Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Авдеева, В. А. Быковский, Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:53:48

УДК 511.334+515.178

М. О. Авдеева, В. А. Быковский

Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел

В работе изучаются свойства совместных диофантовых приближений для двух вещественных чисел.

Библиография: 11 названий.

Введение

Пусть $\alpha = [t_0, t_1, \dots, t_i, \dots]$ есть стандартная формальная запись разложения вещественного α в цепную дробь с целой частью $t_0 = [\alpha]$ и неполными частными $t_1, \dots, t_i, \dots$ (натуральные числа). Для подходящих дробей $a_i/q_i = [t_0, t_1, \dots, t_i]$ с взаимно простыми целым a_i и натуральным q_i хорошо известна оценка $|\alpha - a_i/q_i| < q_i^{-2}$, которую можно представить в виде $\|\alpha q_i\| q_i < 1$. Здесь $\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого. К. Вален [1] усилил ее, доказав неравенство

$$\min\{\|\alpha q_i\| q_i, \|\alpha q_{i+1}\| q_{i+1}\} < \frac{1}{2} \quad (0.1)$$

(см. также [2]–[4]). При этом константу $\frac{1}{2}$ из правой части нельзя заменить на меньшее число. По теореме Лагранжа (см. [2]–[4]) знаменатели подходящих дробей a_i/q_i однозначно определяются условием, что $\|\alpha q_i\| < \|\alpha q'\|$ для всех натуральных $q' < q_i$. При этом удобно считать, что $q_0 = 1$. Это наблюдение мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Натуральное q называется *подходящим знаменателем к паре вещественных чисел* (α, β) , если для всех натуральных $q' < q$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\|\alpha q\| < \|\alpha q'\|, \quad \|\beta q\| < \|\beta q'\|.$$

Очевидно, что любой подходящий знаменатель к α или β (в обычном смысле) удовлетворяет определению. Вообще говоря, последовательность подходящих знаменателей к (α, β) более “густая” для случайно выбранных α и β . Она конечна только в случае одновременной рациональности α и β . Для краткости в дальнейшем прилагательное “подходящий” будем опускать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-96301) и Президиума ДВО РАН (грант № 03-1-0-01-003).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Различные знаменатели q_1 и q_2 к (α, β) назовем *смежными*, если не существует отличного от них третьего q , для которого

$$q < \max\{q_1, q_2\}, \\ \|\alpha q\| \leq \max\{\|\alpha q_1\|, \|\alpha q_2\|\}, \quad \|\beta q\| \leq \max\{\|\beta q_1\|, \|\beta q_2\|\}.$$

Отметим, что в случае $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ речь идет о знаменателях q_i и q_{i+1} для соседних подходящих дробей к α . При нецелом $\alpha - \beta$ между смежными q_1 и q_2 могут располагаться несколько других знаменателей q к (α, β) в каком угодно количестве.

Для любого знаменателя q к (α, β) из теоремы Минковского о выпуклом теле немедленно следует неравенство $\|\alpha q\| \|\beta q\| q < 1$ (аналог ранее упоминавшейся оценки $\|\alpha q_i\| q_i < 1$). В работе [5] для смежных q_1 и q_2 к (α, β) было доказано неравенство

$$\min\{\|\alpha q_1\| \|\beta q_1\| q_1, \|\alpha q_2\| \|\beta q_2\| q_2\} < \frac{1}{2} \quad (0.2)$$

(аналог оценки Валена из (0.1)). При этом постоянную $\frac{1}{2}$ нельзя заменить на меньшую.

Наша цель состоит в том, чтобы усилить (0.2). Для этого сформулируем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем три знаменателя q_1, q_2, q_3 к (α, β) *смежными*, если они попарно смежны и не существует четвертого q (в том числе совпадающего с одним из q_1, q_2, q_3), для которого

$$q < \max\{q_1, q_2, q_3\}, \\ \|\alpha q\| < \max_{i=1,2,3} \{\|\alpha q_i\|\}, \quad \|\beta q\| < \max_{i=1,2,3} \{\|\beta q_i\|\}.$$

Главным результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть q_1, q_2, q_3 суть смежные знаменатели к (α, β) , ни один из которых не равен сумме двух других. Тогда

$$\min_{i=1,2,3} \{\|\alpha q_i\| \|\beta q_i\| q_i\} < \frac{1}{3}.$$

Постоянную $\frac{1}{3}$ в правой части нельзя заменить на меньшую. Следует отметить, что для смежных троек с $q_1 < q_2 < q_3$ условие $q_1 + q_2 = q_3$ выполняется для почти всех (α, β) (по мере Лебега) с хотя и малой, но положительной частотой. Этот вывод основан на эвристических соображениях, на которых мы не будем здесь останавливаться.

§1. Свойства смежных знаменателей

В этом параграфе изучаются особенности взаимного расположения смежных знаменателей, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы. В идейном плане мы опираемся на основополагающие работы Г. Ф. Вороного [6] и Г. Минковского [7]. Речь идет о теориях смежных минимумов (Вороной) и минимальных базисах (Минковский) для трехмерных полных решеток. Мы также используем некоторые технические приемы из работ [8] и [9].

Пару (α, β) , начиная с этого момента, мы будем считать фиксированной. Положим по определению $((x)) = \{x + \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ для любого вещественного x . При этом $\|x\| = |((x))|$. Пусть

$$D(q_1, q_2, q_3) = \det \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ ((\alpha q_1)) & ((\alpha q_2)) & ((\alpha q_3)) \\ ((\beta q_1)) & ((\beta q_2)) & ((\beta q_3)) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

ЛЕММА 1. Если q_1, q_2, q_3 составляют тройку смежных знаменателей к (α, β) , то $D(q_1, q_2, q_3) = 0, \pm 1$. При этом определитель равен нулю только в случае, когда один из столбцов матрицы в (1.1) равен сумме двух других.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим полную трехмерную решетку

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \{(l, \alpha l + m, \beta l + n) = l(1, \alpha, \beta) + m(0, 1, 0) + n(0, 0, 1) : l, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

целочисленно порожденную базисом $(1, \alpha, \beta)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Ее определитель равен 1. Векторы

$$Q_i = (q_i, ((\alpha q_i)), ((\beta q_i))), \quad i = 1, 2, 3,$$

будут узлами $\Gamma(\alpha, \beta)$. Они целочисленно выражаются через базис. Поэтому $D(q_1, q_2, q_3)$ — целое число.

Рассмотрим сначала случай $D(q_1, q_2, q_3) = 0$. Это означает, что при некоторых целых a_1, a_2, a_3 одновременно выполняется равенство

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3 = (0, 0, 0). \quad (1.2)$$

Ввиду симметрии без ограничения общности можно считать, что $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3|$. Разделив обе части (1.2) на a_1 , получим еще одно равенство

$$Q_1 + \theta_2 Q_2 + \theta_3 Q_3 = (0, 0, 0).$$

Выберем $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0, \pm 1\}$ из условий

$$\theta_2 = \varepsilon_2 - \theta'_2, \quad |\theta'_2| \leq \frac{1}{2}, \quad \theta_3 = \varepsilon_3 - \theta'_3, \quad |\theta'_3| \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$Q = Q_1 + \varepsilon_2 Q_2 + \varepsilon_3 Q_3 = \theta'_2 Q_2 + \theta'_3 Q_3. \quad (1.3)$$

Поскольку Q — узел $\Gamma(\alpha, \beta)$, то

$$Q = (l, \alpha l + m, \beta l + n)$$

для некоторых целых l, m, n . Так как $|\theta'_2| \leq \frac{1}{2}$ и $|\theta'_3| \leq \frac{1}{2}$, то

$$|\theta'_2 q_2 + \theta'_3 q_3| \leq \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{2} q_3, \quad (1.4)$$

$$|\theta'_2 ((\alpha q_2)) + \theta'_3 ((\alpha q_3))| \leq \frac{1}{2} \|\alpha q_2\| + \frac{1}{2} \|\alpha q_3\|, \quad (1.5)$$

$$|\theta'_2 ((\beta q_2)) + \theta'_3 ((\beta q_3))| \leq \frac{1}{2} \|\beta q_2\| + \frac{1}{2} \|\beta q_3\|. \quad (1.6)$$

Предположим, что $l \neq 0$. Тогда для $q = |l|$ выполняются неравенства

$$q < \max\{q_2, q_3\},$$

$$\|\alpha q\| \leq \max\{\|\alpha q_2\|, \|\alpha q_3\|\}, \quad \|\beta q\| \leq \max\{\|\beta q_2\|, \|\beta q_3\|\}.$$

Поскольку q_2 и q_3 смежные, то q совпадает с одним из них (см. определение 2). При этом мы воспользовались следующим очевидным фактом. Для любого натурального q найдется знаменатель q' к (α, β) , для которого

$$q' \leq q, \quad \|\alpha q'\| \leq \|\alpha q\|, \quad \|\beta q'\| \leq \|\beta q\|.$$

Таким образом, имеет место соотношение $Q_1 = \tau_2 Q_2 + \tau_3 Q_3$ с $\tau_2, \tau_3 \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ и $|\tau_2| + |\tau_3| \leq 3$. Если $\tau_2 = \pm 2$, то $Q_2 = (1/\tau_2)Q_1 - (\tau_3/\tau_2)Q_3$ нарушает смежность q_1 и q_3 . Следовательно, $\tau_2 \neq \pm 2$. По этой же причине $\tau_3 \neq \pm 2$. Поскольку q_1, q_2, q_3 попарно различны, то $\tau_2 \neq 0$ и $\tau_3 \neq 0$. Поэтому $\tau_2, \tau_3 \in \{\pm 1\}$. Таким образом, в рассматриваемом случае один из столбцов матрицы (1.1) равен сумме двух других. В частности, одно из чисел q_1, q_2, q_3 есть сумма остальных двух. Из теоремы 2, доказанной в работе [9], непосредственно следует, что в невырожденном случае $D(q_1, q_2, q_3) = \pm 1$. Лемма 1 полностью доказана.

§ 2. Минимальные и приведенные матрицы

Рассмотрим множество всех матриц

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

с ненулевыми x_{ij} и $D(M) = \det(M) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем *минимальными* те матрицы M , у которых

- 1) для некоторой перестановки $(1, 2, 3) \mapsto (i, j, k)$ элементы x_{1i}, x_{2j}, x_{3k} максимальны по абсолютной величине в соответствующих им строках;
- 2) если в какой-то строке все элементы по абсолютной величине равны, то это свойство выполняется и для остальных двух;
- 3) для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0, \pm 1\}$, никакие два из которых одновременно не равны нулю, найдется номер i такой, что

$$|\varepsilon_1 x_{i1} + \varepsilon_2 x_{i2} + \varepsilon_3 x_{i3}| \geq \max\{|x_{i1}|, |x_{i2}|, |x_{i3}|\}.$$

Рассмотрим матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & -z_1 \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

с положительными x_i, y_i, z_i , у которых

- I) $\max\{x_1, z_1\} \leq y_1, \max\{y_2, z_2\} \leq x_2, \max\{x_3, y_3\} \leq z_3$;
- II) для первого вида выполняется хотя бы одно из неравенств $z_1 \leq x_1, y_2 \leq z_2$;
- III) для второго вида $y_3 \leq x_3$ и $x_2 \leq y_2 + z_2$;
- IV) имеет место условие 2) из определения 4.

ЛЕММА 2. Любая матрица вида (2.1), удовлетворяющая условиям I)–IV), минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицы первого вида из (2.1). Сначала заметим, что

$$\det(M) = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_1 y_3 z_2 > 0,$$

поскольку $x_2 y_1 z_3 \geq x_3 y_2 z_1$ в соответствии с I). Это же условие обеспечивает выполнимость 1), а также 3) в случае, когда одно из чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равно нулю. Рутинная очевидная проверка показывает, что при дополнительном условии II) выполняется 3) во всех остальных случаях с $\varepsilon_i \neq 0, i = 1, 2, 3$. Для матриц второго вида из (2.1)

$$\det(M) = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_3 z_1 + x_3 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_1 y_3 z_2 > 0,$$

так как $x_2 y_1 z_3 \geq x_2 y_3 z_1$ в соответствии с условием I). Для выполнимости 1) также достаточно I). Если $\varepsilon_1 \neq 0$, то 3) следует из I) и неравенства $y_3 \leq x_3$ из III). Такая же картина и для $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \pm(0, 1, 1)$. Неравенство $x_2 \leq y_2 + z_2$ из III) необходимо лишь в случае $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \pm(0, 1, -1)$. Лемма 2 полностью доказана.

Назовем матрицы M и M' эквивалентными, если одна получается из другой с помощью некоторой последовательности преобразований вида

- а) перестановка строк или столбцов;
- б) изменение знака у строки или столбца.

Легко видеть, что если матрица минимальна, то и эквивалентная ей такая же.

ЛЕММА 3. Любая минимальная матрица M эквивалентна одной из матриц (2.1), удовлетворяющей условиям I)–IV).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) определения 4 немедленно следует, что M эквивалентна матрице вида

$$\begin{pmatrix} x_{11} & -y_1 & x_{13} \\ x_2 & x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & z_3 \end{pmatrix},$$

где x_2, y_1, z_3 положительны и максимальны в строках по абсолютной величине. Если элемент x_{11} отрицателен, то переменной знаков в первой строке и втором столбце сделаем его положительным. Также поменяем знаки в третьей строке и третьем столбце, если элемент x_{31} отрицателен. В результате получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & x_{13} \\ x_2 & x_{21} & x_{23} \\ x_3 & x_{32} & z_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

с положительными x_1, x_2, x_3, y_1, z_3 .

Предположим, что $x_{21} < 0$. Из условия 3) определения 4 с $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, 0)$ следует, что $x_{32} > 0$. По этой же причине x_{13} и x_{23} имеют разные знаки. Рассмотрим случай, когда $x_{13} > 0$. Тогда $x_{23} < 0$. Переставим вторую и третью строки, а затем первый и третий столбцы. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{13} & -y_1 & x_1 \\ z_3 & x_{32} & x_3 \\ x_{23} & x_{21} & x_2 \end{pmatrix}.$$

Поменяв знак в третьей строке, а потом в третьем столбце, получим матрицу второго вида из (2.1). Пусть теперь в (2.2) $x_{13} < 0$. Тогда $x_{23} > 0$. Рассмотрим вектор

$$(x_1 - y_1 - x_{13}, x_2 + x_{21} - x_{23}, x_3 + x_{32} - z_3).$$

Мы сложили первые два столбца из (2.2) и отняли третий. Из максимальнойности x_2, y_1, z_3 следует, что

$$|x_1 - y_1 - x_{13}| \leq y_1, \quad |x_2 + x_{21} - x_{23}| \leq x_2, \quad |x_3 + x_{32} - z_3| \leq z_3.$$

Так как матрица минимальная, то хотя бы одно из этих неравенств должно быть равенством. Но это возможно только в случае, если все элементы соответствующей строки равны по абсолютной величине. А тогда в соответствии с 2) определения 4 это выполнено и для остальных двух строк. Такая матрица эквивалентна M из (2.1) как первого, так и второго вида.

Предположим, что в (2.2) $x_{21} > 0$. Рассмотрим случай $x_{32} > 0$. Элемент x_{23} не может быть положительным по причине условия 3) определения 4 с $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (0, 1, -1), (1, 0, -1)$. Значит, $x_{23} < 0$ и мы приходим к одному из двух случаев в (2.1). Пусть теперь $x_{32} < 0$. Из условия 3) определения 4 следует, что $x_{13} < 0$ и $x_{23} > 0$. То есть речь идет о матрице вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & x_{13} \\ x_2 & x_{21} & x_{23} \\ x_3 & -x_{32} & z_3 \end{pmatrix}$$

с положительными x_{ij} . Переставив первую и вторую строки, а затем первый и второй столбцы, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_2 & x_{23} \\ -y_1 & x_1 & -x_{13} \\ -x_{32} & x_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Меняя последовательно знаки во второй и третьей строках, а затем во втором и третьем столбцах, получим матрицу второго вида из (2.1). Таким образом, все случаи разобраны и лемма 3 полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем любую матрицу M из (2.1), удовлетворяющую условиям I)–III) (условие IV) опускается), *приведенной*.

§ 3. Доказательство основного результата

Заметим, что утверждение сформулированной во введении теоремы тривиально, если хотя бы одно из чисел $\|\alpha q_i\|, \|\beta q_i\|, i = 1, 2, 3$, равно нулю. Поэтому мы будем предполагать, что элементы невырожденной матрицы из (1.1), определитель которой есть $D(\dots)$, отличны от нуля. При этом она попадает в разряд приведенных, если q_1, q_2, q_3 составляют тройку смежных знаменателей (α, β) . Последнее непосредственно следует из условий в определении 3, поскольку целочисленная комбинация $\varepsilon_1 Q_1 + \varepsilon_2 Q_2 + \varepsilon_3 Q_3$ есть узел решетки с базисом Q_1, Q_2, Q_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как q_1, q_2, q_3 попарно различны, то в рассматриваемом случае равенство $\|\alpha q_1\| = \|\alpha q_2\| = \|\alpha q_3\|$ не может выполняться (см. условие 2) из определения 4). То же самое верно и при замене α на β .

По изложенным причинам главный результат непосредственно следует из оценки

$$\min\{x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3, z_1 z_2 z_3\} < \frac{1}{3} D(M) \quad (3.1)$$

для минимальных матриц вида (2.1), у которых ни одна строка не состоит из одинаковых по абсолютной величине чисел.

Положим

$$X = x_1 x_2 x_3, \quad Y = y_1 y_2 y_3, \quad Z = z_1 z_2 z_3, \\ R = \min\{X, Y, Z\}.$$

В дальнейшем при акцентировании внимания на каком либо из элементов матрицы M мы будем использовать следующие обозначения:

$$X = X(x_1) = X(x_2) = X(x_3), \quad Y = Y(y_1) = Y(y_2) = Y(y_3), \\ D(M) = D(x_1) = \dots = D(z_3), \quad R = R(x_1) = \dots = R(z_3).$$

ЛЕММА 4. Пусть M – приведенная матрица первого вида из (2.1), для которой $z_1 \leq x_1$ и $X = R$. Тогда

$$R \leq \frac{1}{4} D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Коши к пяти положительным слагаемым в разложении $D(M)$ по произведениям троек элементов M , получим

$$D(M) \geq 5(x_1 y_2 z_3 \cdot x_3 y_1 z_2 \cdot x_2 y_3 z_1 \cdot x_2 y_1 z_3 \cdot x_1 y_3 z_2)^{1/5} - x_3 y_2 z_1 \\ = 5(XYZ)^{2/5} (x_3 y_2 z_1)^{-1/5} - x_3 y_2 z_1.$$

Так как $x_3 y_2 z_1 \leq x_3 x_2 x_1 = X$, то

$$D(M) \geq 5(XYZ)^{2/5} X^{-1/5} - X \geq 5X^{6/5} X^{-1/5} - X = 4X.$$

Лемма 4 доказана.

Точно так же доказывается

ЛЕММА 5. Пусть M – приведенная матрица первого вида из (2.1), для которой $y_2 \leq z_2$ и $Z = R$. Тогда

$$Z \leq \frac{1}{4} D(M).$$

ЛЕММА 6. Пусть M – приведенная матрица первого вида из (2.1), для которой $z_1 \leq x_1$. Тогда

$$R \leq \frac{1}{4} D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая определитель M по второму столбцу, получаем

$$D(M) = y_1(x_2z_3 + x_3z_2) + y_2(x_1z_3 - x_3z_1) + y_3(x_1z_2 + x_2z_1).$$

Все три слагаемых неотрицательны, поскольку $x_1 \geq z_1$ и $z_3 \geq x_3$. Зафиксируем все элементы M , за исключением y_2 . Предположим, что $Y(y_2) > R(y_2)$. При уменьшении положительного y_2 свойство приведенности M не нарушается. Поэтому

$$\frac{R(y_2)}{D(y_2)} \leq \frac{R(y'_2)}{D(y'_2)},$$

где y'_2 есть наибольшее $y \in (0, y_2)$, для которого $Y(y) = R(y)$. Следовательно, мы можем считать, что $Y = R$. При разложении определителя M по первому столбцу получим

$$D(M) = x_1(y_2z_3 + y_3z_2) + x_2(y_3z_1 + y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Зафиксируем все элементы M , за исключением x_3 . Предположим, что $X(x_3) > Y$.

Рассмотрим случай $y_1z_2 - y_2z_1 > 0$. При уменьшении x_3 приведенность M не нарушается. Поэтому

$$\frac{R(x_3)}{D(x_3)} < \frac{R(x'_3)}{D(x'_3)},$$

где x'_3 есть наибольшее $x \in (0, x_3)$, для которого $X(x) = Y$. Поэтому мы можем считать, что $X = R$ и воспользоваться леммой 4.

Пусть теперь $y_1z_2 - y_2z_1 \leq 0$. Величина

$$\frac{R(x_3)}{D(x_3)}$$

при возрастании x_3 не убывает и поэтому ее достаточно оценить при $x_3 = z_3$. Через x'_1 обозначим наименьшее x_1 , удовлетворяющее условию $x_1 \geq z_1$, для которого $X(x'_1) \geq Y$. Если $x'_1 > z_1$, то

$$\frac{R(x_1)}{D(x_1)} \leq \frac{R(x'_1)}{D(x'_1)} = \frac{X(x'_1)}{D(x'_1)}$$

и нужная оценка следует из леммы 4. Предположим теперь, что $x'_1 = z_1$. Таким образом, неравенство леммы осталось доказать только для приведенных матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & -y_1 & x \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ z & y_3 & z \end{pmatrix}$$

с положительными $x, x_2, y_1, y_2, y_3, z, z_2$, для которых $x \leq y_1$, $\max\{y_2, z_2\} \leq x_2$, $y_3 \leq z$. В этом случае по неравенству Коши

$$D(M) = zy_1z_2 + xx_2y_3 + zx_2y_1 + xy_3z_2 \geq 4(xx_2y_1y_3zz_2)^{1/2}.$$

При этом $xz z_2 = Z$, $x_2y_1y_3 \geq y_1y_2y_3 = Y$. Следовательно,

$$D(M) \geq 4\sqrt{YZ} \geq 4\min\{Y, Z\} \geq 4\min\{X, Y, Z\}.$$

Лемма 6 полностью доказана.

ЛЕММА 7. Пусть M – приведенная матрица первого вида из (2.1), для которой $y_2 \leq z_2$. Тогда

$$R \leq \frac{1}{4}D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно проводится точно так же, как для предыдущей леммы. При этом вместо леммы 4 используется лемма 5. На первоначальном этапе определитель раскладывается по первому столбцу (приведено в доказательстве леммы 6). За счет уменьшения x_3 добиваемся выполнения равенства $X = R$. Затем выписываем разложение

$$D(M) = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_1y_3 + x_3y_1) + z_3(x_1y_2 + x_2y_1)$$

по третьему столбцу. При $x_2y_3 - x_3y_2 > 0$ за счет уменьшения z_1 приходим к случаю $Z = R$ и применяем лемму 5. В случае $x_2y_3 - x_3y_2 \leq 0$ увеличиваем z_1 до y_1 , а потом с помощью леммы 5 переходим к $z_2 = y_2$. В конце используется по той же схеме неравенство Коши для четырех слагаемых. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для приведенных матриц первого вида из (2.1) мы получили даже более сильное нестрогое неравенство с постоянной $\frac{1}{4}$ вместо $\frac{1}{3}$ в (3.1). Из хода рассуждений видно, что оно превращается в равенство только при $x_i = y_i = z_i$, $i = 1, 2, 3$.

ЛЕММА 8. Пусть M – приведенная матрица второго вида из (2.1), для которой $x_1 \leq z_1$. Тогда

$$R \leq \frac{1}{3}D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В разложении по второму столбцу

$$D(M) = y_1(x_3z_2 + x_2z_3) + y_2(x_1z_3 + x_3z_1) + y_3(x_1z_2 - x_2z_1)$$

$x_1z_2 - x_2z_1 \leq z_1(z_2 - x_2) \leq 0$. Поэтому отношение $R(y_3)/D(y_3)$ не уменьшится, если заменить y_3 на x_3 . При этом приведенность M не нарушается. По той же причине, принимая во внимание разложение

$$D(M) = z_1(x_3y_2 - x_2y_3) + z_2(x_3y_1 + x_1y_3) + z_3(x_1y_2 + x_2y_1)$$

по третьему столбцу с $x_3 = y_3$, мы можем считать, что $y_1 = z_1$. Так как доказываемое неравенство однородно по строкам, то положим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $y_1 = z_1 = x$, $y_2 = u$, $z_2 = v$, $y_3 = 1$, $z_3 = y$. При этом

$$1 \leq x, \quad 1 \leq y, \quad 0 < u, v \leq 1, \quad 1 \leq u + v.$$

Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров достаточно доказать неравенство

$$\gamma(x, y, u, v) = \frac{\min\{1, xu, xvy\}}{xy + xu + xv + uy + v - x} \leq \frac{1}{3}.$$

Пусть $u \leq v$. Тогда $\min\{1, xu, xvy\} = \min\{1, xu\}$. Поэтому

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \gamma(x, 1, u, v) = \frac{\min\{1, xu\}}{(x+1)(u+v)}.$$

Так как

$$(x+1)(u+v) = xu + xv + (u+v) \geq 2xu + 1,$$

то

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \frac{\min\{1, xu\}}{2xu+1} \leq \frac{1}{3}.$$

Пусть $u > v$. На промежутке $[u/v, \infty)$ функция $\gamma(x, y, u, v)$ убывает по y . Поэтому для $y \in [u/v, \infty)$ выполняется неравенство

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \gamma\left(x, \frac{u}{v}, u, v\right) = \frac{\min\{1, xu\}}{xu/v + xu + xv + u^2/v + v - x}.$$

Последняя дробь максимальна по x при $x = 1/u$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \frac{1}{1/v + 1 + v/u + u^2/v + v - 1/u}.$$

Осталось доказать неравенство

$$\frac{1}{v} + \frac{v}{u} + \frac{u^2}{v} + v - \frac{1}{u} \geq 2,$$

которое эквивалентно неравенству

$$(1+u)v^2 - (2u+1)v + u^3 + u \geq 0.$$

Для фиксированного $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ его левая часть как функция от v имеет минимум в точке $v_0 = (2u+1)/(2u+2)$. Последняя лежит левее u только для $1/\sqrt{2} < u \leq 1$. Но в этом случае

$$\frac{1}{v} + \frac{v}{u} + \frac{u^2}{v} + v - \frac{1}{u} > \frac{u^2}{v} + \frac{v}{u} + v \geq \frac{1}{2v} + 2v \geq 2.$$

При этом мы воспользовались неравенством $u > v$. Осталось рассмотреть случай $1/2 \leq u \leq 1/\sqrt{2}$. Для него нужный минимум по v достигается в точке $v = u$. При этом

$$(1+u)u^2 - (2u+1)u + u^3 + u = 2u^3 - u^2 = u^2(2u-1) \geq 0.$$

Неравенство $\gamma(x, y, u, v) \leq \frac{1}{3}$ доказано для $y \geq u/v$. Пусть теперь $1 \leq y < u/v$. Тогда

$$\gamma(x, y, u, v) = \frac{\min\{1, xvy\}}{xy + xu + xv + uy + v - x}.$$

Как функция от y эта величина принимает максимальное значение при $y = 1$, если $xv \geq 1$, и при $y = 1/(xv)$, если $xv < 1$. В первом случае остаются в силе выкладки для ранее рассмотренного варианта $u \leq v$. Пусть теперь $xv < 1$. Тогда

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \gamma\left(x, \frac{1}{xv}, u, v\right) = \frac{1}{1/v + xu + xv + u/(xv) + v - x}.$$

Поскольку последнее выражение убывает по x , то при $u > v$

$$\gamma(x, y, u, v) \leq \frac{1}{1/v + u/v + u + 2v - 1} \leq \frac{1}{1/v + 3v} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{3}.$$

Лемма 8 полностью доказана.

ЛЕММА 9. Пусть M – приведенная матрица M второго вида из (2.1), для которой $x_1 \geq z_1$, $x_3 = y_3$. Тогда

$$R \leq \frac{1}{3}D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что коэффициент $x_3y_2 - x_2y_3$ ($x_3 = y_3$, а также $y_2 \leq x_2$ в соответствии с условием I) при z_1 в разложении $D(M)$ по третьему столбцу не превосходит нуля. Поэтому $R(z_1)/D(z_1) \leq R(x_1)/D(x_1)$ с условием $x_1 = z_1$. Применяя лемму 8, получаем нужное равенство.

ЛЕММА 10. Для любой приведенной матрицы M второго вида из (2.1) выполняется неравенство

$$R \leq \frac{1}{3}D(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение M по первому столбцу

$$D(M) = x_1(y_2z_3 + y_3z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 + y_2z_1),$$

в котором все три слагаемых не отрицательны. В случае $x_1 \leq z_1$ нужное неравенство доказано в лемме 8.

Рассмотрим случай $x_1 > z_1$. Если $X = R$, то по неравенству Коши

$$\begin{aligned} D(M) &\geq 5(x_1y_2z_3 \cdot x_1y_3z_2 \cdot x_2y_1z_3 \cdot x_3y_1z_2 \cdot x_3y_2z_1)^{1/5} - x_2y_3z_1 \\ &= 5(XYZ)^{2/5}(x_2y_3z_1)^{-1/5} - x_2y_3z_1 \\ &\geq 5(XYZ)^{2/5}X^{-1/5} - X \geq 5X^{6/5}X^{-1/5} - X = 4X. \end{aligned}$$

Это даже лучше, чем требуется.

Пусть теперь $X > R$. При уменьшении x_3 на отрезке $[y_3, z_3]$ отношение $R(x_3)/D(x_3)$ увеличивается до тех пор, пока не возникнет равенство $X = R$ или $x_3 = y_3$. Как мы только что показали, в первом случае нужное неравенство выполнено, а во втором оно следует из леммы 9. Лемма 10 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства видно, что в лемме 10 равенство возникает только для приведенных матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -2x_1 & -2x_1 \\ x_2 & x_2/2 & -x_2/2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

с положительными x_1, x_2, x_3 .

Из лемм 6, 7, 10 и замечания 3 непосредственно следует оценка (3.1), а вместе с ней и утверждение сформулированной во введении теоремы.

Постоянная $\frac{1}{3}$ в доказанной теореме не может быть заменена меньшей по следующей причине.

Пусть a и b целые, а N – натуральное число. Рассмотрим решетки вида

$$\Gamma_N(a, b) = \left\{ \frac{1}{N^{1/3}}(m_1, m_2, Nm_3 + am_1 + bm_2) : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

По теореме Линника–Скубенко (см. [10]) любую приведенную матрицу с определителем 1 со сколь угодно точностью (в равномерной метрике) можно аппроксимировать матрицей, соответствующей некоторому базису решетки из $\Gamma_N(a, b)$. Поэтому наименьшая возможная константа из правой части теоремы совпадает с соответствующей константой для минимальных и приведенных матриц, равной $\frac{1}{3}$.

Заключение

Пусть P – растущий положительный параметр. Через $N_{\alpha,\beta}(P)$ обозначим количество знаменателей q к (α, β) , не превосходящих P . Есть основание считать, что справедлива

ГИПОТЕЗА. Для некоторой абсолютной положительной константы C , не зависящей от (α, β) ,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_{\alpha,\beta}(P)}{\ln^2 P} = C$$

при почти всех $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ по мере Лебега.

Речь идет о обобщении асимптотической формулы Хинчина–Леви (см. [11]).

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_{\alpha}(P)}{\ln P} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$$

для почти всех $\alpha \in (0, 1)$. Здесь $N_{\alpha}(P)$ есть количество подходящих дробей a_i/q_i к α , для которых $q_i \leq P$.

Отметим, что при всех $(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ выполняется оценка $N_{\alpha,\beta}(P) = O(\ln^2 P)$ (В. А. Быковский, неопубликовано). С помощью технических приемов из работы [8] нетрудно показать, что если $1, \alpha, \beta$ рационально независимы, то любой знаменатель q_1 к (α, β) можно дополнить до невырожденной тройки $\{q_1, q_2, q_3\}$ смежных знаменателей к (α, β) . Это наблюдение подчеркивает содержательность главного результата работы.

Список литературы

1. Vahlen K. Th. Über Nahrungs-werthe und Kettenbrüche // J. Rein. Angew. Math. 1895. V. 115. №3. P. 221–233.
2. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.: ОНТИ, 1937.
3. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
4. Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
5. Быковский В. А. Теорема Валена для двумерных подходящих дробей // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №1. С. 30–37.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
7. Minkowski H. Generalisation de la theorie des fraction continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1896. V. 13. №2. P. 41.
8. Быковский В. А., Горкуша О. А. Минимальные базисы трехмерных полных решеток // Матем. сб. 2001. Т. 192. №2. С. 57–66.
9. Горкуша О. А. Минимальные базисы трехмерных полных решеток // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №3. С. 353–362.
10. Линник Ю. В., Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1964. Т. 3. №13. С. 25–36.
11. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.

Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: vab@iam.khv.ru, mariya@iam.khv.ru

Поступила в редакцию
17.06.2002