Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Раутиан, Об ограниченности одного класса интегральных операторов дробного типа, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 12, 81–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:24:11

УДК 517.51

Н. А. Раутиан

Об ограниченности одного класса интегральных операторов дробного типа

Даны критерии ограниченности интегральных операторов дробного типа в весовых пространствах Лебега.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: интегральные операторы дробного типа, весовые пространства Лебега.

§ 1. Введение

Пусть $r > 1$. Обозначим

$$\|f\|_r := \left(\int_0^\infty |f(x)|^r dx \right)^{1/r},$$

$L^r := L^r(\mathbb{R}^+)$ – пространство Лебега всех измеримых функций, заданных на $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, таких, что $\|f\|_r < \infty$, $r' := r/(r-1)$.

В работе рассматриваются интегральные операторы на полуоси $\mathbb{R}^+$ следующего вида:

$$\mathcal{K}f(x) := v(x) \int_0^x k(x, y)u(y)f(y) dy, \quad (1)$$

где ядро $k(x, y) \geq 0$ измеримо по совокупности двух переменных, весовые функции $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$ локально суммируемы.

Задача заключается в нахождении необходимых и/или достаточных условий (L^p-L^q) -ограниченности операторов вида (1) при $1 < p, q < \infty$. Для ее решения требуется охарактеризовать неравенство

$$\|\mathcal{K}f\|_q \leq C\|f\|_p, \quad (2)$$

где константа $C = C(p, q, u, v) > 0$ не зависит от f . Будем считать эту константу наименьшей из возможных, т.е. равной норме оператора $\|\mathcal{K}\|_{L^p \rightarrow L^q}$.

Напомним некоторые результаты, относящиеся к данной тематике. К настоящему времени полностью изучен случай, когда функция $k(x, y) \geq 0$, $0 \leq y \leq x$, удовлетворяет условию Ойнарова: существует константа $d > 0$, не зависящая от x, y и z , такая, что

$$d^{-1}(k(x, z) + k(z, y)) \leq k(x, y) \leq d(k(x, z) + k(z, y)) \quad (3)$$

при любых $0 < y \leq z \leq x < \infty$. Этим условиям удовлетворяет широкий класс операторов, имеющих различные приложения. Критерии ограниченности и точные двусторонние оценки норм операторов с ядром Ойнарова получены

в [1] (см. также [2]). Кроме того, в [3] получены критерии ограниченности и оценки норм операторов вида (1) с ядром $k(x, y) \geq 0$, убывающим по y .

В настоящей работе рассматриваются операторы, у которых ядро $k(x, y) \geq 0$ при $0 \leq y \leq x$ удовлетворяет условиям, противоположным условию (3), т.е.

$$\begin{aligned} k(x_1, y) &\leq Dk(x_2, y) && \text{при } x_2 \leq x_1, \\ k(x, y_1) &\leq Dk(x, y_2) && \text{при } y_1 \leq y_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $D > 0$ не зависит от соответствующих переменных. К таким преобразованиям относятся, например, дробные интегралы Римана–Лиувилля (см. [4]), поэтому их естественно называть операторами дробного типа.

Важным случаем операторов такого класса являются операторы типа свертки

$$Tf(x) := v(x) \int_0^x K(x-y)u(y)f(y)dy. \quad (5)$$

Для таких операторов из результатов работы М. Лоренте (см. [5; теорема 1]) вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $K(x) > 0$ – невозрастающая полунепрерывная снизу функция с носителем на $\mathbb{R}^+$ такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 0$, и существует константа $C_1 > 0$ такая, что $K(x) \leq C_1 K(2x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^+$.

Неравенство

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \quad (6)$$

выполнено тогда и только тогда, когда существуют такие константы $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$, что для любых $0 < a < b < \infty$

$$\left(\int_a^\infty v^q(x) \left(\int_a^{\min(b,x)} K(x-y)u^{p'}(y)dy \right)^q dx \right)^{1/q} \leq C_2 \left(\int_a^b u^{p'}(x)dx \right)^{1/p} < \infty \quad (7)$$

при условии, что $\int_b^\infty v^q(x)dx > 0$, и

$$\left(\int_0^b u^{p'}(x) \left(\int_{\max(a,x)}^b K(y-x)v^q(y)dy \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq C_3 \left(\int_a^b v^q(x)dx \right)^{1/q'} < \infty, \quad (8)$$

при условии, что $\int_0^a u^{p'}(x)dx > 0$.

Этот результат является продолжением исследований, начатых в работах [6]–[9]. Условие (7) означает выполнение неравенства (6) для характеристических функций всех интервалов, а условие (8) выражает аналогичное требование для сопряженного оператора. В этом отношении условия (7) и (8) аналогичны критерию ограниченности максимального оператора, полученного Е. Т. Сойером [6]. Неявная форма условий (7) и (8) делает их трудно проверяемыми и, хотя оценка $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \geq C_2$ очевидна, обратное неравенство $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C_2$ в работе [5] не приводится.

Положим $K(x) = x^{\alpha-1}$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда оператор T представляет собой дробный оператор Римана–Лиувилля

$$(R_\alpha f)(x) := v(x) \int_0^x \frac{u(y)f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy, \quad (9)$$

для которого в [4], [10]–[12] при некоторых ограничениях на весовые функции и параметры суммирования получены явные критерии ограниченности. Приведем один из таких результатов (см. [11; теорема 4]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$1 < p \leq q < \infty, \quad 1 - \frac{q'}{p'} < \alpha \leq 1, \quad 1 - \beta := (1 - \alpha) \frac{p'}{q'}$$

и функция $u(y) > 0$ не убывает на $\mathbb{R}^+$. Тогда для ограниченности оператора R_α , действующего из L^p в L^q , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $b \in (0, \infty)$

$$\int_s^b \frac{v^q(x) dx}{(x-s)^{1-\alpha}} < \infty \quad \text{для почти всех} \quad s \in (0, b)$$

и, кроме того,

$$\mathbb{D} := \sup_{b>0} \operatorname{ess\,sup}_{0<t<b} \left[\int_t^b \frac{u^{p'}(y) dy}{(y-t)^{1-\beta}} \left(\int_y^b \frac{v^q(x) dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^{p'} \right]^{1/p'} \left[\int_t^b \frac{v^q(x) dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \right]^{-1/q'} < \infty,$$

причем $\|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \approx \mathbb{D}$.

Аналогичная теорема доказана в [11] для случая, когда функция $v(x) > 0$ не возрастает на $\mathbb{R}^+$.

В настоящей работе дано обобщение этих критериев на случай операторов свертки (5). Пусть $u(x), v(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$, $u(x) \geq 0$, $v(x) \geq 0$, $K(x)$ – положительная функция. При $0 \leq a < t < b < \infty$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0(a, t) &= \left[\int_a^t K^{q/p}(t-x) v^q(x) dx \left(\int_a^x K(x-y) u^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q} \\ &\quad \times \left[\int_a^t K(t-y) u^{p'}(y) dy \right]^{-1/p}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1(t, b) &= \left[\int_t^b K^{p'/q'}(y-t) u^{p'}(y) dy \left(\int_y^b K(x-y) v^q(x) dx \right)^{p'} \right]^{1/p'} \\ &\quad \times \left[\int_t^b K(x-t) v^q(x) dx \right]^{-1/q'}. \end{aligned} \quad (11)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{a,b}^0 &:= \operatorname{ess\,sup}_{a < t < b} \mathcal{A}^0(a, t), & \mathcal{A}_{a,b}^1 &:= \operatorname{ess\,sup}_{a < t < b} \mathcal{A}^1(t, b), \\ \mathcal{A}^k &:= \sup_{0 \leq a < b \leq \infty} \mathcal{A}_{a,b}^k, & k &= 0, 1. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, функция $v(x) > 0$ не возрастает на $(0, \infty)$, а функция $K(x) > 0$, не возрастает на $(0, \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует константа C , $0 < C < 2^{p/q}$, такая, что $K(x) \leq CK(2x)$ для любого $x \in (0, \infty)$;
- 2) функция $K^{q/p}(x)$ локально интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, $\text{supp } K(x) \subset [0, \infty)$.

Тогда для ограниченности оператора T , действующего из L^p в L^q , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $b \in (0, \infty)$

$$\int_0^t K(t-x)u^{p'}(x) dx < \infty \quad \text{для почти всех } t \in (0, b) \quad (12)$$

и $\mathcal{A}^0 < \infty$. Более того, $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \approx \mathcal{A}^0$, причем оценка сверху верна без условия монотонности весовой функции $v(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, функция $u(y) > 0$ не убывает на $(0, \infty)$, а функция $K(x) > 0$, не возрастает на $(0, \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует константа C , $0 < C < 2^{q'/p'}$, такая, что $K(x) \leq CK(2x)$ для любого $x \in (0, \infty)$;
- 2) функция $K^{p'/q'}(x)$ локально интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, $\text{supp } K(x) \subset [0, \infty)$.

Тогда для ограниченности оператора T , действующего из L^p в L^q , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $b \in (0, \infty)$

$$\int_t^b K(x-t)v^q(x) dx < \infty \quad \text{для почти всех } t \in (0, b) \quad (13)$$

и $\mathcal{A}^1 < \infty$. Более того, $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \approx \mathcal{A}^1$, причем оценка сверху верна без условия монотонности весовой функции $u(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в теоремах 3 и 4 положить $K(x) = x^{\alpha-1}$, где $0 < \alpha \leq 1$, то условия (1), (2) теорем 3 и 4 выполняются при $C = 2^{1-\alpha}$ тогда и только тогда, когда $1 - p/q < \alpha \leq 1$ и $1 - q'/p' < \alpha \leq 1$ соответственно. Таким образом, теорема 2 следует из теоремы 4. Аналогично, из теоремы 3 следует теорема 5 из [11].

Кроме теорем 3 и 4, в настоящей работе при некоторых условиях на весовые функции даны критерии ограниченности и двусторонние оценки нормы операторов T при $1 < q < p < \infty$ (теорема 5) и R_α при $1 < p, q < \infty$ (теорема 6). Для произвольных весовых функций получены достаточные условия ограниченности и оценки нормы операторов T (теорема 7) и $\mathcal{H}$, когда функция $k(x, y)$ удовлетворяет условию (4) (теорема 8). Формулировки теорем 5–8 даны в § 2, а в следующих параграфах приведены доказательства теорем 3–8. При этом сначала доказаны утверждения для более общих интегральных операторов $\mathcal{H}$ (теорема 8) и операторов свертки T (теоремы 3–5 и 7), а затем и для операторов Римана–Лиувилля R_α (теорема 6). В § 8 приведены примеры.

На протяжении всей работы предполагается, что неопределенность вида $0 \cdot \infty$ равна нулю. Выражение вида $D \ll E$ означает, что для D и E выполнено

неравенство $D \leq cE$ с некоторой константой $c > 0$, зависящей, может быть, только от параметров суммирования p и q . Выражение $D \approx E$ означает, что $D \ll E \ll D$. Для введения новых величин использованы символы $:=$ и $=:$.

Кроме того, без ограничения общности предполагается, что функции f неотрицательны.

§ 2. Формулировка результатов

2.1. Критерий ограниченности оператора $T: L^p \rightarrow L^q$ при $1 < q < p < \infty$. Пусть $1/s := 1/q - 1/p$. Обозначим

$$\mathcal{B}_0 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y K(y-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/q'} \left(\int_y^\infty K(x-y) v^q(x) dx \right)^{1/q} \right]^s u^{p'}(y) dy \right)^{1/s},$$

$$\mathcal{B}_1 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y K(y-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^\infty K(x-y) v^q(x) dx \right)^{1/p} \right]^s v^q(y) dy \right)^{1/s}$$

и положим $\mathcal{B} := \max(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < q < p < \infty$, функция $K(x) > 0$, не возрастает и локально интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, причем $\text{supp } K(x) \subset [0, \infty)$, функция $u(x) > 0$ не убывает, а функция $v(x) > 0$ не возрастает на $\mathbb{R}^+$. Тогда для ограниченности оператора $T: L^p \rightarrow L^q$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B} < \infty$; при этом $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \approx \mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для компактности оператора $T: L^p \rightarrow L^q$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B} < \infty$.

2.2. Критерий ограниченности оператора Римана–Лиувилля. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Обозначим

$$\tilde{A} := \sup_{y>0} \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q}.$$

При $1 < q < p < \infty$ положим

$$\tilde{B}_0 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{1/q'} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} \right]^s u^{p'}(y) dy \right)^{1/s},$$

$$\tilde{B}_1 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/p} \right]^s \frac{v^q(y)}{y^{(1-\alpha)q}} dy \right)^{1/s}.$$

Пусть $k = 0$ или $k = 1$. Обозначим

$$I_k^0(y) := \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{(x - ky)^{(1-\alpha)q}} dx, \quad I_k^1(y) := \int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{(y - kx)^{(1-\alpha)p'}} dx$$

и положим

$$E_0 := \sup_{y>0} (I_1^0(y) \cdot (I_0^0)^{-1}(y))^{1/q}, \quad E_1 := \sup_{y>0} (I_1^1(y) \cdot (I_0^1)^{-1}(y))^{1/p'}$$

Пусть $m = 0$ или $m = 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1/q' < \alpha < 1$ и $I_0^m(y) \approx I_1^m(y) < \infty$.

а) Если $1 < p \leq q < \infty$, то оператор $R_\alpha: L^p \rightarrow L^q$ ограничен тогда и только тогда, когда $\tilde{A} < \infty$, причем

$$\tilde{A} \ll \|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_m \tilde{A}.$$

б) Если $1 < q < p < \infty$, то оператор $R_\alpha: L^p \rightarrow L^q$ ограничен тогда и только тогда, когда $\tilde{B}_m < \infty$; при этом

$$\tilde{B}_m \ll \|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_m \tilde{B}_m.$$

2.3. Достаточные условия ограниченности операторов T и $\mathcal{K}$, действующих из L^p в L^q . Пусть $0 \leq a < b < \infty$. Обозначим

$$h_0(y) := \int_a^y K(y-x)u^{p'}(x)dx, \quad h_1(y) := \int_y^b K(x-y)v^q(x)dx.$$

Обозначим

$$R|_{(a,b)} := P_{(a,b)}RP_{(a,b)},$$

где R – интегральный оператор на полуоси $\mathbb{R}^+$, $(P_{(a,b)}f)(x) := f(x)\chi_{(a,b)}(x)$, $0 \leq a < b < \infty$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $k = 0$ или $k = 1$, $0 \leq a < b < \infty$ и выполнены следующие два условия:

- 1) функция $K(x) > 0$, не возрастает на $(0, \infty)$ и локально интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$ и кроме того, $\text{supp } K(x) \subset [0, \infty)$.
- 2) функция $h_k(y) < \infty$ для почти всех $y \in (a, b)$. Тогда
 - а) если $1 < p \leq q < \infty$ и $\mathcal{A}_{a,b}^k < \infty$, то $\|T|_{(a,b)}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll \mathcal{A}_{a,b}^k$;
 - б) если $1 < q < p < \infty$ и $\mathcal{B}_k < \infty$, то $\|T|_{L^p \rightarrow L^q}\| \ll \mathcal{B}_k$.

Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p$. Рассмотрим оператор $\mathcal{K}$ вида (1), где функция $k(x, y) \geq 0$ при $x > y > 0$ и удовлетворяет условиям (4).

При $1 < p \leq q < \infty$ обозначим

$$A_0 := \sup_{y>0} \left(\int_0^y u^{p'}(x)dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^\infty k^q(x, y)v^q(x)dx \right)^{1/q},$$

$$A_1 := \sup_{y>0} \left(\int_0^y k^{p'}(y, x)u^{p'}(x)dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^\infty v^q(x)dx \right)^{1/q},$$

а при $1 < q < p < \infty$

$$B_0 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y u^{p'}(x)dx \right)^{1/q'} \left(\int_y^\infty k^q(x, y)v^q(x)dx \right)^{1/q} \right]^s u^{p'}(y)dy \right)^{1/s},$$

$$B_1 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_y^\infty v^q(x)dx \right)^{1/p} \left(\int_0^y k^{p'}(y, x)u^{p'}(x)dx \right)^{1/p'} \right]^s v^q(y)dy \right)^{1/s}.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $k = 0$ или $k = 1$.

- а) Если $1 < p \leq q < \infty$ и $A_k < \infty$, то $\|\mathcal{K}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll A_k$.
 б) Если $1 < q < p < \infty$ и $B_k < \infty$, то $\|\mathcal{K}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll B_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $k(x, y) = (x-y)^{\alpha-1}$, где $1/q' < \alpha < 1$, то теорема 8 представляет собой достаточные условия ограниченности оператора Римана–Лиувилля (9).

§ 3. Доказательство теоремы 8

Пусть ядро $k(x, y) \geq 0$ удовлетворяет условию (4). Обозначим

$$K_r^0 h(x) := \int_a^x k^r(x, y) h(y) dy, \quad K_r^1 h(x) := \int_x^b k^r(y, x) h(y) dy,$$

где $0 \leq a < b \leq \infty$, $h(y) \geq 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq r < \infty$, $i = 0, 1$. Если $K_1^i h \in L^r((a, b))$ и $w(x) \geq 0$, то

- а) $\int_a^b (K_1^i h)^r(x) w(x) dx \leq r D^{r-1} \int_a^b h(x) (K_r^{1-i} w)(x) (K_0^i h)^{r-1}(x) dx$,
 б) $\int_a^b (K_1^i h)^r(x) w(x) dx \leq r D^{r-1} \int_a^b h(x) (K_1^{1-i} w)(x) (K_1^i h)^{r-1}(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $i = 0$. Легко видеть, что

$$(K_1^0 h)^r(x) = \left(\int_a^x k(x, y) h(y) dy \right)^r = r \int_a^x k(x, y) h(y) dy \left(\int_a^y k(x, t) h(t) dt \right)^{r-1}.$$

Следовательно,

- а)
$$\begin{aligned} \int_a^b (K_1^0 h)^r(x) w(x) dx &= \int_a^b \left(\int_a^x k(x, y) h(y) dy \right)^r w(x) dx \\ &= r \int_a^b \int_a^x k(x, y) h(y) dy \left(\int_a^y k(x, t) h(t) dt \right)^{r-1} w(x) dx \\ &= r \int_a^b h(y) \int_y^b k(x, y) w(x) dx \left(\int_a^y k(x, t) h(t) dt \right)^{r-1} dy \\ &\leq r D^{r-1} \int_a^b h(y) \int_y^b k^r(x, y) w(x) dx \left(\int_a^y h(t) dt \right)^{r-1} dy \\ &= r D^{r-1} \int_a^b h(x) (K_r^1 w)(x) (K_0^0 h)^{r-1}(x) dx; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} \int_a^b (K_1^0 h)^r(x) w(x) dx &= r \int_a^b h(y) \int_y^b k(x, y) w(x) dx \left(\int_a^y k(x, t) h(t) dt \right)^{r-1} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq rD^{r-1} \int_a^b h(y) \int_y^b k(x, y) w(x) dx \left(\int_a^y k(y, t) h(t) dt \right)^{r-1} dy \\
&= rD^{r-1} \int_a^b h(x) (K_1^1 w)(x) (K_1^0 h)^{r-1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы в случае $i = 1$ доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8, п. а). Рассмотрим случай $k = 0$. Применяя утверждение а) леммы 1 в случае $i = 0$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}f\|_q^q &= \int_0^\infty v^q(x) \left(\int_0^x k(x, y) u(y) f(y) dy \right)^q dx \\
&\leq qD^{q-1} \int_0^\infty u(y) f(y) \int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} dy \\
&\leq qD^{q-1} \|f\|_p \left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right)^{p'} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{p'(q-1)} dy \right)^{1/p'} \\
&=: qD^{q-1} \|f\|_p J^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Далее используем неравенство Харди [13]. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right)^{p'} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{p'(q-1)} dy \right)^{1/p'(q-1)} \\
&\ll C \left(\int_0^\infty (f(t) u(t))^p u^{-p}(t) dt \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

которое выполняется, так как $p'(q-1) \geq p$, где

$$\begin{aligned}
C &= \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^{p'}(y) \left(\int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right)^{p'} dy \right)^{1/(p'(q-1))} \left(\int_0^t u^{-p(1-p')}(x) dx \right)^{1/p'} \\
&\leq A_0^{q'} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^{p'}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-q} dy \right)^{1/(p'(q-1))} \left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \\
&= A_0^{q'} (q-1)^{1/(p'(1-q))} \sup_{t>0} \left(\left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{1-q} \right. \\
&\quad \left. - \left(\int_0^\infty u^{p'}(x) dx \right)^{1-q} \right)^{1/(p'(q-1))} \left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \\
&\leq A_0^{q'} (q-1)^{1/(p'(1-q))} \sup_{t>0} \left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{-1/p'} \left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \\
&= A_0^{q'} (q-1)^{1/(p'(1-q))} < \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{K}f\|_q^q \ll \|f\|_p J^{1/p'} \leq \|f\|_p C^{q-1} \|f\|_p^{q-1} \ll A_0^q \|f\|_p^q,$$

т.е. $\|\mathcal{K}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll A_0$.

Теперь рассмотрим случай $k = 1$. Определим двойственный оператор

$$\mathcal{K}^* g(x) = u(x) \int_x^\infty v(y) k(y, x) g(y) dy, \quad \mathcal{K}^*: L^{q'}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^+).$$

Применяя утверждение а) леммы 1 в случае $i = 1$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}^* g\|_{p'}^{p'} &= \int_0^\infty u^{p'}(x) \left(\int_x^\infty v(y) k(y, x) g(y) dy \right)^{p'} dx \\ &\leq p' D^{p'-1} \|g\|_{q'} \left(\int_0^\infty v^q(y) \left(\int_0^y k^{p'}(y, x) u^{p'}(x) dx \right)^q \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_y^\infty v(t) g(t) dt \right)^{q(p'-1)} dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что были использованы в случае $k = 0$.

б) Применяя утверждение а) леммы 1 в случае $i = 0$ и неравенство Гёльдера с показателями $p, p/(q-1), s/q$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} f\|_q^q &= \int_0^\infty v^q(x) \left(\int_0^x k(x, y) u(y) f(y) dy \right)^q dx \\ &\leq q D^{q-1} \int_0^\infty u(y) f(y) \int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &= q D^{q-1} \int_0^\infty f(y) \left[u(y) u^{-(q-1)(q'-p')}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-(q-1)} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} \right] \\ &\quad \times \left[u^{(q-1)(q'-p')}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{q-1} \int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right] dy \\ &= q D^{q-1} \int_0^\infty f(y) \left[u^{(p'-1)(q-1)}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-(q-1)} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} \right] \\ &\quad \times \left[u^{(q-1)(q'-p')}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{q-1} \int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right] dy \\ &\leq q D^{q-1} \|f\|_p \left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-p} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^p dy \right)^{(q-1)/p} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{s/q'} \left(\int_y^\infty k^q(x, y) v^q(x) dx \right)^{s/q} u^{p'}(y) dy \right)^{q/s}. \end{aligned}$$

Применим неравенство Харди [13]. Тогда получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-p} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^p dy \right)^{1/p} \\ &\ll C \left(\int_0^\infty (f(t) u(t))^p u^{-p}(t) dt \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

которое имеет место, так как

$$\begin{aligned} C &= \sup_{t>0} \left(\left(\int_t^\infty u^{p'}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-p} dy \right)^{1/p} \left(\int_0^t u^{-p(1-p')}(x) dx \right)^{1/p'} \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{p-1} \right)^{1/p} \sup_{t>0} \left(\left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{-1/p'} \left(\int_0^t u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \right) \\ &= \left(\frac{1}{p-1} \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{K}f\|_q^q \leq qD^{q-1} \|f\|_p C^{q-1} \|f\|_p^{q-1} B_0^q \ll B_0^q \|f\|_p^q.$$

Поэтому

$$\|\mathcal{K}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll B_0.$$

Теперь рассмотрим случай $k = 1$. Определим двойственный оператор

$$\mathcal{K}^*g(x) = u(x) \int_x^\infty v(y)k(y, x)g(y) dy, \quad \mathcal{K}^*: L^{q'} \rightarrow L^{p'}.$$

Применяя утверждение а) леммы 1 в случае $i = 1$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}^*g\|_{p'}^{p'} &= \int_0^\infty u^{p'}(x) \left(\int_x^\infty v(y)k(y, x)g(y) dy \right)^{p'} dx \\ &\leq p' D^{p'-1} \|g\|_{q'}^{q'} \left(\int_0^\infty v^q(y) \left(\int_y^\infty v^q(x) dx \right)^{-q'} \left(\int_y^\infty v(t)g(t) dt \right)^{q'} dy \right)^{(p'-1)/q'} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_y^\infty v^q(x) dx \right)^{s/p} \left(\int_0^y k^{p'}(y, x) u^{p'}(x) dx \right)^{s/p'} v^q(y) dy \right)^{p'/s}. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что были использованы в случае $k = 0$.

§ 4. Доказательство теорем 3 и 4

Доказательства теорем 3 и 4 проводятся по схеме, приведенной в [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Необходимость. Пусть $0 \leq a < b < \infty$ и оператор T , действующий из L^p в L^q , ограничен. Тогда ограничен оператор $T|_{(a,b)}$ и согласно принципу двойственности выполнено неравенство

$$\left(\int_a^b u^{p'}(y) \left(\int_y^b K(x-y)v(x)g(x) dx \right)^{p'} dy \right)^{1/p'} \leq \|T|_{(a,b)}\| \|g\chi_{(a,b)}\|_{q'} \quad (14)$$

для всех функций $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим произвольное $t \in (a, b)$ и положим $g = \chi_{(a,b)}$ в неравенстве (14). Тогда

$$\begin{aligned} \|T|_{(a,b)}\| \|g\|_{q'} &\geq \left(\int_a^b u^{p'}(y) \left(\int_y^{(b+t)/2} K(x-y)v(x)g(x) dx \right)^{p'} dy \right)^{1/p'} \\ &\geq v\left(\frac{b+t}{2}\right) K\left(\frac{b+t}{2}\right) \left(\int_a^t u^{p'}(y) \left(\frac{b+t}{2} - y \right)^{p'} dy \right)^{1/p'} \\ &\geq v\left(\frac{b+t}{2}\right) K\left(\frac{b+t}{2}\right) \left(\frac{b-t}{2} \right) \left(\int_a^t u^{p'}(y) dy \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

где $v((b+t)/2) < \infty$, $K((b+t)/2) < \infty$. Следовательно, для фиксированных a, b и t таких, что $0 \leq a < t < b < \infty$, получаем

$$\left(\int_a^t u^{p'}(y) dy \right)^{1/p'} \leq 2v^{-1}\left(\frac{b+t}{2}\right) K^{-1}\left(\frac{b+t}{2}\right) \|T|_{(a,b)}\| \frac{(b-a)^{1/q'}}{b-t} < \infty.$$

Из ограниченности оператора $T|_{(a,b)}$ следует, что неравенство

$$\left(\int_a^t v^q(x) \left(\int_a^x K(x-y)u(y)f(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \leq \|T|_{(a,b)}\| \|f\chi_{(a,t)}\|_p \quad (15)$$

выполнено для всех $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Положив в этом неравенстве $f = u^{1/(p-1)}\chi_{(a,b)}$, получаем

$$v(t) \left(\int_a^t \left(\int_a^x K(x-y)u^{p'}(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \leq \|T|_{(a,b)}\| \left(\int_a^t u^{p'}(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Следовательно, $\int_a^x K(x-y)u^{p'}(y) dy < \infty$ для почти всех $x \in (a, b)$, т.е. выполнено условие (12). Положим

$$J_0(u, v) := \left[\int_a^t K^{q/p}(t-x)v^q(x) dx \left(\int_a^x K(x-y)u^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q}.$$

Рассмотрим срезки весовых функций $u_n := \min(u, n)$, $v_n := \min(v, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия 2) теоремы 3 следует, что $J_0(u_n, v_n) < \infty$. Из неравенства треугольника следует, что $J_0(u_n, v_n) \leq J_1 + J_2$, где

$$\begin{aligned} J_1 &:= \left[\int_a^t K^{q/p}(t-x)v_n^q(x) dx \left(\int_{\max(2x-t, a)}^x K(x-y)u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q}, \\ J_2 &:= \left[\int_a^t K^{q/p}(t-x)v_n^q(x) dx \left(\int_a^{\max(2x-t, a)} K(x-y)u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Подставляя

$$f_t(y) = u_n^{1/(p-1)}(y) K^{1/p}(t-y) \chi_{(a,t)}(y)$$

в неравенство (15) и учитывая условие 1) теоремы 3, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^t K(t-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/p} \|T|_{(a,b)}\| \\ & \geq \left(\int_a^t v_n^q(x) \left(\int_{\max(2x-t,a)}^x K(x-y) K^{1/p}(t-y) u_n^{p'}(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ & \geq \left(\int_a^t v_n^q(x) \left(\int_{\max(2x-t,a)}^x K(x-y) K^{1/p}(2(t-x)) u_n^{p'}(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \gg J_1. \end{aligned}$$

В выражении J_2 сделаем замену переменных $\tau = 2x - t$ и, учитывая монотонность функции v и условие 1) теоремы 3, получаем

$$\begin{aligned} J_2 &:= \left[\int_{(t+a)/2}^t K^{q/p}(t-x) v_n^q(x) dx \left(\int_a^{2x-t} K(x-y) u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_a^t K^{q/p} \left(\frac{t-\tau}{2} \right) v_n^q \left(\frac{t+\tau}{2} \right) d\tau \left(\int_a^\tau K \left(\frac{t+\tau}{2} - y \right) u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q} \\ &\leq 2^{-1/q} \cdot C^{1/p} \left[\int_a^t K^{q/p}(t-\tau) v_n^q(\tau) d\tau \left(\int_a^\tau K(\tau-y) u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right]^{1/q} \\ &= 2^{-1/q} \cdot C^{1/p} J_0(u_n, v_n) < J_0(u_n, v_n). \end{aligned}$$

Объединяя обе оценки, имеем

$$J_0(u_n, v_n) \leq C_1(p, q) \left(\int_a^t K(t-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/p} \|T|_{(a,b)}\| + 2^{-1/q} \cdot C^{1/p} J_0(u_n, v_n).$$

Следовательно,

$$J_0(u_n, v_n) \ll \|T|_{(a,b)}\| \left(\int_a^t K(t-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, по теореме Фату получаем

$$J_0(u, v) \ll \|T|_{(a,b)}\| \left(\int_a^t K(t-x) u^{p'}(x) dx \right)^{1/p}.$$

Следовательно, $\|T\| \geq \|T|_{(a,b)}\| \gg \mathcal{A}^0(a, t)$, откуда $\|T\| \geq \|T|_{(a,b)}\| \gg \mathcal{A}_{a,b}^0$ и $\|T\| \gg \mathcal{A}^0$.

Доказательство достаточности повторяет доказательство п. а) теоремы 7 для $k = 0$, так как $\|T|_{(a,b)}\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll \mathcal{A}_{a,b}^0 \leq \mathcal{A}^0$, откуда по теореме Фату при $b \rightarrow \infty$ получаем $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll \mathcal{A}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Необходимость. Пусть $0 \leq a < b < \infty$ и оператор T , действующий из L^p в L^q , ограничен. Тогда ограничен оператор $T|_{(a,b)}$, т.е. неравенство

$$\left(\int_a^b v^q(x) \left(\int_a^x K(x-y) u(y) f(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \leq \|T|_{(a,b)}\| \|f \chi_{(a,b)}\|_p \quad (16)$$

выполнено для всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$.

Фиксируя произвольное $t \in (a, b)$ и полагая $f = \chi_{(a,b)}$ в неравенстве (16), получаем

$$\begin{aligned} \|T\|_{(a,b)} \|f\|_p &\geq u\left(\frac{a+t}{2}\right) K(b+\varepsilon) \left(\int_t^b v^q(x) \left(x - \frac{a+t}{2}\right)^q dx\right)^{1/q} \\ &\geq u\left(\frac{a+t}{2}\right) K(b+\varepsilon) \left(\frac{t-a}{2}\right) \left(\int_t^b v^q(x) dx\right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon \geq 0$, $u((a+t)/2) < \infty$, $K(b+\varepsilon) < \infty$. Следовательно, для фиксированных a, b и t , таких, что $0 \leq a < t < b < \infty$, получаем

$$\left(\int_t^b v^q(x) dx\right)^{1/q} \leq 2u^{-1}\left(\frac{a+t}{2}\right) K^{-1}(b+\varepsilon) \|T\|_{(a,b)} \frac{(b-a)^{1/p}}{t-a} < \infty.$$

Из ограниченности оператора $T|_{(a,b)}$ следует, что неравенство (14) выполнено для всех функций $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^+)$. Положим в (14) $g(x) = v^{q-1}(x)\chi_{(t,b)}(x)$. Тогда

$$u(t) \left(\int_t^b \left(\int_y^b K(x-y)v^q(x) dx\right)^{p'} dy\right)^{1/p'} \leq \|T\|_{(a,b)} \left(\int_t^b v^q(x) dx\right)^{1/q'}.$$

Следовательно, $\int_t^b K(x-t)v^q(x) dx < \infty$ для почти всех $t \in (a, b)$, т.е. выполнено условие (13). Положим

$$\tilde{J}_0(u, v) := \left[\int_t^b K^{p'/q'}(y-t) u^{p'}(y) dy \left(\int_y^b K(x-y)v^q(x) dx\right)^{p'} \right]^{1/p'}.$$

Пусть $v_n := \min(v, n)$, $u_n := \min(u, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия 2) теоремы 4 следует, что $\tilde{J}_0(u_n, v_n) < \infty$. Применяя неравенство треугольника, получим $\tilde{J}_0(u_n, v_n) < \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2$, где

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &:= \left[\int_t^b K^{p'/q'}(y-t) u_n^{p'}(y) dy \left(\int_y^{\min(2y-t, b)} K(x-y)v_n^q(x) dx\right)^{p'} \right]^{1/p'}, \\ \tilde{J}_2 &:= \left[\int_t^b K^{p'/q'}(y-t) u_n^{p'}(y) dy \left(\int_{\min(2y-t, b)}^b K(x-y)v_n^q(x) dx\right)^{p'} \right]^{1/p'}. \end{aligned}$$

Подставляя

$$g_t(x) = v_n^{q-1}(x) K^{1/q'}(x-t) \chi_{(t,b)}(x)$$

в (14) и учитывая условие 1) теоремы 4, получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_t^b K(x-t)v^q(x) dx\right)^{1/q'} \|T\|_{(a,b)} \\ &\geq \left[\int_t^b u_n^{p'}(y) dy \left(\int_y^{\min(2y-t, b)} K(x-y) K^{1/q'}(x-t) v_n^q(x) dx\right)^{p'} \right]^{1/p'} \gg \tilde{J}_1. \end{aligned}$$

В выражении $\tilde{J}_2$ сделаем замену переменных $2y - t = \tau$. Учитывая монотонность функции u и условие 1) теоремы 4, имеем

$$\begin{aligned}\tilde{J}_2 &= \left[\int_t^{(b+t)/2} K^{p'/q'}(y-t) u_n^{p'}(y) dy \left(\int_{2y-t}^b K(x-y) v_n^q(x) dx \right)^{p'} \right]^{1/p'} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_t^b K^{p'/q'} \left(\frac{\tau-t}{2} \right) u_n^{p'} \left(\frac{\tau+t}{2} \right) d\tau \left(\int_\tau^b K \left(x - \frac{\tau+t}{2} \right) v_n^q(x) dx \right)^{p'} \right]^{1/p'} \\ &\leq 2^{-1/p'} \cdot C^{1/q'} \tilde{J}_0(u_n, v_n) < \tilde{J}_0(u_n, v_n).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{J}_0(u_n, v_n) \leq C_2(p, q) \left(\int_t^b K(x-t) v^q(x) dx \right)^{1/q'} \|T\|_{(a,b)} + 2^{-1/p'} \cdot C^{1/q'} \tilde{J}_0(u_n, v_n).$$

Следовательно,

$$\tilde{J}_0(u_n, v_n) \ll \|T\|_{(a,b)} \left(\int_t^b K(x-t) v^q(x) dx \right)^{1/q'},$$

откуда по теореме Фату при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\tilde{J}_0(u, v) \ll \|T\|_{(a,b)} \left(\int_t^b K(x-t) v^q(x) dx \right)^{1/q'}.$$

Следовательно, $\|T\| \geq \|T\|_{(a,b)} \gg \mathcal{A}^1(t, b)$, откуда $\|T\| \geq \|T\|_{(a,b)} \gg \mathcal{A}_{a,b}^1$ и $\|T\| \gg \mathcal{A}^1$.

Доказательство достаточности повторяет доказательство п. а) теоремы 7 для $k = 1$.

§ 5. Доказательство теоремы 7

а) Рассмотрим случай $k = 0$. Пусть $0 \leq a < b < \infty$, $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^+)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_n(t) = \min\{\max\{f(t), -n\}, n\}, \quad u_n = \min\{u(t), n\}, \quad v_n = \min\{v(t), n\}, \\ t \in [a, b].$$

Применяя п. б) леммы 1 для $i = 1$ в случае $0 \leq a < b < \infty$, получаем

$$\begin{aligned}& \int_a^b u_n^{p'}(x) \left(\int_x^b K(y-x) v_n(y) f_n(y) dy \right)^{p'} dx \\ & \leq p' \int_a^b f_n(y) v_n(y) \left(\int_y^b K(t-y) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'-1} \left(\int_a^y K(y-x) u_n^{p'}(x) dx \right) dy \\ & =: p' J(a, b).\end{aligned}$$

Из условия 1) теоремы 7 следует, что $J(a, b) < \infty$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями q' и q , получаем

$$J(a, b) \leq \|f\|_{q'} \left[\int_a^b v_n^q(y) \left[\left(\int_y^b K(t-y) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'} \right]^{q/p} \right. \\ \left. \times \left(\int_a^y K(y-x) u_n^{p'}(x) dx \right)^q dy \right]^{1/q}.$$

Заметим, что

$$\left(\int_y^b K(t-y) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'} \\ = p' \int_y^b K(x-y) v_n(x) f_n(x) dx \left(\int_x^b K(t-y) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'-1} \\ \leq p' D^{p'-1} \int_y^b K(x-y) v_n(x) f_n(x) dx \left(\int_x^b K(t-x) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'-1}.$$

Следовательно, применяя обобщенное неравенство Минковского [14] с показателем $q/p \geq 1$, получаем

$$J(a, b) \leq \|f\|_{q'} \left[\int_a^b v_n^q(y) \left(p' D^{p'-1} \int_y^b K(x-y) v_n(x) f_n(x) dx \right. \right. \\ \left. \times \left(\int_x^b K(t-x) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'-1} \right)^{q/p} \left(\int_a^y K(y-t) u_n^{p'}(t) dt \right)^q dy \Big]^{1/q} \\ \leq (p' D^{p'-1})^{1/p} \|f\|_{q'} \left[\int_a^b f_n(x) v_n(x) \left(\int_x^b K(t-x) v_n(t) f_n(t) dt \right)^{p'-1} \right. \\ \left. \times \left(\int_a^x K(x-t) u^{p'}(t) dt \right) \left[\int_a^x K^{q/p}(x-y) v^q(y) dy \left(\int_a^y K(y-t) u^{p'}(t) dt \right)^q \right]^{p/q} \right. \\ \left. \times \left(\int_a^x K(x-t) u^{p'}(t) dt \right)^{-1} dx \right]^{1/p} \leq (p')^{1/p} \mathcal{A}_{a,b}^0 \|f\|_{q'} J^{1/p}(a, b).$$

Отсюда по теореме Фату при $n \rightarrow \infty$ получаем, что

$$J^{1/p'}(a, b) \leq (p')^{1/p} \mathcal{A}_{a,b}^0 \|f\|_{q'} < \infty$$

для всех функций $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, $\|T^*\|_{(a,b)} f\|_{p'} \ll \mathcal{A}_{a,b}^0 \|f\|_{q'}$. Таким образом, $\|T\|_{(a,b)} \|L^p \rightarrow L^q\| \ll \mathcal{A}_{a,b}^0$.

Для доказательства утверждения в случае $k = 1$ применим п. б) леммы 1 для $i = 0$ в случае $0 \leq a < b < \infty$. Имеем

$$\|T|_{(a,b)} f_n\|_q^q = \int_a^b v^q(x) \left(\int_a^x K(x-y) u_n(y) f_n(y) dy \right)^q dx \\ \leq q \int_a^b f_n(y) u_n(y) \left(\int_a^y K(y-t) u_n(t) f_n(t) dt \right)^{q-1} \left(\int_y^b K(x-y) v^q(x) dx \right) dy \\ =: q \tilde{J}(a, b)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, использованным в случае $k = 0$.

б) Рассмотрим случай $k = 0$. Применяя утверждение б) леммы 1 в случае $i = 0$ при $0 < b < \infty$ и неравенство Гёльдера с показателями $p, p/(q-1), s/q$, имеем

$$\begin{aligned}
 \|T|_{(0,b)} f\|_q^q &= \int_0^b v^q(x) \left(\int_0^x K(x-y)u(y)f(y) dy \right)^q dx \\
 &\leq q \int_0^b u(y)f(y) \int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \left(\int_0^y K(y-t)u(t)f(t) dt \right)^{q-1} dy \\
 &= q \int_0^b f(y) \times \left[u^{(p'-1)(q-1)}(y) \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{-(q-1)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_0^y K(y-t)u(t)f(t) dt \right)^{q-1} \right] \\
 &\quad \times \left[u^{(q-1)(q'-p')}(y) \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{q-1} \int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \right] dy \\
 &\leq q \|f(y)\|_p \left(\int_0^b u^{p'}(y) \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{-p} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_0^y K(y-t)u(t)f(t) dt \right)^p dy \right)^{(q-1)/p} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{s/q'} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_y^\infty K(x-y)v^q(x) dx \right)^{s/q} u^{p'}(y) dy \right)^{q/s}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_0^b u^{p'}(y) \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{-p} \left(\int_0^y K(y-t)u(t)f(t) dt \right)^p dy \right)^{1/p} \\
 &\leq C \left(\int_0^b f^p(t) dt \right)^{1/p},
 \end{aligned} \tag{17}$$

где C – некоторая константа. Рассмотрим оператор $\tilde{T}|_{(0,b)}: L^p(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^+)$, где

$$\tilde{T}f(y) = u^{p'/p}(y) \left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{-1} \int_0^y K(y-t)u(t)f(t) dt. \tag{18}$$

Легко видеть, что неравенство (17) представляет собой неравенство (6) при $p = q$ для оператора (18), который является частным случаем оператора T . Покажем, что для оператора $\tilde{T}|_{(0,b)}$, действующего из L^p в L^p , выполнены условия п. а) теоремы 7 при $k = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{0,b}^0 &= \operatorname{ess\,sup}_{0 < y < b} \left[\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \left(\int_0^x K(x-t)u^{p'}(t) dt \right)^{-p} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_0^x K(x-t)u^{p'}(t) dt \right)^p \right]^{1/p} \left[\int_0^y K(y-t)u^{p'}(t) dt \right]^{-1/p} = 1 < \infty.
 \end{aligned}$$

Следовательно, в неравенстве (17) константа $C = \|\tilde{T}\|_{(0,b)} \|L^p \rightarrow L^p\| \ll 1 < \infty$. Таким образом,

$$\|T\|_{(0,b)} f \|_q^q \ll \mathcal{B}_0^q \|f \chi_{(0,b)}\|_p^q \leq \mathcal{B}_0^q \|f\|_p^q.$$

Отсюда по теореме Фату при $b \rightarrow \infty$ получаем $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll \mathcal{B}_0$.

Перейдем к случаю $k = 1$. Применяя утверждение б) леммы 1 в случае $i = 1$ при $0 < b < \infty$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{(0,b)} g \|_{p'}^{p'} &= \int_0^b u^{p'}(x) \left(\int_x^b v(y) K(y-x) g(y) dy \right)^{p'} dx \\ &\leq p' \|g\|_{q'} \left(\int_0^b v^q(y) \left(\int_y^b K(x-y) v^q(x) dx \right)^{-q'} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_y^b K(t-y) v(t) g(t) dt \right)^{q'} dy \right)^{(p'-1)/q'} \left(\int_0^\infty \left(\int_y^\infty K(x-y) v^q(x) dx \right)^{s/p} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_0^y K(y-x) u^{p'}(x) dx \right)^{s/p'} v^q(y) dy \right)^{p'/s}. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае $k = 0$; при этом используется п. а) теоремы 7 при $k = 1$.

§ 6. Доказательство теоремы 5

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $0 < a < b \leq \infty$.

1) Если функция $h(x) > 0$ не убывает на интервале (a, b) , то функция

$$\int_a^y K(y-x) h(x) dx \text{ не убывает на } (a, b).$$

2) Если функция $w(x) > 0$ не возрастает на интервале (a, b) , то функция

$$\int_y^b K(x-y) w(x) dx \text{ не возрастает на } (a, b).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^y K(y-x) h(x) dx &= \int_0^{y-a} K(z) h(y-z) dz, \\ \int_y^b K(x-y) w(x) dx &= \int_0^{b-y} K(z) w(y+z) dz. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. *Необходимость.* Пусть $0 < a < b < \infty$. Из монотонности функций $u(x)$ и $v(x)$ получаем, что функция

$$U(y) := \int_a^y K(y-x) u^{p'}(x) dx$$

не убывает на (a, b) , а функция

$$V(y) := \int_y^b K(x-y) v^q(x) dx$$

не возрастает на (a, b) .

1) Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(t) = U^{s/(pq')}(t)V^{s/(pq)}(t)u^{p'-1}(t).$$

Из условий теоремы 5, учитывая монотонность функций $u(x)$ и $v(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_p &= \left(\int_a^b \left[\left(\int_a^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{1/q'} \left(\int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \right)^{1/q} \right]^s u^{p'}(y) dy \right)^{1/p} \\ &=: \mathcal{B}_0^{s/p}(a, b) < \infty. \end{aligned}$$

Далее, учитывая монотонность функций $U(y)$ и $V(y)$, получаем

$$\begin{aligned} \|T|_{(a,b)}\|^q \|\tilde{f}\|_p^q &= \|T|_{(a,b)}\|^q \mathcal{B}_0^{sq/p}(a, b) \geq \int_a^b v^q(x) \left(\int_a^x K(x-y)u(y)\tilde{f}(y) dy \right)^q dx \\ &= \int_a^b v^q(x) \int_a^x K(x-y)u(y)\tilde{f}(y) dy \left(\int_a^x K(x-t)u(t)\tilde{f}(t) dt \right)^{q-1} dx \\ &= \int_a^b u(y)\tilde{f}(y) \int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \left(\int_a^x K(x-t)u(t)\tilde{f}(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &\geq \int_a^b u^{p'}(y)U^{s/(pq')}(y)V^{s/(pq)}(y) \int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \\ &\quad \times \left(\int_a^x K(x-t)u^{p'}(t)U^{s/(pq')}(t)V^{s/(pq)}(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &\geq \int_a^b u^{p'}(y)U^{s/(pq')}(y)V^{s/(pq)}(y) \int_y^b K(x-y)v^q(x)V^{s/(pq')}(x) dx \\ &\quad \times \left(\int_a^y K(y-t)u^{p'}(t)U^{s/(pq')}(t)V^{s/(pq)}(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &= \int_a^b u^{p'}(y)U^{s/(pq')}(y)V^{s/(pq)}(y)\tilde{V}(y)\tilde{U}^{q-1}(y) dy, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y) &:= \int_y^b K(x-y)v^q(x)V^{s/(pq')}(x) dx \\ &= \int_y^b K(x-y)v^q(x) \left(\int_x^b K(z-x)v^q(z) dz \right)^{s/(pq')} dx \\ &\geq \int_y^b K(x-y)v^q(x) \left(\int_x^b K(z-y)v^q(z) dz \right)^{s/(pq')} dx \\ &= - \int_y^b \left(\int_x^b K(z-y)v^q(z) dz \right)^{s/(pq')} d \left(\int_x^b K(z-y)v^q(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{s/(pq') + 1} \left(\int_y^b K(z-y)v^q(z) dz \right)^{s/(pq') + 1} = \frac{1}{s/(pq') + 1} V^{s/(pq') + 1}(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(y) &= \int_a^y K(y-t)u^{p'}(t)U^{s/(pq')}(t) dt \\
&= \int_a^y K(y-t)u^{p'}(t) \left(\int_a^t K(t-z)u^{p'}(z) dz \right)^{s/(pq')} dt \\
&\geq \int_a^y K(y-t)u^{p'}(t) \left(\int_a^t K(y-z)u^{p'}(z) dz \right)^{s/(pq')} dt \\
&= \int_a^y \left(\int_a^t K(y-z)u^{p'}(z) dz \right)^{s/(pq')} d \left(\int_a^t K(y-z)u^{p'}(z) dz \right) \\
&= \frac{1}{s/(pq') + 1} \left(\int_a^y K(y-z)u^{p'}(z) dz \right)^{s/(pq') + 1} = \frac{1}{s/(pq') + 1} U^{s/(pq') + 1}(y).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|T|_{(a,b)}\|^q \|\tilde{f}\|_p^q &= \|T|_{(a,b)}\|^q \mathcal{B}_0^{sq/p}(a, b) \\
&\geq \int_a^b u^{p'}(y) U^{s/(pq')}(y) V^{s/(pq)}(y) \tilde{V}(y) \tilde{U}^{q-1}(y) dy \\
&\gg \int_a^b u^{p'}(y) U^{s/(pq') + (s/(pq') + 1)(q-1)}(y) V^{s/(pq) + s/(pq') + 1}(y) dy \\
&= \int_a^b u^{p'}(y) U^{s/q'}(y) V^{s/q}(y) dy = \mathcal{B}_0^s(a, b).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|T\| \geq \|T|_{(a,b)}\| \gg \mathcal{B}_0(a, b)$. Следовательно, при $b \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$ получаем $\|T\| \gg \mathcal{B}_0$.

2) Покажем, что $\|T\| \gg \mathcal{B}_1$. Для этого рассмотрим двойственный оператор

$$T^*|_{(a,b)} g(x) = u(y) \int_y^b v(x) K(x-y) g(x) dx, \quad T^*|_{(a,b)} : L^{q'}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^+),$$

и функцию

$$\tilde{g}(t) = U^{s/(p'q')}(t) V^{s/(pq')}(t) v^{q-1}(t).$$

Из условий теоремы 5 получаем

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}\|_{q'} &= \left(\int_a^b \left[\left(\int_a^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \right)^{1/p'} \right]^s v^q(y) dy \right)^{1/q'} \\
&=: \mathcal{B}_1^{s/q'}(a, b) < \infty.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|T^*|_{(a,b)}\|^{p'} \|g\|_{q'}^{p'} &= \|T^*|_{(a,b)}\|^q \mathcal{B}_1^{sp'/q'}(a, b) \\
&\geq \int_a^b u^{p'}(x) \left(\int_x^b v(y) K(y-x) \tilde{g}(y) dy \right)^{p'} dx.
\end{aligned}$$

Далее рассуждаем аналогично п. 1).

Достаточность. Пусть $0 \leq a < b < \infty$. Из монотонности функций $u(x)$ и $v(x)$ следует, что функции

$$\begin{aligned} h_0(y) &= \int_a^y K(y-x)u^{p'}(x) dx \leq u^{p'}(y) \int_a^y K(y-x) dx < \infty, \\ h_1(y) &= \int_y^b K(x-y)v^q(x) dx \leq v^q(y) \int_y^b K(x-y) dx < \infty \end{aligned}$$

для почти всех $y \in (a, b)$, где $0 \leq a < b < \infty$. Следовательно, выполнены условия теоремы 7 и $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll \mathcal{B}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если оператор $T: L^p \rightarrow L^q$ компактен, то он ограничен и, следовательно, по теореме 5 имеем $\mathcal{B} < \infty$. Обратно, если $\mathcal{B} < \infty$, то согласно теореме 5 оператор $T: L^p \rightarrow L^q$ ограничен и его компактность следует из [15; теоремы 2.3 и 5.5].

§ 7. Доказательство теоремы 6

Необходимость. а) Пусть $0 < b < \infty$. Положим $u_n := \min(u, n)$, $n \in \mathbb{N}$, и рассмотрим функцию

$$f_t(y) = u_n^{p'-1}(y)\chi_{(0,t)}(y), \quad t \in (0, b).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f_t\|_p &= \left(\int_0^t u_n^{p'}(y) dy \right)^{1/p} < \infty, \\ \|R_\alpha|_{(0,b)}\| \|f_t\|_p &\geq \left(\int_0^b v^q(x) \left(\int_0^x \frac{u_n(y)f_t(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &\geq \left(\int_t^b v^q(x) \left(\int_0^x \frac{u_n(y)f_t(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_t^b v^q(x) \left(\int_0^t \frac{u_n^{p'}(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &\geq \left(\int_t^b \frac{v^q(x) dx}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_0^t u_n^{p'}(y) dy \right)^q \right)^{1/q} = \left(\int_t^b \frac{v^q(x) dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int_0^t u_n^{p'}(y) dy \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|R_\alpha\| \geq \|R_\alpha|_{(0,b)}\| \geq \left(\int_t^b \frac{v^q(x) dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int_0^t u_n^{p'}(y) dy \right)^{1/p'}.$$

Применяя теорему Фату при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\|R_\alpha\| \geq \left(\int_t^b \frac{v^q(x) dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int_0^t u^{p'}(y) dy \right)^{1/p'}.$$

Следовательно, $\|R_\alpha\| \geq \tilde{A}$ при $b \rightarrow \infty$.

Тот же результат можно получить, если рассмотреть двойственный оператор

$$R_\alpha^* g(x) = u(x) \int_x^\infty \frac{v(y)g(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy, \quad R_\alpha^*: L^{q'}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^+),$$

и функцию

$$g_t(y) = \left(\frac{v_n(y)}{y^{1-\alpha}} \right)^{q-1} \chi_{(t,b)}(y), \quad t \in (0, b),$$

где $v_n := \min(v, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

б) Пусть $0 < b < \infty$,

$$u_n := \min(u, n), \quad v_n := \min(v, n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$U(t) = \int_0^t u_n^{p'}(x) dx, \quad V(t) = \int_t^b \frac{v_n^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx,$$

где $t \in (0, b)$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = U^{s/(pq')}(t) V^{s/(pq)}(t) u_n^{p'-1}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f_n\|_p &= \left(\int_0^b \left[\left(\int_0^y u_n^{p'}(x) dx \right)^{1/q'} \left(\int_y^b \frac{v_n^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} \right]^s u_n^{p'}(y) dy \right)^{1/p} \\ &=: \tilde{B}_0^{s/p}(b, n) < \infty, \end{aligned}$$

так как по условию теоремы $\alpha > 1/q'$. Учитывая монотонность функций $U(y)$ и $V(y)$, получаем

$$\begin{aligned} \|R_\alpha|_{(0,b)}\|^q \|f_n\|_p^q &= \|R_\alpha|_{(0,b)}\|^q \tilde{B}_0^{sq/p}(b, n) \geq \int_0^b v^q(x) \left(\int_0^x \frac{u(y)f_n(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \\ &\geq \int_0^b v_n^q(x) \left(\int_0^x \frac{u_n(y)f_n(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \\ &= q \int_0^b v_n^q(x) \int_0^x \frac{u_n(y)f_n(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \left(\int_0^y \frac{u_n(t)f_n(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right)^{q-1} dx \\ &\geq q \int_0^b u_n(y)f_n(y) \int_y^b \frac{v_n^q(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} dx \left(\int_0^y \frac{u_n(t)f_n(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right)^{q-1} dy \\ &\geq q \int_0^b u_n(y)f_n(y) \int_y^b \frac{v_n^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_0^y u_n(t)f_n(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &= q \int_0^b u_n^{p'}(y) U^{s/(pq')}(y) V^{s/(pq)}(y) \int_y^b \frac{v_n^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \\ &\quad \times \left(\int_0^y u_n^{p'}(t) U^{s/(pq')}(t) V^{s/(pq)}(t) dt \right)^{q-1} dy \\ &\geq q \int_0^b u_n^{p'}(y) U^{s/(pq')}(y) V^{s/(pq)+s(q-1)/(pq)}(y) \int_y^b \frac{v_n^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^y \left(\int_0^t u_n^{p'}(x) dx \right)^{s/(pq')} d \left(\int_0^t u_n^{p'}(x) dx \right) \right)^{q-1} dy \\
& = \frac{q}{(s/(pq') + 1)^{q-1}} \int_0^b U^{s/q'}(y) V^{s/q}(y) u_n^{p'}(y) dy = \frac{q}{(s/(pq') + 1)^{q-1}} \tilde{B}_0^s(b, n).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|R_\alpha\| \geq \|R_\alpha|_{(0,b)}\| \gg \tilde{B}_0(b, n).$$

Следовательно, переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$ и при $n \rightarrow \infty$ по теореме Фату получаем $\|R_\alpha\| \gg \tilde{B}_0$.

Аналогично можно показать, что $\|R_\alpha\| \gg \tilde{B}_1$. Для этого достаточно применить предыдущие рассуждения к двойственному оператору

$$R_\alpha^* g(x) = u(x) \int_x^\infty \frac{v(y)g(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy, \quad R_\alpha^*: L^{q'}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^+),$$

рассмотрев функцию

$$g_n(t) = U^{s/(p'q')}(t) V^{s/(pq')}(t) \left(\frac{v_n(t)}{t^{1-\alpha}} \right)^{q-1},$$

где $t \in (0, b)$.

Достаточность. Рассмотрим случай $m = 0$. Согласно утверждению леммы 1 при $k(x, y) = (x - y)^{\alpha-1}$ имеем

$$\begin{aligned}
\|R_\alpha f\|_q^q &= \int_0^\infty v^q(x) \left(\int_0^x \frac{u(y)f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right)^q dx \\
&\leq q \int_0^\infty u(y)f(y) \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{(x-y)^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_0^y u(t)f(t) dt \right)^{q-1} dy = J_0.
\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству п. а). Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
J_0 &= q \int_0^\infty u(y)f(y) \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{(x-y)^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{-1} \\
&\quad \times \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_0^y u(t)f(t) dt \right)^{q-1} dy \\
&\leq q E_0^q \|f\|_p \left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{p'} \left(\int_0^y u(t)f(t) dt \right)^{(q-1)p'} dy \right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Из неравенства Харди [13], как и в доказательстве п. а) теоремы 8, следует, что

$$\|R_\alpha f\|_q^q \leq q E_0^q \|f\|_p C^{q-1} \|f\|_p^{q-1} \ll E_0^q \tilde{A}^q \|f\|_p^q.$$

Поэтому

$$\|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_0 \tilde{A}.$$

Перейдем к доказательству п. б). Применяя неравенство Гёльдера с показателями p , $p/(q-1)$, s/q , получаем

$$\begin{aligned}
 J_0 &= q \int_0^\infty f(y) \left[u(y) u^{-(q-1)(q'-p')}(y) \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{(x-y)^{(1-\alpha)q}} dx \right. \\
 &\quad \times \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{-1} \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-(q-1)} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} \Big] \\
 &\quad \times \left[u^{(q-1)(q'-p')}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{q-1} \int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right] dy \\
 &\leq q E_0^q \int_0^\infty f(y) \left[u^{(p'-1)(q-1)}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-(q-1)} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^{q-1} \right] \\
 &\quad \times \left[\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{q-1} u^{(q-1)(q'-p')}(y) \right] dy \\
 &\leq q E_0^q \|f\|_p \left(\int_0^\infty u^{p'}(y) \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{-p} \left(\int_0^y u(t) f(t) dt \right)^p dy \right)^{(q-1)/p} \\
 &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^{s/q'} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{s/q} u^{p'}(y) dy \right)^{q/s}.
 \end{aligned}$$

Из неравенства Харди (см. п. б) доказательства теоремы 8) следует, что

$$\|R_\alpha f\|_q^q \leq q E_0^q \|f\|_p C_p^{q-1} \|f\|_p^{q-1} \tilde{B}_0^q \ll E_0^q \tilde{B}_0^q \|f\|_p^q.$$

Таким образом,

$$\|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_0 \tilde{B}_0.$$

Рассмотрим случай $m = 1$. Для этого получим аналогичные оценки для двойственного оператора. Имеем

$$\begin{aligned}
 \|R_\alpha^* g\|_{p'}^{p'} &= \int_0^\infty u^{p'}(x) \left(\int_x^\infty \frac{v(y) g(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy \right)^{p'} dx \\
 &\leq p' \int_0^\infty v(y) g(y) \int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx \left(\int_y^\infty \frac{v(t) g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \right)^{p'-1} dy.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \int_y^\infty \frac{v(t) g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt &= \int_y^\infty \frac{v(t) g(t)}{t^{1-\alpha} (1-x/t)^{1-\alpha}} dt \leq \int_y^\infty \frac{v(t) g(t)}{t^{1-\alpha} (1-x/y)^{1-\alpha}} dt \\
 &\leq \int_y^\infty \frac{y^{1-\alpha} v(t) g(t)}{t^{1-\alpha} (y-x)^{1-\alpha}} dt.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\|R_\alpha^* g\|_{p'}^{p'} \leq p' \int_0^\infty g(y) \frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \int_0^y \frac{y^{(1-\alpha)p'} u^{p'}(x)}{(y-x)^{(1-\alpha)p'}} dx \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{p'-1} dy = J_1.$$

Перейдем к доказательству п. а). Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
 J_1 &\leq p' \|g\|_{q'} \left(\int_0^\infty \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^q \left(\int_0^y \frac{y^{(1-\alpha)p'} u^{p'}(x)}{(y-x)^{(1-\alpha)p'}} dx \right)^q \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{q(p'-1)} dy \right)^{1/q} \\
 &= p' \|g\|_{q'} \left(\int_0^\infty \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^q \left(\int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{(y-x)^{(1-\alpha)p'}} dx \left(\int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{y^{(1-\alpha)p'}} dx \right)^{-1} \right)^q \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^q \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{q(p'-1)} dy \right)^{1/q} \\
 &\leq p' E_1^{p'} \|g\|_{q'} \left(\int_0^\infty \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^q \left(\int_0^y u^{p'}(x) dx \right)^q \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{q(p'-1)} dy \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди [13] для двойственного оператора, аналогично случаю $m = 0$ получаем

$$\|R_\alpha^* g\|_{p'}^{p'} \leq p' E_1^{p'} \|g\|_{q'} C^{p'-1} \|g\|_{q'}^{p'-1} \ll E_1^{p'} \tilde{A}^{p'} \|g\|_{q'}^{p'}.$$

Следовательно,

$$\|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_1 \tilde{A}.$$

Перейдем к доказательству п. б). Применяя неравенство Гёльдера с показателями q' , $q'/(p'-1)$, s/p' , получаем

$$\begin{aligned}
 J_1 &= p' \int_0^\infty g(y) \left[\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^{-(p'-1)(p-q)} \int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{(y-x)^{(1-\alpha)p'}} dx \left(\int_0^y \frac{u^{p'}(x)}{y^{(1-\alpha)p'}} dx \right)^{-1} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{-(p'-1)} \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{p'-1} \right] \\
 &\quad \times \left[\int_0^y u^{p'}(t) dt \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{p'-1} \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^{(p'-1)(p-q)} \right] dy \\
 &\leq p' E_1^{p'} \int_0^\infty g(y) \left[\left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^{(q-1)(p'-1)} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{-(p'-1)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{p'-1} \right] \\
 &\quad \times \left[\int_0^y u^{p'}(t) dt \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{p'-1} \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^{(p'-1)(p-q)} \right] dy \\
 &\leq p' E_1^{p'} \|g\|_{q'}^{q'} \left(\int_0^\infty \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^q \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{-q'} \left(\int_y^\infty \frac{v(t)}{t^{1-\alpha}} g(t) dt \right)^{q'} \right)^{(p'-1)/q'} \\
 &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_0^y u^{p'}(t) dt \right)^{s/p'} \left(\int_y^\infty \frac{v^q(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \right)^{s/p} \left(\frac{v(y)}{y^{(1-\alpha)}} \right)^q dy \right)^{p'/s}.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди [13] для двойственного оператора, аналогично случаю $m = 0$ получаем

$$\|R_\alpha^* g\|_{p'}^{p'} \leq p' E_1^{p'} \|g\|_{q'} C_{q'}^{p'-1} \|g\|_{q'}^{p'-1} \tilde{B}_1^{p'} \ll E_1^{p'} \tilde{B}_1^{p'} \|g\|_{q'}^{p'}.$$

Следовательно,

$$\|R_\alpha\|_{L^p \rightarrow L^q} \ll E_1 \tilde{B}_1.$$

§ 8. Примеры

Приведем примеры выполнения условия $E_k < \infty$ теоремы 6, где $k = 0, 1$.

1) Положим $u^{p'}(x) = x^n$, $n \geq 0$, в выражении E_1 . Тогда

$$E_1^{p'} = \frac{\Gamma(-(1-\alpha)p' + 1)\Gamma(n+1)(n+1)}{\Gamma(-(1-\alpha)p' + 2 + n)}.$$

2) Положим $v^q(x) = x^n$, $n \leq 0$, в выражении E_0 . Тогда

$$E_0^q = \frac{\Gamma(-1 - n + (1-\alpha)q)\Gamma(-(1-\alpha)q + 1)(n - q + q\alpha + 1)}{\Gamma(-n)}.$$

Таким образом, условия $E_k < \infty$, где $k = 0, 1$, выполнены при фиксированных α, p, q, n , определенных выше.

Список литературы

- [1] Р. Ойнаров, “Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 16*, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 240–250; англ. пер.: R. Oinarov, “Two-sided norm estimates for certain classes of integral operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **204**:3 (1994), 205–214.
- [2] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **50**:1 (1994), 105–120.
- [3] В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, “Весовые оценки для интегральных операторов на полуоси с монотонными ядрами”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:6 (2004), 1378–1390; англ. пер.: V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Weighted estimates for the integral operators with monotone kernel on a half-axis”, *Siberian Math. J.*, **45**:6 (2004), 1124–1134.
- [4] A. Meskhi, “Solution of some weight problems for the Riemann–Liouville and Weyl operators”, *Georgian Math. J.*, **5**:6 (1998), 565–574.
- [5] M. Lorente, “A characterization of two weight norm inequalities for one-sided operators of fractional type”, *Canad. J. Math.*, **49**:5 (1997), 1010–1033.
- [6] E. T. Sawyer, “A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators”, *Studia Math.*, **75**:1 (1982), 1–11.
- [7] K. F. Andersen, E. T. Sawyer, “Weighted norm inequalities for the Riemann–Liouville and Weyl fractional integral operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**:2 (1998), 547–558.
- [8] F. J. Martin-Reyes, A. de la Torre, “Two weight norm inequalities for fractional one-sided maximal operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**:2 (1993), 483–489.
- [9] M. Lorente, A. de la Torre, “Weighted inequalities for some one-sided operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:3 (1996), 839–848.
- [10] D. V. Prokhorov, “On the boundedness and compactness of a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **61**:2 (2000), 617–628.

- [11] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, “Весовые оценки операторов Римана–Лиувилля и приложения”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 289–312; англ. пер.: D. V. Prokhorov, V. D. Stepanov, “Weighted estimates for the Riemann–Liouville operators and applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **204**:4 (2003), 278–301.
- [12] Y. Rakotondratsimba, “Weighted norm inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order less than one”, *Z. Anal. Anwendungen*, **16**:4 (1997), 801–829.
- [13] G. Sinnamon, V. D. Stepanov, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **54**:1 (1996), 89–101.
- [14] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [15] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustyl'nik, P. E. Sobolevskij, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.

Н. А. Раутиан (N. A. Rautian)

Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова,
г. Москва

E-mail: nrautian@mail.ru

Поступила в редакцию

18.11.2008 и 03.07.2009