Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, О поперечниках классов функций, аналитических в круге, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 8, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:19:28

УДК 517.538.5

С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов

О поперечниках классов функций, аналитических в круге

В банаховых пространствах $\mathcal{L}_{p,\gamma}$ и $B_{p,\gamma}$, $1 \leq p < \infty$, с весом γ вычислены точные значения некоторых n -поперечников классов $W_{p,R}^m(\Psi)$, $m \in \mathbb{N}$, $R \geq 1$. Эти классы состоят из функций f , аналитических в круге радиуса R , у которых производные m -го порядка $f^{(m)}$ принадлежат пространству Харди $H_{p,R}$ и имеют для своих угловых граничных значений усредненные модули гладкости второго порядка, мажорируемые в системе точек $\{\pi/(2k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ заданной функцией Ψ . Для классов $W_{p,R}^m(\Psi)$ построены наилучшие линейные методы приближения в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$. Также рассмотрены экстремальные задачи смежного содержания.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: весовая функция, наилучший линейный метод приближения, оптимальный метод восстановления функции, наилучший метод кодирования функции.

§ 1. Введение

Вычислению точных значений различных n -поперечников классов функций, аналитических в круге, посвящен целый ряд работ (см., например, [1]–[23]). Первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n -поперечников в пространстве Харди, принадлежат В. М. Тихомирову [1] и Л. В. Тайкову [2]. Однако, следует отметить, что ранее в работе К. И. Бабенко [3] был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в круге $|z| < 1$, пригодный для оценок поперечников сверху и использованный позднее Тихомировым, Тайковым и другими в своих исследованиях. В последующих работах Тайкова [4] и Н. Айнуллоева и Тайкова [5] в метрике пространства Харди были получены точные значения n -поперечников в смысле Колмогорова некоторых классов функций, аналитических в единичном круге, граничные значения которых допускают представление сверткой, либо усредненный модуль гладкости их граничных значений мажорируется заданной функцией. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах М. З. Двейрина [6], Ю. А. Фаркова [7], [8], С. Д. Фишера и М. И. Стесина [9], А. Пинкуса [10], авторов [11]–[17]. Особый интерес представляет построение наилучших линейных методов приближения классов функций и связанные с этим задачи вычисления точных значений линейных n -поперечников. Отметим, что в этом направлении уже получен ряд окончательных результатов (см., например, [3], [7], [8], [10; гл. VIII, § 2], [18]–[23]).

Целью настоящей статьи является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений различных n -поперечников классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geq 1$, и построение наилучших линейных методов приближения рассматриваемых классов.

Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $U_R \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса R в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при $0 < \rho < R$ положим

$$M_p(f, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty; \\ \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\rho e^{it})|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{p,R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $R \geq 1$, обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{p,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_p(f, \rho).$$

Норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{p,R}$, т.е.

$$\|f\|_{H_{p,R}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^p dt \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty; \\ \text{ess sup}_{0 \leq t < 2\pi} |f(Re^{it})|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U \stackrel{\text{def}}{=} U_1$, $H_p \stackrel{\text{def}}{=} H_{p,1}$ и $\|f\|_{H_p} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{H_{p,1}}$.

Через $\mathcal{L}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_p(U)$, $1 \leq p < \infty$, обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_U |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^p dt d\rho \right)^{1/p},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|)$ – некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулевой функция, суммируемая на множестве U . Через $\mathcal{L}_{p,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_p(U, \gamma)$, $1 \leq p < \infty$, обозначим множество комплекснозначных в U функций f , для которых

$$\gamma^{1/p} f \in \mathcal{L}_p(U), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Под $B_{p,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} B_p(U, \gamma)$, $1 \leq p < \infty$, понимаем банахово пространство функций f из $A(U)$ таких, что $f \in \mathcal{L}_{p,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_p^p(f, \rho) d\rho \right)^{1/p}.$$

В частном случае $\gamma \equiv 1$ пространство $B_p \stackrel{\text{def}}{=} B_{p,1}$ является известным пространством Бергмана. Широкое распространение весовых пространств во многом обусловлено фундаментальными результатами Харди и Литтлвуда о поведении средних $M_p(f, \rho)$, $0 < \rho < 1$, при различных предположениях относительно функции $f \in A(U)$ (см., например, [24; § 1]). Отметим, что пространства $B_{p,\gamma}$ рассматривались в работе М. Ш. Шабозова и О. Ш. Шабозова [25].

Специальный выбор весовой функции γ позволяет получать пространства $B_{p,\gamma}$ аналитических в U функций с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы $|z| = 1$ круга U по сравнению с функциями, принадлежащими пространству B_p . В качестве подтверждения сказанного рассмотрим, например, весовую функцию

$$\gamma_\zeta(|z|) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - |z|)^\zeta,$$

где $\zeta > 0$ – произвольное конечное число. Воспользуемся одной леммой, полученной М. И. Гварадзе, сформулировав ее в удобном для нас виде.

ЛЕММА А (см. [26; гл. 1, § 1, лемма 1.3]). *Если*

$$f_\tau(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^\tau z^{n_k},$$

где $\tau > 0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$1 < d \leq \frac{n_{k+1}}{n_k} < D < \infty,$$

где d, D – константы, не зависящие от k , то при любом $1 \leq p \leq \infty$ верна оценка

$$c_1(1 - \rho)^{-\tau} \leq M_p(f_\tau, \rho) \leq c_2(1 - \rho)^{-\tau}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (1)$$

Здесь c_1 и c_2 – константы, зависящие от τ, d, D и не зависящие от ρ .

Соотношение (1) можно записать еще и следующим образом:

$$M_p(f_\tau, \rho) \asymp (1 - \rho)^{-\tau}, \quad (2)$$

где символ $\asymp$ обозначает отношение слабой эквивалентности. Очевидно, что $f_\tau \in A(U)$. Используя (2), имеем

$$\|f_\tau\|_{B_p}^p \asymp \int_0^1 \rho(1 - \rho)^{-\tau p} d\rho. \quad (3)$$

При $0 < \tau < 1/p$ интеграл в правой части соотношения (3) существует и равен бета-функции $B(2, 1 - \tau p)$. В случае $\tau \geq 1/p$ указанный интеграл расходится. Следовательно, функции f_τ , $\tau \geq 1/p$, удовлетворяющие условиям леммы А, не являются элементами пространства B_p . Так как в силу (2)

$$\|f_\tau\|_{B_{p,\gamma_\zeta}}^p \asymp \int_0^1 \rho(1 - \rho)^{\zeta - \tau p} d\rho, \quad (4)$$

то очевидно, что интеграл в правой части соотношения (4) существует при $0 < \tau < (1 + \zeta)/p$. Это означает, что для указанных значений τ функции f_τ , удовлетворяющие условиям леммы А, принадлежат пространству B_{p,γ_ζ} . Однако из вышеприведенного следует, что функции f_τ при $1/p \leq \tau < (1 + \zeta)/p$ уже не являются элементами пространства B_p .

Пусть X – банахово пространство, S – единичный шар в нем, K – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X , $L_n \subset X$ – n -мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n , $\Lambda: X \rightarrow L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n .

Приближение фиксированного множества $K \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(K, L_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n\} : f \in K\}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(K, L_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\sup\{\|f - \Lambda(f)\|_X : f \in K\} : \Lambda X \subset L_n\} \quad (5)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества K элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор Λ^* , $\Lambda^*X \subset L_n$, если он существует, реализующий в (5) точную нижнюю грань, т.е. такой, что

$$\mathcal{E}(K, L_n)_X = \sup\{\|f - \Lambda^*(f)\|_X : f \in K\},$$

является наилучшим для K линейным методом приближения.

Величины

$$d_n(K, X) = \inf\{E(K, L_n)_X : L_n \subset X\}, \quad (6)$$

$$d^n(K, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in K \cap L^n\} : L^n \subset X\},$$

$$b_n(K, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset K\} : L_{n+1} \subset X\},$$

$$\delta_n(K, X) = \inf\{\mathcal{E}(K, L_n)_X : L_n \subset X\}$$

называют соответственно *колмогоровским*, *гельфандовским*, *бернштейновским* и *линейным n -поперечниками* (см., например, [10; гл. II, § 1–4], [27; гл. 3, § 1], [28; гл. 1, § 1.1]).

Если существует подпространство $L_n^* \subset X$, $\dim L_n^* = n$, на котором нижняя грань в (6) достигается, т.е. $d_n(K, X) = E(K, L_n^*)_X$, то L_n^* называют *экстремальным подпространством* для $d_n(K, X)$. Экстремальное подпространство L_n^* является наилучшим аппаратом приближения множества K в классе всех подпространств $\{L_n\} \subset X$.

Подпространство $\tilde{L}_n \subset X$, $\dim \tilde{L}_n = n$, если оно существует, для которого

$$\delta_n(K, X) = \mathcal{E}(K, \tilde{L}_n)_X,$$

называют *экстремальным* для $\delta_n(K, X)$. Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\hat{L}_n \subset X$, $\dim \hat{L}_n = n$, таких, что

$$E(K, \hat{L}_n)_X = \mathcal{E}(K, \hat{L}_n)_X = d_n(K, X) = \delta_n(K, X).$$

Если существует подпространство $\bar{L}_{n+1} \subset X$, $\dim \bar{L}_{n+1} = n+1$, для которого

$$b_n(K, X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \bar{L}_{n+1} \subset K\},$$

то оно является экстремальным для $b_n(K, X)$.

Подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n , если оно существует, такое, что

$$d^n(K, X) = \sup\{\|f\|_X : f \in K \cap L_*^n\},$$

называют *экстремальным* для $d^n(K, X)$.

Напомним, что между перечисленными выше n -поперечниками имеют место следующие соотношения

$$b_n(K, X) \leq \frac{d_n(K, X)}{d^n(K, X)} \leq \delta_n(K, X). \quad (7)$$

§ 2. Формулировка основных результатов

Символом $f^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим производную m -го порядка по переменной z функции $f \in A(U_R)$, т.е. $f^{(m)}(z) = df^{(m)}(z)/dz^m$.

Для произвольной функции $f \in H_{p,R}$ запишем модуль непрерывности второго порядка

$$\begin{aligned} \omega_2(f, 2t)_{H_{p,R}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|x| \leq t, x \in \mathbb{R}} \|f(ze^{ix}) - 2f(z) + f(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}} \\ &= \sup_{|x| \leq t, x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i(\tau+x)}) - 2f(Re^{i\tau}) + f(Re^{i(\tau-x)})|^p d\tau \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Всюду далее полагаем, что $\Psi(t)$, $t \geq 0$, есть произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Используя Ψ в качестве мажорирующей функции (мажоранты), рассмотрим следующие классы функций

$$\begin{aligned} W_{p,R}^m(\Psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in A(U_R) : f^{(m)} \in H_{p,R}, \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \leq \Psi\left(\frac{\pi}{2k}\right), k \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $R \geq 1$. В случае $R = 1$ полагаем

$$W_p^m(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} W_{p,1}^m(\Psi).$$

Из результатов Тайкова [4; теорема 4], в частности, следует, что если мажоранта $\Psi(t)$ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Psi(\lambda t)}{\Psi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \frac{2 \sin(\lambda\pi/2)}{\lambda\pi}, & \text{если } 0 < \lambda \leq 2; \\ 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), & \text{если } \lambda \geq 2, \end{cases} \quad (8)$$

то для любого натурального числа $n > m$ при $1 \leq p \leq \infty$ справедливы равенства

$$b_n(W_p^m(\Psi), H_p) = d_n(W_p^m(\Psi), H_p) = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right),$$

где $\alpha_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1) \cdots (n-m+1)$. В [4] также показано, что ограничению (8) удовлетворяет, например, функция $\Psi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}$.

С нашей точки зрения, определенный интерес представляет вычисление точных значений перечисленных в § 1 экстремальных характеристик классов $W_{p,R}^m(\Psi)$, $R \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{p,\gamma}$, продолжающие исследования, начатые Тайковым в работе [4].

Конкретизируем экстремальные подпространства L_n^* , L_*^n , $\bar{L}_{n+1}$ и наилучший линейный метод приближения Λ^* , о которых шла речь в § 1. Для этого

ПОЛОЖИМ

$$L_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \left\{ \{z^j\}_{j=0}^{m-1}, \right. \\ \left. \left\{ \left[R^{2(n-j)} + \frac{\alpha_{j,m}}{\alpha_{2n-j,m}} \left[\sigma_{j,m} \left(1 - \left(\frac{j-m}{2n-m-j} \right)^2 \right) - 1 \right] |z|^{2(n-j)} \right] z^j \right\}_{j=m}^{n-1} \right\}, \\ \Lambda_{n-1}^*(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f) z^j \\ + \sum_{j=m}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_{j,m}}{\alpha_{2n-j,m}} \left[\sigma_{j,m} \left(1 - \left(\frac{j-m}{2n-m-j} \right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \right\} c_j(f) z^j,$$

где

$$\sigma_{j,m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2(n-m)}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} (1 - \sin(n-m)x) \cos(j-m)x \, dx, \quad j \geq m, \\ L_*^n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \, k = \overline{0, n-1}\}, \\ \overline{L}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ и мажоранта Ψ удовлетворяет ограничению (8). Тогда для любого натурального числа $n > m$ имеют место следующие равенства

$$b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) = b_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) = d^n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) \\ = d_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = \delta_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = E(W_{p,R}^m(\Psi); L_n^*)_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} \\ = \mathcal{E}(W_{p,R}^m(\Psi); L_n^*)_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} = \sup\{\|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} : f \in W_{p,R}^m(\Psi)\} \\ = \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) \, d\rho\right)^{1/p}. \quad (9)$$

При этом:

- 1) в случае n -поперечников $d_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma})$ и $\delta_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma})$ подпространство L_n^* является экстремальным для класса $W_{p,R}^m(\Psi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$;
- 2) линейный непрерывный оператор Λ_{n-1}^* является наилучшим для класса $W_{p,R}^m(\Psi)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$;
- 3) подпространство L_*^n – экстремальное для n -поперечника $d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma})$;
- 4) экстремальным для n -поперечника $b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma})$ является подпространство $\overline{L}_{n+1}$.

В случае функций вещественной переменной вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах рассматривались в разное время А. В. Ефимовым, А. Ф. Тиманом, Н. П. Корнейчуком, В. И. Бердышевым, С. Милорадовичем, С. А. Теляковским, А. И. Степанцом и многими другими. Задача подобного рода представляет определенный интерес и для аналитических функций (см., например, [24; § 9]).

Напомним, что для произвольной функции $f \in A(U)$ ее коэффициенты Тейлора $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определяются формулой

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \xi^{-(n+1)} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \rho < R.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При выполнении условий теоремы 1 имеет место следующее равенство:

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^m(\Psi)\} = \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right), \quad (10)$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, $R \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.

§ 3. Доказательство основных результатов

3.1. Доказательство теоремы 1. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ такой, что $f^{(m)} \in H_{p,R}$, имеет место следующее представление (см. [10; гл. VIII, § 2]):

$$f(\rho e^{it}) - \Omega_{n-1}(f, \rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(m)}(R e^{i\theta}) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta, \quad (11)$$

$$0 < \rho < R, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

где

$$G_R(\rho, t) \stackrel{\text{def}}{=} R^m \left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{int} \left(\frac{1}{\alpha_{n,m}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \frac{\cos kt}{\alpha_{k+n,m}} \right), \quad (12)$$

$$\Omega_{n-1}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f) z^j + \sum_{j=m}^{n-1} c_j(f) z^j \left(1 - \frac{\alpha_{j,m}}{\alpha_{2n-j,m}} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-j)} \right), \quad (13)$$

которое проверяется непосредственным образом путем несложных вычислений. Отметим, что всюду далее интеграл понимается в смысле Лебега, а функция (12) выражается через ядро Бабенко (см. [3])

$$B_{n,m}(\rho, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha_{n,m}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\alpha_{k+n,m}} \cos kt,$$

которое впервые встречается при доказательстве леммы 5 из работы [3]. Напомним, что ядро $B_{n,m}$ генерирует не только метод аппроксимации $f(z) \approx \Omega_{n-1}(f, z)$, но также метод восстановления значений функций из классов Харди–Соболева в круге U_R по тейлоровской информации и экстремальные методы для линейных n -поперечников некоторых классов голоморфных функций с ограниченными производными в шаре из $\mathbb{C}^d$ и в ограниченных симметричных областях трубчатого типа (см., например, [29], [30]).

Для произвольного элемента $\psi \in H_{p,R}$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathcal{F}(\psi, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} (\psi(z e^{ix}) + \psi(z e^{-ix})) (1 - \sin(n-m)x) dx, \quad z \in U_R. \quad (14)$$

Вид вспомогательной функции (14) был предложен Тайковым [4] при получении оценки сверху наилучшего полиномиального приближения функции $f \in H_p$ через усредненный модуль непрерывности второго порядка в метрике пространства H_p . Можно убедиться в том, что $\mathcal{F}(\psi) \in H_{p,R}$. Полагая $\psi \equiv f^{(m)}$, соотношение (14) перепишем в виде

$$\mathcal{F}(f^{(m)}, z) = \sum_{k=m}^{\infty} \sigma_{k,m} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m}. \quad (15)$$

Обозначим производную s -го, $s \in \mathbb{N}$, порядка функции $g \in H_{p,R}$, вычисленную по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, символом $g_a^{(s)}$. При этом

$$\begin{aligned} g_a^{(1)}(z) &= \frac{\partial g(z)}{\partial t} = \frac{dg(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = g^{(1)}(z) z i, \\ g_a^{(s)}(z) &= \{g_a^{(s-1)}\}_a^{(1)}, \quad s \geq 2. \end{aligned}$$

Пусть

$$H_{p,R,a}^s \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in A(U_R) : g_a^{(s)} \in H_{p,R}\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно показать, что имеет место включение $H_{p,R,a}^s \subset H_{p,R}$. Если функция $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) z^k$ принадлежит классу $H_{p,R,a}^2$, то в силу [20; лемма 1] для произвольного $z \in U_R$ справедливо равенство

$$g(z) - V_{n-m-1,2}(g, z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_a^{(2)}(ze^{-it}) e^{i(n-m)t} Q_{2,n-m}(t) dt, \quad (16)$$

где

$$V_{n-m-1,2}(g, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-m-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-m)-k}\right)^2\right) c_k(g) z^k, \quad (17)$$

$$Q_{2,n-m}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2(n-m)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jt}{(n-m+j)^2}. \quad (18)$$

Воспользовавшись (15) и (17), запишем многочлен

$$V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), z) = \sum_{k=0}^{n-m-1} \sigma_{k+m,m} \alpha_{k+m,m} c_{k+m}(f) \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-m)-k}\right)^2\right) z^k. \quad (19)$$

Используя (12), (19) и учитывая, что $z = \rho e^{it}$, $0 < \rho < R$, построим полином

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{n-1}(f, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), Re^{i\theta}) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_{k,m} \frac{\alpha_{k,m}}{\alpha_{2n-k,m}} \left(1 - \left(\frac{k-m}{2n-m-k}\right)^2\right) \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)} c_k(f) z^k. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании формул (13) и (20) получаем линейный полиномиальный оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1}^*(f, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{n-1}(f, z) + \tilde{\Omega}_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k(f) z^k \\ &+ \sum_{k=m}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_{k,m}}{\alpha_{2n-k,m}} \left[\sigma_{k,m} \left(1 - \left(\frac{k-m}{2n-m-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2(n-k)} \right\} c_k(f) z^k. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом соотношений (12), (20), (21) для $0 < \rho < R$, $0 \leq t < 2\pi$ имеем

$$\begin{aligned} f(\rho e^{it}) - \Lambda_{n-1}^*(f; \rho e^{it}) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(m)}(R e^{i\theta}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), R e^{i\theta})) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Из определения нормы в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$ и (22) получаем

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(m)}(R e^{i\theta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), R e^{i\theta})) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right|^p dt d\rho \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_R(\rho, t)| dt = R^m \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \frac{1}{\alpha_{n,m}} \quad (24)$$

и для свертки $\varphi * \psi$ 2π -периодических функций $\varphi \in L_p[0, 2\pi]$ и $\psi \in L_q[0, 2\pi]$, $1 \leq p, q \leq \infty$, имеет место неравенство

$$\|\varphi * \psi\|_{L_r[0, 2\pi]} \leq \|\varphi\|_{L_p[0, 2\pi]} \cdot \|\psi\|_{L_q[0, 2\pi]}, \quad \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

(см., например, [10; гл. VIII, § 2]), в случае $r = p$ запишем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(m)}(R e^{i\theta}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), R e^{i\theta})) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right|^p dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(m)}(R e^{i\theta}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), R e^{i\theta})|^p d\theta \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_R(\rho, t)| dt \right)^p \\ &= \left(\frac{R^m}{\alpha_{n,m}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \right)^p \|f^{(m)} - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}}^p. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} \\ \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p} \|f^{(m)} - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \|f^{(m)} - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}} \\ & \leq \|f^{(m)} - \mathcal{F}(f^{(m)})\|_{H_{p,R}} + \|\mathcal{F}(f^{(m)}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}}, \end{aligned} \quad (27)$$

то надо оценить сверху каждое из слагаемых в правой части неравенства (27).

Используя определение модуля непрерывности второго порядка и обобщенное неравенство Минковского (см., например, [28; дополнение]), получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(m)} - \mathcal{F}(f^{(m)})\|_{H_{p,R}} &= \frac{n-m}{\pi-2} \left\| \int_0^{\pi/(2(n-m))} (f^{(m)}(ze^{ix}) - 2f^{(m)}(z) + f^{(m)}(ze^{-ix})) \right. \\ & \quad \times (1 - \sin(n-m)x) dx \left. \right\|_{H_{p,R}} \\ &\leq \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \omega_2(f^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} (1 - \sin(n-m)x) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Для оценки сверху второго слагаемого в правой части неравенства (27) нам потребуется следующий вспомогательный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ такой, что $f^{(m)} \in H_{p,R}$, $m \in \mathbb{N}$, и любого натурального числа $n > m$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}(f^{(m)}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}} \\ & \leq \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \omega_2(f^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx. \end{aligned} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом $\mathcal{P}$ множество всех алгебраических полиномов комплексной переменной z . Множество $\mathcal{P}$ является всюду плотным в $H_{p,R}$. Это, в частности, следует из результатов работ [31; теорема 1], [32; теорема 1], [33; теорема 1] и означает, что для произвольного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ и произвольного элемента из $H_{p,R}$, например $f^{(m)}$, существует полином $\varphi_\nu \in \mathcal{P}$ некоторой степени $\nu = \nu(\varepsilon)$, $\nu \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\|f^{(m)} - \varphi_\nu\|_{H_{p,R}} < \varepsilon. \quad (30)$$

Используя линейность операторов $\mathcal{F}$ и $V_{n-m-1,2}$, заданных соответственно формулами (14) и (17), запишем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}(f^{(m)}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}} \\ & \leq \|\mathcal{F}(f^{(m)} - \varphi_\nu) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)} - \varphi_\nu))\|_{H_{p,R}} \\ & \quad + \|\mathcal{F}(\varphi_\nu) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(\varphi_\nu))\|_{H_{p,R}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Оценим сверху первое слагаемое в правой части неравенства (31). Используя обобщенное неравенство Минковского, соотношение (14) и определение нормы линейного оператора в банаховом пространстве, можно показать, что

$$\|\mathcal{F}\| \leq 1. \quad (32)$$

Пусть каждый элемент последовательности положительных чисел $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-m-1}$ не превосходит единицы. Положим

$$\mathcal{K}_{n-m-1}(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-m-1} \xi_k \cos kt.$$

Для произвольной функции $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) z^k$, принадлежащей $H_{p,R}$, запишем линейный полиномиальный оператор

$$V_{n-m-1}^*(g, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2\xi_0 c_0(g) + \sum_{k=1}^{n-m-1} \xi_k c_k(g) z^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(ze^{it}) \mathcal{K}_{n-m-1}(\xi, t) dt. \quad (33)$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, из (33) получаем

$$\|V_{n-m-1}^*(g)\|_{H_{p,R}} \leq \|g\|_{H_{p,R}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{n-m-1}(\xi, t)| dt.$$

Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{n-m-1}(\xi, t)| dt \leq 2(n-m),$$

то имеем следующую оценку сверху нормы оператора (33):

$$\|V_{n-m-1}^*\| \leq 2(n-m).$$

Учитывая, что линейный полиномиальный оператор $V_{n-m-1,2}$, заданный формулой (17), можно представить в виде (33), где

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \left\{ \xi_k = 1 - \left(\frac{k}{2(n-m)-k} \right)^2 \right\}_{k=1}^{n-m-1},$$

получаем, что согласно вышеизложенному его норма удовлетворяет неравенству

$$\|V_{n-m-1,2}\| \leq 2(n-m). \quad (34)$$

Для оценки сверху первого слагаемого в правой части неравенства (31) воспользуемся соотношениями (30), (32) и (34). Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}(f^{(m)} - \varphi_\nu) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)} - \varphi_\nu)) \right\|_{H_{p,R}} \\ & \leq \|\mathcal{F}\| (1 + \|V_{n-m-1,2}\|) \|f^{(m)} - \varphi_\nu\|_{H_{p,R}} \leq (2(n-m) + 1)\varepsilon. \end{aligned} \quad (35)$$

Для оценки сверху второго слагаемого в правой части неравенства (31) нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА А (см. [34; гл. V, § 1]). *Если $a_k \rightarrow 0$ и последовательность a_k , $k = 0, 1, \dots$, выпукла, то ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$$

сходится всюду за исключением, быть может, точки $t = 0$ к некоторой неотрицательной интегрируемой функции $F(t)$ и является рядом Фурье этой функции.

Так как последовательность $\{1/(n-m+j)^2\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ является выпуклой (см., например, [34; гл. III, § 4]) и удовлетворяет условиям теоремы А, то из (16), где $g \equiv \mathcal{F}(\varphi_\nu)$, и (18) в силу обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\varphi_\nu) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(\varphi_\nu))\|_{H_{p,R}} &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{2,n-m}(t) dt \right) \|\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})\|_{H_{p,R}} \\ &= \frac{1}{(n-m)^2} \|\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})\|_{H_{p,R}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, что полином $\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})$ является элементом пространства $H_{p,R}$. Произведя дважды интегрирование по частям, а затем применив обобщенное неравенство Минковского, запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-m)^2} \|\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})\|_{H_{p,R}} &= \frac{1}{(n-m)(\pi-2)} \\ &\times \left\| \int_0^{\pi/(2(n-m))} ((\varphi_\nu)_a^{(2)}(ze^{ix}) + (\varphi_\nu)_a^{(2)}(ze^{-ix}))(1 - \sin(n-m)x) dx \right\|_{H_{p,R}} \\ &= \frac{n-m}{\pi-2} \left\| \int_0^{\pi/(2(n-m))} (\varphi_\nu(ze^{ix}) - 2\varphi_\nu(z) + \varphi_\nu(ze^{-ix})) \sin(n-m)x dx \right\|_{H_{p,R}} \\ &\leq \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \|\varphi_\nu(ze^{ix}) - 2\varphi_\nu(z) + \varphi_\nu(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство треугольника для нормы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-m)^2} \|\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})\|_{H_{p,R}} &\leq \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \|(\varphi_\nu(ze^{ix}) - f^{(m)}(ze^{ix})) \\ &- 2(\varphi_\nu(z) - f^{(m)}(z)) + (\varphi_\nu(ze^{-ix}) - f^{(m)}(ze^{-ix}))\|_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx \\ &+ \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \|f^{(m)}(ze^{ix}) - 2f^{(m)}(z) + f^{(m)}(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя определение модуля непрерывности второго порядка и неравенство (30), из (37) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-m)^2} \|\mathcal{F}((\varphi_\nu)_a^{(2)})\|_{H_{p,R}} &\leq \frac{4}{\pi-2} \varepsilon + \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \omega_2(f^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Положим $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon'(2(n-m) + 1 + 4/(\pi-2))^{-1}$, где ε' – произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда в силу (31), (35), (36), (38) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f^{(m)}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}} &\leq \varepsilon' + \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \omega_2(f^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} \sin(n-m)x dx. \end{aligned}$$

С учетом сказанного выше относительно выбора $\varepsilon' > 0$ из последнего неравенства получаем соотношение (29), чем и завершается доказательство утверждения 1.

Продолжая доказательство теоремы 1, воспользуемся формулами (26)–(29). Тогда для произвольной функции $f \in W_{p,R}^m(\Psi)$ запишем

$$\begin{aligned} & \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} \\ & \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p} \frac{n-m}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-m))} \omega_2(f^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} dx \\ & \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (7) и (39) имеем

$$\begin{aligned} \text{diam}(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) & \leq \delta_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) \leq \mathcal{E}(W_{p,R}^m(\Psi); L_n^*)_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} \\ & \leq \sup\{\|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} : f \in W_{p,R}^m(\Psi)\} \\ & \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (40)$$

где под $\text{diam}(\cdot)$ подразумевается любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ или $d^n(\cdot)$. При этом

$$d_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) \leq E(W_{p,R}^m(\Psi); L_n^*)_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} \leq \mathcal{E}(W_{p,R}^m(\Psi); L_n^*)_{\mathcal{L}_{p,\gamma}}. \quad (41)$$

Известно (см. [10; гл. II, § 3, предложение 3.2]), что если X и Y – линейные нормированные пространства и X является подпространством Y , то $d^n(A, X) = d^n(A, Y)$, где множество $A \subset X$. Исходя из этого, можем записать

$$d^n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}). \quad (42)$$

Используя определение бернштейновского n -поперечника, имеем

$$b_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) \geq b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}). \quad (43)$$

Получим далее оценку снизу бернштейновского n -поперечника, записанного в правой части неравенства (43). Для этого воспользуемся подпространством $\bar{L}_{n+1}$ алгебраических полиномов комплексного переменного, имеющих степень, не превышающую n . Известно (см. [10; гл. VIII, § 2]), что для произвольного полинома $\Pi_n \in \bar{L}_{n+1}$ выполнено неравенство

$$\|\Pi_n^{(m)}\|_{H_{p,R}} \leq R^{n-m} \alpha_{n,m} \|\Pi_n\|_{H_p}, \quad (44)$$

где $n \geq m$, $m \in \mathbb{N}$. Е. Хилом, Г. Сегё и Я. Д. Тамаркиным (см., например, [35]) для произвольного полинома $\Pi_n \in \bar{L}_{n+1}$ и любого $0 < \rho \leq 1$ доказано неравенство

$$\int_{|z|=1} |\Pi_n(z)|^p |dz| \leq \rho^{-(np+1)} \int_{|z|=\rho} |\Pi_n(z)|^p |dz|.$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\rho^{np} \|\Pi_n\|_{H_p}^p \leq M_p^p(\Pi_n, \rho).$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\rho\gamma(\rho)$ и проинтегрировав полученное соотношение по ρ в пределах от нуля до единицы, получаем

$$\left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p} \|\Pi_n\|_{H_p} \leq \|\Pi_n\|_{B_{p,\gamma}}. \quad (45)$$

Из (44), (45) имеем

$$\|\Pi_n^{(m)}\|_{H_{p,R}} \leq R^{n-m} \alpha_{n,m} \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/p} \|\Pi_n\|_{B_{p,\gamma}}. \quad (46)$$

Рассмотрим следующий шар:

$$\mathbb{B}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Pi_n \in \bar{L}_{n+1} : \|\Pi_n\|_{B_{p,\gamma}} \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p} \right\}.$$

Обозначим

$$\Delta_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2(1 - \cos nx), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 4, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Из неравенства

$$\|\Pi_n(ze^{ix}) - 2\Pi_n(z) + \Pi_n(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}} \leq \Delta_n(x) \|\Pi_n\|_{H_{p,R}},$$

которое следует из одного результата работы [4], для произвольного полинома $\Pi_n \in \bar{L}_{n+1}$ имеем

$$\omega_2(\Pi_n, 2x)_{H_{p,R}} \leq \Delta_n(x) \|\Pi_n\|_{H_{p,R}}, \quad x \geq 0. \quad (47)$$

Покажем, что шар $\mathbb{B}_{n+1}$ принадлежит классу $W_{p,R}^m(\Psi)$. Для этого рассмотрим два случая: $2k \geq n-m$ и $2k \leq n-m$. Пусть, например, $2k \geq n-m$. Тогда для произвольного полинома $\Pi_n \in \mathbb{B}_{n+1}$ в силу (46), (47) можно записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(\Pi_n^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt &\leq \|\Pi_n^{(m)}\|_{H_{p,R}} \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \Delta_{n-m}(t) dt \\ &\leq R^{n-m} \alpha_{n,m} \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/p} \|\Pi_n\|_{B_{p,\gamma}} \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \Delta_{n-m}(t) dt \\ &\leq \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{2k}{\pi(n-m)} \sin \frac{\pi(n-m)}{2k} \right) \Psi \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Используя (48) и первое неравенство из ограничения (8), где

$$x = \frac{\pi}{2(n-m)}, \quad \lambda = \frac{n-m}{k}, \quad \lambda x = \frac{\pi}{2k}, \quad (49)$$

получаем

$$\frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(\Pi_n^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \leq \Psi \left(\frac{\pi}{2k} \right). \quad (50)$$

Пусть теперь $2k \leq n-m$. Снова, воспользовавшись неравенствами (46), (47), для произвольного элемента $\Pi_n \in \mathbb{B}_{n+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(\Pi_n^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \\ \leq \Psi \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \frac{k}{\pi-2} \left(\int_0^{\pi/(n-m)} \Delta_{n-m}(t) dt + \int_{\pi/(n-m)}^{\pi/(2k)} \Delta_{n-m}(t) dt \right) \\ = \frac{2\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{k}{n-m} \right) \Psi \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Используя обозначения (49) и второе неравенство из ограничения (8), из (51) для рассматриваемых значений k получаем требуемое соотношение (50). Таким образом, $\mathbb{B}_{n+1} \subset W_{p,R}^m(\Psi)$.

Из определения бернштейновского n -поперечника имеем

$$\begin{aligned} b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) &\geq b_n(\mathbb{B}_{n+1}; B_{p,\gamma}) \\ &\geq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (52)$$

Сопоставляя соотношения (40)–(43) и (52), получаем требуемые равенства (9). Из вышеприведенного следует, что подпространство L_n^* является экстремальным для класса $W_{p,R}^m(\Psi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$ в случае вычисления точных значений колмогоровского и линейного n -поперечников, а подпространство $\bar{L}_{n+1}$ – экстремальное для бернштейновского n -поперечника $b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma})$. Линейный непрерывный оператор Λ_{n-1}^* будет наилучшим линейным методом приближения для класса $W_{p,R}^m(\Psi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$.

Для произвольного элемента $f \in W_{p,R}^m(\Psi) \cap L_n^*$ в силу (19), (22) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

справедливо интегральное представление

$$f(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(m)}(Re^{i\theta}) e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta,$$

где $0 < \rho < R$, $0 \leq t < 2\pi$. Из (21), (39) и из определения гельфандовского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned} d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) &\leq \sup\{\|f\|_{B_{p,\gamma}} : f \in W_{p,R}^m(\Psi) \cap L_n^*\} \\ &\leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (53)$$

Сопоставляя неравенства (52) и (53) и учитывая (7), убеждаемся в том, что подпространство L_n^* коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma})$. Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство следствия 1. Используя соотношения (21), (22), для произвольного элемента $f \in W_{p,R}^m(\Psi)$ запишем

$$\begin{aligned} \rho^n c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\rho e^{it}) - \Lambda_{n-1}^*(f, \rho e^{it})) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(m)}(Re^{i\theta}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), Re^{i\theta})) \right. \\ &\quad \left. \times e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right\} dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Гёльдера и неравенства (25) имеем

$$\begin{aligned} \rho^n |c_n(f)| &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(m)}(Re^{i\theta}) - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}), Re^{i\theta})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{im\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right|^p dt \right\}^{1/p} \\ &\leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \rho^n \|f^{(m)} - V_{n-m-1,2}(\mathcal{F}(f^{(m)}))\|_{H_{p,R}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из соотношений (27)–(29), (54) и определения класса $W_{p,R}^m(\Psi)$ следует такая оценка сверху:

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^m(\Psi)\} \leq \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right). \quad (55)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) z^n$$

и покажем, что $f_0 \in W_{p,R}^m(\Psi)$. Используя неравенство (47), имеем

$$\begin{aligned} \omega_2(f_0^{(m)}, 2x)_{H_{p,R}} &\leq R^{m-n} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \Delta_{n-m}(x) \|z^{n-m}\|_{H_{p,R}} \\ &= \Delta_{n-m}(x) \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f_0^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \leq \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \Delta_{n-m}(t) dt. \quad (56)$$

Используя для оценки сверху выражения в правой части неравенства (56) рассуждения, проведенные при получении соотношений (48) и (51), а также воспользовавшись формулой (49) и ограничением (8), для произвольного $k \in \mathbb{N}$ запишем

$$\frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f_0^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \leq \Psi\left(\frac{\pi}{2k}\right).$$

Следовательно, $f_0 \in W_{p,R}^m(\Psi)$ и

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^m(\Psi)\} \geq |c_n(f_0)| = \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right). \quad (57)$$

Сопоставляя неравенства (55) и (57), получаем равенство (10), чем и завершаем доказательство следствия 1.

§ 4. Экстремальные задачи смежного содержания

Полученные выше результаты тесно связаны с некоторыми задачами оптимального восстановления и кодирования функций. Отыскание оптимальных методов восстановления, гарантирующих минимальную погрешность на рассматриваемом классе, является актуальным для различных вопросов прикладного характера.

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $\mathcal{M}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$, где X^* – пространство, сопряженное с X . Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $f \in X$ числовой вектор

$$\mathcal{T}(f, \mathcal{M}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_1(f), \mu_2(f), \dots, \mu_n(f)\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{p_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma_k\}_{k=1}^n$ – соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов. Задачу восстановления f по информации $\mathcal{T}$ решают, сопоставляя вектору $\mathcal{T}(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$v(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n, z) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mu_k(f) p_k(z),$$

позволяющую наилучшим образом приспособиться к рассматриваемому классу K . Величину

$$\Xi(K, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X = \inf \{ \sup \{ \|f - v(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n)\|_X : f \in K \} : \Gamma_n \in \mathbb{C}^n \}$$

называют *погрешностью восстановления на классе K* и полагают

$$\begin{aligned} \Xi_n(K, X) &= \inf \{ \Xi(K, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X : \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n \} \\ (\text{или } \Xi'_n(K, X) &= \inf \{ \Xi(K, \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n)_X : \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n \}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}'_n$ – набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Метод восстановления $(\mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)$ (или $(\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)$), для которого

$$\begin{aligned} \Xi_n(K, X) &= \sup \{ \|f - v(f; \mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)\|_X : f \in K \} \\ (\text{или } \Xi'_n(K, X) &= \sup \{ \|f - v(f; \mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)\|_X : f \in K \}), \end{aligned}$$

называют *оптимальным* (или *оптимальным линейным*) *методом восстановления функций из класса K* . При этом справедливы следующие соотношения (см., например, [36], [37; гл. 8, § 8.3]):

$$\begin{aligned} \Xi'_n(K, X) &= \delta_n(K, X), \\ \Xi_n(K, X) &\geq d_n(K, X). \end{aligned} \tag{58}$$

Если $K = \tilde{K} + L$, где $\tilde{K}$ – компакт, L – конечномерное подпространство, то в (58) имеет место знак равенства.

Наряду с $\Xi(K, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X$ рассматривают величину

$$\Upsilon(K, \mathcal{M}_n)_X = \sup \{ \|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in K, \mathcal{T}(f_1, \mathcal{M}_n) = \mathcal{T}(f_2, \mathcal{M}_n) \},$$

которую интерпретируют как погрешность метода кодирования на классе K с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$ (см. [37; гл. 8, § 8.3]). Полагая при этом

$$\nu^n(K, X) = \inf \{ \Upsilon(K, \mathcal{M}_n)_X : \mathcal{M}_n \},$$

получают

$$\nu^n(K, X) \leq 2 \Xi'_n(K, X).$$

Если множество K центрально-симметрично и выпукло, то

$$\nu^n(K, X) = 2\Xi'_n(K, X).$$

Используя результаты теоремы 1 и вышеизложенное, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть мажоранта $\Psi(t)$ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению (8), $R \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Тогда оптимальный метод восстановления функций $f \in W_{p,R}^m(\Psi)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{p,\gamma}$ доставляет функция $\Lambda_{n-1}^*(f)$, а наилучший метод кодирования определяется набором функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nu^n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) &= \Xi_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) \\ &= \Xi'_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] В.М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.: V.M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.
- [2] Л.В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.: L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.
- [3] К.И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640.
- [4] Л.В. Тайков, “Поперечники некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **22**:2 (1977), 285–295; англ. пер.: L. V. Taikov, “Diameters of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **22**:2 (1977), 650–656.
- [5] Н. Айнуллоев, Л.В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351; англ. пер.: N. Ainulloev, L. V. Taikov, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, **40**:3 (1986), 699–705.
- [6] М.З. Двейрин, “Поперечники и ε -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функц. анализ и прил.*, **23** (1975), 32–46.
- [7] Ю.А. Фарков, “Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ ”, *УМН*, **45**:5 (1990), 197–198; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in $\mathbb{C}^n$ ”, *Russian Math. Surveys*, **45**:5 (1990), 229–231.
- [8] Yu. A. Farkov, “ n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions”, *J. Complexity*, **12**:1 (1996), 58–79.
- [9] S. D. Fisher, M. I. Stessin, “The n -width of the unit ball of H^q ”, *J. Approx. Theory*, **67**:3 (1991), 347–356.

- [10] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [11] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространствах Харди H_2 ”, *Укр. матем. журн.*, **41**:6 (1989), 799–803; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, “Widths of certain classes of analytic functions in the Hardy space H_2 ”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:6 (1989), 686–689.
- [12] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7 (1990), 873–881; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classes of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:7 (1990), 769–778.
- [13] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II”, *Укр. матем. журн.*, **42**:8 (1990), 1019–1026; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, “On diameters of certain classes of functions analytic in the unit disc. II”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:8 (1990), 907–914.
- [14] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников некоторых функциональных классов”, *Укр. матем. журн.*, **48**:1 (1996), 133–135; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths for certain functional classes”, *Ukrainian Math. J.*, **48**:1 (1996), 151–153.
- [15] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 ”, *Матем. заметки*, **68**:5 (2000), 796–800; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “Widths of some classes of analytic functions in the Hardy space H_2 ”, *Math. Notes*, **68**:5–6 (2000), 675–679.
- [16] М. Ш. Шабозов, “Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана”, *Докл. РАН*, **383**:2 (2002), 171–174; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, “Widths of some classes of analytic functions in the Bergman space”, *Dokl. Math.*, **65**:2 (2002), 194–197.
- [17] М. Ш. Шабозов, Г. Юсупов, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций”, *Докл. РАН*, **382**:6 (2002), 747–749; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, G. Yusupov, “Best approximation and width of some classes of analytic functions”, *Dokl. Math.*, **65**:1 (2002), 111–113.
- [18] М. З. Двейрин, И. В. Чебаненко, “О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций”, *Теория отображений и приближение функций*, Наукова думка, Киев, 1983, 62–73.
- [19] С. Б. Вакарчук, “Наилучшие линейные методы приближения и точные оценки n -поперечников классов аналитических функций”, *Докл. АН Украины. Математика, естествознание, технические науки*, 1994, № 6, 15–20.
- [20] С. Б. Вакарчук, “Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций”, *Матем. заметки*, **57**:1 (1995), 30–39; англ. пер.: S. B. Vakarchyuk, “Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk”, *Math. Notes*, **57**:1 (1995), 21–27.
- [21] С. Б. Вакарчук, “О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **65**:2 (1999), 186–193; англ. пер.: S. B. Vakarchyuk, “On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **65**:2 (1999), 153–158.
- [22] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.: S. B. Vakarchyuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5–6 (2002), 615–619.
- [23] С. Б. Вакарчук, “О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости”, *Укр. матем. журн.*, **56**:9 (2004), 1155–1171; англ.

- пер.: S. B. Vakarchuk, "On some extremal problems of approximation theory in the complex plane", *Ukrainian Math. J.*, **56**:9 (2004), 1371–1390.
- [24] С. В. Шведенко, "Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре", *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.*, **23**, ВИНТИ, М., 1985, 3–124; англ. пер.: S. V. Shvedenko, "Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit circle, polydisc, and ball", *J. Soviet Math.*, **39**:6 (1987), 3011–3087.
- [25] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, "О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ ", *Докл. РАН*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, "On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces", *Dokl. Math.*, **75**:1 (2007), 97–100.
- [26] М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Тбилисский гос. ун-т, Тбилиси, 1975.
- [27] В. М. Тихомиров, "Теория приближения", *Анализ – 2*, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [28] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближений*, Наука, М., 1970.
- [29] К. Ю. Осипенко, "Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева", *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 67–86; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, "On optimal recovery methods in Hardy–Sobolev spaces", *Sb. Math.*, **192**:2 (2001), 225–244.
- [30] H. Ding, K. I. Gross, D. St. P. Richard, "The N -widths of spaces of holomorphic functions on bounded symmetric domains of tube type", *J. Approx. Theory*, **104**:1 (2000), 121–141.
- [31] В. М. Кокилашвили, "Прямая теорема приближения в среднем аналитических функций многочленами", *Докл. АН СССР*, **185**:4 (1969), 749–752; англ. пер.: V. M. Kokilashvili, "A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials", *Soviet Math. Dokl.*, **10** (1969), 411–414.
- [32] С. Я. Альпер, "О приближении в среднем аналитических функций класса E_p ", *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного*, Физматлит, М., 1960, 273–286.
- [33] Ю. В. Крякин, "О теоремах Джексона в H^p , $0 < p < \infty$ ", *Изв. вузов. Матем.*, 1985, № 8, 19–23; англ. пер.: Yu. V. Kryakin, "Jackson theorems in H^p , $0 < p < \infty$ ", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **29**:8 (1985), 24–29.
- [34] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [35] Н. И. Шихалиев, "Неравенства типа С. Н. Бернштейна–А. А. Маркова для аналитических функций", *Докл. АН АзССР*, **31**:8 (1975), 9–14.
- [36] Н. П. Корнейчук, "Оптимальные методы кодирования и восстановления функций", *Optimal algorithms. Proc. International Symposium* (Blagoevgrad, 1986), Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1986, 157–171.
- [37] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: N. Korneichuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

С. Б. Вакарчук (S. B. Vakarchuk)

Днепропетровский университет экономики и права,
Украина
E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступила в редакцию
25.11.2008 и 19.04.2010

М. Ш. Шабозов (M. Sh. Shabozov)

Институт математики АН Республики Таджикистан,
г. Душанбе
E-mail: shabozov@mail.ru