Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов, Теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с α -монотонными коэффициентами, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 11, 45–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 07:39:30

УДК 517.52

М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов

Теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с α -монотонными коэффициентами

Получена теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с α -монотонными коэффициентами. Доказаны неравенства типа Харди–Литтлвуда. Построены примеры рядов, показывающие точность полученных результатов.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: обобщенно-монотонные коэффициенты, теорема Харди–Литтлвуда.

§ 1. Введение

Для функции f , измеримой и определенной на $[0, 1]$, определим невозрастающую перестановку f^* следующим образом:

$$f^*(t) = \inf \{ \sigma : \mu \{ x \in \Omega : |f(x)| > \sigma \} \leq t \}.$$

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Будем говорить, что f принадлежит пространству Лоренца $L_{p,q}[0, 1]$, если для $0 < p < \infty$ и $0 < q < \infty$ имеем

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int_0^1 (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Для $0 < p \leq \infty$, $q = \infty$ полагаем

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{1/p} f^*(t) < \infty.$$

При $p = q$ это пространство совпадает с пространством Лебега, которое обозначается через $L_p[0, 1]$.

Хорошо известна следующая теорема Харди и Литтлвуда.

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 < p < \infty$. Если $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонно невозрастающая стремящаяся к нулю последовательность, а $f(x)$ – функция, имеющая ряд Фурье $\sum_{k=1}^\infty a_k \cos 2\pi kx$, то для того чтобы $f \in L_p[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$J_p(a) = \left(\sum_{k=1}^\infty k^{p-2} |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Исследования первого автора проводились при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00175) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2787.2008.1). Исследования второго автора проводились при финансовой поддержке ИНТАС (грант № 05-1000008-815).

Более того, верны оценки

$$C_1(p)\|f\|_{L_p} \leq J_p(a) \leq C_2(p)\|f\|_{L_p},$$

где положительные постоянные $C_1(p)$ и $C_2(p)$ зависят лишь от p .

Этот результат на пространство Лоренца и более общие симметричные пространства обобщен в работах Е. М. Семенова [1], А. Б. Гулисашвили [2], В. А. Родина [3], [4]. Верна

ТЕОРЕМА В. При $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leq q \leq \infty$ для интегрируемых функций $f(x)$, имеющих ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx$ с монотонными коэффициентами, выполняется оценка

$$C_1(p, q)\|f\|_{L_{p,q}} \leq J_{p,q}(a) \leq C_2(p, q)\|f\|_{L_{p,q}},$$

где

$$J_{p,q}(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1} |a_k|^q \right)^{1/q},$$

а положительные постоянные $C_1(p, q)$ и $C_2(p, q)$ зависят лишь от p и q .

Функционал $J_{p,q}$ при $p = q$ совпадает с J_p .

Теоремы Харди и Литтлвуда для тригонометрических рядов с более общими условиями, чем монотонность коэффициентов, рассматривались в работах [5]–[7].

Ослабление условия монотонности, вообще говоря, сужает область для параметра p , при котором имеет место утверждение теоремы Харди–Литтлвуда (см. [5]).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда так называемые числа Чезаро A_n^α – это тейлоровские коэффициенты функции $(1-x)^{-\alpha-1}$ в нуле, т.е.

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n.$$

Если $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – некоторая последовательность и α – действительное число, то положим

$$\Delta^\alpha(a)_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{-\alpha-1} a_{n+k} = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{-\alpha-1} a_k$$

в случае, если этот ряд сходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha \geq 0$ и последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда скажем, что $a \in M_\alpha$ (a α -монотонна), если числа $\Delta^\alpha(a)_n \geq 0$ при $n = 0, 1, \dots$.

Классы последовательностей M_α были введены в работе [8]. Отметим, что в той же статье было установлено, что при $0 \leq \alpha < \beta$ класс $M_\beta \subset M_\alpha$. В частности, для любого $\alpha > 0$ класс M_α является подмножеством M_0 – класса неотрицательных последовательностей, стремящихся к нулю.

Цель нашей работы – выяснить, при каких условиях на параметры p и q и для рядов с α -монотонными коэффициентами ($a \in M_\alpha$) справедлива теорема типа Харди–Литтлвуда, т.е. критерий принадлежности функции пространству Лоренца в терминах ее коэффициентов Фурье.

В статьях [9] и [10], в частности, доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\alpha \in (1/2, 1)$.

а) Пусть $1/\alpha < p \leq 2$, а интегрируемая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx, \quad (1)$$

причем $a \in M_\alpha$. Тогда для того чтобы $f(x) \in L_p[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $J_p(a) < \infty$.

б) Найдется последовательность $a \in M_\alpha$ такая, что $J_p(a) < \infty$ при всех $p \in (1, 1/\alpha)$, но ряд (1) не является рядом Фурье никакой функции $g(x) \in L[0, 1]$.

В работе [11] было высказано предположение, что часть а) теоремы остается верной при $\alpha \in (1/2, 1)$ и $2 < p < 1/(\alpha - 1)$. Вопрос о справедливости данной гипотезы остается пока открытым. Тем не менее оказалось возможным установить критерий принадлежности функции, имеющей α -монотонные коэффициенты Фурье, пространству $L_{p,q}[0, 1]$, используя несколько иные коэффициентные суммы.

Основным результатом настоящей статьи является следующий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $1/\alpha < p < \infty$, $p' = p/(p - 1)$, $1 \leq q \leq \infty$, а интегрируемая функция f имеет ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx,$$

причем $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность чисел из M_α . Тогда для того чтобы $f \in L_{p,q}[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$I_{p,q}(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k/p'} \bar{a}_{2^k} \right)^q \right)^{1/q} < \infty, \quad (2)$$

где

$$\bar{a}_{2^k} = \frac{1}{2^k} \sum_{m=1}^{2^k} a_m. \quad (3)$$

Кроме того,

$$C_1(p, q) I_{p,q}(a) \leq \|f\|_{L_{p,q}} \leq C_2(p, q) I_{p,q}(a).$$

В формуле (2) и далее при $q = \infty$ сумма вида $(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^q)^{1/q}$ будет пониматься как $\sup_{k \in \mathbb{N}} b_k$.

В теоремах А, В, С функционалы $J_{p,q}(a)$ и $J_p(a)$ можно заменить на $I_{p,q}(a)$ и $I_{p,p}(a)$ соответственно. В то же время это не эквивалентные функционалы. Уже в теореме 1 заменить функционал $I_{p,q}(a)$ на $J_{p,q}(a)$ нельзя (см. теорему 7).

Кроме того, будет установлен ряд других утверждений, в частности, будет обсуждаться окончательность ограничений, наложенных на параметры p, q .

§ 2. Пространства $n_{p,q,\alpha}$

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $1/\alpha \leq p$, $0 < q \leq \infty$. Определим пространство $n_{p,q,\alpha}$ следующим образом. Пусть $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – числовая последовательность комплексных чисел. Обозначим

$$a(k, \alpha) = \sup_{m \geq k} \frac{1}{m^\alpha} \left| \sum_{r=1}^m A_{m-r}^{\alpha-1} a_r \right|.$$

Будем говорить, что a принадлежит $n_{p,q,\alpha}$, если

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/p} a(k, \alpha) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{1/q} < \infty.$$

Для данных пространств имеют место следующие свойства:

- 1) если $q \leq q_1$, то $n_{p,q,\alpha} \hookrightarrow n_{p,q_1,\alpha}$;
- 2) если $p < p_1$, $0 < q$, $q_1 \leq \infty$, то $n_{p,q,\alpha} \hookrightarrow n_{p_1,q_1,\alpha}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p, q, h < \infty$. Тогда

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{k/p} a(2^k, \alpha))^q \right)^{1/q}, \quad (4)$$

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} m^{h/p-1} (a(m, \alpha))^h \right)^{q/h} \right)^{1/q}, \quad (5)$$

где символ $\sim$ означает наличие двусторонней оценки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать при любом $h \in (0, \infty)$ эквивалентность функционалов, стоящих в правых частях (4) и (5), так как при $h = q$ функционал из (5) совпадает с нормой $\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}$. Из монотонности последовательности $a(k, \alpha)$ получаем

$$C_1 2^{k/p} a(2^k, \alpha) \leq \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} (m^{1/p} a(m, \alpha))^h \frac{1}{m} \right)^{1/h} \leq C_2 2^{(k-1)/p} a(2^{k-1}, \alpha),$$

откуда и следует справедливость утверждения леммы.

Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств (см. [12]) и

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1,$$

– функционал Петре.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$ положим

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$ –

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, a) < \infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $1/\alpha \leq p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$(n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow n_{p, q, \alpha},$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вложений $n_{p_i, q_i, \alpha} \hookrightarrow n_{p_i, \infty, \alpha}$, $i = 0, 1$, достаточно доказать, что $(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow n_{p, q, \alpha}$.

Пусть $t \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in (n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q}$ и $a = a_0 + a_1$ – произвольное представление, где $a_0 \in n_{p_0, \infty, \alpha}$ и $a_1 \in n_{p_1, \infty, \alpha}$. Очевидно, что $a(k, \alpha) \leq a^0(k, \alpha) + a^1(k, \alpha)$. Тогда если обозначить $v(t) = t^{p_0 p_1 / (p_1 - p_0)}$, где $t \in (1; \infty)$, то

$$\begin{aligned} \sup_{v(t) \geq k} k^{1/p_0} a(k, \alpha) &\leq \sup_{k > 0} k^{1/p_0} a^0(k, \alpha) + \sup_{v(t) \geq k} k^{1/p_0 - 1/p_1} k^{1/p_1} a^1(k, \alpha) \\ &\leq \sup_{k \geq 1} k^{1/p_0} a^0(k, \alpha) + t \sup_{k \geq 1} k^{1/p_1} a^1(k, \alpha). \end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $a = a_0 + a_1$, имеем

$$\sup_{v(t) \geq k > 0} k^{1/p_0} a(k, \alpha) \leq K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha}).$$

Поэтому при $0 < q \leq \infty$ будет

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha}) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\geq \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t) \geq k > 0} k^{1/p_0} a(k, \alpha) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= C_1 \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta(1/p_0 - 1/p_1)} \sup_{t \geq k > 0} k^{1/p_0} a(k, \alpha) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\geq C_2 \left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(1/p_0 - 1/p_1)} \sup_{2^r \geq k} k^{1/p_0} a(k, \alpha) \right)^q \right)^{1/q} \\ &\geq C_2 \left(\sum_{r=1}^\infty (2^{r/p} a(2^r, \alpha))^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Таким образом, используя лемму 1, завершаем доказательство вложения

$$(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow n_{p, q, \alpha}.$$

§ 3. Неравенства типа Харди–Литтлвуда

Мы будем использовать следующие свойства чисел Чезаро (см. [13]).

1. $C_1(\alpha)n^\alpha \leq |A_n^\alpha| \leq C_2(\alpha)n^\alpha$ при $\alpha \neq -1, -2, \dots$ и при $n = 1, 2, \dots$.
2. $A_n^\alpha > 0$ при $\alpha > -1$ для всех n , причем при $\alpha \in (-1, 0)$ эти числа монотонно убывают.
3. Если $\alpha \in (-2, -1)$, то $A_n^\alpha < 0$ при $n = 1, 2, \dots$ и $A_n^\alpha < A_{n+1}^\alpha$ при $n = 1, 2, \dots$.
4. $A_0^\alpha = 1$ для всех α .

Отметим, что из свойства 1 вытекает, что если последовательность a ограничена и $\alpha > 0$, то числа $\Delta^\alpha(a)_n$ существуют при всех n .

ЛЕММА 2 (см. [13]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Тогда

$$\left(\sum_{r=1}^m A_{m-r}^{\alpha-1} e^{2\pi i r x} \right)^* (t) \leq C(\alpha) \min \left\{ m^\alpha, \frac{1}{t^\alpha} \right\}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $p \in (1, 1/(1-\alpha)]$ и функция f имеет ряд Фурье $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{2\pi i k x}$. Тогда верно слабое неравенство

$$\|a\|_{n_{p', \infty, \alpha}} \leq C(p, \alpha) \|f\|_{L_{p, 1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы имеем $p' = p/(p-1) \in [1/\alpha, +\infty)$. Тогда (см. формулу (6))

$$\begin{aligned} \sup k^{1/p'} \sup_{n \geq k} \frac{1}{n^\alpha} \left| \sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} a_r \right| &\leq \sup_n \frac{1}{n^{\alpha-1/p'}} \left| \sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} a_r \right| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{\alpha-1/p'}} \left| \int_0^1 f(x) \sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} e^{-2\pi i r x} dx \right| \\ &\leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 f^*(t) \frac{\min(n^\alpha, 1/t^\alpha)}{n^{\alpha-1/p'}} dt. \end{aligned}$$

Заметим, что при $n \geq 1/t$ имеем

$$\frac{\min(n^\alpha, 1/t^\alpha)}{n^{\alpha-1/p'}} = \frac{1/t^\alpha}{n^{\alpha-1/p'}} = \frac{1}{(tn)^{\alpha-1/p'}} \frac{1}{t^{1/p'}} \leq \frac{1}{t^{1/p'}},$$

а при $n < 1/t$ справедлива оценка

$$\frac{\min(n^\alpha, 1/t^\alpha)}{n^{\alpha-1/p'}} = n^{1/p'} \leq \frac{1}{t^{1/p'}}.$$

Таким образом, имеет место

$$\|a\|_{n_{p', \infty, \alpha}} \leq C(p, \alpha) \int_0^1 t^{1/p-1} f^*(t) dt = C(p, \alpha) \|f\|_{L_{p, 1}}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $1 < p < 1/(1-\alpha)$, $p' = p/(p-1)$, $0 < q \leq \infty$, а интегрируемая функция f имеет ряд Фурье $\sum a_k e^{2\pi i k x}$. Если функция f принадлежит $L_{p, q}[0, 1]$, то ее коэффициенты Фурье $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ принадлежат пространству $n_{p', q, \alpha}$ и верно неравенство

$$\|a\|_{n_{p', q, \alpha}} \leq C(p, q, \alpha) \|f\|_{L_{p, q}}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 следует, что оператор $Tf = \{a_k\}$ слабого типа при $1 < p \leq 1/(1-\alpha)$. Воспользовавшись интерполяционной теоремой для пространств $L_{p, q}$ и теоремой 2 для пространств $n_{p, q, \alpha}$, получим нужное утверждение: T – оператор сильного типа при $1 < p < 1/(1-\alpha)$.

Теорема 4 в случае $\alpha = 1$ была доказана в работе [5].

ЛЕММА 3 (см. [14]). Пусть $a = \{a_n\}_{n=1}^N$, $b = \{b_n\}_{n=1}^N$ – две конечные последовательности. Тогда для $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} a_r \right) \left(\sum_{k=n}^N A_{k-n}^{-\alpha-1} b_k \right).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $1/\alpha < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leq q \leq \infty$, a интегрируемая функция f имеет ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$.

Если

$$\left(\sum_{k=1}^N 2^{(1/p'-1)qk} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{\alpha} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-\alpha-1} a_r \right| \right)^q \right)^{1/q} \leq B, \quad N \in \mathbb{N},$$

то $f \in L_{p,q}[0,1]$ и верно неравенство

$$\|f\|_{L_{p,q}} \leq C(p, q, \alpha) B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{2^N}(f) = \sum_{k=1}^{2^N-1} a_k e^{2\pi i k x}$. Достаточно доказать для произвольного $N \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\|S_{2^N}(f)\|_{L_{p,q}} \leq C(p, q, \alpha) B.$$

Используя теорему о норме линейного функционала в пространстве $L_{p',q'}$ и равенство Парсеваля, имеем

$$\begin{aligned} \|S_{2^N}(f)\|_{L_{p,q}} &= \sup_{\|g\|_{L_{p',q'}=1}} \int_0^1 S_{2^N} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \sup_{\|g\|_{L_{p',q'}=1}} \int_0^1 S_{2^N}(f, x) \overline{S_{2^N}(g, x)} dx = \sup_{\|g\|_{L_{p',q'}=1}} \sum_{n=1}^{2^N-1} a_n \bar{b}_n, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{b_k\}_{k=1}^{2^N}$ – коэффициенты Фурье функции $S_{2^N}(g)$. Применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^N-1} a_n \bar{b}_n &= \sum_{n=1}^{2^N-1} \left(\sum_{k=n}^{2^N-1} A_{k-n}^{\alpha-1} a_k \right) \overline{\left(\sum_{l=1}^n A_{n-l}^{\alpha-1} b_l \right)} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left(\sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-\alpha-1} a_r \right) \overline{\left(\sum_{l=1}^n A_{n-l}^{\alpha-1} b_l \right)}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая лемму 1 и теорему 4, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^N-1} a_n \bar{b}_n &\leq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{1/p'+\alpha-1} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-\alpha-1} a_r \right| \right) \\ &\quad \times \left(\sup_{n \in [2^{k-1}, 2^k)} \frac{1}{n^{1/p'+\alpha-1}} \left| \sum_{l=1}^n A_{n-l}^{\alpha-1} b_l \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{1/p'+\alpha-1} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-\alpha-1} a_r \right| \right)^q \right)^{1/q} \\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^N \left(2^{k/p} \sup_{n \geq 2^{k-1}} \frac{1}{n^\alpha} \left| \sum_{l=1}^n A_{n-l}^{\alpha-1} b_l \right| \right)^{q'} \right)^{1/q'} \\
&\sim \left(\sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{1/p'+\alpha-1} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-\alpha-1} a_r \right| \right)^q \right)^{1/q} \|b\|_{n_{p,q',\alpha}} \\
&\leq C_1 B \|S_{2^N}(g)\|_{L_{p',q'}}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (8) и теоремой Марселя Рисса, получим

$$\|S_{2^N}(f)\|_{L_{p,q}} \leq C(p, q, \alpha) B, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $1/\alpha < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и последовательность $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что

$$\left(\sum_{k=1}^\infty 2^{(1/p'-1)qk} \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} m^\alpha |\Delta^\alpha a_m| \right)^q \right)^{1/q} < \infty$$

и

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^\infty |a_{k+N}| k^{-\alpha} = 0. \quad (9)$$

Тогда найдется функция $f \in L_{p,q}[0, 1]$ такая, что $f \sim \sum_{k=1}^\infty a_k e^{2\pi i k x}$ и верно неравенство

$$\|f\|_{L_{p,q}} \leq C(p, q, \alpha) \left(\sum_{k=1}^\infty 2^{(1/p'-1)qk} \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} m^\alpha |\Delta^\alpha a_m| \right)^q \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (9). Покажем, что

$$\sum_{n=1}^m a_n \bar{b}_n = \sum_{n=1}^\infty a_n \widetilde{\bar{b}}_n = \sum_{n=1}^\infty \overline{\left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} \widetilde{b}_r \right)} \Delta^\alpha a_n,$$

где

$$\widetilde{b}_n = \begin{cases} b_n, & 1 \leq n \leq m, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

Действительно, для произвольного $N \geq m$ по лемме 3 имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m a_n \bar{b}_n &= \sum_{n=1}^N a_n \widetilde{\bar{b}}_n = \sum_{n=1}^N \overline{\left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} \widetilde{b}_r \right)} \left(\sum_{k=n}^N A_{k-n}^{-\alpha-1} a_k \right) \\
&= \sum_{n=1}^N \overline{\left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} \widetilde{b}_r \right)} \Delta^\alpha a_n - \gamma_N,
\end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\gamma_N = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k-n}^{-\alpha-1} a_k \right) \overline{\left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} \tilde{b}_r \right)}.$$

Учитывая, что среди $\{\tilde{b}_r\}_{r=1}^{\infty}$ лишь конечное число отлично от нуля, имеем

$$\begin{aligned} |\gamma_N| &\leq C_1 \sum_{n=1}^N \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k-n}^{-\alpha-1} a_k \right| \leq C_2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \sum_{n=1}^N \frac{1}{(k-n)^{\alpha+1}} \\ &= C_2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \sum_{m=k-N}^{k-1} \frac{1}{m^{\alpha+1}} \leq C_2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \sum_{m=k-N}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha+1}} \\ &\leq C_3 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \frac{1}{(k-N)^{\alpha}} = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+N}| k^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Из условия (9) вытекает, что $\gamma_N \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Следовательно, переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$ в (10), получим

$$\sum_{n=1}^m a_n \bar{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\tilde{b}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\left(\sum_{r=1}^n A_{n-r}^{\alpha-1} \tilde{b}_r \right)} \Delta^{\alpha} a_n.$$

Далее, повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 5, приходим к нужному результату.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Из представления $\cos 2\pi kx = (e^{2\pi i kx} + e^{-2\pi i kx})/2$ нетрудно видеть, что утверждения теоремы 4, теоремы 5 и следствия 1 верны и для косинус-рядов.

2) Условие (9) является необходимым для тригонометрических коэффициентов Фурье функции f из $L_{p,q}[0, 1]$ при $\alpha \in (1/2, 1]$, $1/\alpha < p < \infty$.

Действительно, из того, что $f \in L_{p,q}[0, 1]$, следует, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{2\pi i kx} \right\|_{L_{p,q}} = 0.$$

Поэтому из вложения $L_{p,q}[0, 1] \hookrightarrow L_{1/\alpha, 1}[0, 1]$ получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{2\pi i kx} \right\|_{L_{1/\alpha, 1}} = 0.$$

С другой стороны, из неравенства Харди–Литтлвуда–Пэли получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{k+N}}{k^{\alpha}} \right| \leq \|\{a_k\}_{k=N+1}^{\infty}\|_{l_{1/(1-\alpha), 1}} \leq C \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{2\pi i kx} \right\|_{L_{1/\alpha, 1}}.$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть интегрируемая функция f имеет ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx$. Учитывая замечание 1, из (7) при $\alpha = 1$ получаем, что если $f \in L_{p,q}[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/p'} a(2^k, 1))^q$$

сходится и верно неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/p'} a(2^k, 1))^q \right)^{1/q} \leq C \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/p'} \bar{a}_{2^k})^q \right)^{1/q} \leq C \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Покажем обратное. Пусть $1/\alpha < p < \infty$, $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность чисел из M_{α} и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/p'} \bar{a}_{2^k})^q$. Из условия $a \in M_{\alpha}$ и того, что $A_m^{-1-\alpha} < 0$ при $m \geq 1$, имеем

$$0 \leq \Delta^{\alpha} a_n = \sum_{r=n}^{\infty} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \leq \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r.$$

Поэтому, учитывая лемму 3 и равенство (3), при $k \leq N$ получим

$$\begin{aligned} \bar{a}_{2^k} &= \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n = \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{2^k-1} \left(\sum_{m=1}^n A_{n-m}^{\alpha-1} \right) \left(\sum_{r=n}^{2^k-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \right) \\ &\sim \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{2^k-1} n^{\alpha} \sum_{r=n}^{2^k-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \geq \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{2^k-1} n^{\alpha} \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \\ &\geq \frac{1}{2^k} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{\alpha} \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r = \frac{1}{2^k} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{\alpha} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^N 2^{(1/p'-1)qk} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} n^{\alpha} \left| \sum_{r=n}^{2^N-1} A_{r-n}^{-1-\alpha} a_r \right| \right)^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/p'} \bar{a}_{2^k})^q,$$

что вместе с теоремой 5 завершает доказательство теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с используемыми нами теоремами вложения следует отметить недавнюю работу Б. В. Симонова и С. Ю. Тихонова [15], где установлен ряд весьма интересных результатов в этой области.

§ 5. Примеры расходящихся рядов

Докажем вначале, что теорема 1 не может быть распространена на все p .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда найдется последовательность $a \in M_\alpha$ такая, что $I_{p,q}(a) < \infty$ при $p \in (1, 1/\alpha)$, $0 < q \leq \infty$ либо при $p = 1/\alpha$, $q > 2$, но ряд $\sum a_k \cos 2\pi kx$ не является рядом Фурье никакой функции $g \in L[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2^k, \ k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $a_n = \Delta^{-\alpha}(b)_n$ при $n = 0, 1, \dots$.

Как было установлено в работе [10; теорема 2], последовательность $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ корректно определена, ограничена, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и $a \in M_\alpha$. Кроме того, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nx$$

почти во всех точках не является $(C, 1)$ -суммируемым, откуда вытекает, что он не есть ряд Фурье–Лебега. Нам осталось проверить, что $I_{p,q}(a) < \infty$ при всех $p \in (1, 1/\alpha)$. Пусть $r \geq 1$ натуральное и $2^{r-1} < n \leq 2^r$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 < a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} b_{n+k} = b_{2^r} A_{2^r-n}^{\alpha-1} + \sum_{q=r+1}^{\infty} b_{2^q} A_{2^q-n}^{\alpha-1} \\ &\leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{r}} \left((2^r - n + 1)^{\alpha-1} + \sum_{q=r+1}^{\infty} 2^{(\alpha-1)(q-1)} \right) \leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{r}} (2^r - n + 1)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Пусть вначале $p \in (1, 1/\alpha)$, $0 < q \leq \infty$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_{p,q}^q(a) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{qk/p'} \bar{a}_{2^k}^q \leq C(p, q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{qk(1/p'-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} (2^k - n + 1)^{\alpha-1} \right)^q \\ &\leq C(p, q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{qk(\alpha-1/p)} k^{-q/2} < \infty. \end{aligned}$$

Если $p = 1/\alpha$ и $q > 2$, то

$$\begin{aligned} I_{p,q}^q(a) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq(1/p'-1)} \left(\sum_{n=1}^{2^k} a_n \right)^q \\ &\leq C(q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq(1/p'-1)} k^{-q/2} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k-1} (2^k - n + 1)^{(\alpha-1)} \right)^q \\ &= C(q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1/p)q} \frac{1}{k^{q/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $1/\alpha < p < \infty$, $q > 1/(1 - \alpha)$. Тогда найдется последовательность $a \in M_\alpha$ такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n x \quad (11)$$

является рядом Фурье функции $f \in L_{p,q}[0, 1]$, но $J_{p,q}(a) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$b_n = \begin{cases} 2^{(-\alpha+1/p)k} \frac{1}{k^2}, & \text{если } n = 2^k, \ k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $b = \{b_n\}_{n=0}^\infty \in M_0$. Далее, при всех n имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} b_{n+k} &\leq \max_{r \geq n} b_r \cdot \sum_{j: 2^j \geq n}^{\infty} A_{2^j-n}^{\alpha-1} \leq C(\alpha) \max_{r \geq n} b_r \cdot \left(1 + \sum_{j: 2^{j-1} \geq n}^{\infty} 2^{(j-1)(\alpha-1)}\right) \\ &\leq C(\alpha) \max_{r \geq n} b_r. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что последовательность $a_n = \Delta^{-\alpha}(b)_n$ при $n = 0, 1, \dots$ корректно определена, ограничена и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Согласно доказанному в статье [10; теорема 1], поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta^\alpha(a)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-\alpha+1/p)k} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

то ряд (11) сходится на $(0, 1)$ и его сумма совпадает с суммой ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varkappa_n^\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-\alpha+1/p)k} \frac{1}{k^2} \varkappa_{2^k}^\alpha(x), \quad (12)$$

где

$$\varkappa_n^\alpha(x) = \frac{A_n^{\alpha-1}}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2\pi kx \cdot A_{n-k}^{\alpha-1}.$$

Отметим, что при $k = 1, 2, \dots$ и $2^k < n \leq 2^{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, p) 2^{(-\alpha+1/p)k} \frac{1}{k^2} (2^{k+1} - n + 1)^{\alpha-1} \\ \leq a_n \leq C_2(\alpha, p) 2^{(-\alpha+1/p)k} \frac{1}{k^2} (2^{k+1} - n + 1)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Заметим еще, что при любом k имеем

$$\begin{aligned} \|\varkappa_{2^k}^\alpha(x)\|_{L_{p,q}} &\leq C(\alpha, p, q) \left(2^{k\alpha} \left(\int_0^{2^{-k}} x^{q/p-1} dx \right)^{1/q} + \left(\int_{2^{-k}}^1 x^{(1/p-\alpha)q-1} dx \right)^{1/q} \right) \\ &\leq C(\alpha, p, q) 2^{k(\alpha-1/p)}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (12) сходится в метрике $L_{p,q}[0, 1]$ к некоторой $f(x)$ и, следовательно, $f(x) \in L_{p,q}[0, 1]$. Кроме того, из представления (12) следует, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ совпадают с $\Delta^{-\alpha}(b)_n = a_n$.

Пусть $1/\alpha < p < \infty$, $q > 1/(1 - \alpha)$. Оценим $J_{p,q}^q(a)$:

$$\begin{aligned} J_{p,q}^q(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p'-1} |a_n|^q \geq C(p, q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(q/p'-1)k} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} |a_n|^q \\ &\geq C(p, q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(q/p'-1-q\alpha+q/p)k} \frac{1}{k^{2q}} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} (2^k - n + 1)^{(\alpha-1)q} \\ &\geq C(p, q, \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(q(1-\alpha)-1)} \frac{1}{k^{2q}} = \infty. \end{aligned}$$

Теорема 7 доказана.

Можно усмотреть некоторое различие в приведенных выше теоремах 6 и 7. Если в теореме 6 был построен один ряд, не являющийся рядом Фурье–Лебега и принадлежащий ряду пространств $L_{p,q}[0, 1]$, то в теореме 7 примеры строились отдельно для каждого p . По-видимому, это связано с тем, что при больших p из принадлежности функции пространствам $L_{p,q}[0, 1]$ все же вытекают некоторые оценки для величин $J_{p,q}$. Это можно проиллюстрировать двумя результатами для непрерывных функций с обобщенно-монотонными коэффициентами. К сожалению, в них не сходятся необходимые и достаточные условия.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда найдется последовательность $a \in M_\alpha$ такая, что ряд (11) является рядом Фурье функции $f \in C[0, 1]$, но $J_{p,q}(a) = \infty$ при любых p и q таких, что $1/p + 1/q < 1 - \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$b_n = \begin{cases} 2^{-k\alpha} \frac{1}{k^2}, & \text{если } n = 2^k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $b = \{b_n\}_{n=0}^\infty \in M_0$. Далее, при всех n имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} b_{n+k} &\leq \max_{r \geq n} b_r \cdot \sum_{p: 2^p \geq n} A_{2^p-n}^{\alpha-1} \\ &\leq C(\alpha) \max_{r \geq n} b_r \cdot \left(1 + \sum_{p: 2^{p-1} \geq n} 2^{(p-1)(\alpha-1)} \right) \leq C(\alpha) \max_{r \geq n} b_r. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что последовательность $a_n = \Delta^{-\alpha}(b)_n$ при $n = 0, 1, \dots$ корректно определена, ограничена и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Более того, при $k = 1, 2, \dots$ и $2^k < n \leq 2^{k+1}$ имеем

$$a_n \leq C(\alpha, p) 2^{-\alpha k} \frac{1}{k^2} (2^{k+1} - n + 1)^{\alpha-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} a_n &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} a_n \leq C(\alpha, p) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha k} \frac{1}{k^2} \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} (2^{k+1} - n + 1)^{\alpha-1} \\ &\leq C(\alpha, p) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha k} \frac{1}{k^2} 2^{k\alpha} \leq C(\alpha, p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что ряд (11) является рядом Фурье функции $f(x) \in C[0, 1]$ и сходится к ней равномерно. В то же время при $1/p + 1/q < 1 - \alpha$ имеем для некоторого $\gamma > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n n^{(p-1)/p})^q n^{-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-\alpha+1-1/p)qk} \frac{1}{k^{2q}} 2^{-k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\gamma k}}{k^{2q}} = \infty.$$

Теорема 8 доказана.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда если $f \in C[0, 1]$ и последовательность ее коэффициентов Фурье $a(f) = a \in M_\alpha$, то при любых $p \geq 1$ и $q > 0$ таких, что $1/p + (1 - \alpha)/q \geq 1 - \alpha$, выполнено условие $J_{p,q}(a) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия α -монотонности последовательности $a(f) = a \in M_\alpha$ вытекает, что последовательность

$$b_n = \Delta^{\alpha-1}(a)_n$$

при $n = 0, 1, \dots$ будет монотонно невозрастающей. Поэтому из того, что

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \Delta^{-1}(a)_0 = \Delta^{-\alpha}(b)_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{\alpha-1},$$

вытекает, что для некоторого $C > 0$ при всех $k \geq 1$ выполняется неравенство

$$C > \sum_{n=[k/2]}^k b_n A_n^{\alpha-1} \geq C(\alpha) b_k k^\alpha.$$

Отсюда

$$a_n \leq b_n \leq C(\alpha) n^{-\alpha}$$

при всех n . Но тогда при $1/p + (1 - \alpha)/q \geq 1 - \alpha$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n n^{(p-1)/p})^q n^{-1} &\leq \max_{n \geq 1} a_n^{q-1} n^{q(p-1)/p-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq C \max_{n \geq 1} n^{q(p-1)/p-1-\alpha(q-1)} \\ &= C \max_{n \geq 1} n^{q(1-\alpha-1/p)-(1-\alpha)} \leq C \max_{n \geq 1} n^0 < \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

- [1] Е. М. Семенов, “Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **176**:6 (1967), 1251–1254; англ. пер.: Е. М. Semenov, “Interpolation of linear operators and estimates of Fourier coefficients”, *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 1315–1319.
- [2] А. Б. Гулисашвили, “Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функции распределения”, *Матем. заметки*, **10**:1 (1971), 3–10; англ. пер.: А. В. Gulisashvili, “Distribution functions and trigonometric series with monotonically decreasing coefficients”, *Math. Notes*, **10**:1 (1971), 427–430.
- [3] В. А. Родин, “Теорема Харди–Литтлвуда для синус-ряда в симметричном пространстве”, *Матем. заметки*, **20**:2 (1976), 241–246; англ. пер.: V. A. Rodin, “The Hardy–Littlewood theorem for the cosine series in a symmetric space”, *Math. Notes*, **20**:2 (1976), 693–696.
- [4] В. А. Родин, “О принадлежности суммы косинус-ряда с монотонными коэффициентами симметричному пространству”, *Изв. вузов. Матем.*, 1979, № 8, 60–64; англ. пер.: V. A. Rodin, “On membership of the sum of a cosine series with monotone coefficients in a symmetric space”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **23**:8 (1979), 61–65.
- [5] Е. Д. Нурсултанов, “Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда”, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 83–102; англ. пер.: Е. D. Nursultanov, “Net spaces and inequalities of Hardy–Littlewood type”, *Sb. Math.*, **189**:3 (1998), 399–419.
- [6] S. Tikhonov, “Trigonometric series with general monotone coefficients”, *J. Math. Anal. Appl.*, **326**:1 (2007), 721–735.
- [7] M. Dyachenko, S. Tikhonov, “A Hardy–Littlewood theorem for multiple series”, *J. Math. Anal. Appl.*, **339**:1 (2008), 503–510.
- [8] М. И. Дьяченко, “Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 7, 39–50; англ. пер.: M. I. D’yachenko, “Trigonometric series with generalized-monotone coefficients”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:7 (1986), 54–66.
- [9] М. И. Дьяченко, “Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами и теорема Харди–Литтлвуда”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы* (Казань, 2003), Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, **19**, ДАС, Казань, 2003, 96–98.
- [10] М. И. Дьяченко, “Теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 5, 38–47; англ. пер.: M. I. D’yachenko, “The Hardy–Littlewood theorem for trigonometric series with generalized monotone coefficients”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:5 (2008), 32–40.
- [11] М. И. Дьяченко, “Об одном обобщении теоремы Харди–Литтлвуда”, *Труды международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова*, Абрау-Дюрсо, 2004, 99–100.
- [12] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **223**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [13] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [14] A. F. Andersen, “Comparison theorems in the theory of Cesàro summability”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 39–71.

- [15] Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “Теоремы вложения в конструктивной теории приближений”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 107–148; англ. пер.: B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, “Embedding theorems in constructive approximation”, *Sb. Math.*, **199**:9 (2008), 1367–1407.

М. И. Дьяченко (M. I. Dyachenko)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dyach@mail.ru

Поступила в редакцию

03.12.2008 и 13.04.2009

Е. Д. Нурсултанов (E. D. Nursultanov)

Казахстанский филиал

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова, г. Астана, Казахстан;

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва, г. Астана, Казахстан

E-mail: er-nurs@yandex.ru