Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, М. Рёкнер, Об L^p -единственности симметричных диффузионных операторов на римановых многообразиях, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 15–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:00:48

УДК 517.956+517.98+519.2

В. И. Богачев, М. Рёкнер

Об L^p -единственности симметричных диффузионных операторов на римановых многообразиях

Пусть на полном римановом многообразии M размерности $d > 1$ заданы мера μ с плотностью $\exp U$ относительно римановского объема и оператор $\mathcal{L}f = \Delta f + \langle b, \nabla f \rangle$, причем $U \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$ и $b = \nabla U$. Показано, что при $p > d$ и $q \in [p', p]$ оператор $\mathcal{L}$ на области $C_0^\infty(M)$ обладает единственным расширением, порождающим C_0 -полугруппу в $L^q(M, \mu)$, т.е. множество $(\mathcal{L} - I)(C_0^\infty(M))$ плотно в $L^q(M, \mu)$. В частности, оператор $\mathcal{L}$ существенно самосопряжен в $L^2(M, \mu)$. Аналогичное утверждение доказано для эллиптических операторов с непостоянной частью второго порядка, формально симметричных относительно некоторой меры.

Библиография: 23 названия.

Пусть M — полное риманово многообразие размерности d , и пусть

$$\mathcal{L}_{A,b}\varphi = \operatorname{div}(A\nabla\varphi) + \langle b, \nabla\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(M),$$

где b — измеримое векторное поле на M и A — непрерывное отображение такое, что $A(x)$ есть положительный симметричный оператор на $T_x M$, который в локальных координатах представляется матрицей $(a^{ij})_{i,j \leq d}$ с a^{ij} из соболевского пространства $H_{\text{loc}}^{p,1}$, $p > d$ (см. ниже). В последние годы возрос интерес к эллиптическим уравнениям типа

$$\mathcal{L}_{A,b}^* \mu = 0 \tag{1}$$

для локально конечных борелевских мер μ на M , понимаемым в следующей слабой форме: $a^{ij}, b^j \in L_{\text{loc}}^1(\mu)$ и

$$\int_M \mathcal{L}_{A,b}\varphi d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{2}$$

Одна из мотивировок изучения этого уравнения состоит в том, что оно выполнено для всякой инвариантной меры диффузионного процесса, генератор которого расширяет $\mathcal{L}_{A,b}$. В статьях [1]–[11] и других работах исследование (1) было важным шагом в изучении сингулярных диффузий и ассоциированных полугрупп. Как было показано в [11], для заданной неотрицательной меры μ , удовлетворяющей (1), существует сильно непрерывная суб-марковская полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(M, \mu)$, генератор которой $\tilde{\mathcal{L}}_{A,b}$ расширяет $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ (в симметричном случае этот

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 00-15-99267, 01-01-00858), DFG Grant 436 RUS 113/343/0(R), EU-TMR-Project ERB-FMRX-CT96-0075.

генератор является расширением по Фридрихсу оператора $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$. Однако в общем случае $\tilde{\mathcal{L}}_{A,b}$ не является замыканием $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$. Дело в том, что образ $C_0^\infty(M)$ при $\mathcal{L}_{A,b} - I$ не обязан быть плотным в $L^1(M, \mu)$, что равносильно неединственности сильно непрерывной полугруппы на $L^1(M, \mu)$, генератор которой расширяет $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ (см. [11]). Построенные в [11; пример 1.12] примеры (см. также [6; предложение 3.2, теорема 3.1]) показывают, что это может случиться, даже если μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, удовлетворяющая (1) с $A = \text{Id}$ и $b \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. В частности, в таких примерах образ $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ при $\mathcal{L}_{A,b} - I$ не плотен в $L^p(M, \mu)$ ни для какого $p \geq 1$ (см. также [8] относительно таких примеров с непостоянным гладким A в случае $d = 1$). Однако $\mathcal{L}_{A,b}$ в этих примерах не симметричен. Оказывается, что симметричный случай совершенно отличен (ср. [8]).

В этой работе мы имеем дело с ситуацией, когда $p > d$ и оператор $\mathcal{L}_{A,b}$ симметричен на области $C_0^\infty(M)$ в пространстве $L^2(M, \mu)$ (эта ситуация охарактеризована в лемме 1), и изучаем его $L^p(M, \mu)$ -единственность, т.е. вопрос, обладает ли $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ единственным расширением в $L^p(M, \mu)$, порождающим C_0 -полугруппу на $L^p(M, \mu)$ (что равносильно существенной самосопряженности, если $p = 2$, см. [8; лемма 1.4]). В случае, когда $M = \mathbb{R}^d$ и $A = \text{Id}$, эта задача исследовалась во многих работах (см. [1], [2], [8], [9], [12]–[17] и ссылки в них, см. также [18] относительно $A \neq \text{Id}$). В указанном специальном случае имеются в основном два типа достаточных условий существенной самосопряженности: глобальные и локальные. Типичное глобальное условие, полученное в [16], таково: $|b| \in L^4(\mu)$. Как показано в [19], предположение $|b| \in L^{2p}(\mu)$ влечет $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ -единственность, если $p > 3/2$. Случай непостоянного $A = (a^{ij})$ на $\mathbb{R}^d$ был рассмотрен в [18], где существенная самосопряженность установлена при следующих предположениях: A равномерно ограничено и невырожденно, $a^{ij} \in H_{\text{loc}}^{4,1}(\mathbb{R}^d)$, $\partial_{x_k} a^{ij}$, $|b| \in L^4(\mu)$. Первые локальные достаточные условия существенной самосопряженности сингулярных диффузионных операторов были получены в [13] и [17] в предположении, что b локально ограничено. В работе [2] было показано, что достаточным локальным условием является включение $|b| \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d, dx)$ с некоторым $p > d$, а в [15] локальное условие было еще улучшено, так что в терминах локальной интегрируемости b условие $|b| \in L_{\text{loc}}^d(\mathbb{R}^d, dx)$ (или даже $|b| \in L_{\text{weak,loc}}^d(\mathbb{R}^d, dx)$) оказывается достаточным при $d \geq 4$. Дальнейшие результаты о L^p -единственности были получены в [8], [9], где сочетались локальные и глобальные предположения. Метод, примененный в [2], и другой метод, использованный в [15] при доказательстве существенной самосопряженности, могут быть расширены на случай многообразия. Чтобы получить более тонкие свойства L^p -единственности, мы применим недавний результат из [3] об эллиптической регулярности. Оказывается, что даже в случае симметричного оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ изучение L^p -единственности приводит к общему уравнению (1) (т.е. с несимметричными операторами), причем с ненулевой правой частью (уравнение (3) ниже). Следует подчеркнуть, что оператор $\mathcal{L}_{A,b}$ симметричен относительно меры μ , а не меры Лебега, и потому мы имеем дело с весовыми пространствами $L^p(M, \mu)$, что, конечно, привносит заметное отличие от случая $L^p(M, \lambda_M)$, исследованного гораздо лучше (см. ссылки в [20]).

Наш основной результат состоит в следующем. Предположим, что A равномерно ограничено и невырожденно, коэффициенты a^{ij} входят в класс Соболева $H_{\text{loc}}^{p,1}$ и $|b|$ входит в класс $L_{\text{loc}}^p(M, \lambda_M)$, где $p > d$. Пусть μ – положительная локально ко-

некая борелевская мера на M такая, что оператор $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ симметричен в $L^2(M, \mu)$. Тогда образ $C_0^\infty(M)$ при $\mathcal{L}_{A,b} - I$ плотен в $L^p(M, \mu)$, что, как хорошо известно (см. ниже), влечет $L^p(M, \mu)$ -единственность в нашем случае. Заметим, что в [8], [9] высказано предположение, что в симметричном случае с $A = \text{Id}$ на $\mathbb{R}^d$ имеет место L^p -единственность, если $|b| \in L_{\text{loc}}^{2p}(\mathbb{R}^d)$. Наша теорема влечет более сильное утверждение в случае $p > d$. Одно из отличий этого случая от $p \leq d$ состоит в том, что здесь всякая мера μ , удовлетворяющая (1), имеет строго положительную непрерывную плотность. В случае $A = \text{Id}$ указанный результат можно следующим образом представить как “симметризацию диффузии в потенциальном поле”: дано векторное поле b вида $b = \nabla U$, $U \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$, порождающее оператор $\mathcal{L}\varphi = \Delta\varphi + \langle b, \nabla\varphi \rangle$ на $C_0^\infty(M)$, который формально симметричен относительно меры μ с плотностью $\exp U$; условие $p > d > 1$ достаточно для $L^q(M, \mu)$ -единственности $\mathcal{L}$ при всех $q \in [p', p]$ (в частности, существенной самосопряженности при $q = 2$).

Напомним некоторые обозначения. Пусть λ_M – римановский объем на M , и пусть $H^{p,1}(M)$ – обычный класс Соболева функций ψ на M , которые входят в $L^p(M, \lambda_M)$ вместе с обобщенными градиентами $\nabla\psi$. Пусть $H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$ – класс всех функций ψ на M таких, что $\zeta\psi \in H^{p,1}(M)$ для каждой функции ζ из класса $C_0^\infty(M)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на M с компактными носителями.

Если упомянутое выше отображение A представлено матрицей $(a^{ij})_{i,j \leq d}$ в локальных координатах, причем a^{ij} входят в пространство Соболева $H_{\text{loc}}^{p,1}$ (ясно, что это свойство не зависит от координат), то будем писать $A \in H_{\text{loc}}^{p,1}$. Аналогичным образом будем писать $A \in L_{\text{loc}}^1(M, \mu)$, если функции a^{ij} в локальных координатах локально интегрируемы относительно μ .

Наряду с (1) рассмотрим более общее уравнение

$$\mathcal{L}_{A,b}^* \mu = c\mu \quad (3)$$

для локально конечной меры μ на M , где c – борелевская функция на M , причем $a^{ij}, b^j, c \in L_{\text{loc}}^1(M, \mu)$. Это уравнение понимается в смысле тождества

$$\int_M \mathcal{L}_{A,b} \varphi d\mu = \int_M c\varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Следующий результат доказан в [3] для областей в $\mathbb{R}^d$, но ввиду его полностью локального характера он немедленно переносится на случай многообразия (ср. [7; теорема 1.1(ii)]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – локально конечная борелевская мера на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, удовлетворяющая (3), где коэффициенты a^{ij} непрерывны и принадлежат $H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$, $b^j, c \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$ с некоторым $p > d$ и $\det A > 0$. Тогда $\mu = f_\mu dx$, где f_μ входит в $H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$ и обладает непрерывной версией, которая не обращается в нуль во всяком связном открытом множестве $\Omega_0 \subset \Omega$ таком, что μ неотрицательна, но не равна тождественно нулю на Ω_0 .

Следующая лемма характеризует симметричные операторы $\mathcal{L}_{A,b}$ и хорошо известна в случае гладких коэффициентов.

ЛЕММА 1. Пусть A и b удовлетворяют тем же самым локальным условиям, что и в теореме 1.

- i) Предположим, что μ – неотрицательная борелевская мера на M с плотностью $f_\mu \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Пусть

$$b(x) = A(x) \frac{\nabla f_\mu(x)}{f_\mu(x)}, \quad (4)$$

где мы полагаем $\nabla f_\mu(x)/f_\mu(x) = 0$, если $f_\mu(x) = 0$. Тогда

$$\int_M \psi \mathcal{L}_{A,b} \varphi d\mu = - \int_M \langle A \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle d\mu \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(M) \quad (5)$$

и при $d \geq 2$ оператор $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ симметричен в $L^2(M, \mu)$.

- ii) Обратно, пусть μ – неотрицательная локально конечная (или σ -конечная) борелевская мера на M такая, что $A, b^j \in L_{\text{loc}}^1(M, \mu)$ и

$$\int_M \psi \mathcal{L}_{A,b} \varphi d\mu = \int_M \varphi \mathcal{L}_{A,b} \psi d\mu \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(M).$$

Тогда μ удовлетворяет (1), обладает непрерывной плотностью f_μ класса $H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$ и равенство (4) выполнено μ -п.в.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Заметим, что $\text{div}(A \nabla \varphi), \langle b, \nabla \varphi \rangle \in L^1(M, \mu)$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Пусть λ_M – римановский объем на M . Интегрируя по частям, получаем

$$\int_M \text{div}(A \nabla \varphi) \psi f_\mu d\lambda_M = - \int_M \langle A \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle f_\mu d\lambda_M - \int_M \langle A \nabla \varphi, \nabla f_\mu \rangle \psi d\lambda_M$$

для всех $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$, что дает (5), поскольку $f_\mu b = A \nabla f_\mu$ п.в.

ii) Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$ таковы, что $\psi = 1$ на носителе φ . Тогда $\varphi \mathcal{L}_{A,b} \psi = 0$, что дает (2) ввиду симметричности $\mathcal{L}_{A,b}$. В работе [3] было показано, что мера μ автоматически локально ограничена, даже если она предполагалась лишь σ -конечной. Согласно теореме 1 μ обладает непрерывной плотностью $f_\mu \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Следовательно, для всех $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$ получаем в силу формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_M \psi \mathcal{L}_{A,b} \varphi f_\mu d\lambda_M &= - \int_M \langle A \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle f_\mu d\lambda_M \\ &\quad - \int_M \langle A \nabla \varphi, \nabla f_\mu \rangle \psi d\lambda_M + \int_M \langle b, \nabla \varphi \rangle \psi f_\mu d\lambda_M. \end{aligned}$$

Меняя местами φ и ψ и пользуясь симметричностью $\mathcal{L}_{A,b}$, получаем равенство

$$\int_M \langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla \varphi \rangle \psi d\lambda_M = \int_M \langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla \psi \rangle \varphi d\lambda_M. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\int_M \langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla \zeta \rangle d\lambda_M = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(M),$$

что вытекает из (6), если положить $\varphi = \zeta$ и выбрать ψ так, что $\psi = 1$ на носителе φ . Значит, (6) влечет равенство

$$2 \int_M \langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla \varphi \rangle \psi d\lambda_M = \int_M \langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla(\varphi \psi) \rangle d\lambda_M = 0$$

для произвольных $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$. Пусть теперь $\varphi \in C_0^\infty(M)$ фиксировано. Так как приведенное выше равенство выполняется для всех $\psi \in C_0^\infty(M)$, то имеем $\langle A \nabla f_\mu - f_\mu b, \nabla \varphi \rangle = 0$ п.в. Поскольку можно взять φ так, что $\varphi(x) = x_i$ в локальной карте, заключаем, что $A \nabla f_\mu - f_\mu b = 0$ п.в. Значит, $b = A \nabla f_\mu / f_\mu$ μ -п.в., если положить $\nabla f_\mu / f_\mu = 0$ на множестве $\{f_\mu = 0\}$.

Будем говорить, что упомянутое выше отображение A *удовлетворяет условию (C)*, если найдутся липшицевы функции ζ_k с компактными носителями в M и возрастающие компактные множества S_k , покрывающие M с точностью до множества меры нуль, такие, что

$$0 \leq \zeta_k \leq C, \quad \zeta_k|_{S_k} = 1, \quad |\sqrt{A} \nabla \zeta_k| \leq C,$$

где C — число, не зависящее от k .

Если A равномерно ограничено, то условие (C) выполнено (см., например, [21]).

Для удобства обозначений положим $p' = p/(p-1)$ при $p \in [1, \infty)$.

Напомним, что если неотрицательная мера μ на M удовлетворяет (5), то оператор $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ диссипативен на $L^q(M, \mu)$, где $q \in [1, \infty)$ (см. [8; лемма 1.8]). Значит, $\mathcal{L}_{A,b}$ является $L^q(M, \mu)$ -единственным (в определенном выше смысле) на области $C_0^\infty(M) \subset L^q(M, \mu)$, если и только если множество $(\mathcal{L}_{A,b} - I)(C_0^\infty(M))$ плотно в $L^q(M, \mu)$ (ср. [8; теоремы 1.1, 1.2]). Как уже упоминалось, в случае, когда $(\mathcal{L}_{A,b}, C_0^\infty(M))$ симметричен в $L^2(M, \mu)$, L^2 -единственность равносильна существенной самосопряженности.

Теперь мы можем доказать основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in H_{\text{loc}}^{p,1}$ с $p > d \geq 2$, причем A локально равномерно невырожденно и удовлетворяет условию (C) (например, пусть A равномерно ограничено). Предположим, что μ — мера на M с положительной непрерывной плотностью $f_\mu \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$, и пусть выполнено (4). Тогда для всякого $q \in [p', p]$ множество $(\mathcal{L}_{A,b} - I)(C_0^\infty(M))$ плотно в $L^q(M, \mu)$ и оператор $\mathcal{L}_{A,b}$ является $L^q(M, \mu)$ -единственным на $C_0^\infty(M)$. В частности, $\mathcal{L}_{A,b}$ существенно самосопряжен на области $C_0^\infty(M)$ в $L^2(M, \mu)$. Если $d = 1$, то $\mathcal{L}_{A,b}$ является $L^q(M, \mu)$ -единственным на $C_0^\infty(M)$ при всех $q \in (1, p]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим сначала более сложный случай $q > 2$. Кроме того, будем иметь дело со случаем $d \geq 2$; случай $d = 1$ значительно проще. Предположим, что существует функция $g \in L^r(M, \mu)$, где $r = q'$, такая, что

$$\int_M (\mathcal{L}_{A,b} - I)\psi(x)g(x) \mu(dx) = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(M). \quad (7)$$

Мы намерены показать, что $g = 0$. Идея, стоящая за этим доказательством, стандартна: если бы можно было взять $\psi = g|g|^{r-2}$ и проинтегрировать по частям, мы бы получили слева сумму двух неотрицательных выражений, одно из которых

есть интеграл от $|g|^r$. Однако воплощение этой идеи отнюдь не очевидно, так как функция $|g|^{r-2}$ может быть недостаточно хорошей, и приводимое доказательство является некоторым обходным путем, в основе которого лежит наш результат об эллиптической регулярности. Следует отметить, что во многих работах по существенной самосопряженности эллиптических операторов приходится обосновывать интегрирование по частям, для чего привлекаются известные или специально доказываемые вспомогательные результаты о регулярности решений эллиптических уравнений. Прежде всего заметим, что g обладает некоторой локальной соболевской дифференцируемостью. В самом деле, мера $g \cdot \mu$ с плотностью gf_μ удовлетворяет уравнению $(\mathcal{L}_{A,b} - I)^*(g \cdot \mu) = 0$, т.е. уравнению (3) с функцией $c = 1$. Заметим, что уравнение имеет смысл, так как $|b| \in L^1_{\text{loc}}(M, g \cdot \mu)$, поскольку $r \geq p'$. Согласно теореме 1 имеем $gf_\mu \in H^{p,1}_{\text{loc}}(M)$. Ясно, что $g = gf_\mu / f_\mu \in H^{p,1}_{\text{loc}}(M)$. Следовательно, можно взять $\psi = \varphi \zeta$ с $\varphi, \zeta \in C^\infty_0(M)$ и проинтегрировать по частям в (7), что дает

$$\int_M \zeta \varphi g d\mu + \int_M \langle A \nabla g, \nabla(\zeta \varphi) \rangle d\mu = 0,$$

откуда получаем

$$\int_M \zeta \varphi g d\mu + \int_M \langle A \nabla(\zeta g), \nabla \varphi \rangle d\mu = \int_M \langle A \nabla \zeta, \nabla \varphi \rangle g d\mu - \int_M \langle A \nabla \zeta, \nabla g \rangle \varphi d\mu. \quad (8)$$

Теперь заметим, что равенство (8) остается в силе для каждой функции $\varphi \in H^{2,1}_0(M)$ и каждой липшицевой функции ζ , поскольку $g \in H^{p,1}_{\text{loc}}(M)$ и $p > d \geq 2$. Зафиксируем $\delta > 0$ и возьмем

$$\varphi = \zeta g(|\zeta g| + \delta)^{r-2},$$

где $\zeta = \theta^{2/r}$ и θ — неотрицательная липшицева функция с компактным носителем (поскольку $r < 2$, то функция $\theta^{2/r}$ также липшицева с компактным носителем). Тогда

$$\nabla \varphi = (|\zeta g| + \delta)^{r-2} \nabla(\zeta g) + (r-2) \zeta g (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \nabla|\zeta g|.$$

Заметим, что $\varphi \in H^{2,1}_{\text{loc}}(M)$ и что отображение

$$\zeta^{r/2-1} \nabla \zeta = \frac{2}{r} \nabla \theta \quad (9)$$

ограничено. Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_M |\zeta g|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu + \int_M |\sqrt{A} \nabla(\zeta g)|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu \\ & + (r-2) \int_M \zeta g (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla(\zeta g), \nabla|\zeta g| \rangle d\mu \\ & = \int_M \langle A \nabla \zeta, \nabla(\zeta g) \rangle g (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu \\ & + (r-2) \int_M \zeta g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla \zeta, \nabla|\zeta g| \rangle d\mu \\ & - \int_M \langle A \nabla \zeta, \nabla g \rangle \zeta g (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu \\ & = \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu \\ & + (r-2) \int_M \zeta g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla \zeta, \nabla|\zeta g| \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Заметим, что для всякого $c > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \left| \int_M \zeta g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla \zeta, \nabla |\zeta g| \rangle d\mu \right| \\ &= \left| \frac{2}{r} \int_M \zeta g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r/2-2} \langle A \nabla \zeta, \nabla (|\zeta g| + \delta)^{r/2} \rangle d\mu \right| \\ &\leq \frac{c}{r} \int_M \zeta^2 g^4 |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-4} d\mu + \frac{1}{rc} \int_M |\sqrt{A} \nabla (|\zeta g| + \delta)^{r/2}|^2 d\mu. \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку мы имеем п.в.

$$|\sqrt{A} \nabla (\zeta g)| = |\sqrt{A} \nabla |\zeta g||, \quad \zeta g \sqrt{A} \nabla (\zeta g) = |\zeta g| \sqrt{A} \nabla |\zeta g|$$

и $(r-2)|\zeta g|(|\zeta g| + \delta)^{-1} \geq r-2$ (ввиду $r < 2$), что дает оценку

$$\begin{aligned} (r-2)\zeta g (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla (\zeta g), \nabla |\zeta g| \rangle &= (r-2)|\zeta g| (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla |\zeta g|, \nabla |\zeta g| \rangle \\ &\geq (r-2)(|\zeta g| + \delta)^{r-2} \langle A \nabla |\zeta g|, \nabla |\zeta g| \rangle, \end{aligned}$$

то мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_M |\sqrt{A} \nabla (\zeta g)|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu + (r-2) \int_M \zeta g (|\zeta g| + \delta)^{r-3} \langle A \nabla (\zeta g), \nabla |\zeta g| \rangle d\mu \\ &\geq (r-1) \int_M (|\zeta g| + \delta)^{r-2} \langle A \nabla |\zeta g|, \nabla |\zeta g| \rangle d\mu \\ &= 4 \frac{r-1}{r^2} \int_M |\sqrt{A} \nabla (|\zeta g| + \delta)^{r/2}|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} & \int_M |\zeta g|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu + 4 \frac{r-1}{r^2} \int_M |\sqrt{A} \nabla (|\zeta g| + \delta)^{r/2}|^2 d\mu \\ &\leq \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 g^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu + c \frac{2-r}{r} \int_M \zeta^2 g^4 |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-4} d\mu \\ &\quad + \frac{2-r}{rc} \int_M |\sqrt{A} \nabla (|\zeta g| + \delta)^{r/2}|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $c = r(2-r)/(4(r-1))$. Тогда, поскольку $|\zeta g|^2 \leq (|\zeta g| + \delta)^2$, имеем

$$\int_M |\zeta g|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu \leq \left(1 + \frac{(2-r)^2}{4(r-1)}\right) \int_M g^2 |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 (|\zeta g| + \delta)^{r-2} d\mu.$$

При $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$\int_M |\zeta g|^r d\mu \leq \left(1 + \frac{(2-r)^2}{4(r-1)}\right) \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 \zeta^{r-2} |g|^r d\mu. \quad (10)$$

Заметим, что интеграл в правой части конечен в силу (9). Теперь воспользуемся предположением о существовании липшицевых функций θ_k с компактными носителями и возрастающих компактных множеств S_k , покрывающих M с точностью до множества меры нуль, таких, что

$$0 \leq \theta_k \leq C, \quad \theta_k|_{S_k} = 1, \quad |\sqrt{A} \nabla \theta_k| \leq C,$$

где C – число, не зависящее от k . Пусть $\zeta_k = \theta_k^{2/r}$. Тогда ввиду (9) функции $|\sqrt{A} \nabla \zeta_k|^2 \zeta_k^{r-2}$ равномерно ограничены и сходятся к нулю почти всюду, поскольку $\zeta_k|_{S_k} = 1$ и $\nabla \zeta_k = 0$ почти всюду на S_k . Следовательно, при $k \rightarrow \infty$ правые части (10) с ζ_k вместо ζ сходятся к нулю, а левые части сходятся к интегралу от $|g|^r$. Значит, $g = 0$ п.в.

Рассмотрим теперь случай $q \in [p', 2]$, который проще, так как $r \geq 2$ и не приходится вводить функции с параметром δ . Как и на предыдущем этапе, функция g входит в $H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Равенство (8) справедливо для всякой липшицевой функции ζ с компактным носителем и всякой функции $\varphi \in H_{\text{loc}}^{p',1}(M)$, что получается очевидным предельным переходом из равенства для функций класса $C_0^\infty(M)$. В качестве φ теперь возьмем $\varphi = \zeta g |\zeta g|^{r-2}$. Это возможно, поскольку $|\nabla \varphi| \leq (r-1)|\zeta g|^{r-2} |\nabla |\zeta g||$, выполняется условие $r \leq p$ (равносильное $q \geq p'$) и справедливо включение $g \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Как и выше, из (8) получаем

$$\begin{aligned} & \int_M |\zeta g|^r d\mu + (r-1) \int_M |\zeta g|^{r-2} \langle A \nabla (|\zeta g|), \nabla |\zeta g| \rangle d\mu \\ &= \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 |g|^r \zeta^{r-2} d\mu + (r-2) \int_M \zeta^{r-2} |g|^{r-1} \langle A \nabla \zeta, \nabla |\zeta g| \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Если $r = 2$, то доказательство завершается аналогично предыдущему этапу. При $r > 2$ ввиду оценки

$$\zeta^{r-2} |g|^{r-1} \langle A \nabla \zeta, \nabla |\zeta g| \rangle \leq \varepsilon \zeta^{r-2} |g|^r |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta^{r-2} |g|^{r-2} |\sqrt{A} \nabla |\zeta g||^2$$

с $\varepsilon = (r-2)/(r-1)$ правая часть полученного неравенства не превосходит

$$\begin{aligned} & \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 |g|^r \zeta^{r-2} d\mu + (r-2) \frac{r-2}{r-1} \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 |g|^r \zeta^{r-2} d\mu \\ &+ (r-1) \int_M \zeta^{r-2} |g|^{r-2} |\sqrt{A} \nabla |\zeta g||^2 d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_M |\zeta g|^r d\mu \leq \left(1 + \frac{(r-2)^2}{r-1}\right) \int_M |\sqrt{A} \nabla \zeta|^2 |g|^r \zeta^{r-2} d\mu.$$

Теперь остается взять последовательность липшицевых функций θ_k с компактными носителями и последовательность возрастающих компактных множеств S_k , покрывающих M с точностью до множества меры нуль, таких, что $0 \leq \zeta_k \leq C$, $\zeta_k|_{S_k} = 1$, $|\sqrt{A} \nabla \zeta_k| \leq C$, и заметить, что правая часть последнего неравенства при подстановке $\zeta = \zeta_k$ стремится к нулю, а левая – к интегралу от $|g|^r$. Наконец, такие же рассуждения применимы и в случае $d = 1$, $q > 1$, так как функция g здесь будет непрерывной и потому локально ограниченной.

Ясно, что если $a^{ij} \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$ и $b^i \in L_{\text{loc}}^p(M)$ при всех $p > 1$, то получаем $L^q(M, \mu)$ -единственность при всех $q \in (1, +\infty)$ (разумеется, при невырожденности A и выполнении условия (C)). В частности, так обстоит дело, если A локально липшицево и b локально ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. i) Утверждение теоремы 2 можно распространить на операторы

$$\mathcal{L}\varphi = \operatorname{div}(A\nabla\varphi) + \left\langle A\frac{\nabla f_\mu}{f_\mu} + u, \nabla\varphi \right\rangle + V\varphi,$$

где u – измеримое векторное поле и V – измеримая функция, удовлетворяющие подходящим условиям. Как отмечено выше, в [6] имеются примеры, показывающие, что недостаточно предполагать, что $u, V \in C^\infty$. Заметим также, что наши предположения относительно A не являются оптимальными, но некоторые ограничения на рост нормы $A(x)$ необходимы, даже если $b = 0$. Примеры, построенные в [20], показывают, что оператор $\mathcal{L}_{A,0}$ не обязан быть существенно самосопряженным на $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$, где $\mu = \lambda$ – мера Лебега, если $d \geq 2$ и норма $A(x)$ имеет достаточно быстрый рост на бесконечности.

ii) Если мера μ конечна, то $L^p(M, \mu)$ -единственность для некоторого $p > 1$ влечет $L^1(M, \mu)$ -единственность. Для бесконечных мер положение иное. Например, пусть $d = 1$, $A(x) = 1$, $\mu = e^x dx$, $b(x) = 1$. Тогда согласно [8; следствие 2.1, теорема 2.2] имеем $L^p(\mathbb{R}^1, \mu)$ -единственность для оператора $\mathcal{L}_{1,1}$ при всех $p \in (1, \infty)$, но нет $L^1(\mathbb{R}^1, \mu)$ -единственности. Однако при подходящих ограничениях на рост мер шаров относительно $\mu = f dx$ имеет место $L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$ -единственность $\mathcal{L}_{I, \nabla f/f}$ при более слабых, чем использованные выше, предположениях о локальной интегрируемости $\nabla f/f$ (см. [15]; относительно полной характеристики $L^1(\mathbb{R}^1, \mu)$ -единственности в предположении, что $\mu = \varphi^2 dx$, $\varphi \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\mathbb{R}^1)$, см. [11]).

iii) Если μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$ с плотностью φ^2 , где $\varphi \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$, то имеет место так называемая марковская единственность (т.е. единственность марковской полугруппы на $L^2(\mu)$ с генератором, заданным посредством $Lf = \Delta f + \langle \nabla f, \beta \rangle$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$) (см. [22]). Однако в общем случае марковская единственность слабее, чем существенная самосопряженность L на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (см. обзор в [8], а также [23], [22]). Оптимальные (локальные или глобальные) условия существенной самосопряженности и L^p -единственности остаются неизвестными, кроме одномерного случая, исследованного в [17] и [8] (где дана полная характеристика существенной самосопряженности). В частности, неясно, существует ли свободное от размерности локальное условие интегрируемости на b для $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ -единственности симметричного оператора $\mathcal{L}_{I,b}$.

Эта работа была завершена во время очень приятного и стимулирующего пребывания обоих авторов в Высшей нормальной школе в Пизе. Мы весьма признательны Дж. Да Прато за эту замечательную возможность. Мы благодарны также рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Albeverio S., Bogachev V., Röckner M. On uniqueness of invariant measures for finite- and infinite-dimensional diffusions // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 325–362.
2. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic regularity and essential self-adjointness of Dirichlet operators // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1997. V. 24. №3. P. 451–461.
3. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions // Comm. Partial Differential Equations. 2001. V. 26. №11–12. P. 2037–2080.
4. Bogachev V. I., Röckner M. Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications // J. Funct. Anal. 1995. V. 133. P. 168–223.

5. *Богачев В. И., Рёкнер М.* Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов // Теория вероятностей и ее прим. 2000. Т. 45. №3. С. 417–436.
6. *Богачев В. И., Рёкнер М., Штаннат В.* Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий // Матем. сб. 2002. Т. 193. №7. С. 3–36.
7. *Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y.* Elliptic equations for invariant measures on finite and infinite dimensional manifolds // J. Math. Pures Appl. (9). 2001. V. 80. №2. P. 177–221.
8. *Eberle A.* Uniqueness and non-uniqueness of semigroups generated by singular diffusion operators. New York: Springer-Verlag, 1999. (Lecture Notes in Math. V. 1718.)
9. *Eberle A.* L^p uniqueness of non-symmetric diffusion operators with singular drift coefficients. I. The finite-dimensional case // J. Funct. Anal. 2000. V. 173. №2. P. 328–342.
10. *Жиков В. В., Сиражудинов М. М.* Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Матем. сб. 1981. Т. 116. №2. С. 166–186.
11. *Stannat W.* (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1 : existence, uniqueness and associated Markov processes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1999. V. 28. №1. P. 99–140.
12. *Albeverio S., Høegh-Krohn R., Streit L.* Energy forms, Hamiltonians and distorted Brownian paths // J. Math. Phys. 1977. V. 18. №5. P. 907–917.
13. *Frehse J.* Essential self-adjointness of singular elliptic operators // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1977. V. 8. №2. P. 87–107.
14. *Fukushima M.* On a stochastic calculus related to Dirichlet forms and distorted Brownian motion // Phys. Rep. 1981. V. 77. №3. P. 255–262.
15. *Liskevich V. A.* On the uniqueness problem for Dirichlet operators // J. Funct. Anal. 1999. V. 162. P. 1–13.
16. *Liskevich V. A., Semenov Yu. A.* Dirichlet operators: a priori estimates and the uniqueness problem // J. Funct. Anal. 1992. V. 109. P. 199–213.
17. *Wielens N.* The essential self-adjointness of generalized Schrödinger operators // J. Funct. Anal. 1985. V. 61. P. 98–115.
18. *Liskevich V. A., Tuv E. W.* A priori estimates for second order elliptic operators and their applications // Israel J. Math. 1993. V. 81. P. 257–263.
19. *Liskevich V. A.* Smoothness estimates and uniqueness for the Dirichlet operator // Mathematical results in quantum mechanics (Blossin, 1993). Basel: Birkhäuser, 1994. P. 149–152. (Oper. Theory Adv. Appl. V. 70.)
20. *Davies E. B.* L^1 -properties of second order elliptic differential operators // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17. P. 417–436.
21. *Strichartz R. S.* Analysis of Laplacian on the complete Riemannian manifold // J. Funct. Anal. 1983. V. 52. P. 48–79.
22. *Röckner M., Zhang T. S.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators. II // J. Funct. Anal. 1994. V. 119. P. 455–467.
23. *Cattiaux P., Fradon M.* Entropy, reversible diffusion processes, and Markov uniqueness // J. Funct. Anal. 1996. V. 138. №1. P. 243–272.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Universität Bielefeld, Germany
E-mail: vbogach@mech.math.msu.su, roeckner@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступила в редакцию
20.01.2003