf{A}_\lambda (\mathbf{E}(f|\mathcal{B}_\lambda) - \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0))\|_p + \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0) - f_*\|_p \\ &\leq \|\mathbf{E}(f|\mathcal{B}_\lambda) - \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0)\|_p + \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{E}(f|\mathcal{B}_0) - f_*\|_p. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно в силу линейности и сжатия в L_p оператора $\mathbf{A}_\lambda$. По лемме 1, теореме Леви о сходимости регулярных мартингалов (см. [3]) и теореме о переходе от сильной сходимости по Чезаро к сильной сходимости по Абелю (см. [13]) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$.

Список литературы

- [1] Sh. Kakutani, “Ergodic theory”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 2 (Cambridge, MA, 1950), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 128–142.
- [2] А. Г. Качуровский, “Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы”, *Динамические системы и оптимизация*, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 172–200; англ. пер.: A. G. Kachurovskii, “General theories unifying ergodic averages and martingales”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 160–187.
- [3] Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, ИЛ, М., 1956; пер. с англ.: J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York; Chapman & Hall, London, 1953.
- [4] N. Dunford, J. T. Schwartz, “Convergence almost everywhere of operator averages”, *J. Ration. Mech. Anal.*, **5**:1 (1956), 129–178.
- [5] J. Neveu, *Discrete-parameter martingales*, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1975.
- [6] U. Krengel, *Ergodic theorems*, de Gruyter Stud. Math., **6**, de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
- [7] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, 2-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] G.-C. Rota, “Une théorie unifiée des martingales et des moyennes ergodiques”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **252**:14 (1961), 2064–2066.
- [9] M. M. Rao, “Abstract martingales and ergodic theory”, *Multivariate analysis III*, Proc. Third Internat. Sympos. (Wright State Univ., Dayton, OH, 1972), Academic Press, New York, 1973, 45–60.
- [10] M. M. Rao, *Foundations of stochastic analysis*, Academic Press, New York–London, 1981.
- [11] G.-C. Rota, “Reynolds operators”, *Proc. Sympos. Appl. Math.*, **16** (1964), 70–83.

- [12] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Math. Ser., **6**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.
- [13] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.

И. В. Подвигин (I. V. Podvigin)

Новосибирский государственный университет

E-mail: vak@gorodok.net

Поступила в редакцию

13.11.2008 и 01.12.2008