Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев, Об одном магнитном операторе Шрёдингера на периодическом графе, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:46:54

УДК 517.984.5

А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев

Об одном магнитном операторе Шрёдингера на периодическом графе

Рассматривается магнитный оператор Шрёдингера на графе специального вида в $\mathbb{R}^3$. Этот граф назван кресельным, поскольку граф такого вида с заданным на нем оператором используется в качестве одной из возможных моделей так называемой кресельной нанотрубки, находящейся в однородном магнитном поле с амплитудой b , параллельном оси нанотрубки. Спектр рассматриваемого оператора состоит из абсолютно непрерывной части (спектральных зон, отделенных лакунами) и бесконечного набора собственных значений бесконечной кратности. Найдена асимптотика лакун при высоких энергиях и фиксированном b и доказано, что для всех b , за исключением некоторого дискретного множества значений, включающего $b = 0$, существует бесконечный набор невырожденных лакун G_n с длиной $|G_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Исследуется зависимость спектра от магнитного поля и для некоторых специальных потенциалов доказано существование лакун, которые не зависят от b . Найдена асимптотика лакун при $b \rightarrow 0$.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: периодический граф, магнитный оператор Шрёдингера, спектральные зоны, асимптотики спектральных зон.

§ 1. Введение и основные результаты

В последнее десятилетие магнитные операторы Шрёдингера на графах вызывают повышенный интерес как в связи с важными приложениями, так и вследствие их теоретической значимости. В настоящей работе рассматривается магнитный оператор Шрёдингера на периодическом графе специального вида. Этот граф назван нами *кресельным*, поскольку граф такого вида с заданным на нем оператором используется в качестве одной из возможных моделей так называемой кресельной нанотрубки (см. [1], [2]). Нанотрубка помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси.

Опишем структуру рассматриваемого графа. Этот граф $\Gamma^N \subset \mathbb{R}^3$, $N \geq 1$, есть объединение ребер Γ_ω длины один, т.е.

$$\Gamma^N = \bigcup_{\omega \in \mathcal{Z}} \Gamma_\omega,$$

$$\omega = (n, j, k) \in \mathcal{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_6 \times \mathbb{Z}_N, \quad \mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}, \quad \mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$$

(см. рис. 1, 2). Ребра Γ_ω являются отрезками, соединяющими вершины, лежащие на цилиндре $\mathcal{C} \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$ радиуса R . Каждое ребро $\Gamma_\omega = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}_\omega + t\mathbf{e}_\omega, t \in [0, 1]\}$, $\omega = (n, j, k) \in \mathcal{Z}$, ориентировано вдоль вектора $\mathbf{e}_\omega \in \mathbb{R}^3$ и имеет начальную точку $\mathbf{r}_\omega \in \mathbb{R}^3$. Точка на ребре имеет координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\omega + t\mathbf{e}_\omega$, где ω – номер ребра, t – локальная координата.

Рис. 1. Кресельный граф для $N = 10$ и $N = 1$

Равенства, определяющие $\mathbf{r}_\omega$ и $\mathbf{e}_\omega$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{n,1,k} &= 2nh\mathbf{k} + R(\cos \phi_{2k}, \sin \phi_{2k}, 0), & \mathbf{r}_{n,4,k} &= 2nh\mathbf{k} + R(\cos \beta_k, \sin \beta_k, 0), \\
 \mathbf{r}_{n,2,k} &= \mathbf{r}_{n,5,k} = (2n+1)h\mathbf{k} + R(\cos \zeta_k, \sin \zeta_k, 0), \\
 \mathbf{r}_{n,3,k} &= \mathbf{r}_{n,6,k} = (2n+1)h\mathbf{k} + R(\cos \phi_{2k+1}, \sin \phi_{2k+1}, 0), \\
 \mathbf{e}_{n,j,k} &= \mathbf{r}_{n,j+1,k} - \mathbf{r}_{n,j,k}, & j &= 1, 2, 3, \\
 \mathbf{e}_{n,4,k} &= \mathbf{r}_{n,1,k+1} - \mathbf{r}_{n,4,k}, & \mathbf{e}_{n,5,k} &= \mathbf{r}_{n+1,1,k} - \mathbf{r}_{n,5,k}, \\
 \mathbf{e}_{n,6,k} &= \mathbf{r}_{n+1,4,k} - \mathbf{r}_{n,6,k},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= (0, 0, 1), & \phi_k &= \frac{\pi k}{N}, & \beta_k &= 2\beta + \phi_{2k}, & \zeta_k &= \beta - \alpha + \phi_{2k}, \\
 \sin \alpha &= \frac{1}{2R}, & \sin \beta &= \frac{1}{R}, & R &= \frac{(\cos \phi_1 + 5/4)^{1/2}}{\sin \phi_1} > 1, \\
 0 < \alpha < \beta, & \alpha + \beta &= \frac{\pi}{N}, \\
 h &= \sqrt{2 + R_1 R_2 - 2R^2}, & R_p &= \sqrt{(pR)^2 - 1}, & p &= 1, 2.
 \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного $j \in \mathbb{N}_4$ точки $\mathbf{r}_{0,j,k}, k \in \mathbb{Z}_N$, есть вершины правильного N -угольника $\mathcal{P}_j$. N -угольник $\mathcal{P}_4$ получается из $\mathcal{P}_1$ вращением вокруг оси цилиндра $\mathcal{C}$ на угол 2β , $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_2$) получается из $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_4$) вращением вокруг оси цилиндра на угол $\frac{\pi}{N}$ и трансляцией на вектор $h\mathbf{k}$, параллельный оси трубки. Повторяя процесс, получаем Γ^N .

Вектор напряженности магнитного поля равен $\mathcal{B} = b\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$. Соответствующий векторный потенциал имеет вид $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathcal{B}, \mathbf{r}] = \frac{b}{2}(-x_2, x_1, 0)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Вместо b введем “безразмерный” параметр a :

$$a = \frac{2R_2 - R_1}{4}b, \quad R_p = \sqrt{(pR)^2 - 1} > 1, \quad p = 1, 2.$$

Рис. 2. Часть графа Γ^N . Фундаментальная область выделена жирными линиями

Для каждой функции y на Γ^N определим ее сужения на ребра графа $y_\omega = y|_{\Gamma_\omega}$, $\omega \in \mathcal{Z}$. отождествим каждую функцию y_ω на Γ_ω с функцией на $[0, 1]$, используя локальную координату $t \in [0, 1]$. Рассмотрим оператор Шрёдингера $\mathcal{H}_a$ на Γ^N , действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\Gamma^N) = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{Z}} L^2(\Gamma_\omega)$, определенный по формуле

$$(\mathcal{H}_a y)_\omega = -\partial_\omega^2 y_\omega(t) + q(t)y_\omega(t), \quad \partial_\omega = \frac{d}{dt} - ia_\omega, \quad a_\omega(t) = (\mathcal{A}(\mathbf{r}_\omega + t\mathbf{e}_\omega), \mathbf{e}_\omega), \quad (1.1)$$

(см. [1]), где $q \in L^2(0, 1)$ и $(y_\omega)_{\omega \in \mathcal{Z}}$, $(y''_\omega)_{\omega \in \mathcal{Z}} \in L^2(\Gamma^N)$ удовлетворяет следующему магнитному граничному условию Кирхгофа: y непрерывна на Γ^N и для всех $\omega_j = (n, j, k) \in \mathcal{Z}$, $j = 1, \dots, 6$, верны равенства

$$\begin{aligned} \partial_{\omega_2} y_{\omega_2}(0) - \partial_{\omega_1} y_{\omega_1}(1) + \partial_{\omega_5} y_{\omega_5}(0) &= 0, \\ \partial_{\omega_3} y_{\omega_3}(0) - \partial_{\omega_2} y_{\omega_2}(1) + \partial_{\omega_6} y_{\omega_6}(0) &= 0, \\ -\partial_{\omega_3} y_{\omega_3}(1) + \partial_{\omega_4} y_{\omega_4}(0) - \partial_\omega y_\omega|_{\omega=(n-1,6,k)}(1) &= 0, \\ -\partial_{\omega_4} y_{\omega_4}(1) + \partial_\omega y_\omega|_{\omega=(n,1,k+1)}(0) - \partial_\omega y_\omega|_{\omega=(n-1,5,k+1)}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условие (1.2) означает, что сумма производных от y в каждой вершине Γ^N равна нулю и ориентация ребер определяет знак $\pm$. Стандартные рассуждения (см., например, [3]) показывают, что оператор $\mathcal{H}_a$ – самосопряженный.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. Поскольку значения потенциала на всех ребрах равны одной и той же функции q , естественно ожидать связи спектральных свойств оператора $\mathcal{H}_a$ и оператора Хилла $\tilde{H}y = -y'' + q(t)y$ на вещественной прямой, где мы отождествляем q с ее периодическим продолжением $q(t+1) = q(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Напомним некоторые важные

для нас свойства оператора $\tilde{H}$ (см., например, [4]). Спектр $\tilde{H}$ чисто абсолютно непрерывный и состоит из интервалов $[\tilde{\lambda}_{n-1}^+, \tilde{\lambda}_n^-]$, $n \geq 1$. Эти интервалы отделены лакунами $\tilde{\gamma}_n = (\tilde{\lambda}_n^-, \tilde{\lambda}_n^+)$ длины $|\tilde{\gamma}_n| \geq 0$. Если лакуна $\tilde{\gamma}_n$ вырождена, т.е. $|\tilde{\gamma}_n| = 0$, то соответствующие спектральные интервалы сливаются. Последовательность $\tilde{\lambda}_0^+ < \tilde{\lambda}_1^- \leq \tilde{\lambda}_1^+ < \dots$ есть спектр уравнения $-y'' + qy = \lambda y$ с 2-периодическими граничными условиями $y(t+2) = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь равенство $\tilde{\lambda}_n^- = \tilde{\lambda}_n^+$ означает, что $\tilde{\lambda}_n^\pm$ есть собственное значение кратности два. Обозначим через $\sigma_D = \{\mu_n, n \geq 1\}$, $\mu_1 < \mu_2 < \dots$, спектр краевой задачи Дирихле $-y'' + qy = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, и через $\{\nu_n, n \geq 0\}$, $\nu_0 < \nu_1 < \dots$, спектр краевой задачи Неймана $-y'' + qy = \lambda y$, $y'(0) = y'(1) = 0$. Известно, что $\nu_0 \in (-\infty, \tilde{\lambda}_0^+]$ и $\mu_n, \nu_n \in [\tilde{\lambda}_n^-, \tilde{\lambda}_n^+]$ для всех $n \geq 1$. Определим следующие функции:

$$F = \frac{\varphi'(1, \cdot) + \vartheta(1, \cdot)}{2}, \quad F_- = \frac{\varphi'(1, \cdot) - \vartheta(1, \cdot)}{2}, \quad (1.3)$$

где $\vartheta(t, \lambda)$, $\varphi(t, \lambda)$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ – фундаментальные решения уравнения $-y'' + q(t)y = \lambda y$, удовлетворяющие начальным условиям $\vartheta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = 1$, $\vartheta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0$. Функция Ляпунова F имеет только простые вещественные нули η_n , $n \geq 1$, $\eta_1 < \eta_2 < \dots$. Отметим также, что $F(\tilde{\lambda}_n^\pm) = (-1)^n$, $\varphi(1, \mu_n) = 0$, $\vartheta'(1, \nu_n) = 0$.

Приведем главный результат настоящей работы, касающийся спектра оператора $\mathcal{H}_a$.

ТЕОРЕМА 1. *Спектр $\sigma(\mathcal{H}_a)$ оператора $\mathcal{H}_a$ удовлетворяет следующим равенствам:*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{H}_a) &= \sigma_{pp}(\mathcal{H}_a) \cup \sigma_{ac}(\mathcal{H}_a), & \sigma_{pp}(\mathcal{H}_a) &= \sigma_D, \\ \sigma(\mathcal{H}_a) &= \sigma(\mathcal{H}_{-a}) = \sigma(\mathcal{H}_{a+\pi/N}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

для любого $a \in \mathbb{R}$, причем последние равенства выполнены с учетом кратности спектра. Каждое собственное значение $\lambda_0 \in \sigma_{pp}(\mathcal{H}_a)$ имеет бесконечную кратность.

Предположим без ограничения общности, что $a \in [0, \frac{\pi}{2N}]$. Тогда

i) $\sigma_{ac}(\mathcal{H}_a) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \geq 0} G_n^a$, где лакуны $G_0^a = (-\infty, E_0^+(a))$, $G_n^a = (E_n^-(a), E_n^+(a))$, $n \geq 1$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \nu_0 \in G_0^a \subset (-\infty, \eta_1), & \quad \{\mu_n, \nu_n\} \subset G_{4n}^a \subset (\eta_n, \eta_{n+1}), \\ \eta_n \in [E_{4n-2}^-(a), E_{4n-2}^+(a)], \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$G_{4n}^a \subset G_{4n}^{a_1}, \quad G_{2n-1}^{a_1} \subset G_{2n-1}^a, \quad 0 \leq a < a_1 \leq \frac{\pi}{2N}. \quad (1.6)$$

Кроме того, для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$G_{4n-2}^a = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } a = 0 \\ \neq \emptyset, & \text{если } a \neq 0 \end{cases}, \quad G_{2n-1}^a = \emptyset, \quad \text{если } (a, N) \neq (0, 1). \quad (1.7)$$

ii) Если $a \in (0, \frac{\pi}{2N}]$, то спектр $\sigma(\mathcal{H}_a)$ имеет бесконечное число лакун $G_{2n}^a \neq \emptyset$ и $|G_{2n}^a| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, верны следующие асимптотические формулы:

$$E_{4n-2m}^\pm(a) = \left(\frac{\pi(n-m)}{2} \pm \theta_m \right)^2 + q_0 + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, \quad (1.8)$$

где

$$q_0 = \int_0^1 q(t) dt, \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{3}\sqrt{5+4|\cos a|}\right), \quad \theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{3}\sin a\right)$$

(выбираются главные ветви $\arcsin(\cdot)$ и $\arccos(\cdot)$).

iii) Если $|F_-| \geq 1$ на интервале $(\tilde{\lambda}_{n_1-1}^+, \tilde{\lambda}_{n_2}^-)$ с некоторыми n_1, n_2 , $n_1 \leq n_2$, то все лакуны G_{4n-2}^a , $n_1 \leq n \leq n_2$, не зависят от магнитного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Все лакуны при достаточно высоких энергиях зависят от магнитного поля, поскольку $F_-(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. [4]).

2) Условие пункта iii) нарушается для четных потенциалов

$$q \in L_{\text{even}}^2(0, 1) = \{q \in L^2(0, 1) : q(1-t) = q(t), t \in (0, 1)\},$$

поскольку в этом случае $F_- = 0$ (см. [5]).

3) Грубо говоря, для выполнения условия $|F_-| \geq 1$ на интервале $(\tilde{\lambda}_{n_1-1}^+, \tilde{\lambda}_{n_2}^-)$ требуется, чтобы потенциал q принимал достаточно большие значения по абсолютной величине. В предложении 1 мы укажем пример такого потенциала.

В теореме 2 рассматриваются четные потенциалы. В частности, для этого случая найдена асимптотика краев лакун при малых значениях магнитного поля.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$q \in L_{\text{even}}^2(0, 1) = \{q \in L^2(0, 1) : q(1-t) = q(t), t \in (0, 1)\}, \quad (a, n) \in \left[0, \frac{\pi}{2N}\right] \times \mathbb{N}.$$

Тогда лакуны оператора $\mathcal{H}_a$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tilde{\gamma}_0 \subset G_0^a, \quad \tilde{\gamma}_n \subset G_{4n}^a, \quad G_{4n-2}^a = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } a = 0 \\ \neq \emptyset, & \text{если } a \neq 0 \end{cases}, \quad G_{2n-1}^a = \emptyset, \quad (1.9)$$

$$G_{4n-2}^a \subset G_{4n-2}^{a_1} \quad \text{для всех } 0 \leq a < a_1 \leq \frac{\pi}{2N}. \quad (1.10)$$

Кроме того, если $a \in (0, \frac{\pi}{2N}]$, то $G_{2n}^a \neq \emptyset$ и при $a \rightarrow 0$

$$E_{4n}^{\pm}(a) = E_{4n}^{\pm}(0) - \frac{(-1)^n a^2}{9F'(E_{4n}^{\pm}(0))} + O(a^4), \quad \text{если } G_{4n}^0 \neq \emptyset, \quad (1.11)$$

$$E_{4n}^{\pm}(a) = E_{4n}^{\pm}(0) \pm \frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{|F''(E_{4n}^{\pm}(0))|}} + O(a^2), \quad \text{если } G_{4n}^0 = \emptyset, \quad (1.12)$$

$$E_{4n-2}^{\pm}(a) = \eta_n \pm \frac{a}{3|F'(\eta_n)|} + O(a^2). \quad (1.13)$$

Изложим кратко схему исследования спектра оператора $\mathcal{H}_a$ и доказательства теорем. Применяемый метод аналогичен методу, использованному в [3], [6] для исследования зигзажной нанотрубки (см. рис. 3). Сначала выполняется простое калибровочное преобразование, переводящее зависимость оператора от магнитного поля в краевые условия (см. доказательство теоремы 3, i)). После такого преобразования оператор $\mathcal{H}_a$ переходит в унитарно эквивалентный

Рис. 3. Зигзагный граф

оператор, который мы обозначаем через H^a . Затем оператор H^a преобразуется в прямую сумму операторов H_k^a , $k \in \mathbb{Z}_N$, каждый из которых действует на графе Γ^1 (соответствующее преобразование использует цилиндрическую симметрию графа). Оператор H_k^a на каждом ребре действует как $-(\frac{d}{dt})^2 + q$, зависимость от k включена в граничные условия на краях ребра (см. (2.3)–(2.5)). Таким образом, анализ оператора $\mathcal{H}^a$, действующего на графе Γ^N , сводится к анализу операторов H_k^a на графе Γ^1 .

Анализ операторов H_k^a использует стандартные приемы (см. [7]–[9]), применяющиеся для исследования спектральных задач для периодических операторов с матричными коэффициентами (о применении к случаю нанотрубок см. [3], [6], [10], [11]). Именно, вычисляется (4×4) -матрица монодромии $\mathcal{M}_k$ оператора H_k^a (матрица трансляции решения соответствующего дифференциального уравнения на графе на период графа, теорема 3, ii)). Матричнозначная функция $\mathcal{M}_k(\lambda)$ оказывается мероморфной с полюсами в точках спектра σ_D задачи Дирихле. Мы докажем, что эти полюсы являются собственными значениями оператора H_k^a бесконечной кратности и опишем соответствующие собственные подпространства (теорема 4).

Далее мы доказываем стандартное утверждение о том, что λ принадлежит абсолютно непрерывному спектру H_k^a тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{M}_k(\lambda)$ имеет собственное значение, равное по модулю единице (см. доказательство теоремы 5, iii)). Благодаря свойству симплектичности матрицы монодромии (см. (2.12)), ее собственные значения имеют вид $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$. По этой причине оказывается удобным рассматривать собственные значения матрицы $\frac{1}{2}(\mathcal{M}_k + \mathcal{M}_k^{-1})$, которые образуют функцию Ляпунова F_k оператора H_k^a , аналитическую на двулистной римановой поверхности (теорема 5, i)). Число λ принадлежит абсолютно непрерывному спектру H_k^a в том и только том случае, когда значение хотя бы одной из ветвей функции F_k в точке λ лежит в интервале $[-1, 1]$ (см. (4.4)). Границы спектральных зон совпадают с нулями функций $F_k - 1$ (собственными значениями периодической задачи на графе Γ^1), или $F_k + 1$ (собственными значениями антипериодической задачи на графе Γ^1), или с точками ветвления функции F_k . Напомним, что описание спектра оператора Хилла равносильно описанию спектров соответствующих периодической или антипериодической задач. В рассматриваемом нами случае это уже не так:

описания спектра периодической или антипериодической задач на графе Γ^1 недостаточно для описания спектра оператора H_k^a . В то же время известно, что спектры периодической и антипериодической задач вместе полностью определяют спектр периодического оператора, если матрица монодромии имеет размер 4×4 и является симплектической (см. [7]). Отметим, что в нашей ситуации эти условия выполнены.

Функция F_k просто выражается через функции F, F_- , связанные с оператором Хилла $\tilde{H}$ (см. (4.1)). Анализ абсолютно непрерывного спектра оператора H_k^a сводится к анализу этих выражений. В частности, из них мы получаем равенства (4.5), из которых сразу следует периодическая зависимость спектра $\mathcal{H}_a$ от величины магнитного поля (см. последнее равенство в (1.4)). Детальный анализ функции F_k на вещественной оси дает полное описание спектральных зон и лакун оператора H_k^a , включая кратность спектра (теоремы 6, 7). Собственные значения антипериодической задачи не зависят ни от k , ни от a (см. (6.2)). Точки ветвления функции F_k могут лежать только в интервалах между соседними антипериодическими собственными значениями (см. лемму 6.2, iv)). Поведение функции F_k в этих интервалах достаточно сложно (см. рис. 5, 7 и лемму 6.3).

Используя результаты исследования спектра операторов H_k^a , мы доказываем теоремы 1, 2, в которых описан спектр оператора $\mathcal{H}_a$. Ключевую роль играет тот факт, что лакуны в спектре операторов H_k^a с разными k лежат в фиксированных интервалах, определяемых собственными значениями μ_n задачи Дирихле, собственными значениями ν_n задачи Неймана и нулями η_n функции Ляпунова F оператора Хилла (см. (7.6)).

Перейдем к описанию истории вопроса. Квантово-сетевая модель была введена Паулингом [12] в 1936 г. для описания ароматических молекул. Более детально она была описана Руденбергом и Шерром [13] в 1953 г. Прогресс в изучении квантово-сетевых моделей периодических систем связан с работой Коулсона [14], где разработана сетевая модель графита с нулевым потенциалом вдоль связи. Модель кристалла с ненулевым потенциалом была изучена Монтроллом [15] в 1970 г. Общие вопросы, относящиеся к операторам Шрёдингера на графах, такие как симплектичность, самосопряженность, описание спектра как множества и тому подобные, изучались многими авторами (см. [16]–[20] и др.). В последнее десятилетие интерес к изучению квантово-сетевых моделей стимулируется потребностями развития нанотехнологий. Различные устройства на основе нанотрубок и графенов уже сейчас находят разнообразные применения в физике, электронике, химии, биологии, медицине и т.д. Несомненно, эти применения в дальнейшем будут расширяться.

Исследование проводимости нанотрубок, графенов и им подобных структур требует детального изучения спектральных свойств соответствующих операторов Шрёдингера. Огромное (и ежегодно возрастающее) количество работ, опубликованных в разных физических журналах, посвящено этому вопросу (см., например, книгу [21], обзоры [22], [23] и ссылки в них). Подавляющее большинство этих работ имеет дело с так называемыми дискретными моделями, основой для которых является приближение сильной связи. С математической точки зрения дискретные модели нанотрубок и графенов рассматривались Коротяевым и Кученко в [24], [25].

Квантово-сетевые модели нанотрубок (более сложные для анализа) исследованы значительно меньше (см. [3], [6], [10], [11], [26]); случай четного потенциала рассмотрен в [27], [28]. В [3], [6], [26] был рассмотрен оператор Шрёдингера на зигзажном графе, как без магнитного поля, так и в его присутствии. Оператор Шрёдингера на кресельном графе без магнитного поля изучался в [10], [11]. В [3], [6], [10], [11] дано детальное описание спектра, включающее описание его кратности.

В настоящей работе мы изучаем спектральные свойства магнитного оператора Шрёдингера на кресельном графе. Этот случай технически более сложный, чем случай зигзажного графа, рассмотренный в [3], [6], [26], поскольку матрица монодромии для кресельного графа имеет размер 4×4 , а в случае зигзажного графа – 2×2 . Как следствие, спектр оператора на зигзажном графе может быть описан в терминах целой функции – модифицированной функции Ляпунова, а функция Ляпунова для оператора на кресельном графе является аналитической функцией на двулистной римановой поверхности. Обратим внимание на следующие отличия спектральных свойств оператора на рассматриваемом кресельном графе от свойств оператора на зигзажном графе:

- 1) для зигзажного графа имеется дискретный набор особых значений напряженности магнитного поля, при которых на непрерывном спектре оператора Шрёдингера имеются собственные значения бесконечной кратности (см. [6]); для кресельного графа таких собственных значений на непрерывном спектре нет;
- 2) при определенных (не являющихся четными) потенциалах в спектре оператора Шрёдингера на кресельном графе имеются лакуны, не зависящие от магнитного поля; для зигзажного графа такие лакуны отсутствуют (см. [6]);
- 3) для зигзажного графа все точки ветвления функции Ляпунова вещественны (см. [6]), в то время как для кресельного графа они могут быть комплексными (см. [10]).

Работа имеет следующую структуру. В § 2 описан оператор H_k^a и матрица монодромии для этого оператора. Техническое доказательство теоремы о матрице монодромии вынесено в последний § 9. В § 3 изучаются собственные значения оператора H_k^a и соответствующие собственные подпространства. В § 4 описаны общие свойства функции Ляпунова и спектр оператора H_k^a . В § 5 более подробно изучаются свойства функции Ляпунова на вещественной оси, необходимые для описания спектральных зон. В § 6 уточняется взаимное расположение периодических и антипериодических собственных значений и вещественных точек ветвления функции Ляпунова. В § 7 описаны спектральные зоны и лакуны оператора H_k^a . В § 8 изучается спектр оператора $\mathcal{H}_a$ и доказаны основные теоремы. В этом же параграфе, в предложении 1, для некоторых специальных потенциалов доказано существование лагун, не зависящих от магнитного поля.

§ 2. Оператор H_k^a

В следующей лемме вычислены проекции векторного потенциала $\mathcal{A}$ на ребра графа. Во-первых, показано, что каждая из этих проекций постоянна на ребре. Во-вторых, из симметрии векторного поля $\mathcal{A}$ по отношению к графу следует, что эти проекции могут принимать по модулю лишь два различных значения.

ЛЕММА 2.1. Для всех $\omega = (n, j, k) \in \mathcal{Z}$, $t \in [0, 1]$, функция

$$a_\omega(t) = (\mathcal{A}(\mathbf{r}_\omega + t\mathbf{e}_\omega), \mathbf{e}_\omega) = a_j,$$

где

$$a_1 = a_3 = -a_5 = a_6 = \frac{b(R_2 - R_1)}{4}, \quad a_2 = a_4 = \frac{bR_2}{4}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{b}{2}[\mathbf{k}, \mathbf{r}]$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, дает

$$a_\omega(t) = \frac{b}{2}([\mathbf{k}, \mathbf{r}_\omega + t\mathbf{e}_\omega], \mathbf{e}_\omega) = \frac{b}{2}([\mathbf{k}, \mathbf{r}_\omega], \mathbf{e}_\omega) = a_\omega(0) = a_\omega, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Кроме того, векторное поле $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ параллельно плоскости $x_3 = 0$ (эта плоскость перпендикулярна оси цилиндра $\mathcal{C}$) и $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ направлено по касательной к поверхности цилиндра $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Отсюда следует, что проекции a_ω поля $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ на ребра удовлетворяют равенству $a_{n,j,k} = a_j$ для всех $(n, j, k) \in \mathcal{Z}$ и $a_1 = a_3 = -a_5 = a_6$, $a_2 = a_4$.

Мы имеем $\mathbf{e}_{0,j,k} = \mathbf{r}_{0,j+1,k} - \mathbf{r}_{0,j,k}$, $j = 1, 2$, откуда следует, что

$$a_{0,j,k} = \frac{b}{2}([\mathbf{k}, \mathbf{r}_{0,j,k}], \mathbf{r}_{0,j+1,k}), \quad j = 1, 2.$$

Если $j = 1$, то $\mathbf{r}_{0,1,k} = R(\cos \phi_{2k}, \sin \phi_{2k}, 0)$, $\mathbf{r}_{0,2,k} = h\mathbf{k} + R(\cos \zeta_k, \sin \zeta_k, 0)$ и, таким образом,

$$a_1 = a_{0,1,k} = \frac{bR^2}{2} \det \begin{pmatrix} \cos \zeta_k & \sin \zeta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \phi_{2k} & \sin \phi_{2k} & 0 \end{pmatrix} = \frac{bR^2}{2} \sin(\zeta_k - \phi_{2k}) = \frac{bR^2}{2} \sin(\beta - \alpha),$$

откуда следует, что $a_1 = \frac{b}{4}(R_2 - R_1)$. Если $j = 2$, то

$$\mathbf{r}_{0,3,k} = h\mathbf{k} + R(\cos \phi_{2k+1}, \sin \phi_{2k+1}, 0),$$

и тогда

$$a_2 = a_{0,2,k} = \frac{bR^2}{2} \det \begin{pmatrix} \cos \phi_{2k+1} & \sin \phi_{2k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \zeta_k & \sin \zeta_k & 0 \end{pmatrix} = \frac{bR^2}{2} \sin(\phi_{2k+1} - \zeta_k).$$

Отсюда получаем $a_2 = \frac{b}{2}R^2 \sin 2\alpha = \frac{b}{4}R_2$, поскольку $\phi_{2k+1} - \zeta_k = \frac{\pi}{N} - \beta + \alpha = 2\alpha$, что дает (2.1).

Анализ оператора $\mathcal{H}_a$ на графе Γ^N мы сводим к анализу некоторого семейства H_k^a , $k \in \mathbb{Z}_N$, операторов на графе Γ^1 . Для простоты обозначим ребро $\Gamma_{\alpha,1}$ графа Γ^1 через Γ_α для всех $\alpha = (n, j) \in \mathcal{Z}_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_6$. Таким образом, $\Gamma^1 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{Z}_1} \Gamma_\alpha$ (см. рис. 1). В теореме 3 показано, что оператор $\mathcal{H}_a$ унитарно эквивалентен $H^a = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_N} H_k^a$. Каждый из операторов H_k^a , $k \in \mathbb{Z}_N$, действует на Γ^1 так:

$$(H_k^a f)_\alpha = -f''_\alpha + q f_\alpha \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{Z}_1, \text{ где } (f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}, (f''_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}_1} \in L^2(\Gamma^1). \quad (2.3)$$

Компоненты f_α удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f_{n,3}(1) &= f_{n,4}(0) = e^{ia_1} f_{n-1,6}(1), & e^{ia_2} s^k f_{n,4}(1) &= f_{n,1}(0) = e^{-ia_1} f_{n-1,5}(1), \\ e^{ia_1} f_{n,1}(1) &= f_{n,2}(0) = f_{n,5}(0), & e^{ia_2} f_{n,2}(1) &= f_{n,3}(0) = f_{n,6}(0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f'_{n,3}(1) - f'_{n,4}(0) + e^{ia_1} f'_{n-1,6}(1) &= 0, \\ e^{ia_2} s^k f'_{n,4}(1) - f'_{n,1}(0) + e^{-ia_1} f'_{n-1,5}(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$e^{ia_1} f'_{n,1}(1) - f'_{n,2}(0) - f'_{n,5}(0) = 0, \quad e^{ia_2} f'_{n,2}(1) - f'_{n,3}(0) - f'_{n,6}(0) = 0,$$

где

$$s = e^{2\pi i/N}, \quad a_1 = \frac{b(R_2 - R_1)}{4}, \quad a_2 = \frac{bR_2}{4}, \quad a = a_1 + a_2 = \frac{b(2R_2 - R_1)}{4}, \quad (2.6)$$

$R_p = \sqrt{(pR)^2 - 1}$, $p = 1, 2$, R – радиус цилиндра $\mathcal{C}$. Каждый из операторов H_k^a , $k \in \mathbb{Z}_N$, зависит от параметров a_1, a_2 , которые определяют значения всех проекций векторного потенциала на ребра графа (см. (2.1)). Но, как окажется в дальнейшем, спектр оператора H_k^a , а значит, и спектр $\mathcal{H}_a$ полностью определяется единственным параметром $a = a_1 + a_2$, который мы и выносим в обозначение оператора.

Определим фундаментальные решения $\vartheta_k^{(\nu)} = (\vartheta_{k,\alpha}^{(\nu)})_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}$, $\varphi_k^{(\nu)} = (\varphi_{k,\alpha}^{(\nu)})_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}$, $\nu = 1, 2$, следующей задачи на графе Γ^1 :

$$-f''_\alpha + qf_\alpha = \lambda f_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{Z}_1, \quad \text{условия Кирхгофа (2.4), (2.5),}$$

начальные условия

$$\Theta_{k,-1}(1, \lambda) = \Phi'_{k,-1}(1, \lambda) = I, \quad \Theta'_{k,-1}(1, \lambda) = \Phi_{k,-1}(1, \lambda) = 0, \quad (2.7)$$

где $I = I_2, I_n$, $n \geq 2$, есть $(n \times n)$ -единичная матрица и

$$\Theta_{k,n} = \begin{pmatrix} \vartheta_{k,n,5}^{(1)} & \vartheta_{k,n,5}^{(2)} \\ \vartheta_{k,n,6}^{(1)} & \vartheta_{k,n,6}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{k,n} = \begin{pmatrix} \varphi_{k,n,5}^{(1)} & \varphi_{k,n,5}^{(2)} \\ \varphi_{k,n,6}^{(1)} & \varphi_{k,n,6}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

В (2.7) начальные условия на фундаментальные решения и их производные ставятся в двух точках графа Γ^1 , а именно, на концах ребер $\Gamma_{-1,5}, \Gamma_{-1,6}$. В теореме 3 мы докажем, что задача (2.7) имеет единственное решение на всем графе при всех значениях $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D$. Определим матрицу монодромии значениями фундаментальных решений на концах ребер $\Gamma_{0,5}, \Gamma_{0,6}$ (т.е. через период графа):

$$\mathcal{M}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \Theta_{k,0} & \Phi_{k,0} \\ \Theta'_{k,0} & \Phi'_{k,0} \end{pmatrix} (1, \lambda). \quad (2.9)$$

Приведем теорему о матрице монодромии. Доказательство этой теоремы повторяет рассуждения из [3], [10] и будет дано в последнем параграфе. Всюду далее обозначим

$$\varphi_1 = \varphi(1, \cdot), \quad \vartheta_1 = \vartheta(1, \cdot), \quad \varphi'_1 = \varphi'(1, \cdot), \quad \vartheta'_1 = \vartheta'(1, \cdot).$$

ТЕОРЕМА 3. i) Оператор $\mathcal{H}_a$ унитарно эквивалентен $H^a = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_N} H_k^a$.

ii) Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D$ существует единственный набор фундаментальных решений

$$\vartheta_k^{(\nu)} = (\vartheta_{k,\alpha}^{(\nu)})_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}, \quad \varphi_k^{(\nu)} = (\varphi_{k,\alpha}^{(\nu)})_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}, \quad \nu = 1, 2.$$

Кроме того, каждая из функций $\vartheta_{k,\alpha}^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\varphi_{k,\alpha}^{(\nu)}(x, \lambda)$, $x \in \Gamma^1$, аналитична по $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D$, матрица монодромии $\mathcal{M}_k(\lambda)$, $\lambda \notin \sigma_D$, имеет с учетом кратности четыре собственных значения вида $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$ и удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{R} \mathcal{N}_k \mathcal{R}^{-1}, \quad \mathcal{N}_k = \begin{pmatrix} \vartheta_1 I & I \\ \varphi_1 \vartheta'_1 I & \varphi'_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B + S_k & I \\ 4F(B - FI) + BS_k & B \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} I &= I_2, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} e^{-ia_2} \varphi_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2F & -1 \\ -1 & 2F \end{pmatrix}, \\ S_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{2ia} s^k \\ 1 - e^{-2ia} s^{-k} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Кроме того, матричнозначная функция $\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M}_k \mathcal{R}$ — целая и верны равенства

$$\det \mathcal{M}_k = 1, \quad \mathcal{M}_k(\lambda)^\top \mathcal{J} \mathcal{M}_k(\lambda) = \mathcal{J}, \quad \text{где } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) Из теоремы следует, что матрица $\mathcal{M}_k$ имеет простой полюс в каждой точке $\lambda \in \sigma_D$ и не имеет никаких других особенностей. Каждый полюс является собственным значением H_k^a (см. ниже теорему 4) и не зависит от магнитного поля.

2) Равенство (2.12) выражает свойство симплектичности матрицы монодромии. Из него, в частности, следует, что собственные значения имеют вид $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$.

§ 3. Собственные значения оператора H_k^a

Матрица монодромии имеет полюсы в точках $\lambda \in \sigma_D$, являющихся собственными значениями задачи Дирихле. В следующей теореме мы покажем, что для любого $a \in \mathbb{R}$ эти полюсы являются собственными значениями оператора H_k^a бесконечной кратности. Кроме того, в ней мы опишем соответствующие собственные функции H_k^a и построим базисы в собственных подпространствах, состоящие из функций, имеющих компактный носитель (см. рис. 4). Определим подпространство $\mathcal{H}_k^a(\lambda) = \{\psi \in \mathfrak{D}(H_k^a) : H_k^a \psi = \lambda \psi\}$ для $(\lambda, k) \in \sigma_D \times \mathbb{Z}_N$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(a, \lambda, k) \in \mathbb{R} \times \sigma_D \times \mathbb{Z}_N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Каждая собственная функция оператора H_k^a равна нулю во всех вершинах графа Γ^1 .

ii) На Γ^1 существуют функции $\psi^{(0,\nu)} = (\psi_\alpha^{(0,\nu)})_{\alpha \in \mathcal{X}_1}$, $\nu = 1, 2$, принадлежащие $\mathcal{H}_k^a(\lambda)$, такие, что

$$\text{supp } \psi^{(0,\nu)} \subset \bigcup_{(\ell,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}_6} \Gamma_{\ell,j}.$$

Более того, для любого $n \in \mathbb{Z}$ функции

$$\psi^{(n,\nu)} = (\psi_{m,j}^{(n,\nu)})_{(m,j) \in \mathcal{X}_1} = (\psi_{m-n,j}^{(0,\nu)})_{(m,j) \in \mathcal{X}_1}$$

также принадлежат $\mathcal{H}_k^a(\lambda)$. Каждая функция f из $\mathcal{H}_k^a(\lambda)$ раскладывается в ряд вида

$$f = \sum_{(n,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2} \widehat{f}_{n,\nu} \psi^{(n,\nu)}, \quad (\widehat{f}_{n,1}, \widehat{f}_{n,2})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 \oplus \ell^2, \quad (3.1)$$

причем если $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$, $\phi = \varphi'_1(\lambda)$, то

$$\widehat{f}_{n,1} = f'_{n,1}(0), \quad \widehat{f}_{n,2} = f'_{n,2}(0); \quad (3.2)$$

если $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$, то

$$\widehat{f}_{n,1} = \frac{f'_{n,5}(0) + s^k \phi e^{i(a+a_1)} f'_{n,6}(0)}{\xi_1 \xi_2}, \quad \widehat{f}_{n,2} = -\frac{e^{ia_1} f'_{n,6}(0) + \phi e^{ia} f'_{n,5}(0)}{\xi_1 \xi_2}, \quad (3.3)$$

$\xi_1 = 1 - s^k e^{2ia} \phi^2 \neq 0$, $\xi_2 = 1 - s^k e^{2ia} \phi^4 \neq 0$. Отображение $f \rightarrow (\widehat{f}_{n,1}, \widehat{f}_{n,2})_{n \in \mathbb{Z}}$ есть линейный изоморфизм между $\mathcal{H}_k^a(\lambda)$ и $\ell^2 \oplus \ell^2$.

Рис. 4. Носители собственных функций (выделены жирными линиями): а) $\psi^{(0,1)}$; б) $\psi^{(0,2)}$ для $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$; в) $\psi^{(0,1)}$; д) $\psi^{(0,2)}$ для $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$. Здесь $\Gamma_{j,k}$ – ребра графа

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Доказательство повторяет рассуждения из [3]. Пусть $H_k^a f = \lambda f$ для некоторой собственной функции $f = (f_\omega)_{\omega \in \mathcal{Z}_1}$ и некоторого $\lambda \in \sigma_D$ (напомним, что тогда $\varphi_1(\lambda) = 0$, $\vartheta_1(\lambda) \neq 0$). Для каждого $\omega = (n, j) \in \mathcal{Z}_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_6$ равенство

$$f_\omega(t) = f_\omega(0) + \int_0^t f'_\omega(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

дает

$$|f_\omega(0)| \leq |f_\omega(t)| + \int_0^1 |f'_\omega(s)| ds.$$

Интегрируя по $t \in [0, 1]$, используя неравенство Гёльдера и $f \in \mathcal{H}_k^a(\lambda)$, получаем

$$|f_\omega(0)| \leq \int_0^1 (|f_\omega(t)| + |f'_\omega(t)|) dt \leq \|f_\omega\|_0 + \|f'_\omega\|_0 = o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (3.4)$$

где

$$\|f_\omega\|_0^2 = \int_0^1 |f_\omega(t)|^2 dt.$$

Далее, каждая f_ω имеет вид $f_\omega(t) = a_\omega \vartheta_t + b_\omega \varphi_t$, $t \in [0, 1]$ с некоторыми постоянными a_ω , b_ω , где $\varphi_t = \varphi(t, \lambda)$, $\vartheta_t = \vartheta(t, \lambda)$, $\dots$, что дает $f_\omega(1) = f_\omega(0)\vartheta_1$. Условия Кирхгофа (2.4) дают

$$f_{n+1,1}(0) = e^{-ia_1} f_{n,5}(1) = e^{-ia_1} \vartheta_1 f_{n,5}(0) = \vartheta_1 f_{n,1}(1) = \vartheta_1^2 f_{n,1}(0), \quad (3.5)$$

откуда получаем

$$f_{0,1}(0) = \vartheta_1^{2n} f_{-n,1}(0), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Пусть $|\vartheta_1| \leq 1$ (доказательство для случая $|\vartheta_1| > 1$ аналогично). Тогда из (3.6), (3.4) следует, что $f_{0,1}(0) = \vartheta_1^{2n} f_{-n,1}(0) = o(1)$, $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, $f_{0,1}(0) = 0$ и (3.6) дает $f_{n,1}(0) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Из (3.5) следует, что $f_{n,5}(0) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогично доказывается, что $f_{n,3}(1) = f_{n,6}(0) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $f = 0$ во всех вершинах графа Γ^1 .

ii) Зададим функции $\psi^{(0,\nu)}$ следующим образом (см. рис. 4). Если $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$, то $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$ и функции $\psi^{(0,1)}$ определены равенствами

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}^{(0,1)} &= 0, \quad (n, j) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{N}_6, \\ \psi_{0,j}^{(0,1)} &= 0, \quad j = 1, 3, 4, \quad \psi_{1,j}^{(0,1)} = 0, \quad j = 5, 6, \\ \psi_{1,4}^{(0,1)} &= \phi^2(\phi^2 - 1)e^{ia}\varphi, \quad \frac{\psi_{1,1}^{(0,1)}}{\phi e^{-ia_1}} = \frac{\psi_{1,2}^{(0,1)}}{\phi^2} = \frac{\psi_{1,3}^{(0,1)}}{\phi^3 e^{ia_2}} = \xi_1 \varphi, \\ \psi_{0,5}^{(0,1)} &= -\psi_{0,2}^{(0,1)} = -\frac{\psi_{0,6}^{(0,1)}}{\phi e^{ia_2}} = \xi_2 \varphi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

функции $\psi^{(0,2)}$ определены равенствами

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}^{(0,2)} &= 0, \quad (n, j) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{N}_6, \quad \psi_{1,j}^{(0,2)} = 0, \quad j \neq 4, \\ \psi_{0,2}^{(0,2)} &= s^k \phi(\phi^2 - 1)e^{ia}\varphi, \quad \frac{\psi_{0,4}^{(0,2)}}{\phi} = \frac{\psi_{0,3}^{(0,2)}}{e^{-ia_1}} = \frac{\psi_{0,1}^{(0,2)}}{s^k \phi^2 e^{ia_2}} = \xi_1 \varphi, \\ -\frac{\psi_{1,4}^{(0,2)}}{\phi} &= -\frac{\psi_{0,6}^{(0,2)}}{e^{-ia_1}} = \frac{\psi_{0,5}^{(0,2)}}{s^k \phi e^{ia}} = \xi_2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$, то $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и функции $\psi^{(0,\nu)}$ определены равенствами

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}^{(0,\nu)} &= 0, \quad (n, j) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{N}_6, \quad \psi_{1,j}^{(0,\nu)} = 0, \quad j \in \mathbb{N}_6 \setminus \{4\}, \\ \psi_{0,1}^{(0,1)} &= \phi e^{-ia_1} \psi_{0,5}^{(0,1)} = -e^{-ia} \psi_{0,6}^{(0,1)} = e^{-ia} \psi_{0,3}^{(0,1)} = \varphi, \\ -\psi_{1,4}^{(0,1)} &= \psi_{0,4}^{(0,1)} = \phi e^{i(a+a_1)} \varphi, \\ \psi_{0,1}^{(0,2)} &= 0, \quad \psi_{0,1}^{(0,2)} = \psi_{0,3}^{(0,2)} = \psi_{0,4}^{(0,2)} = 0, \\ \psi_{0,2}^{(0,2)} &= -\psi_{0,5}^{(0,2)} = e^{-ia} \psi_{1,4}^{(0,2)} = e^{-ia_2} \phi \psi_{0,6}^{(0,2)} = \varphi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя (3.7)–(3.9), заключаем, что $\psi^{(0,\nu)}$ удовлетворяют условиям Кирхгофа (2.4), (2.5). Таким образом, $\psi^{(0,\nu)}$ – собственные функции H_k^a . Оператор H_k^a – периодический, поэтому каждая $\psi^{(n,\nu)}$, $(n, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2$, также есть собственная функция. Покажем, что последовательность $\psi^{(n,\nu)}$, $(n, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2$, образует базис в пространстве $\mathcal{H}_k^a(\lambda)$. Пусть

$$h = \sum_{(n,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2} \alpha_{n,\nu} \psi^{(n,\nu)} = 0.$$

Тогда (3.7), (3.8) дают для $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$ следующие соотношения:

$$0 = h|_{\Gamma_{n,5}} = (\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2}s^k\phi e^{ia})\xi_2\varphi, \quad 0 = h|_{\Gamma_{n,6}} = -(\alpha_{n,1}\phi e^{ia} + \alpha_{n,2})\xi_2e^{-ia_1}\varphi,$$

$n \in \mathbb{Z}$, откуда следует, что $\alpha_{n,\nu} = 0$ для всех $(n, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2$. Значит, $\psi^{(n,\nu)}$ линейно независимы. Аналогично можно показать, что $\psi^{(n,\nu)}$ линейно независимы в случае, когда $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$.

Для любого $f \in \mathcal{H}_k^a(\lambda)$ докажем тождество (3.1), т.е.

$$f = \hat{f}, \quad \text{где } \hat{f} = \sum_{(n,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2} \hat{f}_{n,\nu} \psi^{(n,\nu)} \text{ и } \hat{f}_{n,\nu} \text{ даны равенствами (3.3).} \quad (3.10)$$

Из $\lambda \in \sigma_D$ следует, что $f|_{\Gamma_{n,j}} = f'_{n,j}(0)\varphi$. Если $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$, то равенства (3.3)–(3.8) дают для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{f}|_{\Gamma_{n,5}} &= \sum_{(\ell,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2} \hat{f}_{\ell,\nu} \psi^{(\ell,\nu)}|_{\Gamma_{n,5}} = (\hat{f}_{n,1} + \hat{f}_{n,2}s^k\phi e^{ia})\xi_2\varphi = f'_{n,5}(0)\varphi = f|_{\Gamma_{n,5}}, \\ \hat{f}|_{\Gamma_{n,6}} &= \sum_{(\ell,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2} \hat{f}_{\ell,\nu} \psi^{(\ell,\nu)}|_{\Gamma_{n,6}} = -(\hat{f}_{n,1}\phi e^{ia} + \hat{f}_{n,2})\xi_2e^{-ia_1}\varphi = f'_{n,6}(0)\varphi = f|_{\Gamma_{n,6}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$, то равенства (3.2), (3.9) дают для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}|_{\Gamma_{n,1}} = \hat{f}_{n,1}\varphi = f'_{n,1}(0)\varphi = f|_{\Gamma_{n,1}}, \quad \hat{f}|_{\Gamma_{n,2}} = \hat{f}_{n,2}\varphi = f'_{n,2}(0)\varphi = f|_{\Gamma_{n,2}}. \quad (3.12)$$

Из равенств (3.11), (3.12) следует, что $\sum |\hat{f}_{n,\nu}|^2 < \infty$ и $\hat{f} \in L^2(\Gamma^1)$, поскольку $f \in L^2(\Gamma^1)$.

Отметим что $\hat{f}$ удовлетворяет условиям Кирхгофа (2.4), (2.5) и $-\hat{f}''_\alpha + q\hat{f}_\alpha = \lambda\hat{f}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{Z}_1$. Рассмотрим функцию $u = f - \hat{f}$. Функция $u = 0$ во всех вершинах графа Γ^1 , и поэтому $u_{n,j} = C_{n,j}\varphi$, $(n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_6$. Если $(s_k, \phi^2) \neq (0, 1)$, то (3.11) дает $C_{n,5} = C_{n,6} = 0$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $C_{n,1} = C$. Тогда из граничных условий Кирхгофа (2.4), (2.5) следует, что

$$C_{n,2} = C\phi e^{ia_1}, \quad C_{n,3} = C\phi^2 e^{ia}, \quad C_{n,4} = C\phi^3 e^{i(a+a_1)}, \quad C_{n,1} = C s^k \phi^4 e^{2ia}.$$

Поскольку $C_{n,1} = C$, мы получаем $C = 0$ и $u = 0$, что дает (3.10). Если $(s_k, \phi^2) = (0, 1)$, то (3.12) дает $C_{n,1} = C_{n,2} = 0$. Из граничных условий Кирхгофа (2.4), (2.5) следует, что $C_{n,5} = 0$, и тогда $C_{n,4} = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $C_{n,3} = C$. Тогда $C_{n,6} = -C_{0,3} = -C$ и $C_{n+1,3} = -C_{n,6} = C$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $u \in L^2(\Gamma^1)$, мы имеем $C = 0$ и $u = 0$, откуда следует (3.10).

Отображение $f \rightarrow (\hat{f}_{n,\nu})_{(n,\nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_2}$ из $\mathcal{H}_k^a$ на $\ell^2 \oplus \ell^2$ линейно и взаимно однозначно. Следовательно, оно является линейным изоморфизмом.

§ 4. Функция Ляпунова и спектр оператора H_k^a

Равенства (2.12), выражающие свойство симплектичности матрицы монодромии, показывают, что каждая матрица $\mathcal{M}_k(\lambda)$, $(k, \lambda) \in \mathbb{Z}_N \times (\mathbb{C} \setminus \sigma_D)$, имеет (с учетом кратности) четыре собственных значения $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$. Поскольку собственные значения матрицы монодромии имеют такой вид, удобно перейти

к матрице $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_k + \mathcal{M}_k^{-1})$, имеющей два двукратных собственных значения $F_{k,\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{k,\nu} + \tau_{k,\nu}^{-1})$, $\nu = 1, 2$. Поскольку $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{R}$ (вместе с $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}_k\mathcal{R}$) – целая матричнозначная функция, функции $F_{k,\nu}$ являются ветвями некоторой функции F_k , аналитической на двулистной римановой поверхности. По аналогии со случаем оператора Хилла назовем функцию F_k функцией Ляпунова. В следующей теореме мы приведем наш основной результат о функции Ляпунова и опишем абсолютно непрерывный спектр оператора H_k^a в терминах этой функции.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$ и $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$ – собственные значения $\mathcal{M}_k$. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Функции $F_{k,\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{k,\nu} + \tau_{k,\nu}^{-1})$, $\nu = 1, 2$, являются ветвями функции Ляпунова $F_k = \xi_k + \sqrt{\rho_k}$, аналитической на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}_k$, заданной функцией $\sqrt{\rho_k}$, и удовлетворяют следующим равенствам:

$$F_{k,\nu} = \xi_k - (-1)^\nu \sqrt{\rho_k}, \quad \xi_k = \frac{9F^2 - F_-^2 - 1}{2} - s_k^2, \quad \rho_k = (9F^2 - s_k^2)c_k^2 + s_k^2 F_-^2, \quad (4.1)$$

где

$$c_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N} + a\right), \quad s_k = \sin\left(\frac{\pi k}{N} + a\right). \quad (4.2)$$

ii) Если $F_k(\lambda) \in (-1, 1)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и λ не является точкой ветвления $F_k(\lambda)$, то $F'_k(\lambda) \neq 0$.

iii) Верны следующие равенства:

$$\sigma(H_k^a) = \sigma_{pp}(H_k^a) \cup \sigma_{ac}(H_k^a), \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ac}(H_k^a) = \{\lambda \in \mathbb{R} : F_{k,\nu}(\lambda) \in [-1, 1], \nu = 1, 2\}, \quad \sigma_{pp}(H_k^a) = \sigma_D. \quad (4.4)$$

Каждая точка $\lambda_0 \in \sigma_{pp}(H_k^a)$ имеет бесконечную кратность. Кроме того, с учетом спектральной кратности, верны равенства

$$\sigma(H_k^a) = \sigma(H_{N-k}^{-a}) = \sigma(H_{k-1}^{a+\pi/N}) = \sigma(H_k^{a+\pi}). \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Рассмотрим матрицы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_k + \mathcal{M}_k^{-1}) = \mathcal{R}\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{R}^{-1}, \quad \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_k + \mathcal{N}_k^{-1}),$$

где матрица $\mathcal{N}_k$ определена в (2.10). По теореме 3, ii) функции $F_{k,\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{k,\nu} + \tau_{k,\nu}^{-1})$, $\nu = 1, 2$, являются (двукратными) собственными значениями матрицы $\mathcal{L}$, а значит, и матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}$. Равенства (2.10), (2.12) дают $\mathcal{N}_k^\top \mathcal{R} \mathcal{J} \mathcal{R} \mathcal{N}_k = \mathcal{R} \mathcal{J} \mathcal{R}$. Поскольку $\mathcal{R} \mathcal{J} \mathcal{R} = \varphi_1 e^{-ia_2} \mathcal{J}$, мы получаем $\mathcal{N}_k^\top \mathcal{J} \mathcal{N}_k = \mathcal{J}$, откуда следует, что $\mathcal{N}_k^{-1} = -\mathcal{J}(\mathcal{N}_k)^\top \mathcal{J}$, и тогда

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_k - \mathcal{J} \mathcal{N}_k^\top \mathcal{J}). \quad (4.6)$$

Равенства (2.10) дают $\mathcal{N}_k = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, где

$$\begin{aligned} X_1 &= (\vartheta_1 + 4F)B - 4F^2 I + (\vartheta_1 I + B)S_k, & X_2 &= \vartheta_1 I + B, \\ X_3 &= (\varphi_1 \vartheta'_1 + 4F \varphi'_1)B - 4F^2 \varphi'_1 I + (\varphi_1 \vartheta'_1 I + \varphi'_1 B)S_k, & X_4 &= \varphi_1 \vartheta'_1 I + \varphi'_1 B. \end{aligned}$$

Поскольку $JBK = B$, $J(S_k)^\top J = S_k$ и $J^2 = I$, мы имеем равенство $\mathcal{J} \mathcal{N}_k^\top \mathcal{J} = \begin{pmatrix} -X_4 & X_2 \\ X_3 & -X_1 \end{pmatrix}$. Тогда (4.6) дает

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2}(X_1 + X_4) = \frac{1}{2}(6FB + (\varphi_1 \vartheta'_1 - 4F^2)I + (\vartheta_1 I + B)S_k). \quad (4.7)$$

Следовательно, $F_{k,\nu}$ являются собственными значениями (2×2) -матрицы L . Подставляя выражения (2.11) для B, S_k в (4.7), получаем

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8F^2 + \varphi_1 \vartheta'_1 + e^{-2ia} s^{-k} - 1 & -6F + (2F + \vartheta_1)(1 - e^{2ia} s^k) \\ -6F + (2F + \vartheta_1)(1 - e^{-2ia} s^{-k}) & 8F^2 + \varphi_1 \vartheta'_1 + e^{2ia} s^k - 1 \end{pmatrix}.$$

Используя равенство $\varphi_1 \vartheta'_1 = \vartheta_1 \varphi'_1 - 1 = F^2 - F_-^2 - 1$, имеем

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\xi_0 + e^{-2ia} s^{-k} - 1 & -6F + (2F + \vartheta_1)(1 - e^{2ia} s^k) \\ -6F + (2F + \vartheta_1)(1 - e^{-2ia} s^{-k}) & 2\xi_0 + e^{2ia} s^k - 1 \end{pmatrix},$$

где ξ_0 определена в (4.1). Собственные значения α матрицы $L(\lambda)$ совпадают со значениями функций $F_{k,\nu}(\lambda)$ и являются корнями характеристического полинома $\det(L(\lambda) - \alpha I)$, который равен

$$\begin{aligned} \det(L - \alpha I) &= \beta^2 + \beta \cos\left(\frac{2\pi k}{N} + 2a\right) + \frac{1}{4} - 9F^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(4F - \vartheta_1)(2F + \vartheta_1) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} + 2a\right)\right) \\ &= \beta^2 + \beta(1 - 2s_k^2) + \frac{1}{4} - 9F^2 c_k^2 - F_-^2 s_k^2, \end{aligned}$$

где $\beta = \xi_0 - \frac{1}{2} - \alpha$, и мы использовали равенства $2F\vartheta_1 - \vartheta_1^2 = F^2 - F_-^2$, $\cos(\frac{2\pi k}{N} + 2a) = 1 - 2s_k^2$. Отсюда следует, что $\beta = \frac{1}{2} - s_k^2 \pm \sqrt{\rho_k}$, что дает (4.1). Поскольку F, F_- — целые функции, из (4.1) следуют утверждения об аналитичности функции F_k на двулистной римановой поверхности $\sqrt{\rho}$.

ii) Доказательство стандартно и повторяют соответствующие рассуждения из [29].

iii) Доказательство повторяет соответствующие рассуждения из [3]. Напомним, что для $N = 1$ фундаментальный подграф Γ_0 имеет вид $\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^6 \Gamma_{0,j}$ (см. рис. 1, 2). Имеем $\Gamma^1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma_n$, где $\Gamma_n = \bigcup_{j=1}^6 \Gamma_{n,j}$. Для функции f на Γ^1 введем функции $f_n = f|_{\Gamma_n}$. отождествим f_n на Γ_n с функцией на Γ_0 , используя локальные координаты $x = r_\omega + te_\omega$, $t \in [0, 1]$, $\omega = (n, j) \in \mathcal{X}_1$.

Определим пространства

$$\mathfrak{H} = \int_{[0, 2\pi)} \oplus \mathfrak{H}_p \frac{dp}{2\pi},$$

где $\mathfrak{H}_p = L^2(\Gamma_0)$. Введем унитарный оператор $U: L^2(\Gamma^1) \rightarrow \mathfrak{H}$ и оператор A_k равенствами

$$(Uf)(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inp} f_n, \quad f_n = (f_{n,j})_{j \in \mathbb{N}_6} \in L^2(\Gamma_0), \quad p \in [0, 2\pi),$$

$$A_k = UH_kU^{-1} = \int_{[0, 2\pi)} \oplus A_k(p) \frac{dp}{2\pi},$$

где оператор $A_k(p)$ действует в пространстве $L^2(\Gamma_0) = \sum_{j \in \mathbb{N}_6} \oplus L^2(\Gamma_{0,j})$. На ребре $\Gamma_{0,j}$ оператор $A_k(p)$ действует как обыкновенный дифференциальный оператор вида

$$(A_k(p)f)_j(t) = -f_j''(t) + q(t)f_j(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.8)$$

где $f_j, f_j'' \in L^2(\Gamma_{0,j})$, $j \in \mathbb{N}_6$, $q \in L^2(0, 1)$, и $f \in \mathfrak{D}(A_k(p))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f_{n,3}(1) &= f_{n,4}(0) = e^{-ip} e^{ia_1} f_{n,6}(1), \\ e^{ia_2} s^k f_{n,4}(1) &= f_{n,1}(0) = e^{-ip} e^{-ia_1} f_{n,5}(1), \\ e^{ia_1} f_{n,1}(1) &= f_{n,2}(0) = f_{n,5}(0), \quad e^{ia_2} f_{n,2}(1) = f_{n,3}(0) = f_{n,6}(0), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f'_{n,3}(1) + e^{-ip} e^{ia_1} f'_{n,6}(1) &= f'_{n,4}(0), \\ e^{ia_2} s^k f'_{n,4}(1) + e^{-ip} e^{-ia_1} f'_{n,5}(1) &= f'_{n,1}(0), \\ e^{ia_1} f'_{n,1}(1) - f'_{n,2}(0) - f'_{n,5}(0) &= 0, \quad e^{ia_2} f'_{n,2}(1) - f'_{n,3}(0) - f'_{n,6}(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Заметим, что соотношения (4.9), (4.10) следуют из (2.4), (2.5), где мы использовали то, что $f_j = f_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}_6$ и $f_{n-1,0}(0) = e^{-ip} f_{n,0}(0)$, $f'_{n-1,0}(0) = e^{-ip} f'_{n,0}(0)$.

Таким образом,

$$A_k = \int_{[0, 2\pi)} \oplus A_k(p) dp,$$

где оператор $A_k(p)$ действует на конечном графе Γ_0 , содержащем только шесть ребер. Значит, $A_k(p)$ имеет дискретный спектр. Обозначим возрастающую последовательность собственных значений оператора $A_k(p)$ через $E_{k,n}(p)$, $n \geq 1$. Если для какого-нибудь $n \geq 1$ собственное значение $E_{k,n}(p) = \text{const}$ для всех $p \in [0, 2\pi]$, то такое $E_{k,n}(p)$ есть собственное значение A_k бесконечной кратности. Хорошо известные аргументы (см. [30]) дают (4.3).

Предположим, что $\lambda \notin \sigma_D$. Мы будем решать уравнение $A_k(p)f = \lambda f$. Используя условия (4.9), (4.10) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, получаем уравнение $\mathcal{M}_k(\lambda)w_{-1}(1) = e^{-ip}\mathcal{M}_k(\lambda)w_0(1) = w_0(1)$, где $w_n = (f_{n,5}, f'_{n,5}, f_{n,6}, f'_{n,6})^\top$ (см. (9.5)). Это уравнение имеет ненулевое решение при условии $\det(\mathcal{M}_k(\lambda) - e^{ip}I_4) = 0$. Отсюда следует, что

$$\sigma_{ac}(H_k^a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\tau_{k,1}(\lambda)| = 1 \text{ или } |\tau_{k,2}(\lambda)| = 1\},$$

что дает первое равенство в (4.4). Более того, $(\mathbb{R} \setminus \sigma_D) \cap \sigma_{pp}(H_k^a) = \emptyset$. Следовательно, $\sigma_{pp}(H_k^a) \subset \sigma_D$. С другой стороны, теорема 4 дает $\sigma_D \subset \sigma_{pp}(H_k^a)$, откуда следует второе равенство в (4.4). По теореме 4 каждая точка $\lambda_0 \in \sigma_{pp}(H_k^a)$ имеет бесконечную кратность.

Из (4.1) и равенств

$$\begin{aligned} s_k(-a) &= s_{N-k}(a), & c_k(-a) &= c_{N-k}(a), \\ s_k\left(a + \frac{\pi}{N}\right) &= s_{k+1}(a), & c_k\left(a + \frac{\pi}{N}\right) &= c_{k+1}(a) \end{aligned}$$

следует, что $F_{k,\nu}(\cdot, -a) = F_{N-k,\nu}(\cdot, a)$, $F_{k,\nu}(\cdot, a + \frac{\pi}{N}) = F_{k+1,\nu}(\cdot, a)$, $(\nu, k) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{Z}_N$. Тогда равенства (4.4) дают (4.5).

Здесь и далее, когда мы хотим подчеркнуть зависимость величины от магнитного поля, мы пишем $c_k(a), F_{k,\nu}(\lambda, a), \dots$ вместо $c_k, F_{k,\nu}(\lambda), \dots$.

Заметим, что функция Ляпунова $F_k(\lambda)$ вещественна при условии $\rho_k(\lambda) \geq 0$. Равенство $F_{k,1}(\lambda) = F_{k,2}(\lambda)$ возможно тогда и только тогда, когда $\rho_k(\lambda) = 0$. Простые нули функции ρ_k являются простыми (типа квадратного корня) точками ветвления функции Ляпунова. Если $c_k = 0$, то $s_k = 1$ и $\rho_k = F_-^2$. Если $s_k = 0$, то $c_k = 1$ и $\rho_k = 9F^2$. В этих случаях функции $F_{k,\nu}$ имеют аналитические продолжения на всю комплексную плоскость. Если $c_k = 0$ и $q \in L_{\text{even}}^2(0, 1)$, то $F_- = 0$ и $\rho_k = 0$. В этом случае обе ветви функции Ляпунова совпадают, т.е. $F_{k,1} = F_{k,2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Всюду далее берем ветвь $\sqrt{\rho_k}$ так, что если $\rho_k(\lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\sqrt{\rho_k(\lambda)} > 0$ и, следовательно, $F_{k,1}(\lambda) > F_{k,2}(\lambda)$. Тогда $\sqrt{\rho_k}$ не является целой функцией даже для $c_k = 0$ или $s_k = 0$. Используя другой выбор ветвей, мы получили бы новую функцию $\sqrt{\rho_k}$, целую для $c_k = 0$ или $s_k = 0$, но такой выбор неудобен для нумерации краев лакун (см. ниже теоремы 6, 7).

Равенство (4.4) показывает, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ абсолютно непрерывный спектр оператора H_k^a равен

$$\sigma_{ac}(H_k^a) = \sigma_{k,1} \cup \sigma_{k,2}, \quad \text{где} \quad \sigma_{k,\nu} = \{\lambda \in \mathbb{R} : F_{k,\nu}(\lambda) \in [-1, 1]\}, \quad \nu = 1, 2. \quad (4.11)$$

Назовем множества $\sigma_{k,\nu}$ *ветвями абсолютно непрерывного спектра* H_k^a .

§ 5. Функция Ляпунова на вещественной оси

В этом параграфе мы изучаем поведение функции Ляпунова на вещественной оси¹ и доказываем результаты, необходимые для описания непрерывного спектра оператора H_k^a . Введем целые функции

$$D_k^\pm = 4(F_{k,1} \mp 1)(F_{k,2} \mp 1). \quad (5.1)$$

Из равенства $F_{k,\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{k,\nu} + \tau_{k,\nu}^{-1})$ следует, что $D_k^\pm = \det(\mathcal{M}_k \mp I_4)$. Подставляя (4.1) в (5.1), получаем

$$D_k^+ = ((3F - 1)^2 - 4 - F_-^2)((3F + 1)^2 - 4 - F_-^2) + 16s_k^2, \quad (5.2)$$

$$D_k^- = D_0^- = ((3F - 1)^2 - F_-^2)((3F + 1)^2 - F_-^2). \quad (5.3)$$

Нули функций D_k^+ являются собственными значениями периодической задачи для оператора H_k^a . Нули функций D_k^- являются собственными значениями антипериодической задачи.

Следуя [3], назовем нули функции ρ_k (см. (4.1)) *резонансами оператора* H_k^a . *Кратностью резонанса* назовем кратность соответствующего нуля. Для оператора Шрёдингера на кресельном графе даже в случае $b = 0$ существуют вещественные и не вещественные резонансы (см. [10]).

Ниже нам потребуется следующая асимптотика из [4]:

$$F(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda} + \frac{O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|})}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad F_-(\lambda) = \frac{O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|})}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

¹В этой работе мы не занимаемся изучением аналитического продолжения функции Ляпунова в комплексную плоскость и построением квазиимпульса. Предполагается, что этому будет посвящена отдельная работа

Подставляя эти асимптотики в равенства (5.2), (5.3) и (4.1), получаем, что

$$\begin{aligned} D_k^+(\lambda) &= (9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 5)^2 - 16c_k^2 + \frac{O(e^{2|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|})}{\sqrt{|\lambda|}}, \\ D_0^-(\lambda) &= (9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 1)^2 + \frac{O(e^{2|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|})}{\sqrt{|\lambda|}}, \\ \rho_k(\lambda) &= (9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - s_k^2)c_k^2 + \frac{O(e^{2|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|})}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Приведем следующую стандартную лемму о нулях целых функций $D_k^\pm, \rho$, т.е. периодических и антипериодических собственных значений и резонансов.

ЛЕММА 5.1. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда существует целое $m \geq 1$ такое, что для всех $n_0 \geq m$ справедливы следующие утверждения.

i) Функция $D_k^- = D_0^- = \det(\mathcal{M}_k + I_4)$ имеет точно $4n_0$ нулей (с учетом кратности) в области

$$\{\lambda : |\lambda| < (\pi n_0)^2\}$$

и для каждого $n > n_0$ точно два нуля (с учетом кратности) в каждой области

$$\left\{ \lambda : \left| \sqrt{\lambda} - \pi n - \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{3} \right\}.$$

Других нулей эта функция не имеет.

ii) Каждая функция $D_k^+ = \det(\mathcal{M}_k - I_4)$, $k \in \mathbb{Z}_N$, имеет точно $4n_0 + 2$ нулей (с учетом кратности) в области

$$\left\{ \lambda : |\lambda| < \left(\pi n_0 + \frac{\pi}{2} \right)^2 \right\}$$

и для каждого $n > n_0$: точно один простой ноль в каждой области

$$\left\{ \lambda : \left| \sqrt{\lambda} - \pi n \pm \arccos \frac{\sqrt{5-4c_k}}{3} \right| < \frac{1}{3} \right\};$$

точно один простой ноль в каждой области

$$\left\{ \lambda : \left| \sqrt{\lambda} - \pi n \pm \arccos \frac{\sqrt{5+4c_k}}{3} \right| < \frac{s_k}{3} \right\}, \quad s_k \neq 0;$$

точно два нуля (с учетом кратности) в каждой области

$$\left\{ \lambda : \left| \sqrt{\lambda} - \pi n \pm \arccos \frac{\sqrt{5+4c_k}}{3} \right| < \frac{1}{3} \right\}, \quad s_k = 0.$$

Других нулей эта функция не имеет.

iii) Пусть $c_k \neq 0$, $s_k \neq 0$. Тогда функция ρ_k имеет точно $2n_0$ нулей (с учетом кратности) в области

$$\{\lambda : |\lambda| < (\pi n_0)^2\}$$

и для каждого $n > n_0$ точно один простой ноль в каждой области

$$\left\{ \lambda : \left| \sqrt{\lambda} - \left(\pi n - \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{s_k}{3} \right) \right| < \frac{s_k}{3} \right\}.$$

Других нулей эта функция не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только утверждение i). Утверждения ii) и iii) доказываются аналогично. Определим контуры $C_n(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\sqrt{\lambda} - \pi n| = r\}$. Фиксируем большие целые $n_0 \geq 1$ и $n_1 > n_0$. Рассмотрим контуры $C_0(\pi n_0)$, $C_0(\pi n_1)$, $C_n(\frac{1}{3})$, $n > n_0$. Для всех $|\lambda - \pi n| \geq \frac{1}{3}$ верны неравенства $e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} < b|\sin \sqrt{\lambda}|$ с некоторым $b > 0$. Используя эти неравенства и асимптотики (5.5), получаем на всех контурах

$$|D_-^0(\lambda) - (9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 1)^2| = o(e^{2|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}) = |\sin \sqrt{\lambda}|^2 o(1) = o(1)|9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 1|^2.$$

По теореме Руше D_-^0 имеет столько же нулей (с учетом кратности) сколько функция $(9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 1)^2$ в каждой из ограниченных областей и оставшейся неограниченной области. Поскольку $(9 \cos^2 \sqrt{\lambda} - 1)^2$ имеет ровно один нуль кратности два в каждой точке $\pi n - \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{1}{3}$, $n \geq 1$, и поскольку $n_1 > n_0$ может быть выбрано произвольно большим, мы получаем утверждение i).

Рис. 5. Типичный график функции Ляпунова $F_k(\lambda)$ и соответствующий спектр H_k^a . Здесь $v_k > 0$ на интервале $\varkappa_1$ и $v_k < 0$ на $\varkappa_{k,2}^\pm$ (см. лемму 6.3)

Наша ближайшая цель – описать ветви спектра $\sigma_{k,\nu}$, определенные равенством (4.11), в терминах функций F, F_- . Нам понадобятся следующие равенства для функций $D_k^\pm$ на вещественной оси, которые получаются непосредственно из (5.2), (5.3):

$$D_k^+ = (9F^2 - g_{k,1})(9F^2 - g_{k,2}), \quad D_k^- = D_0^- = (9F^2 - h_1)(9F^2 - h_2) \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

где

$$g_{k,\nu} = \left(\sqrt{F_-^2 + 4c_k^2 + (-1)^\nu} \right)^2 + 4s_k^2, \quad h_\nu = (|F_-| + (-1)^\nu)^2, \quad (\nu, k) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{Z}_N. \quad (5.7)$$

Заметим, что $g_{k,\nu} \geq h_\nu$ для $\nu = 1, 2$, и $h_2 \geq h_1$ при вещественных λ . Таким образом,

$$h_1 \leq \min\{h_2, g_{k,1}\} \leq \max\{h_2, g_{k,1}\} \leq g_{k,2} \quad \text{на } \mathbb{R} \quad (5.8)$$

(см. рис. 6). Выделим интервалы $R_k = \{\lambda \in \mathbb{R} : \rho_k(\lambda) \geq 0\}$ вещественной оси, на которых функция Ляпунова вещественна.

Рис. 6. Функции $9F^2$, $g_k^\pm$, $h^\pm$ и f_k

ЛЕММА 5.2. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Для $\lambda \in R_k$ и $\nu = 1, 2$ верны равенства

$$\{F_{k,\nu}(\lambda) = 1\} = \{9F^2(\lambda) = g_{k,\nu}(\lambda)\}, \quad \{F_{k,\nu}(\lambda) \leq 1\} = \{9F^2(\lambda) \leq g_{k,\nu}(\lambda)\}. \quad (5.9)$$

Если $c_k = 0$, то

$$\{F_{k,\nu}(\lambda) = -1\} = \{9F^2(\lambda) = h_\nu(\lambda)\}, \quad \{F_{k,\nu}(\lambda) \geq -1\} = \{9F^2(\lambda) \geq h_\nu(\lambda)\}. \quad (5.10)$$

Если $c_k \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \{F_{k,1}(\lambda) = -1\} &= \{9F^2(\lambda) = h_1(\lambda)\} \cap \{|F_-(\lambda)| \geq c_k^2\}, \\ \{F_{k,1}(\lambda) \geq -1\} &= \{9F^2(\lambda) \geq h_1(\lambda)\} \cup \{|F_-(\lambda)| \leq c_k^2\}, \\ \{F_{k,2}(\lambda) = -1\} &= \{9F^2(\lambda) = h_2(\lambda)\} \cup (\{9F^2(\lambda) = h_1(\lambda)\} \cap \{|F_-(\lambda)| \leq c_k^2\}), \\ \{F_{k,2}(\lambda) \geq -1\} &= \{9F^2(\lambda) \geq h_2(\lambda)\} \cup (\{9F^2(\lambda) \leq h_1(\lambda)\} \cap \{|F_-(\lambda)| \leq c_k^2\}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

ii) Спектральные ветви $\sigma_{k,\nu}$ удовлетворяют равенствам

$$\sigma_{k,\nu} = \mathfrak{S}_{k,\nu} \cup \mathfrak{S}_k^R, \quad \nu = 1, 2, \quad (5.13)$$

где

$$\mathfrak{S}_{k,\nu} = \{\lambda \in \mathbb{R} : h_\nu(\lambda) \leq 9F^2(\lambda) \leq g_{k,\nu}(\lambda)\}, \quad (5.14)$$

$$\mathfrak{S}_k^R = \begin{cases} \{\lambda \in R_k : 9F^2(\lambda) \leq h_1(\lambda) \text{ и } |F_-(\lambda)| \leq c_k^2\}, & \text{если } c_k \neq 0 \\ \emptyset, & \text{если } c_k = 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Если $c_k = 0$, то равенства (4.1), (5.7) дают $F_{k,\nu} - 1 = \frac{1}{2}(9F^2 - g_{k,\nu})$, $F_{k,\nu} + 1 = \frac{1}{2}(9F^2 - h_\nu)$, откуда следует (5.9) для этого случая и (5.10). Пусть $c_k \neq 0$. Перепишем выражения для функций $\rho_k, F_{k,\nu} - 1$ в виде

$$\rho_k = (9F^2 - g_{k,\nu})c_k^2 + \left(\sqrt{F_-^2 + 4c_k^2} + (-1)^\nu c_k^2\right)^2, \quad (5.16)$$

$$F_{k,\nu} - 1 = \frac{1}{2c_k^2} \left(\sqrt{\rho_k} - (-1)^\nu c_k^2 - \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2} \right) \left(\sqrt{\rho_k} - (-1)^\nu c_k^2 + \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2} \right). \quad (5.17)$$

Второй (последний) сомножитель в правой части (5.17) положителен в силу неравенств

$$\sqrt{F_-^2 + 4c_k^2} \geq 2|c_k| > c_k^2.$$

Если $9F^2 > g_{k,\nu}$, то из (5.16) следует, что

$$\sqrt{\rho_k} > (-1)^\nu c_k^2 + \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2}.$$

Тогда первый (после $\frac{1}{2}c_k^2$) сомножитель также положителен и $F_{k,\nu} > 1$. Если $9F^2 \leq g_{k,\nu}$, то

$$\sqrt{\rho_k} \leq (-1)^\nu c_k^2 + \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2}, \quad F_{k,\nu} \leq 1,$$

что дает второе равенство в (5.9). Далее, $F_{k,\nu} = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\rho_k} = (-1)^\nu c_k^2 + \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2},$$

т.е. $9F^2 = g_{k,\nu}$. Мы получаем первое равенство в (5.9).

Перепишем выражения для функций $\rho_k, F_{k,1} + 1$ в виде

$$\rho_k = (9F^2 - h_\nu)c_k^2 + (|F_-| + (-1)^\nu c_k^2)^2, \quad (5.18)$$

$$F_{k,\nu} + 1 = \frac{1}{2c_k^2} (\sqrt{\rho_k} - (-1)^\nu c_k^2 - |F_-|) (\sqrt{\rho_k} - (-1)^\nu c_k^2 + |F_-|). \quad (5.19)$$

Пусть $\nu = 1$. Тогда второй сомножитель в правой части (5.19) положителен. Если $|F_-| \leq c_k^2$, то первый сомножитель неотрицателен и $F_{k,1} \geq -1$. Если $9F^2 \geq h_1$, то из (5.18) следует, что $\sqrt{\rho_k} \geq ||F_-| - c_k^2|$ и снова $F_{k,1} \geq -1$. Если одновременно $|F_-| > c_k^2$ и $9F^2 < h_1$, то $\sqrt{\rho_k} < |F_-| - c_k^2$ и первый сомножитель в правой части (5.19) отрицателен и, следовательно, $F_{k,1} < -1$. Мы получаем второе равенство в (5.11). Далее, $F_{k,1} = -1$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{\rho_k} = |F_-| - c_k^2$, т.е. $9F^2 = h_1$ и $|F_-| \geq c_k^2$. Отсюда следует первое равенство в (5.11).

Осталось доказать (5.12). Если $9F^2 \geq h_2$, то равенство (5.18) для $\nu = 2$ дает $\sqrt{\rho_k} \geq |F_-| + c_k^2$. Тогда оба сомножителя в (5.19) для $\nu = 2$ неотрицательны и $F_{k,2} \geq -1$. Если одновременно $9F^2 \leq h_1$ и $|F_-| \leq c_k^2$, то из (5.18) при $\nu = 1$ получаем $\sqrt{\rho_k} \leq c_k^2 - |F_-|$, и тогда оба сомножителя в (5.19) для $\nu = 2$ неположительны. Следовательно, снова $F_{k,2} \geq -1$. Пусть $h_1 < 9F^2 < h_2$. Тогда из (5.18) при $\nu = 1$ следует, что $\sqrt{\rho_k} > ||F_-| - c_k^2|$, а при $\nu = 2$ получаем $\sqrt{\rho_k} < |F_-| + c_k^2$. Тогда второй сомножитель в (5.19) для $\nu = 2$ положителен, а первый отрицателен, и мы имеем $F_{k,2} < -1$. Наконец, пусть $9F^2 < h_2$ и $|F_-| > c_k^2$. Тогда из (5.18) при $\nu = 2$ имеем $\sqrt{\rho_k} < |F_-| + c_k^2$. Вторым сомножителем в (5.19) для $\nu = 2$ положителен, первый отрицателен, и мы снова имеем

$F_{k,2} < -1$. Второе равенство в (5.12) доказано. Далее, $F_{k,2} = -1$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{\rho_k} = |F_-| + c_k^2$ или $\sqrt{\rho_k} = c_k^2 - |F_-|$. Для выполнения первого из этих равенств необходимо и достаточно, чтобы $9F^2 = h_2$. Второе равенство выполнено тогда и только тогда, когда одновременно $9F^2 = h_1$ и $c_k^2 \geq |F_-|$. Мы получаем первое равенство в (5.12).

ii) Рассмотрим случай $c_k \neq 0$. Доказательство для случая $c_k = 0$ аналогично. Подставляя равенства (5.9), (5.11) в (4.11), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{k,1} &= \{-1 \leq F_{k,1} \leq 1\} = \{9F^2 \leq g_{k,1}\} \cap (\{9F^2 \geq h_1\} \cup \{|F_-| \leq c_k^2\}) \\ &= \{h_1 \leq 9F^2 \leq g_{k,1}\} \cup \{9F^2 \leq h_1 \text{ и } |F_-| \leq c_k^2\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $F_{k,1} = F_{k,1}(\lambda)$, ... и всюду $\lambda \in R_k$. Из (5.20) следует (5.13) для $\nu = 1$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \sigma_{k,2} &= \{-1 \leq F_{k,2} \leq 1\} \\ &= \{9F^2 \leq g_{k,2}\} \cap (\{9F^2 \geq h_2\} \cup (\{9F^2 \leq h_1\} \cap \{|F_-| \leq c_k^2\})) \\ &= \{h_2 \leq 9F^2 \leq g_{k,2}\} \cup \{9F^2 \leq h_1 \text{ и } |F_-| \leq c_k^2\}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

что дает (5.13) для $\nu = 2$.

Множество $\mathfrak{S}_{k,\nu}$ – это “устойчивая” часть ветви спектра $\sigma_{k,\nu}$, множество $\mathfrak{S}_k^R$ – это “неустойчивая” часть ветви спектра $\sigma_{k,\nu}$ в том смысле, что $\mathfrak{S}_{k,\nu}$ состоит из интервалов, каждый из которых – непустой при всех значениях $(k, a) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}$ (см. лемму 6.2), в то время как $\mathfrak{S}_k^R$ состоит из интервалов, пустых при некоторых значениях $(k, a) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}$ (см. лемму 6.3). Заметим, что из равенств (5.9), (5.12) и (5.15) следует, что $F_{k,1}$ и $F_{k,2} \in [-1, 1]$ на $\mathfrak{S}_k^R$.

§ 6. Периодический и антипериодический спектр и резонансы

Обозначим через $\lambda_{\nu,0}^{k,+}, \lambda_{\nu,2n}^{k,\pm}$, $(\nu, n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$, нули функций D_k^+ (собственные значения периодической задачи), занумерованные (с учетом кратности) в следующем порядке:

$$\lambda_{2,0}^{k,+} \leq \lambda_{1,0}^{k,+} \leq \lambda_{1,2}^{k,-} \leq \lambda_{2,2}^{k,-} \leq \lambda_{2,2}^{k,+} \leq \lambda_{1,2}^{k,+} \leq \lambda_{1,4}^{k,-} \leq \lambda_{2,4}^{k,-} \leq \lambda_{2,4}^{k,+} \leq \lambda_{1,4}^{k,+} \leq \dots \quad (6.1)$$

Обозначим через $\lambda_{\nu,2n-1}^{k,\pm}$, $(\nu, n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$, нули функций D_k^- (собственные значения антипериодической задачи). Равенство (5.3) показывает, что эти числа не зависят ни от k , ни от a , т.е.

$$\lambda_{\nu,2n-1}^{k,\pm}(a) = \lambda_{\nu,2n-1}^{0,\pm}(0) \quad (\nu, n, k, a) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Поэтому в дальнейшем мы часто вместо $\lambda_{\nu,2n-1}^{k,\pm}$ будем писать $\lambda_{\nu,2n-1}^{0,\pm}$. Занумеруем антипериодические собственные значения (с учетом кратности) следующим образом:

$$\lambda_{2,1}^{0,-} \leq \lambda_{1,1}^{0,-} \leq \lambda_{1,1}^{0,+} \leq \lambda_{2,1}^{0,+} \leq \lambda_{2,3}^{0,-} \leq \lambda_{1,3}^{0,-} \leq \lambda_{1,3}^{0,+} \leq \lambda_{2,3}^{0,+} \leq \dots \quad (6.3)$$

Нумерация (6.1), (6.3) связана с нумерацией ветвей функции Ляпунова в том смысле, что, как мы увидим позднее,

$$F_{k,\nu}(\lambda_{\nu,0}^{k,+}) = F_{k,\nu}(\lambda_{\nu,2n}^{k,\pm}) = 1, \quad F_{k,2}(\lambda_{2,2n-1}^{0,\pm}) = -1, \quad (\nu, k, n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{N} \quad (6.4)$$

(см. лемму 6.2, iii)). Заметим, что равенство, аналогичное (6.4), для $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$ выглядит сложнее (см. (6.20)).

Напомним (см. [4]), что периодические собственные значения $\tilde{\lambda}_0^+$, $\tilde{\lambda}_{2n}^\pm$, $n \geq 1$, и антипериодические собственные значения $\tilde{\lambda}_{2n-1}^\pm$, $n \geq 1$, удовлетворяют неравенствам $\nu_0 \leq \tilde{\lambda}_0^+ < \eta_1 < \tilde{\lambda}_1^- \leq \tilde{\lambda}_1^+ < \eta_2 < \tilde{\lambda}_2^- \leq \tilde{\lambda}_2^+ < \dots$ и ν_n , $\mu_n \in [\tilde{\lambda}_n^-, \tilde{\lambda}_n^+]$ для всех $n \geq 1$, где η_n – нули функции F , μ_n – собственные значения задачи Дирихле, ν_n – собственные значения задачи Неймана. Функция F убывает в каждом из интервалов $(-\infty, \tilde{\lambda}_0^+)$, $(\tilde{\lambda}_{2n}^+, \tilde{\lambda}_{2n+1}^-)$, $n \geq 1$, возрастает в каждом из интервалов $(\tilde{\lambda}_{2n-1}^+, \tilde{\lambda}_{2n}^-)$, $n \geq 1$ и F' имеет единственный простой нуль в каждом из интервалов $[\tilde{\lambda}_n^-, \tilde{\lambda}_n^+]$, $n \geq 1$.

В дальнейшем часто используется следующая простая лемма, отражающая свойства функции Ляпунова F оператора Хилла.

ЛЕММА 6.1. *Предположим, что функции f_1 и f_2 непрерывны на $\mathbb{R}$ и удовлетворяют следующим условиям:*

- а) $f_1(\lambda) \leq f_2(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$;
- б) каждая из функций $9F^2 - f_1$, $9F^2 - f_2$ имеет ровно по одному нулю $\xi_{1,n}$, $\xi_{2,n}$ в каждом из интервалов a_n , $n \geq 0$, где

$$a_0 = (-\infty, \eta_1], \\ a_{2n-1} = [\eta_n, \min\{\mu_n, \nu_n\}], \quad a_{2n} = [\max\{\mu_n, \nu_n\}, \eta_{n+1}], \quad n \geq 1;$$

- с) функции $9F^2 - f_1$, $9F^2 - f_2$ удовлетворяют оценкам $9F^2 - f_\nu > 0$ в каждом из интервалов $(\xi_{\nu,2n}, \xi_{\nu,2n+1})$, $n \geq 0$, и $9F^2 - f_\nu < 0$ в каждом из интервалов $(\xi_{\nu,2n-1}, \xi_{\nu,2n})$, $n \geq 1$.

Тогда для всех $n \geq 0$ верны неравенства $\xi_{1,2n} \geq \xi_{2,2n}$, $\xi_{1,2n-1} \leq \xi_{2,2n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $n = 1$. Доказательство для других значений n аналогично. Пусть $\xi_1 = \xi_{1,1}$, $\xi_2 = \xi_{2,1}$ – нули f_1, f_2 в интервале $a_1 = [\eta_1, \min\{\nu_1, \mu_1\}]$. Заметим, что по условию с) $9F^2 - f_1 < 0$ в интервале (η_1, ξ_1) , $9F^2 - f_1 > 0$ в интервале $(\xi_1, \min\{\nu_1, \mu_1\})$. Кроме того, условие а) дает

$$9F^2(\xi_2) - f_1(\xi_2) = 9F^2(\xi_2) - f_2(\xi_2) + f_2(\xi_2) - f_1(\xi_2) \geq 0.$$

Следовательно, $\xi_1 \leq \xi_2$.

Следующая лемма уточняет положение периодических и антипериодических собственных значений $\lambda_{\nu,n}^{k,\pm}$. Оказывается, что эти значения обладают свойством “перемежаемости” (см. (6.8)), похожим на соответствующее свойство собственных значений периодической и антипериодической задач для уравнения $-y'' + qu = \lambda y$. Равенства (5.6) показывают, что периодические собственные значения являются нулями функций $9F^2 - g_{k,\nu}$, а антипериодические собственные значения – нулями функций $9F^2 - h_\nu$, где $\nu = 1, 2$. Доказательство леммы основано на перечисленных выше свойствах функции F и неравенствах (5.8) (см. также рис. 6). Кроме того, в этой же лемме мы исследуем зависимость периодических собственных значений от k и от a и доказываем ее монотонность при возрастании $\frac{\pi k}{N} + a$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Также в лемме мы описываем интервалы

$$\gamma_{\nu,0}^k = (-\infty, \lambda_{\nu,0}^{k,+}), \quad \gamma_{\nu,n}^k = (\lambda_{\nu,n}^{k,-}, \lambda_{\nu,n}^{k,+}), \quad (\nu, n, k) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_N, \quad (6.5)$$

в терминах функций F, F_- . Интервалы $\gamma_{\nu,n}^k, n \geq 0$ являются лакунами в “устойчивой” части спектра $\mathfrak{S}_{k,\nu}$ (см. (6.12)). При этом интервалы $\gamma_{\nu,2n}^k$ являются “периодическими” лакунами в спектральной ветви $\sigma_{k,\nu}$ в том смысле, что $F_{k,\nu} = 1$ на краях $\gamma_{\nu,2n}^k$ и $F_{k,\nu} > 1$ на $\gamma_{\nu,2n}^k$ (см. (5.9) и (6.11)). Равенство (6.2) показывает, что интервалы $\gamma_{\nu,2n-1}^k$ не зависят от k и от a , т.е. $\gamma_{\nu,2n-1}^k(a) = \gamma_{\nu,2n-1}^0(0)$ для всех $(\nu, n, k, a) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}$. Эти интервалы содержат лакуны в соответствующей спектральной ветви, но в общем случае не совпадают с ними. Важную роль в дальнейшем изложении играют интервалы $\gamma_{1,2n-1}^0$, для которых мы введем специальное обозначение:

$$\varkappa_n = \gamma_{1,2n-1}^0 = (\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, \lambda_{1,2n-1}^{0,+}). \quad (6.6)$$

Эти интервалы важны тем, что ρ может быть отрицательной на вещественной оси только внутри интервалов $\varkappa_n$ (см. (6.13)), а все вещественные нули функции ρ лежат либо внутри интервалов $\varkappa_n$, либо на краях этих интервалов. Нам потребуются функции

$$u_k(\lambda) = |F_-(\lambda)| - s_k^2, \quad v_k(\lambda) = |F_-(\lambda)| - c_k^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_N. \quad (6.7)$$

ЛЕММА 6.2. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$, и пусть $p = 2n - 1 \geq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Для всех $\nu = 1, 2$ и $n \geq 0$ периодические собственные значения удовлетворяют равенствам $\lambda_{\nu,2n}^{k,\pm}(a) = \lambda_{\nu,2n}^{N-k,\pm}(-a)$. Кроме того, $\lambda_{\nu,2n}^{k,\pm}$ являются нулями функции $9F^2 - g_{k,\nu}$, $\lambda_{\nu,2n-1}^{0,\pm}$ являются нулями функции $9F^2 - h_\nu$, верны равенства (6.4) и неравенства

$$\begin{aligned} \max\{\mu_{n-1}, \nu_{n-1}\} &\leq \lambda_{2,p-1}^{k,+} \leq \min\{\lambda_{2,p}^{0,-}, \lambda_{1,p-1}^{k,+}\} \leq \max\{\lambda_{2,p}^{0,-}, \lambda_{1,p-1}^{k,+}\} \leq \lambda_{1,p}^{0,-} \leq \eta_n \\ &\leq \lambda_{1,p}^{0,+} \leq \min\{\lambda_{1,p+1}^{k,-}, \lambda_{2,p}^{0,+}\} \leq \max\{\lambda_{1,p+1}^{k,-}, \lambda_{2,p}^{0,+}\} \leq \lambda_{2,p+1}^{k,-} \leq \min\{\mu_n, \nu_n\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Более того,

$$\lambda_{2,p}^{0,-} < \lambda_{1,p-1}^{k,+} \iff u_k(\lambda_{2,p}^{0,-}) > 0, \quad \lambda_{2,p}^{0,+} > \lambda_{1,p+1}^{k,-} \iff u_k(\lambda_{2,p}^{0,+}) > 0. \quad (6.9)$$

ii) Если $s_k^2(a) < s_\ell^2(a_1)$ для некоторого $(a_1, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$, то для всех периодических собственных значений верны неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2,2n}^{k,+}(a) &< \lambda_{2,2n}^{\ell,+}(a_1), & \lambda_{1,2n}^{\ell,+}(a_1) &< \lambda_{1,2n}^{k,+}(a), \\ \lambda_{1,2n}^{k,-}(a) &< \lambda_{1,2n}^{\ell,-}(a_1), & \lambda_{2,2n}^{\ell,-}(a_1) &< \lambda_{2,2n}^{k,-}(a). \end{aligned} \quad (6.10)$$

iii) Для $\nu = 1, 2$ верны равенства

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \geq 1} \gamma_{\nu,2n-1}^0 &= \{\lambda \in \mathbb{R} : 9F^2(\lambda) < h_\nu(\lambda)\}, \\ \bigcup_{n \geq 0} \gamma_{\nu,2n}^k &= \{\lambda \in \mathbb{R} : 9F^2(\lambda) > g_{k,\nu}(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Кроме того, множества $\mathfrak{S}_{k,\nu}$, определенные в (5.14), удовлетворяют равенствам

$$\mathfrak{S}_{k,\nu} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \gamma_{\nu,n}^k = \bigcup_{n \geq 1} ([\lambda_{\nu,2n-2}^{k,+}, \lambda_{\nu,2n-1}^{0,-}] \cup [\lambda_{\nu,2n-1}^{0,+}, \lambda_{\nu,2n}^{k,-}]). \quad (6.12)$$

Интервал $\varkappa_n = \emptyset$ для какого-либо $n \in \mathbb{N}$, если и только если $|F_-(\eta_n)| = 1$.

iv) Пусть $c_k \neq 0$ для некоторого $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда

$$\rho(\lambda) > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \overline{\mathfrak{X}}_n. \quad (6.13)$$

В частности, все вещественные нули функции ρ_k (вещественные резонансы) принадлежат множеству $\bigcup_{n \geq 1} \overline{\mathfrak{X}}_n$. Если интервал $\overline{\mathfrak{X}}_n$ содержит хотя бы один резонанс, то он содержит четное (с учетом кратности) число резонансов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Равенства (5.2) и $s_{N-k}(-a) = s_k(a)$ дают $\lambda_{\nu, 2n}^{k, \pm}(a) = \lambda_{\nu, 2n}^{N-k, \pm}(-a)$. Мы доказываем (6.8). Из равенств (1.3) следует, что

$$F^2 - F_-^2 = \vartheta_1 \varphi'_1 = 1 + \vartheta'_1 \varphi_1.$$

Пусть $\mu = \mu_n$ или $\mu = \nu_n$. Поскольку $\varphi_1(\mu_n) = \vartheta'_1(\nu_n) = 0$, мы имеем $F_-^2(\mu) = F^2(\mu) - 1$. Оценка $F^2(\mu) \geq 1$ дает

$$9F^2(\mu) - g_{k,2}(\mu) = 2 \left(\left(2\sqrt{F^2(\mu) - 1 + 4c_k^2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{31}{16} - 16c_k^2 \right) \geq 0,$$

откуда получаем, что $g_{k,2}(\mu) \leq 9F^2(\mu)$. Из оценок (5.8) и свойств функции F следует, что каждая из функций $9F^2 - g_{k,\nu}$, $9F^2 - h_\nu$, $\nu = 1, 2$, имеет, по крайней мере, один нуль в каждом из интервалов $(-\infty, \eta_1]$, $[\eta_n, \min\{\mu_n, \nu_n\}]$, $[\max\{\mu_n, \nu_n\}, \eta_{n+1}]$, $n \geq 1$. Из леммы 5.1 и асимптотик

$$\begin{aligned} \mu_n &= (\pi n)^2(1 + O(n^{-2})), & \nu_n &= (\pi n)^2(1 + O(n^{-2})), \\ \eta_n &= \left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^2 (1 + O(n^{-2})) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ (см. [4]) следует, что каждая из этих функций имеет ровно один нуль в каждом из указанных интервалов. В силу неравенств (6.1), (6.3), числа $\lambda_{2,0}^{k,+}$, $\lambda_{1,0}^{k,+}$, $\lambda_{2,1}^{0,-}$, $\lambda_{1,1}^{0,-}$ лежат в интервале $(-\infty, \eta_1]$, числа $\lambda_{1,1}^{0,+}$, $\lambda_{2,1}^{0,+}$, $\lambda_{2,2}^{k,-}$, $\lambda_{1,2}^{k,-}$ лежат в интервале $[\eta_1, \min\{\mu_1, \nu_1\}]$ и так далее.

Рассмотрим интервал $[\eta_1, \min\{\nu_1, \mu_1\}]$. Другие интервалы рассматриваются аналогично. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ – нули функций $9F^2 - g_{k,2}$, $9F^2 - g_{k,1}$, $9F^2 - h_2$, $9F^2 - h_1$, соответственно, в этом интервале (т.е. ξ_1, ξ_2 – периодические и ξ_3, ξ_4 – антипериодические собственные значения). По лемме 6.1 имеем $\xi_1 \geq \max\{\xi_2, \xi_3\}$, $\min\{\xi_2, \xi_3\} \geq \xi_4$. Неравенства (6.1), (6.3) показывают, что $\xi_1 = \lambda_{1,2}^{k,-}$, $\xi_2 = \lambda_{2,2}^{k,-}$, $\xi_3 = \lambda_{2,1}^{0,+}$, $\xi_4 = \lambda_{1,1}^{0,+}$, откуда следует (6.8) для интервала $[\eta_1, \min\{\nu_1, \mu_1\}]$, а также то, что $\lambda_{\nu,2}^{k,\pm}$ – нуль функции $9F^2 - g_{k,\nu}$, $\lambda_{\nu,1}^{0,\pm}$ – нуль функции $9F^2 - h_\nu$, где $\nu = 1, 2$. Равенства (6.4) следуют из первых равенств в (5.9)–(5.12).

Докажем первую эквивалентность в (6.9). Доказательство второй эквивалентности аналогично. Равенства (5.7) дают

$$g_{k,1} - h_2 = 2 \left(s_k^2 - |F_-| + \sqrt{s_k^4 + 4c_k^2} - \sqrt{F_-^2 + 4c_k^2} \right).$$

Для фиксированного λ мы получаем, что $g_{k,1}(\lambda) > h_2(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $|F_-(\lambda)| < s_k^2$. Из леммы 6.1 следует, что $\lambda_{2,p}^{0,-} > \lambda_{2,p-1}^{k,-}$ тогда и только тогда, когда $|F_-(\lambda_{2,p}^{0,-})| < s_k^2$, что дает первую эквивалентность в (6.9).

ii) Из равенств (5.7) следует, что на всей оси $g_{k,2} < g_{\ell,2}$, $g_{\ell,1} < g_{k,1}$. Тогда из леммы 6.1 получаем (6.10).

iii) Неравенства (5.8), (6.8) и свойства функции F дают (6.11). Кроме того, $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$ являются нулями функции $9F^2 - h_1$. Тогда $\lambda_{1,2n-1}^{0,+} = \lambda_{1,2n-1}^{0,-}$, т.е. $\varkappa_n = \emptyset$ если и только если $h_1(\eta_n) = 0$, т.е. $|F_-(\eta_n)| = 1$. Из равенств (5.14), (6.11) следует, что $\mathfrak{S}_{k,\nu} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \gamma_{\nu,n}^k$. Тогда (6.5) дает (6.12).

iv) Последнее равенство в (4.1) дает $\rho_k = c_k^2(9F^2 - f_k)$, где $f_k = s_k^2(1 - \frac{F_-^2}{c_k^2})$. Из (5.7) следует, что

$$h_1 - f_k = \left(c_k - \frac{|F_-|}{c_k} \right)^2 \geq 0.$$

Неравенства (6.8) и свойства F показывают, что вещественные нули ρ_k принадлежат множеству $\bigcup_{n \geq 1} \overline{\varkappa}_n$ и верно (6.13). Так как $\rho \geq 0$ на краях интервала $\varkappa_n$, то число резонансов в $\overline{\varkappa}_n$ четное.

Таким образом, все вещественные нули функции ρ_k (вещественные резонансы) принадлежат интервалам $\overline{\varkappa}_n$. В следующей лемме мы дадим условия, при которых интервал $\overline{\varkappa}_n$ содержит резонансы и опишем поведение функции Ляпунова $F_{k,\nu}$ в таких интервалах (см. рис. 5, 7). Кроме того, мы опишем интервалы, из которых состоит “неустойчивая” часть спектра $\mathfrak{S}_k^R$, в терминах антипериодических собственных значений $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$ и укажем условия, при которых эти интервалы непусты. Грубо говоря, является ли данная часть интервала $\varkappa_n$ спектральной зоной (необходимо кратности четыре) или нет, зависит от знака функции $v_k = |F_-| - c_k^2$. Напомним, что если $c_k = 0$, то $\mathfrak{S}_k^R = \emptyset$ (см. (5.15)).

Пусть интервал $\overline{\varkappa}_n$ содержит нули функции ρ_k (напомним, что число этих нулей четное). Обозначим наименьший из них через $r_{k,n}^-$, а наибольший – через $r_{k,n}^+$, т.е.

$$r_{k,n}^- = \min\{\lambda \in \overline{\varkappa}_n : \rho_k(\lambda) = 0\}, \quad r_{k,n}^+ = \max\{\lambda \in \overline{\varkappa}_n : \rho_k(\lambda) = 0\}. \quad (6.14)$$

Введем в этом случае интервалы

$$\varkappa_{k,n}^- = (\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, r_{k,n}^-), \quad \varkappa_{k,n}^+ = (r_{k,n}^+, \lambda_{1,2n-1}^{0,+}) \quad (6.15)$$

(пустые в вырожденной ситуации, когда $r_{k,n}^+$ или $r_{k,n}^-$ лежит на границе $\varkappa_n$). Заметим, что $\rho_k > 0$ на $\varkappa_{k,n}^\pm$.

ЛЕММА 6.3. Пусть $c_k \neq 0$ для некоторого $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Если $\rho_k > 0$ на $\varkappa_n$, то

$$v_k = |F_-| - c_k^2 > 0 \text{ и } F_{k,2} < F_{k,1} < -1 \text{ на } \varkappa_n. \quad (6.16)$$

ii) Пусть $\overline{\varkappa}_n$ для некоторого $n \geq 1$ содержит по крайней мере один (и тогда четное число, большее либо равное двум) нуль функции ρ_k . Тогда $v_k(\lambda)$ сохраняет знак на каждом из интервалов $\varkappa_{k,n}^\pm$ и для каждого $\sigma = \pm$ верны следующие соотношения:

$$\text{если } v_k > 0 \text{ на } \varkappa_{k,n}^\sigma, \text{ то } F_{k,2} < F_{k,1} < -1 \text{ на } \varkappa_{k,n}^\sigma, \quad (6.17)$$

$$\text{если } v_k < 0 \text{ на } \varkappa_{k,n}^\sigma, \text{ то } -1 < F_{k,2} < F_{k,1} \text{ на } \varkappa_{k,n}^\sigma. \quad (6.18)$$

Рис. 7. Поведение функций ρ_k и F_k в интервале $\lambda_n = (\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, \lambda_{1,2n-1}^{0,+})$:
 а) случай $\lambda_{1,2n-1}^{0,-} < r_k^-, r_k^+ < \lambda_{1,2n-1}^{0,+}$, $v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,-}) < 0$, $v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,+}) > 0$;
 б) тот же случай, но функция ρ_k имеет два нуля внутри интервала (r_k^-, r_k^+) ; в), д) вырожденные случаи $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm} = r_k^\pm$

iii) Множество $\mathfrak{S}_k^R$, определенное в (5.15), удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{S}_k^R = \left(\bigcup_{n \in N_-} [\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, r_{k,n}^-] \right) \cup \left(\bigcup_{n \in N_+} [r_{k,n}^+, \lambda_{1,2n-1}^{0,+}] \right), \quad (6.19)$$

где

$$N_\pm = \{n \in \mathbb{N} : v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}) \leq 0\}.$$

iv) Для всех $n \in \mathbb{N}$ верны равенства

$$-1 = \begin{cases} F_{k,2}(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}), & \text{если } v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}) \geq 0 \\ F_{k,1}(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}), & \text{если } v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}) \leq 0 \end{cases}. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Из (4.1) и (5.7) следует равенство

$$\rho_k = (9F^2 - h_1)c_k^2 + (|F_-| - c_k^2)^2. \quad (6.21)$$

Так как по предположению $\rho_k > 0$ на λ_n и $9F^2 < h_1$ на λ_n (см. (6.11)), то

$$(|F_-| - c_k^2)^2 > 0 \text{ на } \lambda_n.$$

Поэтому на всем $\varkappa_n$ выполнено ровно одно из двух неравенств: либо $|F_-| - c_k^2 > 0$, либо $|F_-| - c_k^2 < 0$. Оценки (6.8) дают $\eta_n \in \varkappa_n$, следовательно, $\rho_k(\eta_n) > 0$. Последнее равенство в (4.1) дает $F_-^2(\eta_n) = s_k^{-2} \rho_k(\eta_n) + c_k^2 > c_k^2$, откуда следует, что $|F_-(\eta_n)| > c_k^2$. Поэтому $|F_-| - c_k^2 > 0$ на всем $\varkappa_n$, и мы имеем первую оценку в (6.16). Соотношение (5.11) дает $F_{k,1} < -1$ на $\varkappa_n$, откуда следует второе неравенство в (6.16).

ii) Используя неравенство $9F^2 < h_1$ на $\varkappa_n$ и равенство (6.21), получаем, что если $v_k(\lambda) = 0$, т.е. $|F_-(\lambda)| = c_k^2$ для некоторого $\lambda \in \varkappa_n$, то $\rho_k(\lambda) < 0$. Так как $\rho_k > 0$ на $\varkappa_{k,n}^\pm$, то v_k сохраняет знак на этом интервале. Если $v_k(\lambda) > 0$, т.е. $|F_-(\lambda)| > c_k^2$ для некоторого $\lambda \in \varkappa_{k,n}^\pm$, то $|F_-| > c_k^2$ на всем $\varkappa_{k,n}^\pm$. Так как $9F^2 < h_1$ на $\varkappa_{k,n}^\pm$, то (5.11) дает $F_{k,1} < -1$ на $\varkappa_{k,n}^\pm$, откуда следует (6.17). Если $v_k(\lambda) < 0$, т.е. $|F_-(\lambda)| < c_k^2$ для некоторого $\lambda \in \varkappa_{k,n}^\pm$, то $|F_-| < c_k^2$ на всем $\varkappa_{k,n}^\pm$. Снова используя неравенства $9F^2 < h_1$, из (5.12) получаем, что $-1 < F_{k,2}$ на $\varkappa_{k,n}^\pm$, т.е. выполнено (6.18).

iii) Напомним, что

$$\varkappa_n = \gamma_{1,2n-1}^0 = (\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, \lambda_{1,2n-1}^{0,+}).$$

Из первого равенства в (6.11) следует равенство $\bigcup_{n \geq 1} \overline{\varkappa}_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : 9F^2(\lambda) \leq h_1(\lambda)\}$. Равенство (5.15) показывает, что

$$\mathfrak{S}_k^R = \left(\bigcup_{n \geq 1} \overline{\varkappa}_n \right) \cap \{\lambda \in R_k : v_k(\lambda) \leq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \tilde{\varkappa}_n, \quad (6.22)$$

где $\tilde{\varkappa}_n = \overline{\varkappa}_n \cap \{\lambda \in R_k : v_k(\lambda) \leq 0\}$. Из (6.16) следует, что множества $\tilde{\varkappa}_n$ непустые лишь для тех n , для которых ρ_k имеет нули на $\overline{\varkappa}_n$. Рассмотрим такое n . Поскольку $\lambda \in R_k$ на $\tilde{\varkappa}_n$, мы имеем $\rho_k \geq 0$ на этом множестве. Предположим, что ρ_k имеет $2m$ нулей $\alpha_1^- \leq \alpha_1^+ \leq \dots \leq \alpha_m^- \leq \alpha_m^+$ на $\overline{\varkappa}_n$. Тогда $\tilde{\varkappa}_n \subset \bigcup_{j=1}^{m+1} \alpha_j$, где $\alpha_j = [\alpha_{j-1}^+, \alpha_j^-]$, $\alpha_0^+ = \lambda_{1,2n-1}^{0,-}$, $\alpha_{m+1}^- = \lambda_{1,2n-1}^{0,+}$. Из того, что v_k сохраняет знак на $\varkappa_{k,n}^\pm$, и из (6.17), (6.18) следует, что $\tilde{\varkappa}_n$ содержит интервал $\overline{\varkappa}_{k,n}^- = \alpha_1$ (или $\overline{\varkappa}_{k,n}^+ = \alpha_{m+1}$), если и только если $v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,-}) \leq 0$ (соответственно, $v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,+}) \leq 0$). Нам остается показать, что $\tilde{\varkappa}_n$ не содержит ни одного из интервалов α_j , $j \in \mathbb{N}_m$.

Предположим обратное, т.е. что интервал α_j с некоторым $j \in \mathbb{N}_m$ содержится в $\tilde{\varkappa}_n$. Тогда по определению $\tilde{\varkappa}_n$ (см. (6.22)) имеем $\rho_k \geq 0$, $9F^2 \leq h_1$, $v_k \leq 0$ на α_j . Из равенств (5.9), (5.12) и (5.15) следует, что $F_{k,1} \in [-1, 1]$ и $F_{k,2} \in [-1, 1]$ на α_j . Более того, поскольку края интервала α_j являются нулями функции ρ_k , мы имеем $F_{k,1} = F_{k,2}$ на краях α_j , а так как $\rho_k > 0$ внутри α_j , то $F_{k,1}$ и $F_{k,2}$ вещественно аналитичны и $F_{k,1} > F_{k,2}$ внутри α_j . Тогда $F'_{k,1}$ и $F'_{k,2}$ имеют, по крайней мере, по одному нулю λ_1 и λ_2 , соответственно, внутри α_j . По теореме 5, ii) выполнено $F_{k,1}(\lambda_1) \geq 1$ и $F_{k,2}(\lambda_2) \leq -1$, откуда следует, что внутри интервала α_j имеется, по крайней мере, два периодических и два антипериодических собственных значения (с учетом кратности). Но согласно (6.8) внутри $\varkappa_n$, а значит, на всем α_j нет периодических и антипериодических собственных значений. Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{\varkappa}_n$ не содержит ни одного из интервалов α_j , $j \in \mathbb{N}_m$.

iv) Равенства (6.20) следуют из первых равенств в (5.11), (5.12).

§ 7. Спектральные зоны оператора H_k^a

В теореме 6 описаны спектральные зоны оператора H_k^a . Поскольку абсолютно непрерывный спектр состоит из двух ветвей, мы имеем две последовательности спектральных зон $\{S_{1,n}^{k,a}\}_{n=1}^\infty$ и $\{S_{2,n}^{k,a}\}_{n=1}^\infty$. Из равенств (6.4) получаем

$$F_{k,2}(\lambda_{2,0}^{k,+}) = 1, \quad F_{k,2}(\lambda_{2,1}^{0,-}) = -1.$$

Согласно (6.8) интервал $S_{2,1}^{k,a} = [\lambda_{2,0}^{k,+}, \lambda_{2,1}^{0,-}]$ не содержит резонансов и других точек вида $\lambda_{2,2n}^{k,\pm}, \lambda_{2,2n-1}^{0,\pm}$. Тогда по теореме 5, ii) функция $F_{k,2}$ монотонно меняется в этом интервале от значения 1 до значения -1 (см. рис. 5). Из (4.11) следует, что интервал $S_{2,1}^{k,a}$ является спектральной зоной в ветви $\sigma_{2,k}$ спектра оператора H_k^a . Аналогично получаются другие зоны $S_{2,p}^{k,a} = [\lambda_{2,p-1}^{k,+}, \lambda_{2,p}^{0,-}]$, $S_{2,p+1}^{k,a} = [\lambda_{2,p}^{0,+}, \lambda_{2,p+1}^{k,-}]$, $p = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, ветви $\sigma_{2,k}$. Ситуация с зонами $S_{1,n}^{k,a}$, связанными с функцией $F_{k,1}$, сложнее. Равенство $F_{k,1}(\lambda_{1,0}^{k,+}) = 1$ выполнено (см. (6.4)). Если равенство $F_{k,1}(\lambda_{1,1}^{0,-}) = -1$ также верно, то прежнее рассуждение приводит к следующему заключению: интервал $S_{1,1} = [\lambda_{1,0}^{k,+}, \lambda_{1,1}^{0,-}]$ является спектральной зоной в ветви $\sigma_{1,k}$ спектра оператора H_k^a . Если же $F_{k,2}(\lambda_{1,1}^{0,-}) = -1$ (см. (6.20)), то интервал $S_{1,1}$ имеет вид $[\lambda_{1,0}^{k,+}, r_{k,1}^-]$ и часть $[\lambda_{1,1}^{0,-}, r_{k,1}^-]$ этого интервала лежит в обеих ветвях $\sigma_{1,k}$ и $\sigma_{2,k}$. Аналогично для других зон: $S_{1,p} = [\lambda_{1,p-1}^{k,+}, E_{1,p}^{k,-}]$, $S_{1,p+1} = [E_{1,p}^{k,+}, \lambda_{1,p+1}^{k,-}]$, $p = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, где $E_{1,p}^{k,\pm} = \lambda_{1,p}^{0,\pm}$ или $E_{1,p}^{k,\pm} = r_{k,n}^\pm$ в зависимости от того, какая из функций, $F_{k,1}$ или $F_{k,2}$, принимает значение -1 в точке $\lambda_{1,p}^{0,\pm}$.

Кроме того, в теореме 6 описана кратность спектра $\sigma_{ac}(H_k^a)$. В частности, в ней доказано, что спектр кратности четыре имеется в одном из двух случаев. Во-первых, такой спектр появляется при условии $u_k(E_{2,p}^{k,-}) < 0$ (или $u_k(E_{2,p}^{k,+}) < 0$) для некоторого $p = 2n - 1$. Тогда спектральные зоны $S_{1,p}^{k,a}$ и $S_{2,p}^{k,a}$ (соответственно $S_{1,p+1}^{k,a}$ и $S_{2,p+1}^{k,a}$), порожденные различными ветвями функции Ляпунова, перекрываются и кратность спектра оператора H_k^a в перекрывающейся части равна четырем. Во-вторых, спектр кратности четыре возникает, если $v_k(\lambda_{1,p}^{0,-}) < 0$ (или $v_k(\lambda_{1,p}^{0,+}) < 0$) для некоторого $p = 2n - 1$. В этом случае край $E_{1,p}^{k,-}$ зоны $S_{1,p}^{k,a}$ (соответственно край $E_{1,p}^{k,+}$ зоны $S_{1,p+1}^{k,a}$) является резонансом и не является периодическим или антипериодическим собственным значением. Спектр в окрестности этого края имеет кратность четыре. В остальных случаях абсолютно непрерывный спектр H_k^a имеет кратность два.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда

$$\sigma_{ac}(H_k^a) = \bigcup_{(\nu,n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}} S_{\nu,n}^{k,a}, \quad \text{где } S_{\nu,n}^{k,a} = [E_{\nu,n-1}^{k,+}, E_{\nu,n}^{k,-}], \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} E_{2,p-1}^{k,+} &\leq \min\{E_{2,p}^{k,-}, E_{1,p-1}^{k,+}\} \leq \max\{E_{2,p}^{k,-}, E_{1,p-1}^{k,+}\} \leq E_{1,p}^{k,-} \leq E_{1,p}^{k,+} \\ &\leq \min\{E_{1,p+1}^{k,-}, E_{2,p}^{k,+}\} \leq \max\{E_{1,p+1}^{k,-}, E_{2,p}^{k,+}\} \leq E_{2,p+1}^{k,-}, \quad p = 2n - 1, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$E_{2,p}^{k,-} < E_{1,p-1}^{k,+} \iff u_k(E_{2,p}^{k,-}) > 0, \quad E_{1,p+1}^{k,-} < E_{2,p}^{k,+} \iff u_k(E_{2,p}^{k,+}) > 0. \quad (7.3)$$

Для краев спектральных зон $S_{\nu,n}^{k,a}$, $(\nu, n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$, верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} E_{\nu,p-1}^{k,\pm} &= \lambda_{\nu,p-1}^{k,\pm}, & E_{2,p}^{k,\pm} &= \lambda_{2,p}^{0,\pm}, \\ E_{1,p}^{k,\pm} &= \begin{cases} \lambda_{1,p}^{0,\pm}, & \text{если } v_k(\lambda_{1,p}^{0,\pm}) \geq 0 \\ r_{k,n}^{\pm}, & \text{если } v_k(\lambda_{1,p}^{0,\pm}) < 0 \end{cases}, & E_{2,p}^{k,\pm}(a) &= E_{2,p}^{0,\pm}(0). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Кроме того,

- i) если $\mathfrak{S}_k^R \neq \emptyset$, то спектр H_k^a в $\mathfrak{S}_k^R$ имеет кратность четыре;
- ii) если $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_{k,1} \cap \mathfrak{S}_{k,2} \neq \emptyset$, то спектр H_k^a в $\mathfrak{S}_k$ имеет кратность четыре;
- iii) спектр H_k^a в $\sigma_{ac}(H_k^a) \setminus (\mathfrak{S}_k \cup \mathfrak{S}_k^R)$ имеет кратность два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (6.12) и (6.19) в (5.13) и учитывая (6.2), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ac}(H_k^a) &= \sigma_{k,1} \cup \sigma_{k,2} = \mathfrak{S}_{k,1} \cup \mathfrak{S}_{k,2} \cup \mathfrak{S}_k^R = \left(\bigcup_{n \geq 1} [\lambda_{1,p-1}^{k,+}, \lambda_{1,p}^{k,-}] \cup [\lambda_{1,p}^{k,+}, \lambda_{1,p+1}^{k,-}] \right) \\ &\cup \left(\bigcup_{n \geq 1} [\lambda_{2,p-1}^{k,+}, \lambda_{2,p}^{k,-}] \cup [\lambda_{2,p}^{k,+}, \lambda_{2,p+1}^{k,-}] \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_-} [\lambda_{1,p}^{k,-}, r_{k,n}^-] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} [r_{k,n}^+, \lambda_{1,p}^{k,+}] \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

$p = 2n - 1$. Эти равенства вместе с (6.2) и определением $N_{\pm}$ (см. (6.19)) дают (7.1), (7.4). Из неравенств (6.8) следует (7.2). Из соотношений (6.9) получаем (7.3).

Равенство (6.19) дает $\mathfrak{S}_k^R = \bigcup_{\sigma=\pm} \bigcup_{n \in \mathbb{N}_\sigma} \mathfrak{K}_{k,n}^\sigma$. Из (6.18) следует, что $-1 < F_{k,2} < F_{k,1}$ на $\mathfrak{K}_{k,n}^\pm$. Равенство (5.15) показывает, что $9F^2 \leq h_1$ на $\mathfrak{S}_k^R$. Тогда из (5.9) и неравенства $h_1 \leq g_{k,1} \leq g_{k,2}$ (см. (5.8)) мы получаем, что $F_{k,2} \leq F_{k,1} \leq 1$ на $\mathfrak{S}_k^R$. Таким образом, $F_{k,1}, F_{k,2} \in [-1, 1]$ на $\mathfrak{S}_k^R$, т.е. спектр H_k^a имеет кратность четыре на $\mathfrak{S}_k^R$. Мы доказали утверждение i). Из определения (4.11) множеств $\sigma_{k,\nu}$ и равенства (5.13) следует, что $F_{k,1}, F_{k,2} \in [-1, 1]$ на $\mathfrak{S}_k$. Поэтому спектр H_k^a имеет кратность четыре на $\mathfrak{S}_k$, что доказывает утверждение ii). С другой стороны,

$$K = \sigma_{ac}(H_k^a) \setminus (\mathfrak{S}_k \cup \mathfrak{S}_k^R) = (\mathfrak{S}_{k,1} \cup \mathfrak{S}_{k,2}) \setminus (\mathfrak{S}_{k,1} \cap \mathfrak{S}_{k,2})$$

и точно одна из функций, $F_{k,1}$ или $F_{k,2}$, принимает на множестве K значения в интервале $[-1, 1]$, откуда следует iii).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. 1) Из равенств (6.19), (7.4) следует, что $\mathfrak{S}_k^R \neq \emptyset$, если и только если $\{E_{1,p}^{k,\sigma} = r_{k,n}^\sigma \text{ и } \mathfrak{K}_{k,n}^\sigma \neq \emptyset\}$ для какого-либо $n \in \mathbb{N}$, $\sigma = \pm$.

2) Соотношения (7.3), (7.4) показывают, что для любого $n \geq 1$ следующие три условия равносильны: а) спектр $\sigma_{ac}(H_k^a)$ в интервале $(E_{1,p-1}^{k,+}, E_{2,p}^{k,-})$ (или $(E_{2,p}^{k,+}, E_{1,p+1}^{k,-})$) имеет кратность четыре; б) $E_{2,p}^{k,-} > E_{1,p-1}^{k,+}$ (соответственно $E_{1,p+1}^{k,-} > E_{2,p}^{k,+}$); в) $u_k(E_{2,p}^{k,-}) < 0$ (соответственно $u_k(E_{2,p}^{k,+}) < 0$). Из (6.12) следует, что $\mathfrak{S}_k \neq \emptyset$, если и только если эти условия выполнены для какого-либо $n \geq 1$.

В теореме 7 описаны спектральные лакуны $G_{k,n}^a$ оператора H_k^a . Лакуны $G_{k,n}^a$ образуются при пересечении лакун $G_{\nu,k,0} = (-\infty, E_{\nu,0}^{k,+})$, $G_{\nu,k,\ell} = (E_{\nu,\ell}^{k,-}, E_{\nu,\ell}^{k,+})$

в спектральных ветвях $\nu = 1, 2$ (см. (7.8)). Неравенства (6.8) позволяют связать эти лакуны со спектрами задач Дирихле и Неймана и нулями функции Ляпунова F оператора Хилла (см. (7.6)). Поскольку края лакун $G_{\nu,k,n}$ монотонно меняются при возрастании $\frac{\pi k}{N} + a$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ (см. (6.10)), аналогичным свойством обладают и края лакун $G_{k,n}^a$ (см. (7.7)). Более того, при определенных условиях на потенциал и величины a, k края некоторых лакун совпадают с $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$ (см. (7.4)). Согласно (6.2) такие лакуны вовсе не зависят ни от k , ни от a (см. утверждение ii)).

Из теоремы 6 следует, что края лакун в спектре оператора H_k^a совпадают либо с периодическими или антипериодическими собственными значениями, либо с резонансами. В теореме 7 дано более детальное описание краев лакун. Нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $g = (\lambda_1, \lambda_2)$ – лакуна в спектре H_k^a .

- i) Если λ_1, λ_2 – нули D_k^+ (или D_k^-), то g – периодическая (соответственно антипериодическая) лакуна.
- ii) Если λ_1, λ_2 – нули ρ_k , то g – резонансная лакуна.
- iii) Если одно из чисел λ_1, λ_2 – нуль D_k^- , а другое – нуль D_k^+ (или ρ_k), то g – r -смешанная (соответственно r -смешанная) лакуна.

В спектре оператора на кресельном графе нет лакун типа (λ_1, λ_2) , где одно из чисел λ_1, λ_2 является нулем функции D_k^+ , а другое является нулем функции ρ_k .

Кроме того, в теореме 7 описаны лакуны для четного потенциала. Отметим, что многие свойства лакун, которые верны в случае четного потенциала, сохраняются и в общем случае, но только при высоких энергиях.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- i) $\sigma_{ac}(H_k^a) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \geq 0} G_{k,n}^a$, где лакуны $G_{k,n}^a$ удовлетворяют таким соотношениям:

$$\begin{aligned}
 \nu_0 &\in G_{k,0}^a = (-\infty, E_{2,0}^{k,+}) \subset (-\infty, \eta_1), \\
 \{\mu_n, \nu_n\} &\subset G_{k,4n}^a = (E_{2,2n}^{k,-}, E_{2,2n}^{k,+}) \subset (\eta_n, \eta_{n+1}), \\
 G_{k,4n-2}^a &= (E_{1,2n-1}^{k,-}, E_{1,2n-1}^{k,+}) \subset \varkappa_n \subset (\max\{\mu_{n-1}, \nu_{n-1}\}, \min\{\mu_n, \nu_n\}), \\
 \eta_n &\in [E_{1,2n-1}^{k,-}, E_{1,2n-1}^{k,+}], \\
 G_{k,4n-3}^a &= (E_{2,2n-1}^{k,-}, E_{1,2n-2}^{k,+}) \subset (\max\{\mu_{n-1}, \nu_{n-1}\}, \eta_n), \\
 G_{k,4n-1}^a &= (E_{1,2n}^{k,-}, E_{2,2n-1}^{k,+}) \subset (\eta_n, \min\{\mu_n, \nu_n\}).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Если $s_k^2(a) < s_\ell^2(a_1)$ для некоторого $(a_1, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$, то

$$G_{k,4n}^a \subset G_{\ell,4n}^{a_1}, \quad G_{\ell,2n-1}^{a_1} \subset G_{k,2n-1}^a, \quad n \geq 1. \tag{7.7}$$

- ii, a) $G_{k,4n}^a$ – периодические лакуны;
- ii, b) $G_{k,2n-1}^a$ – r -смешанные лакуны. Если $s_k \neq 0$, то $G_{k,2n-1}^a = \emptyset$ для всех достаточно больших $n \geq 1$;
- ii, c) $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические, или резонансные, или r -смешанные лакуны. Более того, если $s_k = 0$, то $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические лакуны (или $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$), кроме того, $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$; если $s_k \neq 0$, $s_k \neq 0$, то $G_{k,4n-2}^a = (r_{k,n}^-, r_{k,n}^+) \neq \emptyset$ – резонансные лакуны для

всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$; если $c_k = 0$, то $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические лакуны для всех $n \in \mathbb{N}$.

iii) Если $v_k = |F_-| - c_k^2 \geq 0$ на $\varkappa_n$ для некоторого $n \geq 1$, то

$$G_{k,4n-2}^a = \varkappa_n = G_{0,4n-2}^0.$$

iv) Пусть, дополнительно, $q \in L_{\text{even}}^2(0,1)$. Тогда для всех $n \geq 1$

iv, a) $\tilde{\gamma}_0 \subset G_{k,0}^a$, $\tilde{\gamma}_n \subset G_{k,4n}^a$;

iv, b) $G_{k,2n-1}^a = \emptyset$;

iv, c) $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические или резонансные лакуны (или $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$). Более того, если $c_k = 0$, то $G_{k,4n-2}^a = \varkappa_n$ – антипериодические лакуны; если $s_k = 0$, то $E_{1,2n-1}^{k,-} = E_{1,2n-1}^{k,+} = \eta_n$ и $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$; если $c_k \neq 0$, $s_k \neq 0$, то все резонансы простые, вещественные и $G_{k,4n-2}^a = (r_{k,n}^-, r_{k,n}^+) \neq \emptyset$ – резонансные лакуны.

Кроме того, если $s_k^2(a) < s_\ell^2(a_1)$ для некоторого $(a_1, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_N$, то $G_{k,4n-2}^a \subset G_{\ell,4n-2}^{a_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Неравенства (7.2) показывают, что интервалы $G_{\nu,k,0} = (-\infty, E_{\nu,0}^{k,+})$, $G_{\nu,k,n} = (E_{\nu,n}^{k,-}, E_{\nu,n}^{k,+})$, $(\nu, n) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} G_{1,k,0} \cap G_{2,k,m} &= \emptyset \quad \text{для } m \notin \{0,1\}, \\ G_{1,k,2n-1} \cap G_{2,k,m} &= \emptyset \quad \text{для } m \neq 2n-1, \\ G_{1,k,2n} \cap G_{2,k,m} &= \emptyset \quad \text{для } m \notin \{2n-1, 2n, 2n+1\}. \end{aligned}$$

Тогда для лагун $G_{k,n}^a$, $n \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} G_{k,0}^a &= G_{1,k,0} \cap G_{2,k,0}, & G_{k,2n}^a &= G_{1,k,n} \cap G_{2,k,n}, \\ G_{k,4n-3}^a &= G_{1,k,2n-2} \cap G_{2,k,2n-1}, & G_{k,4n-1}^a &= G_{1,k,2n} \cap G_{2,k,2n-1}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

что дает все равенства в (7.6). Неравенства (6.8) дают все включения в (7.6). Из соотношений (6.10) следует (7.7).

ii) Равенства (7.4) и (7.6) показывают, что лакуны $G_{k,4n}^a$ – периодические, $G_{k,2n-1}^a$ – p -смешанные, $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические, резонансные, или r -смешанные.

Из асимптотики (5.4) следует, что $F_-(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Если $s_k \neq 0$, то $u_k(\lambda) = |F_-(\lambda)| - s_k^2 < 0$ для всех достаточно больших $\lambda \geq 0$. Неравенство (7.3) дает оценки $E_{k,4n-3}^- > E_{k,4n-3}^+$ и $E_{k,4n-1}^- > E_{k,4n-1}^+$ для всех достаточно больших $n \geq 1$. Значит, $G_{k,2n-1}^a = \emptyset$ для таких n .

Если $s_k = 0$, то $c_k = 1$, $\rho_k = 9F^2$ и $r_{k,n}^- = r_{k,n}^+ = \eta_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Равенства (7.4) дают

$$E_{1,2n-1}^{k,\pm} = \begin{cases} \lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}, & \text{если } v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}) \geq 0, \\ \eta_n, & \text{если } v_k(\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}) < 0. \end{cases}$$

Из равенств (7.6) следует, что или $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$, или $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические лакуны. Более того, $v_k(\lambda) = |F_-(\lambda)| - 1 < 0$ для всех достаточно больших $\lambda \geq 0$. Тогда $E_{1,2n-1}^{k,-} = E_{1,2n-1}^{k,+} = \eta_n$ для всех достаточно больших $n \geq 1$. Значит, $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$ в этом случае. Пусть $s_k \neq 0$ и $c_k \neq 0$. Тогда из равенств (7.4)

следует, что $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические, или резонансные, или r -смешанные лакуны. Последнее равенство в (7.4) показывает, что $E_{1,p}^{k,\pm} = r_{k,n}^{\pm}$ для всех достаточно больших $n \geq 1$. Значит, $G_{k,4n-2}^a$ – резонансные лакуны для таких n . По лемме 5.1, iii) $r_{k,n}^- < r_{k,n}^+$ для больших n . Следовательно, интервалы $G_{k,4n-2}^a \neq \emptyset$ в этом случае. Пусть $c_k = 0$. Тогда $v_k(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и последнее равенство в (7.4) дает $E_{1,2n-1}^{k,\pm} = \lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$, $n \geq 1$. Следовательно, $G_{k,4n-2}^a$ – антипериодические лакуны. Из равенств (5.14), (6.12) следует, что $\lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$ есть нули функции $9F^2 - h_1$. Из (5.7) следует, что $h_1(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Свойства функции F показывают, что $9F^2 - h_1$ имеет только простые нули на $(\lambda_0, +\infty)$ для достаточно больших $\lambda_0 > 0$. Тогда $\lambda_{1,2n-1}^{0,-} < \lambda_{1,2n-1}^{0,+}$ для всех достаточно больших $n \geq 1$. Значит, $G_{k,4n-2}^a \neq \emptyset$ в этом случае.

iii) Если $v_k > 0$ на $\varkappa_n$, то равенства (7.4) показывают, что $E_{1,2n-1}^{k,\pm}(a) = \lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$. Тогда из (7.6) следует, что

$$G_{k,4n-2}^a = (E_{1,2n-1}^{k,-}(a), E_{1,2n-1}^{k,+}(a)) = \varkappa_n.$$

iv) Если $q \in L_{\text{even}}^2(0, 1)$, то $F_- = 0$ (см. [5]).

а) Из (7.4) и (7.6) получаем, что $G_{0,4n}^0 = (\lambda_{2,2n}^{0,-}, \lambda_{2,2n}^{0,+})$ для всех $n \geq 1$. По лемме 6.2 числа $\lambda_{2,2n}^{0,\pm}$ – нули функции $9F^2 - g_{0,2}$. Поскольку $s_0 = 0, c_0 = 1$ при $a = 0$, равенство (5.7) дает $g_{0,2} = 9$. Тогда $\lambda_{2,2n}^{0,\pm} = \tilde{\lambda}_n^{\pm}$. Следовательно, $G_{0,4n}^0 = \tilde{\gamma}_n$ для всех $n \geq 1$. Тогда из (7.7) следует, что $\tilde{\gamma}_n \subset G_{k,4n}^a$ при $n \geq 1$. Доказательство для случая $n = 0$ аналогично.

б) Из (6.7) следует, что $u_k \leq 0$, и неравенства (7.3) дают оценки $E_{k,4n-3}^- \geq E_{k,4n-1}^+$, $E_{k,4n-1}^- \geq E_{k,4n-1}^+$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, $G_{k,2n-1}^a = \emptyset$.

с) Пусть $c_k = 0$. Последнее равенство в (4.1) показывает, что $\rho_k = 0$ и тождество (6.7) влечет равенство $v_k = 0$. Тогда из (7.4) следует, что $E_{1,2n-1}^{k,\pm} = \lambda_{1,2n-1}^{0,\pm}$. Равенства (7.6) дают

$$G_{k,4n-2}^a = (\lambda_{1,2n-1}^{0,-}, \lambda_{1,2n-1}^{0,+}) = \varkappa_n.$$

Если $s_k = 0$, то $c_k = 1, \rho_k = 9F^2$ и $r_{k,n}^{\pm} = \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Более того, $v_k = -1$. Тогда равенство (7.4) дает $E_{1,2n-1}^{k,-} = E_{1,2n-1}^{k,+} = \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Из равенств (7.6) следует, что $G_{k,4n-2}^a = \emptyset$.

Пусть $c_k \neq 0, s_k \neq 0$. Тогда из (4.1) следует, что $\rho_k = (9F^2 - s_k^2)c_k^2$, а (6.7) дает соотношение $v_k = -c_k^2 < 0$. Резонансы $r_{k,n}^{\pm}$ являются нулями функции $9F^2 - s_k^2$. Следовательно, благодаря свойствам функции F они вещественные и простые. Из равенств (7.4) следует, что $E_{1,2n-1}^{k,\pm} = r_{k,n}^{\pm}$ и (7.6) дает соотношение

$$G_{k,4n-2}^a = (r_{k,n}^-, r_{k,n}^+) \neq \emptyset.$$

Если $s_k(a) < s_\ell(a_1)$, то из свойств функции F следует, что $\pm r_{\ell,n}^\mp(a_1) < \pm r_{k,n}^\mp(a)$. Тогда (7.6) дает включение $G_{k,4n-2}^a \subset G_{\ell,4n-2}^{a_1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $u_k(E_{2,p}^{k,-}) < 0$ (или $u_k(E_{2,p}^{k,+}) < 0$), то $E_{2,p}^{k,-} > E_{1,p-1}^{k,+}$ (соответственно $E_{1,p+1}^{k,-} > E_{2,p}^{k,+}$) и лакуна $G_{k,4n-3}^a$ (соответственно $G_{k,4n-1}^a$) пуста.

§ 8. Спектр оператора $\mathcal{H}_a$

В этом параграфе мы докажем наши основные результаты о спектре оператора $\mathcal{H}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Напомним, что по теореме 3, i) оператор $\mathcal{H}_a$ унитарно эквивалентен оператору $H^a = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_N} H_k^a$, откуда следует, что $\sigma(\mathcal{H}_a) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_N} \sigma(H_k^a)$. Тогда из теоремы 5, iii) следует (1.4).

i) Из соотношений (7.6) следует, что лакуны $G_{k,n}^a$ в спектре H_k^a с различными n не пересекаются. Поэтому лакуны G_n^a в спектре $\sigma_{ac}(\mathcal{H}_a) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \geq 0} G_n^a$ оператора $\mathcal{H}_a$ равны $G_n^a = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_N} G_{k,n}^a$ и удовлетворяют (1.5). Из включений (7.7) следует (1.6). Из теоремы 7, ii) получаем (1.7).

ii) Для того чтобы доказать (1.8), мы сначала предположим, что $q_0 = 0$, а в окончательных формулах добавим соответствующее слагаемое к полученной асимптотике. Пусть $m = 0$. Из первых соотношений в (7.4), (7.7) получаем, что $(E_{4n}^-, E_{4n}^+) = G_{4n}^a = G_{0,4n}^a = (E_{2,2n}^{0,-}, E_{2,2n}^{0,+}) = (\lambda_{2,2n}^{0,-}, \lambda_{2,2n}^{0,+})$. Из леммы 6.2, iii) следует, что $E_{4n}^\pm = \lambda_{2,2n}^{0,\pm}$ являются нулями функции $9F^2 - g_{0,2}$. Лемма 5.1, ii) показывает, что

$$\sqrt{E_{4n}^\pm} = \pi n \pm \theta_0 + \varepsilon_n^\pm,$$

где $|\varepsilon_n^\pm| \leq \frac{1}{3}$ для больших n . Пусть $\lambda = E_{4n}^\pm$ и $\varepsilon = \varepsilon_n^\pm$. Тогда (5.4) дает следующие соотношения:

$$9F^2(\lambda) = 9 \cos^2(\pi n \pm \theta_0 + \varepsilon) + O(n^{-2}) = 5 + 4|c_0| \mp 9\varepsilon \sin(2\theta_0) + O(\varepsilon^2) + O(n^{-2})$$

и $F_-(\lambda) = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow +\infty$. Из равенств (5.7) следует, что $g_{0,2}(\lambda) = 5 + 4|c_0| + O(n^{-2})$. Тогда

$$0 = 9F^2(\lambda) - g_{0,2}(\lambda) = \mp 9\varepsilon \sin(2\theta_0) + O(\varepsilon^2) + O(n^{-2}).$$

Значит, $\varepsilon = O(n^{-2})$ и $\sqrt{E_{4n}^\pm} = \pi n \pm \theta_0 + O(n^{-2})$, что дает (1.8) для $m = 0$.

Пусть $m = 1$. Из равенств $G_n^a = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_N} G_{k,n}^a$ и (7.6) следует, что $E_{4n-2}^- = \max_{k \in \mathbb{Z}_N} E_{1,2n-1}^{k,-}$, $E_{4n-2}^+ = \min_{k \in \mathbb{Z}_N} E_{1,2n-1}^{k,+}$. Поскольку $a \in (0, \frac{\pi}{2N}]$, мы имеем $s_k \neq 0$, $c_k \neq 0$. Из теоремы 7, ii) следует, что $E_{1,2n-1}^{k,\pm} = r_{k,2n}^\pm$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Равенства (4.1) показывают, что $r_{k,2n}^\pm$ есть нули функции $9F^2 - f_k$, где $f_k = s_k^2(1 - \frac{F^2}{c_k^2})$. По лемме 5.1, iii) имеем

$$\sqrt{E_{1,2n-1}^{k,\pm}} = \pi n - \frac{\pi}{2} \pm \phi_k + \varepsilon_n^\pm, \quad \phi_k = \frac{\arcsin s_k}{3},$$

где $|\varepsilon_n^\pm| \leq \frac{s_k}{3}$ для больших n . Пусть $\lambda = E_{1,2n-1}^{k,\pm}$ и $\varepsilon = \varepsilon_n^\pm$. Из (5.4) имеем

$$9F^2(\lambda) = 9 \cos^2\left(\pi n - \frac{\pi}{2} \pm \phi_k + \varepsilon\right) + O(n^{-2}) = s_k^2 \pm 9\varepsilon \sin(2\phi_k) + O(\varepsilon^2) + O(n^{-2}),$$

и $F_-(\lambda) = O(n^{-1})$. Тогда

$$f_k(\lambda) = s_k^2 + O(n^{-2}), \quad 0 = 9F^2(\lambda) - f_k(\lambda) = \pm 9\varepsilon \sin(2\phi_k) + O(\varepsilon^2) + O(n^{-2}).$$

Тогда $\varepsilon = O(n^{-2})$, откуда следует, что $E_{1,2n-1}^{k,\pm} = (\pi n - \frac{\pi}{2} \pm \phi_k + O(n^{-2}))^2$. Эта асимптотика и равенства $\theta_1 = \min_{k \in \mathbb{Z}_N} \phi_k$ дают (1.8) для $m = 1$.

iii) Если $|F_-| \geq \cos^2 a$ на $\varkappa_n$ для некоторого $n \geq 1$, то $G_{4n-2}^a = \varkappa_n = G_{4n-2}^0$. Это следует из теоремы 7, ii) и равенства $G_n^a = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_N} G_{k,n}^a$. Отсюда получаем нужное утверждение, поскольку $\varkappa_n \subset (\tilde{\lambda}_{n-1}^+, \tilde{\lambda}_n^-)$, $n \geq 1$ (см. (7.6)).

Мы докажем теорему 2 о спектре $\mathcal{H}_a$ в случае четного потенциала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Соотношения (1.9) и (1.10) следуют из теоремы 7, iv). Докажем (1.11), (1.12). Напомним, что $E^\pm(a) = E_{4n}^\pm(a) = \lambda_{2,2n}^{0,\pm}(a)$ — нули функции $9F^2 - g_{0,2}$. Поскольку $F_- = 0$, тождества (5.7) дают равенство $g_{0,2} = 5 + 4 \cos a$. Поэтому

$$9F^2 - g_{0,2} = f + 4(1 - \cos a), \quad (8.1)$$

где $f = 9F^2 - 9$ и $E^\pm(0) = \tilde{\lambda}_n^\pm$ (см. [28]) — нули функции f . Пусть $G_{4n}^0 \neq \emptyset$, т.е. $E^-(0) \neq E^+(0)$. Тогда

$$f(E^\pm(0)) = 0, \quad f'(E^\pm(0)) = 18F(E^\pm(0))F'(E^\pm(0)) = (-1)^n 18F'(E^\pm(0)). \quad (8.2)$$

Пусть $E^\pm(a) = E^\pm(0) + \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon^\pm$. Тогда $f(E^\pm(a)) = \varepsilon f'(E^\pm(0)) + O(\varepsilon^2)$. Подставляя эту асимптотику и асимптотику $4(1 - \cos a) = 2a^2 + O(a^4)$, $a \rightarrow 0$, в (8.1), получаем

$$0 = 9F^2(E^\pm(a)) - g_{0,2}(E^\pm(a)) = \varepsilon f'(E^\pm(0)) + 2a^2 + O(\varepsilon^2) + O(a^4), \quad a \rightarrow 0, \quad (8.3)$$

что дает $\varepsilon = O(a^2)$. Снова используя (8.3), находим, что

$$\varepsilon = -\frac{2a^2}{f'(E^\pm(0))} + O(a^4).$$

Подставляя сюда выражение для $f'(E^\pm(0))$ из (8.2), получаем (1.11).

Пусть $G_{4n}^0 = \emptyset$, т.е. $E = E^-(0) = E^+(0)$. Тогда

$$f(E) = f'(E) = 0, \quad f''(E) = 18F(E)F''(E) = -18|F''(E)| < 0.$$

Пусть $E^\pm(a) = E + \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon^\pm$. Тогда

$$f(E^\pm(a)) = \frac{\varepsilon^2}{2} f''(E) + O(\varepsilon^3) = -9|F''(E)|\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$0 = 9F^2(E^\pm(a)) - g_{0,2}(E^\pm(a)) = -9|F''(E)|\varepsilon^2 + 2a^2 + O(\varepsilon^3) + O(a^4), \quad (8.4)$$

что дает $\varepsilon = O(a)$. Подставляя эту асимптотику в (8.4), получаем, что

$$\varepsilon^2 = \frac{2a^2}{9|F''(E)|} + O(a^3),$$

откуда следует (1.12).

Докажем (1.13). Из соотношений $G_{k,4n-2}^a \subset G_{\ell,4n-2}^{a_1}$, (7.4) и (7.6) получаем, что $E_{4n-2}^\pm(a) = E_{1,2n-1}^{0,\pm}(a) = r_{0,n}^\pm(a)$. Равенства (4.1) показывают, что $r_{0,n}^\pm(a)$ — нули функции $9F^2 - \sin^2 a$ и $r_{0,n}^-(0) = r_{0,n}^+(0) = \eta_n$. Пусть $r_{0,n}^\pm(a) = \eta_n + \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_n^\pm$. Тогда

$$0 = 9F^2(r_{0,n}^\pm(a)) - \sin^2 a = 9(F'(\eta_n))^2 \varepsilon^2 - a^2 + O(\varepsilon^3) + O(a^3),$$

что дает $\varepsilon = O(a)$. Тогда

$$\varepsilon = \pm \frac{a}{3|F'(\eta_n)|} + O(a^2),$$

что дает (1.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Мы можем выразить асимптотику (1.11) через эффективные массы. Напомним соответствующие определения. Поскольку край лакуны G_{4n}^0 совпадают с нулем функции $F_{0,2} - 1$, мы определяем квазиимпульс $\mathfrak{K}(\lambda)$ в окрестности этого края равенством

$$F_{0,2}(\lambda) = \cos \mathfrak{K}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (8.5)$$

Для каждого края лакуны $G_{4n}^0 \neq \emptyset$, $n \geq 0$, стандартным способом (см., например, [31], [32]) введем эффективную массу M_0^+ , $M_{4n}^\pm$ равенством

$$\lambda = E_{4n}^\pm(0) + \frac{(\mathfrak{K}(\lambda) - \pi n)^2}{2M_{4n}^\pm}(1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_n^\pm, \quad (8.6)$$

где $\mathfrak{K}(\lambda)$ – квазиимпульс. Здесь всегда можно взять ветвь $\mathfrak{K}(\lambda)$ такую, что $\mathfrak{K}(\lambda) \rightarrow \pi n$ при $\lambda \rightarrow E_{4n}^\pm(0)$. Используя стандартные равенства

$$M_{4n}^\pm = -F_{0,2}(E^\pm(0))F'_{0,2}(E^\pm(0)) = -F'_{0,2}(E^\pm(0))$$

(см. [32]) и $F_{0,2} = \frac{1}{2}(9F^2 - 1) - 3|F|$ (см. (4.1)), получаем

$$M_{4n}^\pm = -9F'(E^\pm(0))F(E^\pm(0)) + 3F'(E^\pm(0))\operatorname{sign} F(E^\pm(0)) = -(-1)^n 6F'(E^\pm(0)).$$

Подставляя это равенство в (1.11), получаем

$$E_{4n}^\pm(a) = E_{4n}^\pm(0) + \frac{2a^2}{3M_{4n}^\pm} + O(a^4) \quad \text{при } a \rightarrow 0, \quad \text{если } G_{4n}^0 \neq \emptyset.$$

В следующем предложении мы приведем пример потенциала, для которого существуют лакуны, не зависящие от магнитного поля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $q = q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\delta(t - \frac{1}{2} - 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $t \in [0, 1]$. Тогда для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$G_{4n-2}^a(q_\varepsilon) = G_{4n-2}^0(q_\varepsilon) \neq \emptyset, \quad (a, \varepsilon, n) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0) \times \mathbb{N}_{n_0}. \quad (8.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$F_-(\lambda, q_\varepsilon) = \frac{\sin 4\varepsilon\sqrt{\lambda}}{2\varepsilon\sqrt{\lambda}} = 2 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

равномерно на любом ограниченном множестве в $\mathbb{C}$ (см., например, [10]). Тогда $|F_-(\lambda, q_\varepsilon)| > \cos^2 a$ для каждого $(a, \varepsilon, \lambda) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0) \times C_0(\tilde{R})$ с любым $\tilde{R} > 0$ и некоторым $\varepsilon_0 > 0$, где $C_0(\tilde{R}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \tilde{R}\}$. Используя теорему 7, iii), получаем, что $G_{4n-2}^a(q_\varepsilon) = G_{4n-2}^0(q_\varepsilon) = \varkappa_n(q_\varepsilon)$ для всех $(a, \varepsilon, n) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0) \times \mathbb{N}_{n_0}$ с любым $n_0 \in \mathbb{N}$ и некоторым $\varepsilon_0 > 0$. Из леммы 6.2, iii) следует, что $\varkappa_n(q_\varepsilon) \neq \emptyset$, откуда получаем (8.7).

§ 9. Доказательство теоремы 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. i) Введем унитарный оператор $\mathcal{U}$ в $L^2(\Gamma^N)$ равенством $(\mathcal{U}f)_\omega = e^{ita_\omega} f_\omega$, $f = (f_\omega)_{\omega \in \mathcal{X}}$, где a_ω определены в (2.1). Определим модифицированный оператор $H^a = \mathcal{U}^* \mathcal{H}_a \mathcal{U}$ в $L^2(\Gamma^N)$. Тогда H^a дается

равенством $(H^a f)_\omega = -f''_\omega + qf_\omega$, $\omega \in \mathcal{Z}$, где $f \in \mathfrak{D}(H^a)$. Область $\mathfrak{D}(H^a)$ состоит из функций $f = (f_\omega)_{\omega \in \mathcal{Z}}$, $(f''_\omega)_{\omega \in \mathcal{Z}} \in L^2(\Gamma^N)$, удовлетворяющих следующим условиям, которые получаются из (2.4), (2.5) для всех $\omega_j = (n, j, k) \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f_{\omega_3}(1) &= f_{\omega_4}(0) = e^{ia_1} f_{n-1,6,k}(1), \\ e^{ia_2} f_{\omega_4}(1) &= f_{n,1,k+1}(0) = e^{-ia_1} f_{n-1,5,k+1}(1), \\ e^{ia_1} f_{\omega_1}(1) &= f_{\omega_2}(0) = f_{\omega_5}(0), \quad e^{ia_2} f_{\omega_2}(1) = f_{\omega_3}(0) = f_{\omega_6}(0), \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f'_{\omega_3}(1) + e^{ia_1} f'_{n-1,6,k}(1) &= f'_{\omega_4}(0), \\ e^{ia_2} f'_{\omega_4}(1) + e^{-ia_1} f'_{n-1,5,k+1}(1) &= f'_{n,1,k+1}(0), \\ f'_{\omega_2}(0) - e^{ia_1} f'_{\omega_1}(1) + f'_{\omega_5}(0) &= 0, \quad f'_{\omega_3}(0) - e^{ia_2} f'_{\omega_2}(1) + f'_{\omega_6}(0) = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Определим унитарный оператор $\mathcal{S}$ в $\mathbb{C}^N$ выражением $\mathcal{S}u = (u_N, u_1, \dots, u_{N-1})^\top$, $u = (u_k)_1^N \in \mathbb{C}^N$. Оператор $\mathcal{S}$ представляется в виде $\mathcal{S} = \sum_1^N s^k \mathcal{P}_k$, где $\mathcal{S}e_k = s^k e_k$, $e_k = N^{-1/2}(1, s^{-k}, s^{-2k}, \dots, s^{-kN+k})$ – собственный вектор (напомним $s = e^{(2\pi i)/N}$), $\mathcal{P}_k u = e_k(u, e_k)$ – проектор. Функция f в граничных условиях Кирхгофа (9.1), (9.2) есть векторная функция $f = (f_\omega)$, $\omega = (n, j, k) \in \mathcal{Z}$. Определим новую векторную функцию $f_{n,j} = (f_{n,j,k})_{k=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $(n, j) \in \mathcal{Z}_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_6$, которая удовлетворяет уравнению $-f''_{n,j} + qf_{n,j} = \lambda f_{n,j}$ и условиям, которые следуют из условий Кирхгофа (9.1), (9.2) для всех $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f_{n,3}(1) &= f_{n,4}(0) = e^{ia_1} f_{n-1,6}(1), \quad e^{ia_2} \mathcal{S} f_{n,4}(1) = f_{n,1}(0) = e^{-ia_1} f_{n-1,5}(1), \\ e^{ia_1} f_{n,1}(1) &= f_{n,2}(0) = f_{n,5}(0), \quad e^{ia_2} f_{n,2}(1) = f_{n,3}(0) = f_{n,6}(0), \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f'_{n,3}(1) + e^{ia_1} f'_{n-1,6}(1) &= f'_{n,4}(0), \quad e^{ia_2} \mathcal{S} f'_{n,4}(1) + e^{-ia_1} f'_{n-1,5}(1) = f'_{n,1}(0), \\ e^{ia_1} f'_{n,1}(1) - f'_{n,2}(0) - f'_{n,5}(0) &= 0, \quad e^{ia_2} f'_{n,2}(1) - f'_{n,3}(0) - f'_{n,6}(0) = 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{H}_a$ коммутируют, откуда мы выводим, что $\mathcal{H}_a \mathcal{P}_k$ унитарно эквивалентен оператору H_k^a , действующему в $L^2(\Gamma^1)$, H_k^a задается равенством $(H_k^a f)_\alpha = -f''_\alpha + q(t)f_\alpha$, где $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}$, $(f''_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}_1} \in L^2(\Gamma^1)$, и компоненты f_α удовлетворяют граничным условиям (2.4), (2.5). Таким образом, $\mathcal{H}_a$ унитарно эквивалентен оператору $H^a = \bigoplus_1^N H_k^a$.

ii) Сначала докажем, что если $\lambda \notin \sigma_D$, то для любого $h \in \mathbb{C}^4$ существует единственная функция $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}_1}$, удовлетворяющая уравнению $-f''_\alpha + qf_\alpha = \lambda f_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{Z}_1$, условиям Кирхгофа (2.4), (2.5) и начальному условию

$$w_{-1}(1) = h, \quad w_n(t) = (f_{n,5}(t), f_{n,6}(t), f'_{n,5}(t), f'_{n,6}(t))^\top.$$

Затем вычислим матрицу монодромии, пользуясь эквивалентным (2.9) равенством

$$w_0(1) = (f_{0,5}(1), f_{0,6}(1), f'_{0,5}(1), f'_{0,6}(1)) = \mathcal{M}_k h. \quad (9.5)$$

Для этого мы последовательно вычислим $f_{0,1}, f_{0,3}$ в терминах h , затем $f_{0,5}, f_{0,6}$ в терминах $f_{0,1}, f_{0,3}$. Затем, используя полученные выражения для $\mathcal{M}_k$, мы докажем равенства (2.12).

Переходим к изложению деталей вычислений. Пусть $\varphi_t = \varphi(t, \lambda)$, $\varphi'_t = \varphi'(t, \lambda), \dots$. Любое решение y уравнения $-y'' + qy = \lambda y$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$y(t) = y(0)\vartheta_t + \frac{\varphi_t}{\varphi_1}(y(1) - \vartheta_1 y(0)), \quad \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \varphi_1 \\ \vartheta'_1 & \varphi'_1 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Во-первых, выразим $f_{0,1}, f_{0,3}$ в терминах h . Условия Кирхгофа (2.4), (2.5) дают для $n = 0$ такие соотношения:

$$\begin{aligned} f'_{0,3}(1) + f'_{-1,6}(1) &= e^{-ia_1} f'_{0,4}(0), & s^k e^{ia_2} f'_{0,4}(1) + e^{-ia_1} f'_{-1,5}(1) &= f'_{0,1}(0), \\ f_{0,3}(1) &= e^{-ia_1} f_{0,4}(0) = f_{-1,6}(1), & s^k e^{ia_2} f_{0,4}(1) &= f_{0,1}(0) = e^{-ia_1} f_{-1,5}(1). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Используя (9.6), (9.7), получаем

$$f_{0,4}(t) = e^{ia_1} f_{-1,6}(1)\vartheta_t + \frac{\varphi_t}{\varphi_1}(e^{-ia} s^{-k} f_{-1,5}(1) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{-1,6}(1)), \quad t \in [0, 1],$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} f'_{0,4}(0) &= \frac{1}{\varphi_1}(e^{-ia} s^{-k} f_{-1,5}(1) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{-1,6}(1)), \\ f'_{0,4}(1) &= e^{ia_1} f_{-1,6}(1)\vartheta'_1 + \frac{\varphi'_1}{\varphi_1}(e^{-ia} s^{-k} f_{-1,5}(1) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{-1,6}(1)) \\ &= \frac{1}{\varphi_1}(\varphi'_1 e^{-ia} s^{-k} f_{-1,5}(1) - e^{ia_1} f_{-1,6}(1)), \end{aligned} \quad (9.8)$$

(здесь мы использовали равенство $\vartheta_1 \varphi'_1 - \vartheta'_1 \varphi_1 = 1$). Подставляя (9.8) в (9.7), получаем

$$\begin{aligned} f'_{0,1}(0) &= e^{-ia_1} f'_{-1,5}(1) + \frac{1}{\varphi_1}(e^{-ia_1} \varphi'_1 f_{-1,5}(1) - e^{ia} s^k f_{-1,6}(1)), \\ f'_{0,3}(1) &= -f'_{-1,6}(1) + \frac{1}{\varphi_1}(e^{-i(a_1+a)} s^{-k} f_{-1,5}(1) - \vartheta_1 f_{-1,6}(1)). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Из равенств (9.7), (9.9) следует, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{0,1}(0) \\ f_{0,3}(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-ia_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-1,5}(1) \\ f_{-1,6}(1) \end{pmatrix} = A^{-1} A_2 \begin{pmatrix} f_{-1,5}(1) \\ f_{-1,6}(1) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} f'_{0,1}(0) \\ f'_{0,3}(1) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\varphi_1} \begin{pmatrix} \varphi'_1 e^{-ia_1} & -e^{ia} s^k \\ e^{-i(a_1+a)} s^{-k} & -\vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-1,5}(1) \\ f_{-1,6}(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-ia_1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{-1,5}(1) \\ f'_{-1,6}(1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varphi_1} A^{-1} (P_- + J_k) I_- A_2 \begin{pmatrix} f_{-1,5}(1) \\ f_{-1,6}(1) \end{pmatrix} + A^{-1} I_- A_2 \begin{pmatrix} f'_{-1,5}(1) \\ f'_{-1,6}(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} J_k &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2ia} s^k \\ e^{-2ia} s^{-k} & 0 \end{pmatrix}, & I_- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & P_- &= \begin{pmatrix} \varphi'_1 & 0 \\ 0 & \vartheta_1 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} e^{ia_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Отсюда для вектора $u(t) = (f_{0,1}(t), f_{0,3}(1-t), f'_{0,1}(t), f'_{0,3}(1-t))^T$ получаем

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{\varphi_1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{Y}_+ \mathcal{A}_2 w_{-1}(1), \quad \mathcal{Y}_+ = \begin{pmatrix} \varphi_1 I & 0 \\ (P_- + J_k) I_- & \varphi_1 I_- \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Из равенств (9.6) следует, что

$$\begin{pmatrix} f_{0,1}(1) \\ f'_{0,1}(1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_{0,1}(0) \\ f'_{0,1}(0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{0,3}(0) \\ f'_{0,3}(0) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_{0,3}(1) \\ f'_{0,3}(1) \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi'_1 & -\varphi_1 \\ -\vartheta'_1 & \vartheta_1 \end{pmatrix},$$

что дает

$$u(1) = \mathcal{M}_- u(0), \quad \text{где } \mathcal{M}_- = \begin{pmatrix} P_+ & \varphi_1 I_- \\ \vartheta'_1 I_- & P_- \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 \\ 0 & \varphi'_1 \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Во-вторых, вычислим $f_{0,5}, f_{0,6}$ в терминах $f_{0,1}, f_{0,3}$. Условия Кирхгофа (2.4), (2.5) дают для $n = 0$ такие соотношения:

$$\begin{aligned} e^{ia_1} f_{0,1}(1) &= f_{0,2}(0) = f_{0,5}(0), & e^{ia_2} f_{0,2}(1) &= f_{0,3}(0) = f_{0,6}(0), \\ e^{ia_1} f'_{0,1}(1) - f'_{0,2}(0) - f'_{0,5}(0) &= 0, & e^{ia_2} f'_{0,2}(1) - f'_{0,3}(0) - f'_{0,6}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Используя условия (9.13) и первое равенство в (9.6), получаем

$$f_{0,2}(t) = e^{ia_1} f_{0,1}(1) \vartheta_t + \frac{\varphi_t}{\varphi_1} (e^{-ia_2} f_{0,3}(0) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{0,1}(1)),$$

что дает

$$\begin{aligned} f'_{0,2}(0) &= \frac{1}{\varphi_1} (e^{-ia_2} f_{0,3}(0) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{0,1}(1)), \\ f'_{0,2}(1) &= e^{ia_1} f_{0,1}(1) \vartheta'_1 + \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} (e^{-ia_2} f_{0,3}(0) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{0,1}(1)) \\ &= \frac{1}{\varphi_1} (e^{-ia_2} \varphi'_1 f_{0,3}(0) - e^{ia_1} f_{0,1}(1)). \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (9.13), имеем

$$\begin{aligned} f'_{0,5}(0) &= e^{ia_1} f'_{0,1}(1) - \frac{1}{\varphi_1} (e^{-ia_2} f_{0,3}(0) - e^{ia_1} \vartheta_1 f_{0,1}(1)), \\ f'_{0,6}(0) &= \frac{1}{\varphi_1} (\varphi'_1 f_{0,3}(0) - e^{ia_1} f_{0,1}(1)) - f'_{0,3}(0). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Равенства (9.13) и (9.14) дают следующие соотношения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{0,5}(0) \\ f_{0,6}(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{ia_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,1}(1) \\ f_{0,3}(0) \end{pmatrix} = A_2^{-1} A \begin{pmatrix} f_{0,1}(1) \\ f_{0,3}(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} f'_{0,5}(0) \\ f'_{0,6}(0) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\varphi_1} \begin{pmatrix} \vartheta_1 e^{ia_1} & -e^{-ia_2} \\ -e^{ia_1} & \varphi'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,1}(1) \\ f_{0,3}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{ia_1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{0,1}(1) \\ f'_{0,3}(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varphi_1} A_2^{-1} (P_+ - J) A \begin{pmatrix} f_{-1,5}(1) \\ f_{-1,6}(1) \end{pmatrix} + A_2^{-1} I_- A \begin{pmatrix} f'_{-1,5}(1) \\ f'_{-1,6}(1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$w_0(0) = \frac{1}{\varphi_1} \mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{Y}_- \mathcal{A} u(1), \quad \mathcal{Y}_- = \begin{pmatrix} \varphi_1 I & 0 \\ P_+ - J & \varphi_1 I_- \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Равенства (9.6) дают

$$\begin{pmatrix} f_{0,5}(1) \\ f'_{0,5}(1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_{0,5}(0) \\ f'_{0,5}(0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{0,6}(1) \\ f'_{0,6}(1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_{0,6}(0) \\ f'_{0,6}(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$w_0(1) = \mathcal{M}_+ w_0(0), \quad \text{где } \mathcal{M}_+ = \begin{pmatrix} \vartheta_1 I & \varphi_1 I \\ \vartheta'_1 I & \varphi'_1 I \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

Таким образом, мы доказали, что для каждого $h \in \mathbb{C}^4$ существует единственный набор функций $f_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}_6$, удовлетворяющих уравнению $-f'' + qf = \lambda f$, начальному условию $w_{-1}(1) = h$ и граничным условиям (2.4), (2.5). Вследствие периодичности мы получаем такой же результат для всех функций $f_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{L}_1$.

Равенства (9.11), (9.12), (9.15), (9.16) вместе с (9.5) дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &= \frac{1}{\varphi_1^2} \mathcal{M}_+ \mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{Y}_- \mathcal{A} \mathcal{M}_- \mathcal{A}^{-1} \mathcal{Y}_+ \mathcal{A}_2 = \frac{1}{\varphi_1^2} \mathcal{M}_+ \mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{Y}_- \mathcal{M}_- \mathcal{Y}_+ \mathcal{A}_2 \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{M}_+ \mathcal{Y}_- \mathcal{M}_- \mathcal{Y}_+ \mathcal{A}_2, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где мы использовали то, что $\mathcal{A} \mathcal{M}_- \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{M}_-$, $\mathcal{A}_2 \mathcal{M}_+ \mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{M}_+$. Прямым вычислением находим $\det \mathcal{Y}_+ = \det \mathcal{Y}_- = -\varphi_1^4$, $\det \mathcal{M}_+ = \det \mathcal{M}_- = 1$, что дает первое равенство в (2.12).

Докажем (2.10). Равенства (9.11), (9.12), (9.15) дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_- \mathcal{M}_- \mathcal{Y}_+ &= \begin{pmatrix} \varphi_1 I & 0 \\ P_+ - J & \varphi_1 I_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & \varphi_1 I_- \\ \vartheta'_1 I_- & P_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 I & 0 \\ (P_- + J_k) I_- & \varphi_1 I_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1 &= \varphi_1^2 P_+ + \varphi_1^2 I_- (P_- + J_k) I_- = \varphi_1^2 (2FI - J_k), \quad Y_2 = \varphi_1^3 I, \\ Y_3 &= \varphi_1 ((P_+ - J) P_+ + \varphi_1 \vartheta'_1 I + ((P_+ - J) I_- + I_- P_-) (P_- + J_k) I_-) \\ &= \varphi_1 ((P_+ - J) P_+ + \varphi_1 \vartheta'_1 I + (P_+ + P_- - J) (P_- - J_k)) \\ &= \varphi_1 (P_+^2 + (\vartheta_1 \varphi'_1 - 1) I + (\vartheta_1 + \varphi'_1) P_- - J(P_+ + P_-) - (2FI - J) J_k) \\ &= \varphi_1 ((4F^2 - 1) I - 2FJ - (2FI - J) J_k), \\ Y_4 &= \varphi_1^2 ((P_+ - J) I_- + I_- P_-) I_- = \varphi_1^2 (P_+ - J + P_-) = \varphi_1^2 (2FI - J). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Здесь мы использовали равенство $I_- J I_- = -J$. Заметим, что $S_k = J - J_k$, $B = 2FI - J$ (см. (2.11)). Тогда из (9.19) находим, что

$$Y_1 = \varphi_1^2 (B + S_k), \quad Y_2 = \varphi_1^3 I, \quad Y_3 = \varphi_1 (4F(B - FI) + B S_k), \quad Y_4 = \varphi_1^2 B.$$

Подставляя эти выражения в (9.18), находим, что

$$\mathcal{Y}_- \mathcal{M}_- \mathcal{Y}_+ = \varphi_1^2 \tilde{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} (B + S_k) & I \\ (4F(B - FI) + BS_k) & B \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{R}}^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \varphi_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Подставляя это равенство в (9.17) и используя равенство

$$\tilde{\mathcal{R}}^{-1} \mathcal{M}_+ \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{K} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 I & I \\ \varphi_1 \vartheta'_1 I & \varphi'_1 I \end{pmatrix},$$

получаем (2.10).

Докажем второе равенство в (2.12) (свойство симплектичности матрицы монодромии). Равенство (2.10) дает следующие соотношения:

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{R} \mathcal{K} (\tilde{\mathcal{M}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_1) \mathcal{R}^{-1},$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_0 = \begin{pmatrix} B & I \\ 4F(B - FI) & B \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{M}}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя равенство $(\mathcal{R} \mathcal{K})^\top \mathcal{J} \mathcal{R} \mathcal{K} = \varphi_1 e^{-ia_2} \mathcal{J}$, получаем

$$(\mathcal{M}_k)^\top \mathcal{J} \mathcal{M}_k = \varphi_1 e^{-ia_2} (\mathcal{R}^{-1})^\top (\tilde{\mathcal{M}}_0^\top + \tilde{\mathcal{M}}_1^\top) \mathcal{J} (\tilde{\mathcal{M}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_1) \mathcal{R}^{-1}. \quad (9.20)$$

Далее, имеем

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JB - BJ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$\tilde{\mathcal{M}}_1^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1 = 0. \quad (9.21)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1 &= \begin{pmatrix} B & 4F(B - FI) \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (B - 2FI)^2 JS_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку $(B - 2FI)^2 = I$, мы получаем, что

$$\tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1 = \begin{pmatrix} JS_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1)^\top.$$

В силу соотношения $\mathcal{J}^\top = -\mathcal{J}$ справедливо равенство

$$\tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1 + \tilde{\mathcal{M}}_1^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_0 = \tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1 - (\tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_1)^\top = 0. \quad (9.22)$$

Аналогичные вычисления дают следующие соотношения:

$$\tilde{\mathcal{M}}_0^\top \mathcal{J} \tilde{\mathcal{M}}_0 = \begin{pmatrix} B & 4F(B - FI) \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & I \\ 4F(B - FI) & B \end{pmatrix} = \mathcal{J}. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.21)–(9.23) в (9.20), имеем

$$(\mathcal{M}_k)^\top \mathcal{J} \mathcal{M}_k = \varphi_1 e^{-ia_2} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{J} \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{J},$$

что дает второе равенство в (2.12). Из него следует, что матрица $\mathcal{M}_k(\lambda)$, $\lambda \notin \sigma_D$, имеет (с учетом кратности) четыре собственных значения вида $\tau_{k,1}^{\pm 1}, \tau_{k,2}^{\pm 1}$.

Е. Л. Коротяев благодарит за поддержку EPSRC (грант EP/D054621) и DFG (проект BR691/23-1). Некоторые части настоящей статьи были написаны в Математическом институте Университета Гумбольдта в Берлине; А. В. Баданин благодарит институт за гостеприимство.

Список литературы

- [1] R. Saito, G. Dresselhaus, M. Dresselhaus, *Physical properties of carbon nanotubes*, Imperial College Press, Tokyo, 1998.
- [2] П. Харрис, *Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века*, Техносфера, М., 2003.
- [3] E. Korotyaev, I. Lobanov, “Schrödinger operators on zigzag nanotubes”, *Ann. Henri Poincaré*, **8**:6 (2007), 1151–1176.
- [4] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [5] W. Magnus, S. Winkler, *Hill’s equation*, Dover, New York, 1979.
- [6] E. Korotyaev, I. Lobanov, *Zigzag periodic nanotube in magnetic field*, arXiv: math/0604007.
- [7] A. Badanin, J. Brüning, E. Korotyaev, “The Lyapunov function for Schrodinger operators with a periodic 2×2 matrix potential”, *J. Funct. Anal.*, **234**:1 (2006), 106–126.
- [8] D. Chelkak, E. Korotyaev, “Spectral estimates for Schrodinger operators with periodic matrix potentials on the real line”, *Int. Math. Res. Not.*, **7** (2006), ID 60314.
- [9] E. Korotyaev, “Conformal spectral theory for the monodromy matrix”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:7 (2010), 3435–3462.
- [10] A. Badanin, J. Brüning, E. Korotyaev, I. Lobanov, “Schrödinger operator on armchair nanotube. I”, arXiv: abs/0707.3909.
- [11] A. Badanin, J. Brüning, E. Korotyaev, “Schrödinger operator on armchair nanotube. II”, arXiv: abs/0707.3900.
- [12] L. Pauling, “The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules”, *J. Chem. Phys.*, **4** (1936), 673–677.
- [13] K. Ruedenberg, Ch. W. Scherr, “Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory”, *J. Chem. Phys.*, **21** (1953), 1565–1581.
- [14] C. A. Coulson, “Note on the applicability of the free-electron network model to metals”, *Proc. Phys. Soc. Ser. A*, **67**:7 (1954), 608–614.
- [15] E. W. Montroll, “Quantum theory on a network. I. A solvable model whose wavefunctions are elementary functions”, *J. Math. Phys.*, **11**:2 (1970), 635–648.
- [16] S. Novikov, “Schrödinger operators on graphs and symplectic geometry”, *The Arnold-fest* (Toronto, ON, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 397–413.
- [17] V. Kostykin, R. Schrader, “Quantum wires with magnetic fluxes”, *Comm. Math. Phys.*, **237**:1–2 (2003), 161–179.
- [18] K. Pankrashkin, “Localization effects in a periodic quantum graph with magnetic field and spin-orbit interaction”, *J. Math. Phys.*, **47**:11 (2006), 112105.
- [19] J. Brüning, V. Geyler, K. Pankrashkin, “Cantor and band spectra for periodic quantum graphs with magnetic fields”, *Comm. Math. Phys.*, **269**:1 (2007), 87–105.
- [20] V. S. Rabinovich, S. Roch, “Essential spectra of difference operators on $\mathbb{Z}^n$ -periodic graphs”, *J. Phys. A*, **40**:33 (2007), 10109–10128.
- [21] A. Jorio, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus, *Carbon nanotubes: advanced topics in the synthesis, structure, properties and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

- [22] J.-C. Charlier, P. C. Eklund, J. Zhu, A. C. Ferrari, “Electron and phonon properties of graphene: their relationship with carbon nanotubes”, *Carbon nanotubes*, Topics in Applied Physics, **111**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 673–709.
- [23] T. Ando, “The electronic properties of graphene and carbon nanotubes”, *NPG Asia Mater*, **1**:1 (2009), 17–21.
- [24] E. L. Korotyaev, A. Kutsenko, “Zigzag nanoribbons in external electric fields”, *Asymptot. Anal.*, **66**:3–4 (2010), 187–206.
- [25] E. Korotyaev, A. Kutsenko, “Zigzag and armchair nanotubes in external fields”, *Differential equations: systems, applications and analysis*, Nova Science Publ., 2009, arXiv: abs/0906.4018.
- [26] E. Korotyaev, “Effective masses for zigzag nanotubes in magnetic fields”, *Lett. Math. Phys.*, **83**:1 (2008), 83–95.
- [27] K. Pankrashkin, “Spectra of Schrödinger operators on equilateral quantum graphs”, *Lett. Math. Phys.*, **77**:2 (2006), 139–154.
- [28] P. Kuchment, O. Post, “On the spectra of carbon nano-structures”, *Comm. Math. Phys.*, **275**:3 (2007), 805–826.
- [29] М. Г. Крейн, “Основные положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами”, *Памяти А. А. Андропова*, Изд. АН СССР, М., 1955, 413–498; англ. пер.: M. G. Krejn, “Foundations of the theory of lambda-zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients”, *Amer. Math. Soc. Transl.* 2, **120** (1983), 1–70.
- [30] Ch. Gerard, F. Nier, “The Mourre theory for analytically fibered operators”, *J. Funct. Anal.*, **152**:1 (1998), 202–219.
- [31] W. A. Harrison, *Electronic structure and the properties of solids: The physics of the chemical band*, Dover, New York, 1989.
- [32] P. Kargaev, E. Korotyaev, “The inverse problem for the Hill operator, a direct approach”, *Invent. Math.*, **129**:3 (1997), 567–593.

А. В. Баданин (A. V. Badanin)

Архангельский государственный технический университет

E-mail: badanin@mail.ru

Поступила в редакцию

18.11.2008 и 09.04.2010

Е. Л. Коротяев (E. L. Korotyaev)

Ленинградский государственный университет

им. А. С. Пушкина

E-mail: korotyaev@gmail.com