Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Шаройко, Соответствие Хассетта–Чинкеля и автоморфизмы квадратики, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 11, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:29:47

УДК 512.743.7

Е. В. Шаройко

Соответствие Хассетта–Чинкеля и автоморфизмы квадрики

В работе изучаются локально транзитивные действия коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n$ на невырожденной квадрике в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$. Показано, что для любого n такое действие единственно с точностью до изоморфизма.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: автоморфизмы квадрик, локально транзитивные действия.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению локально транзитивных действий, т.е. действий с открытой орбитой, коммутативной унипотентной алгебраической группы

$$\mathbb{G}_a^n = \underbrace{\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \times \cdots \times \mathbb{G}_a}_{n \text{ раз}},$$

где $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$, на проективных комплексных многообразиях. Б. Хассетт и Ю. Чинкель [1] установили замечательное соответствие между локально транзитивными действиями группы $\mathbb{G}_a^n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ и $(n+1)$ -мерными комплексными локальными коммутативными алгебрами. Этот результат и классификационные результаты работы [2] позволяют доказать, что число классов эквивалентности таких действий конечно тогда и только тогда, когда $n \leq 5$. В [1; гл. 3, вопрос (4)] поставлена задача описания локально транзитивных действий группы $\mathbb{G}_a^n$ на невырожденной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Эта задача решена в настоящей работе: мы показываем, что локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$ -действие на Q_n единственно с точностью до изоморфизма. Для доказательства этого результата соответствие Хассетта–Чинкеля обобщено на случай действия на квадрике. Здесь возникают $(n+2)$ -мерные комплексные локальные коммутативные алгебры, которые снабжены определенной невырожденной квадратичной формой и квадрат максимального идеала которых одномерен. Стоит отметить, что полученный результат не может быть обобщен на другие гладкие проективные гиперповерхности. Если $H_{n,d}$ – гладкая проективная гиперповерхность степени $d \geq 3$ в $\mathbb{P}^{n+1}$, то группа ее автоморфизмов конечна, за исключением случая $n=2, d=4$ (см. [3; теорема 2]). В свою очередь, группа автоморфизмов гиперповерхности $H_{2,4}$ дискретна (см. [3; теорема 4]).

Построенное в работе действие также определяет локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$ -действие на аффинной невырожденной квадрике. Исследованию групп автоморфизмов аффинных квадрик посвящен целый ряд работ; см., например, [4] и [5].

В работе [1] показано, что ровно одно локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$ -действие на $\mathbb{P}^n$ обладает конечным числом орбит. Для прочих локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$ -действий определенный интерес представляет задача вычисления модальности, т.е. максимального числа параметров в непрерывном семействе $\mathbb{G}_a^n$ -орбит. Мы приводим пример такого вычисления в § 5. Также там показано, что модальность локально транзитивного $\mathbb{G}_a^n$ -действия на Q_n , $n \geq 2$, равна $n-2$. Изучению максимального возможного значения модальности по всем проективным (соответственно аффинным) вложениям однородного пространства редуктивной группы посвящена работа [6] (соответственно [7]). Аналогичные результаты для проективных вложений унипотентных групп не известны.

Каждое локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$ -действие на $\mathbb{P}^n$ (соответственно на Q_n) определяет максимальную коммутативную подгруппу размерности n в группе $SL(n+1)$ (соответственно $SO(n+2)$). В § 6 мы приводим пример максимальной коммутативной унипотентной подгруппы размерности n в $SO(n+2)$, которая не отвечает локально транзитивному действию на Q_n . В настоящее время такого примера для группы $SL(n+1)$ у нас нет.

Автор выражает благодарность И. В. Аржанцеву за постановку задачи и полезные обсуждения, а также Ю. Г. Прохорову за важные дополнения.

§ 2. Соответствие Хассетта–Чинкеля

В этом параграфе мы кратко изложим результаты работы [1], которые устанавливают соответствие между циклическими представлениями группы $\mathbb{G}_a^n$ и конечномерными локальными алгебрами.

Пусть $\rho: \mathbb{G}_a^n \rightarrow GL_l(\mathbb{C})$ – рациональное представление и $v \in \mathbb{C}^l$ – фиксированный циклический вектор, т.е. вектор, линейная оболочка $\langle \rho(\mathbb{G}_a^n)v \rangle$ орбиты которого совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^l$. Пусть $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_l(\mathbb{C})$ – соответствующее представление касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы $\mathbb{G}_a^n$, а $\tau: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Mat}_{l \times l}(\mathbb{C})$ – индуцированное представление универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Поскольку группа $\mathbb{G}_a^n$ коммутативна, алгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно изоморфна алгебре многочленов $\mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$, причем $\mathfrak{g} \cong \langle S_1, \dots, S_n \rangle$. Далее, подпространство $\tau(U(\mathfrak{g}))v$ является $\mathfrak{g}$ - и $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантным; оно содержит вектор v , а значит, $\tau(U(\mathfrak{g}))v = \mathbb{C}^l$. Положим

$$I = \{a \in U(\mathfrak{g}) : \tau(a)v = 0\}.$$

Тогда I – идеал в $U(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})/I \cong \tau(U(\mathfrak{g}))v = \mathbb{C}^l$. При этом действию $\tau(a)$ на $\mathbb{C}^l$ отвечает левое умножение на элемент $a \in U(\mathfrak{g})$ в алгебре $R = U(\mathfrak{g})/I$ и вектор v соответствует классу 1 в R . Из нильпотентности операторов $\tau(S_1), \dots, \tau(S_n)$ следует, что идеал I содержит достаточно высокие степени образующих $S_1, \dots, S_n$. Поэтому кольцо R локально с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}_R = \langle S_1, \dots, S_n \rangle$ и $\dim_{\mathbb{C}} R = l$. Обратно, каждому такому локальному кольцу $R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]/I$ сопоставим l -мерное представление ρ группы $\mathbb{G}_a^n$, где

оператор $\rho((\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ осуществляет левое умножение в кольце R на элемент $\exp(\alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_n S_n)$, а отмеченным вектором является $1 \in R$. Заметим, что представление ρ эффективно тогда и только тогда, когда $\langle S_1, \dots, S_n \rangle \cap I = 0$. В этом случае будем говорить, что факторкольцо R невырождено.

Рассмотрим также действие группы $\mathbb{G}_a^n$ на кольце многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, при котором элемент $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ переводит x_i в $x_i + \alpha_i$. При этом базисные элементы $S_1, \dots, S_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ переходят в операторы $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Рассмотрим подпространство

$$V = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : F(f) = 0 \ \forall F \in I\},$$

где $F(S_1, \dots, S_n)$ интерпретируется как дифференциальный оператор

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Как следует из доказательства предложения 2.11 из [1], размерность пространства V равна l и индуцированное на нем представление группы $\mathbb{G}_a^n$ двойственно представлению ρ . Обратно, любому l -мерному подпространству $V \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, инвариантному относительно $\mathbb{G}_a^n$ -сдвигов, сопоставим идеал I в $\mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$, $I = \{F : F(f) = 0 \ \forall f \in V\}$, и указанное выше представление ρ группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]/I$.

Условию невырожденности R отвечает условие “ни один дифференциальный оператор первого порядка не аннулирует все пространство V ”, или, что равносильно, “степень трансцендентности подалгебры в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, порожденной V , равна n ”. Будем называть такие подпространства $V \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ невырожденными. На этом пути получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1; теорема 2.14]). *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между:*

- (1) классами изоморфизмов пар (ρ, v) , где $\rho: \mathbb{G}_a^n \rightarrow \mathrm{GL}_l(\mathbb{C})$ – эффективное рациональное линейное представление, а $v \in \mathbb{C}^l$ – циклический вектор;
- (2) невырожденными подсхемами $\mathrm{Spec} R \subset \mathrm{Spec} \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$ длины l с носителем в нуле;
- (3) классами l -мерных невырожденных подпространств $V \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, инвариантных относительно автоморфизмов $x_i \mapsto x_i + \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, кольца $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, с точностью до эквивалентности, индуцированной линейными преобразованиями пространства $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Эффективное линейное представление $\rho: \mathbb{G}_a^n \rightarrow \mathrm{GL}_l(\mathbb{C})$ с циклическим вектором $v \in \mathbb{C}^l$ определяет действие группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{l-1}$ с открытой орбитой $\mathbb{G}_a^n \langle v \rangle$ тогда и только тогда, когда $n = l - 1$. В этой ситуации образы элементов $S_1, \dots, S_n$ составляют $\mathbb{C}$ -базис максимального идеала $\mathfrak{m}_R$ кольца $R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]/I$, поэтому фиксация реализации R в качестве факторкольца не требуется.

ТЕОРЕМА 2 (см. [1; предложение 2.15]). *Имеется взаимно однозначное соответствие между:*

- (1) локально транзитивными действиями группы $\mathbb{G}_a^n$ на $\mathbb{P}^n$;
- (2) локальными алгебрами $\mathbb{C}$ -размерности $n + 1$.

Для обоснования перехода (1) $\implies$ (2) надо заметить, что любой алгебраический гомоморфизм $\rho: \mathbb{G}_a^n \rightarrow \mathrm{PGL}_l(\mathbb{C})$ допускает единственный подъем до рационального представления $\tilde{\rho}: \mathbb{G}_a^n \rightarrow \mathrm{GL}_l(\mathbb{C})$.

Кроме того, в работе [1] перечислены все локальные конечномерные алгебры, размерность которых не превосходит 5. Отметим неточность в этом перечне. Предложение 3.4 в [1] гласит, что существует десять локальных конечномерных алгебр размерности 5, изоморфных соответственно

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_2, S_1S_2 - S_3, S_1S_3 - S_4, S_2S_3, S_1S_4), \\
 R_2 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2, S_2^2, S_1S_3 - S_4, S_1S_4), \\
 R_3 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2, S_2^2 - S_3, S_1S_3 - S_4, S_1S_4), \\
 R_4 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2 - S_3, S_2^2, S_1S_3 - S_4, S_1S_4), \\
 R_5 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2 - S_4, S_2^2, S_1S_3, S_2S_3, S_1S_4), \\
 R_6 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_2^2 - S_4, S_1S_2, S_1S_3, S_2S_4), \\
 R_7 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_4, S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3 - S_4, S_2^2, S_3^2, S_1S_4), \\
 R_8 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_1S_2 - S_4, S_1S_3, S_2S_3), \\
 R_9 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_4, S_2^2, S_3^2, S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3, S_1S_4), \\
 R_{10} &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_iS_j \mid i, j = 1, \dots, 4).
 \end{aligned}$$

Однако несложно заметить, что идеалы I_3 и I_4 , отвечающие алгебрам R_3 и R_4 , содержат элемент S_4 . Действительно, в алгебре R_3 имеют место равенства $S_4 = S_1S_3 = S_1S_2^2 = S_2(S_1S_2) = 0$, а в алгебре R_4 – равенства $S_4 = S_1S_3 = S_1^2S_2 = S_2S_3 = S_1S_2^2 = 0$. Значит, алгебры R_3 и R_4 на самом деле имеют размерность не 5, а ≤ 4 . Выясним, какие алгебры на самом деле отвечают условиям $\dim \mathfrak{m}_R = 4$, $\dim \mathfrak{m}_R^2 = 2$, $\dim \mathfrak{m}_R^3 = 1$ (в работе [1] утверждалось, что этим условиям удовлетворяют алгебры R_2 , R_3 и R_4).

ЛЕММА 1. *Локальные конечномерные алгебры размерности 5 с условиями $\dim \mathfrak{m}_R = 4$, $\dim \mathfrak{m}_R^2 = 2$, $\dim \mathfrak{m}_R^3 = 1$ исчерпываются следующими:*

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2, S_2^2, S_1S_3 - S_4, S_2S_3, S_1S_4), \\
 R'_3 &= \mathbb{C}[S_1, S_2, S_3, S_4]/(S_1^2 - S_3, S_1S_2, S_2^2 - S_4, S_1S_3 - S_4, S_2S_3, S_1S_4).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{m}_R^3 = \langle S_4 \rangle$ и $\mathfrak{m}_R^2 = \langle S_3, S_4 \rangle$. В этом случае $S_iS_4 = 0$ для любого i и $S_3^2 = 0$. Нужно определить возможные произведения прочих базисных векторов. Запишем соотношения умножения в виде

$$\begin{aligned}
 S_1^2 &= aS_3 + bS_4, & S_1S_2 &= cS_3 + dS_4, & S_2^2 &= eS_3 + fS_4, \\
 S_1S_3 &= gS_4, & S_2S_3 &= hS_4.
 \end{aligned}$$

Можно считать $g \neq 0$, так как $S_3 \in \mathfrak{m}_R^2$, а значит, подмножество $\{S \in \langle S_1, S_2 \rangle : SS_3 \neq 0\}$ плотно в $\langle S_1, S_2 \rangle$. Рассмотрим три случая.

а) Пусть $h = 0$, $f \neq 0$. Тогда

$$0 = (aS_3 + bS_4)S_2 = S_1^2 S_2 = S_1(cS_3 + dS_4) = cgS_4,$$

а значит, $c = 0$. Аналогично,

$$0 = (cS_3 + dS_4)S_2 = S_1 S_2^2 = S_1(eS_3 + fS_4) = egS_1$$

и, следовательно, $e = 0$. Итак, умножение в алгебре теперь записывается более простыми условиями

$$S_1^2 = aS_3 + bS_4, \quad S_1 S_2 = dS_4, \quad S_2^2 = fS_4, \quad S_1 S_3 = gS_4, \quad S_2 S_3 = 0.$$

При этом $a \neq 0$, так как квадрат идеала двумерен. Заменим S_1 на $\gamma S_1 + \delta S_2$ так, чтобы $\gamma d + \delta f = 0$; тогда $S_1 S_2 = 0$. При этом можно выбрать $\gamma \neq 0$, так как $f \neq 0$. Теперь заменим S_3 на линейную комбинацию S_3 и S_4 , чтобы получить $S_1^2 = S_3$. Итак, соотношения умножения приняли вид

$$S_1^2 = S_3, \quad S_1 S_2 = 0, \quad S_2^2 = fS_4, \quad S_1 S_3 = \gamma^3 agS_4, \quad S_2 S_3 = 0.$$

Умножая S_i на подходящие скаляры, можно считать, что $\gamma^3 ag = 1$ и $f = 0$ или $f = 1$, что дает нам две алгебры, описанные в условии.

б) Пусть $h = f = 0$. Тогда, как и в случае а), несложно проверить, что $c = e = 0$, и соотношения умножения принимают вид

$$S_1^2 = aS_3 + bS_4, \quad S_1 S_2 = dS_4, \quad S_2^2 = 0, \quad S_1 S_3 = gS_4, \quad S_2 S_3 = 0.$$

Произведем замену S_1 на kS_1 , S_2 на $gS_2 - dS_3$, S_3 на $k^2 aS_3 + k^2 bS_4$, где $agk^3 = 1$. Тогда соотношения умножения примут вид

$$S_1^2 = S_3, \quad S_1 S_2 = 0, \quad S_2^2 = 0, \quad S_1 S_3 = S_4, \quad S_2 S_3 = 0$$

и, следовательно, алгебра изоморфна R_2 .

в) Пусть $h \neq 0$. Заменим S_2 на $\varkappa S_1 + \lambda S_2$, где коэффициенты таковы, что $\varkappa g + \lambda h = 0$, т.е. $S_2 S_3 = 0$, и $\lambda \neq 0$. Это сведет задачу к случаю а).

Чтобы убедиться, что получившиеся алгебры R_2 и R'_3 не изоморфны, достаточно заметить, что только во второй из них есть элемент, квадрат которого лежит в $\mathfrak{m}_R^3 \setminus \{0\}$.

Лемма 1 доказана.

Несложно проверить, что размерность остальных алгебр из списка действительно равна 5. Для этого можно в каждом из случаев построить 5-мерную подалгебру в $\text{Mat}_{5 \times 5}(\mathbb{C})$, порождающие элементы которой удовлетворяют требуемым соотношениям.

§ 3. Локальные конечномерные алгебры и действия на квадрике

В этом параграфе будут доказаны некоторые вспомогательные утверждения, которые позволят нам переформулировать задачу и применить к ней методы работы [1]. Мы выясним, какие локальные конечномерные алгебры отвечают локально транзитивным действиям на квадрике.

Начнем со следующего известного результата, доказательство которого приводится в силу отсутствия точной ссылки.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Aut} Q_n = \operatorname{PSO}(n+2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что группа Пикара квадрики $\operatorname{Pic} Q_n \cong \mathbb{Z}$ при $n \geq 3$ порождается пучком $\mathcal{O}(1)$. Любой автоморфизм квадрики Q_n индуцирует автоморфизм группы Пикара. При этом порождающая этой группы $\mathcal{O}(1)$ может перейти либо в $\mathcal{O}(1)$, либо в $\mathcal{O}(-1)$, но последний пучок не имеет глобальных сечений. Это значит, что любое гиперплоское сечение квадрики переходит вновь в гиперплоское сечение. При $n = 1$ и $n = 2$ последнее утверждение также верно. Итак, мы сопоставили автоморфизму квадрики преобразование пространства гиперплоских сечений квадрики $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(1))) = (\mathbb{P}^{n+1})^*$. Сопряженное к нему преобразование в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$ будет искомым продолжением исходного автоморфизма.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любое действие группы $\mathbb{G}_a^n$ на квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ продолжается до ортогонального представления группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+2}$.*

Заметим, что задача подъема действия группы на аффинной квадрике до действия на объемлющем пространстве очень трудна (см. [4]).

Будем называть n -фактором факторалгебру R алгебры многочленов $\mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$, в которой образы элементов $S_1, \dots, S_n$ линейно независимы. Заметим, что алгебра представляется в виде n -фактора, если ее можно породить n линейно независимыми элементами. Рассмотрим пару (ρ, v) , где ρ – точное представление группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $V = \mathbb{C}^{n+2}$, а v – циклический вектор этого представления. Соответствие Хассетта–Чинкеля сопоставляет этой паре локальную $(n+2)$ -мерную алгебру R , которая является n -фактором. Линейная независимость образов элементов S_i в алгебре R соответствует точности представления ρ .

Базис $\{\mu_1, \dots, \mu_{n+2}\}$ n -фактора R как векторного пространства называется *правильным*, если $\mu_1 = 1$, вектор μ_{n+2} выражается в виде многочлена от остальных базисных векторов и любая степень единственного максимального идеала $\mathfrak{m}_R$ является линейной оболочкой некоторых векторов этого базиса. Именно такой базис алгебры мы будем рассматривать в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *Среди локальных алгебр R размерности $n+2$ с носителем в нуле n -факторами являются все, кроме*

$$R_1 = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_{n+1}]/(S_i S_j \mid i, j = 1, \dots, n+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра R размерности $n+2$ не является n -фактором. Тогда произведение любых двух элементов из максимального идеала попадает в линейную оболочку сомножителей: в противном случае набор $1, f_1, f_2, f_1 f_2$ (или $1, f_1, f_1^2$) состоит из линейно независимых элементов, и, дополнив его до базиса всей алгебры, мы увидим, что элемент $f_1 f_2$ (соответственно f_1^2) выражается как многочлен от остальных базисных элементов и алгебра является n -фактором. Далее, можно рассмотреть три случая: $f_1 f_2 = f_1 + f_2$ (возможно, придется домножить f_1 и f_2 на некоторые числа), $f_1 f_2 = f_1$ и $f_1 f_2 = 0$. Но

несложно заметить, что в двух первых случаях элемент $f_1 + f_2$ или f_1 соответственно лежит в любой степени идеала $\mathfrak{m}_R$, что невозможно. Итак, произведение любых двух элементов из максимального идеала равно нулю, что полностью определяет алгебру.

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть локальная алгебра R размерности $n + 2$ является n -фактором. Замыкание $\mathbb{G}_a^n$ -орбиты точки $\langle 1 \rangle \in \mathbb{P}(R)$ будет невырожденной квадратикой тогда и только тогда, когда найдется невырожденная квадратичная форма q на R , относительно которой представление ρ ортогонально, а вектор 1 изотропен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если проективная квадратика является замыканием орбиты, то она $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантна. Но тогда $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантен и конус над ней, который задается в пространстве R тем же уравнением $q(u) = 0$. Согласно [8; теорема 3.1] множество нулей некоторого многочлена f инвариантно относительно действия группы G тогда и только тогда, когда этот многочлен G -полуинвариантен. Из унитарности группы $\mathbb{G}_a^n$ следует инвариантность квадратичной формы $q(u)$, а это и значит, что представление ортогонально. При этом вектор 1 по условию лежит во множестве нулей этого многочлена, т.е. изотропен.

Достаточность. Пусть представление ортогонально, а вектор 1 изотропен. Тогда множество нулей многочлена $q(u)$ инвариантно и содержит 1 . Следовательно, инвариантно и множество нулей той же квадратичной формы в проективном пространстве. Из точности представления следует, что размерность орбиты точки 1 равна размерности группы. Значит, размерность орбиты прямой $\langle 1 \rangle$ будет равна n , так как группа унитарна. Тогда замыканием этой орбиты будет проективизация квадратки $q(u) = 0$, потому что она имеет ту же размерность и неприводима.

Лемма 4 доказана.

Будем считать базисные векторы μ_i , $i = 2, \dots, n + 1$, образами порождающих элементов S_i алгебры $\mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$. Можно изменить набор $\{S_i\}$ так, что получившийся базис алгебры R будет правильным.

ЛЕММА 5. Представление ρ ортогонально тогда и только тогда, когда любой оператор умножения на μ_i в алгебре R аннулирует билинейную форму B , отвечающую квадратичной форме q , т.е.

$$B(\mu_i x, y) + B(x, \mu_i y) = 0$$

при $i = 2, \dots, n + 1$, $x, y \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление ρ ортогонально тогда и только тогда, когда операторы умножения на μ_i (образы элементов $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \text{Lie } \mathbb{G}_a^n$ при дифференциале представления ρ) кососимметричны относительно формы B .

§ 4. Основная теорема

Пусть $(n+2)$ -мерная алгебра R является n -фактором и в ней задан правильный базис $\{\mu_i\}$. Заметим, что если $\dim \mathfrak{m}_R^2 = 1$ и $\mathfrak{m}_R^2 = \langle \mu_{n+2} \rangle$, то в пространстве R можно определить следующую билинейную форму B_0 :

$$B_0(\mu_1, \mu_i) = -\delta_{i,n+2}, \quad B_0(\mu_i, \mu_{n+2}) = -\delta_{i1}, \quad B_0(\mu_i, \mu_j) = a_{ij},$$

где $\mu_i \mu_j = a_{ij} \mu_{n+2}$ при $i, j = 2, \dots, n+1$, а δ_{ij} – символ Кронекера.

ТЕОРЕМА 3. *Замыкание орбиты прямой $\langle v \rangle \in \mathbb{P}^{n+1}$, порожденной циклическим вектором v , будет невырожденной квадратикой тогда и только тогда, когда в соответствующей конечномерной алгебре $\dim \mathfrak{m}_R^2 = 1$ и форма B_0 невырождена. При этом замыкание орбиты будет иметь вид $B_0(u, u) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим паре (ρ, v) конечномерную факторалгебру R , где вектор v играет роль единицы. Выясним, когда в этой алгебре можно ввести невырожденную $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантную билинейную форму B , относительно которой вектор 1 изотропен. Предположим сначала, что такая форма существует, и выясним, какими свойствами она должна обладать.

ЛЕММА 6. *Пусть алгебра R является n -фактором, в ней введен правильный базис и существует невырожденная билинейная инвариантная форма B , причем единица изотропна относительно нее. Тогда выполняются следующие условия:*

- 1) $B(1, \mu_i) = 0$ при $i = 2, \dots, n+1$;
- 2) $B(\mu_i, \mu_j) = -B(1, \mu_i \mu_j)$ при $i, j = 2, \dots, n+1$;
- 3) $B(\mu_i, \mu_{n+2}) = 0$ при $i = 2, \dots, n+2$;
- 4) $B(x, y) = B_0(x, y)$, если нормировать форму так, что $B(1, \mu_{n+2}) = -1$;
- 5) $\dim \mathfrak{m}_R^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем условие 1). Согласно лемме 5 оператор умножения на μ_i ($i = 2, \dots, n+1$) аннулирует любую $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантную билинейную форму B . Значит, для любого $i = 2, \dots, n+1$ верно равенство

$$B(1, \mu_i) + B(\mu_i, 1) = 0. \quad (1)$$

Докажем условие 2). Равенство

$$B(\mu_i, \mu_j) = -B(1, \mu_i \mu_j) \quad (2)$$

доказывается аналогично для любых $i, j = 2, \dots, n+1$.

Из равенства (1) следует, что вектор μ_1 ортогонален векторам $\mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, а также самому себе (так как единица изотропна). Но форма B невырождена, а значит, $B(1, \mu_{n+2}) \neq 0$. Можно считать, что $B(1, \mu_{n+2}) = -1$. Из равенства (2) несложно получить, что значение формы $B(\mu_i, \mu_j)$ ($i, j = 2, \dots, n+1$) равно коэффициенту при μ_{n+2} в разложении $\mu_i \mu_j$ по базису. Итак, нам остается определить $B(\mu_{n+2}, \mu_i)$ при $i = 2, \dots, n+2$.

Покажем, что элемент μ_{n+2} лежит в цоколе $z(R)$ идеала $\mathfrak{m}_R$, т.е. в максимальной ненулевой степени этого идеала. Действительно, пусть это не так.

Тогда рассмотрим произвольный элемент $\mu = \alpha_2\mu_2 + \dots + \alpha_{n+1}\mu_{n+1} \in z(R)$ (в разложении μ по базису коэффициент при μ_{n+2} равен нулю по определению правильного базиса). При этом для $i = 2, \dots, n+2$ имеем $B(\mu_i, \mu) = -B(\mu\mu_i, 1) = 0$, так как произведение $\mu\mu_i$ лежит в идеале $z(R)\mathfrak{m}_R = 0$. Кроме того, $B(1, \mu) = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i B(1, \mu_i) = 0$. Но тогда элемент μ лежит в ядре формы, а значит, равен нулю. Итак, мы пришли к противоречию.

Теперь докажем условие 5). Заметим, что

$$B(\mu_i, \mu_j\mu_k) = -B(\mu_i\mu_j, \mu_k) = B(\mu_j, \mu_i\mu_k) = -B(\mu_j\mu_k, \mu_i),$$

а значит, для любых $i, j, k = 2, \dots, n+1$ верно равенство

$$B(\mu_i, \mu_j\mu_k) = 0. \quad (3)$$

Это равенство верно и в случае, когда i, j или k равны $n+2$, так как μ_{n+2} лежит в цоколе идеала. Отсюда следует, что любой элемент идеала $\mathfrak{m}_R^2$ ортогонален $\langle \mu_2, \dots, \mu_{n+2} \rangle$, т.е. попадает в $\langle \mu_{n+2} \rangle$. Это и означает, что размерность квадрата идеала не превосходит единицы. Если она равна нулю, то алгебра R не будет n -фактором. Таким образом, утверждение 5) доказано.

Теперь мы можем доказать условия 3) и 4), окончательно определив форму B . Так как элемент μ_{n+2} лежит в цоколе идеала, то

$$B(\mu_i, \mu_{n+2}) = -B(1, \mu_i\mu_{n+2}) = -B(1, 0) = 0.$$

Кроме того, несложно показать, что $B(\mu_{n+2}, \mu_{n+2}) = 0$, представив элемент μ_{n+2} в виде многочлена от остальных μ_i . Значит, элемент μ_{n+2} ортогонален всему идеалу $\mathfrak{m}_R$, а единственное ненулевое произведение образует с единицей. При этом из симметричности формы имеем $B(\mu_{n+2}, 1) = -1$. Итак, форма определена однозначно с точностью до скалярного множителя.

Лемма 6 доказана.

Теперь доказательство теоремы 3 в одну сторону следует из леммы 6. Обратнo, пусть размерность квадрата идеала равна единице и соответствующая форма невырождена. Тогда по определению формы B_0 имеем $B_0(\mu_i\mu_j, \mu_k) = 0$ для любых $i, j, k = 2, \dots, n+2$, а значит, указанная форма инвариантна относительно действия группы. Кроме того, R в этом случае будет n -фактором, и леммы, доказанные в § 3, показывают, что замыканием орбиты прямой, порожденной циклическим вектором (или, что то же самое, орбиты прямой $\langle 1 \rangle$ в соответствующей конечномерной алгебре), будет квадрика $B_0(u, u) = 0$.

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого n существует такая единственная (с точностью до изоморфизма) пара $(\tilde{\rho}, v)$, где $\tilde{\rho}$ – проективное представление группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$, а v – циклический вектор в этом пространстве, что замыканием орбиты прямой $\langle v \rangle$ является невырожденная квадрика. Ей отвечает алгебра*

$$R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n] / (S_k^2 - S_l^2, S_i S_j \mid k, l = 1, \dots, n, i \neq j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 квадрика Q_n является замыканием орбиты тогда и только тогда, когда квадрат максимального идеала алгебры R одномерен, а форма B невырождена. В этом случае матрица формы $B = B_0$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & A & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом можно подобрать замену базиса в подпространстве $\langle \mu_2, \dots, \mu_{n+1} \rangle$ так, чтобы эта матрица приняла вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & E_n & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица (ограничение формы B на подпространство $\langle \mu_2, \dots, \mu_{n+1} \rangle$ невырождено). Остается заметить, что если квадрат максимального идеала одномерен, то форма B и умножение в алгебре R определяют друг друга. Итак, любая алгебра, определяющая искомое действие, изоморфна алгебре

$$R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n] / (S_k^2 - S_l^2, S_i S_j \mid k, l = 1, \dots, n, i \neq j).$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любой $(n+2)$ -мерной локальной алгебре, квадрат максимального идеала которой одномерен, можно сопоставить квадрику – замыкание орбиты прямой, порожденной вектором 1. Эта квадрика может оказаться вырожденной. Кроме того, вырожденная квадрика может быть замыканием орбиты и при действии, отвечающем алгебре другого вида. Таким образом, в отличие от невырожденного случая вырожденная квадрика не определяет локальную алгебру однозначно. В качестве примера рассмотрим квадрику $y_1^2 - 2y_0 y_2 = 0$ в $\mathbb{P}^3$ и алгебры $A_1 = \mathbb{C}[x, y] / (x^3 - y, x^4)$, $A_2 = \mathbb{C}[x, y] / (y^2, xy, x^3)$. Соответствующие действия будут представляться матрицами

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1^2}{2} & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 + \frac{a_1^3}{6} & \frac{a_1^2}{2} & a_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1^2}{2} & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{G}_a^2$. В замыкании открытой орбиты в первом случае лежат еще две орбиты, а во втором их число бесконечно.

§ 5. Вычисление модальности локально транзитивных действий

Этот параграф посвящен более подробному изучению локально транзитивных действий группы $\mathbb{G}_a^n$. В частности, нас будут интересовать вопросы конечности числа орбит в замыкании орбиты прямой, порожденной циклическим вектором.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [1; предложение 3.7]). *Для любого n существует единственное локально транзитивное действие группы $\mathbb{G}_a^n$ на $\mathbb{P}^n$ с конечным числом орбит. Это действие отвечает локальной алгебре*

$$R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]/(S_1^i - S_i, S_j S_k \mid i = 1, \dots, n, j + k > n).$$

Для любой алгебраической группы H , действующей на неприводимом алгебраическом многообразии X , обозначим через $d(X, H)$ минимальную коразмерность H -орбиты в X . Модальностью действия $H : Y$ называется число $\text{mod}(Y, H)$ – максимум по всем неприводимым инвариантным подмногообразиям $X \subset Y$ величины $d(X, H)$. В частности, $\text{mod}(Y, H) = 0$ тогда и только тогда, когда число H -орбит на Y конечно.

Возникает естественный вопрос, обобщающий предложение 1: какой может быть модальность локально транзитивного действия группы $\mathbb{G}_a^n$ на $\mathbb{P}^n$?

ПРИМЕР. Пусть алгебра R равна $\mathbb{C}[x, y]/(x, y)^{k+1}$. Покажем, что модальность соответствующего действия в проективном пространстве равна $pk - p^2 + p$, где $p = [(k + 1)/2]$.

Начнем с разбора частного случая, положив $k = 3$. Чтобы записать матрицу $\rho(a)$ ($a = (a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{G}_a^9$) соответствующего представления, вычислим экспоненту элемента

$$a_1\mu_1 + \dots + a_9\mu_9 = a_1x + a_2y + a_3x^2 + \dots + a_9y^3$$

и умножим ее на всевозможные μ_i . В результате получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 + \frac{a_1^2}{2} & a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 + a_1a_2 & a_2 & a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 + \frac{a_2^2}{2} & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 + a_1a_3 + \frac{a_1^3}{6} & a_3 + \frac{a_1^2}{2} & 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 + a_1a_4 + a_2a_3 + \frac{a_1^2a_2}{2} & a_4 + a_1a_2 & a_3 + \frac{a_1^2}{2} & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_8 + a_1a_5 + a_2a_4 + \frac{a_1a_2^2}{2} & a_5 + \frac{a_2^2}{2} & a_4 + a_1a_2 & 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_9 + a_2a_5 + \frac{a_2^3}{6} & 0 & a_5 + \frac{a_2^2}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граница орбиты вектора $\langle 1 \rangle$ состоит из векторов, нулевая координата которых равна нулю, т.е. из векторов вида $x\mu = x_1\mu_1 + \dots + x_9\mu_9$. При умножении

матрицы представления на элемент $x\mu$ мы получим

$$\begin{aligned}\rho(a)(x\mu) = & x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + (a_1x_1 + x_3)\mu_3 + (a_2x_1 + a_1x_2 + x_4)\mu_4 + (a_2x_2 + x_5)\mu_5 \\ & + \left(\left(a_3 + \frac{a_1^2}{2} \right) x_1 + a_1x_3 + x_6 \right) \mu_6 \\ & + \left((a_4 + a_1a_2)x_1 + \left(a_3 + \frac{a_1^2}{2} \right) x_2 + a_2x_3 + a_1x_4 + x_7 \right) \mu_7 \\ & + \left(\left(a_5 + \frac{a_2^2}{2} \right) x_1 + (a_4 + a_1a_2)x_2 + a_2x_4 + a_1x_5 + x_8 \right) \mu_8 \\ & + \left(\left(a_5 + \frac{a_1^2}{2} \right) x_2 + a_2x_5 + x_9 \right) \mu_9.\end{aligned}$$

Будем рассматривать элементы, удовлетворяющие условию вида $x_1 = 0, \dots, x_c = 0, x_{c+1} \neq 0$, и вычислять размерность орбиты такого вида и размерность семейства, образованного этими орбитами. Так, у элемента $x\mu$ с $x_1 \neq 0$ две первых координаты не меняются при действии группы, третья может принимать любое значение (причем полученное значение однозначно определяет величину a_1), четвертая также принимает любое значение, определяя a_2 , пятая определена однозначно, так как a_2 уже зафиксировано, шестая определяет a_3 , седьмая – a_4 , восьмая – a_5 , а девятая определена однозначно. Таким образом, в этом случае есть пять свободных параметров a_i , и размерность орбиты равна 5. Орбиты с $x_1 \neq 0$ образуют семейство, размерность которого на единицу меньше разности количества свободных x_i и свободных a_i , что в данном случае равно $9 - 5 - 1 = 3$. Итак, орбиты с $x_1 \neq 0$ образуют трехмерное семейство пятимерных орбит.

Теперь следует рассмотреть условия и для других c . При этом следует отметить, что для любого c множество элементов, удовлетворяющих условию такого вида, $\mathbb{G}_a^n$ -инвариантно, т.е. если $x_1 = 0, \dots, x_c = 0, x_{c+1} \neq 0$, то любой элемент из орбиты $\mathbb{G}_a^n x$ удовлетворяет тем же условиям для $c' \geq c$. Все рассуждения аналогичны, и результат можно свести в таблицу:

c	размерность орбиты	размерность семейства
0	5	3
1	5	2
2	2	4
3	2	3
4	2	3
5	1	3
6	0	2
7	0	1
8	0	0

Ясно, что модальность действия равна максимуму размерностей семейств такого вида, т.е. в данном случае 4.

Теперь сказанное нужно обобщить на случай произвольного k . Введем следующую нумерацию базисных элементов, разбивая их на подмножества из

$l_0 = 1$ элементов нулевой степени, $l_1 = 2$ элементов первой степени и т.д.:

$$1 = \mu_0 = \mu_{l_0}, \quad \mu_1 = \mu_{l_1}, \quad \mu_2 = \mu_{l_1+1}, \\ \mu_1^2 = \mu_3 = \mu_{l_2}, \quad \dots, \quad \mu_1^b = \mu_{l_b}, \quad \mu_1^{b-1} \mu_2 = \mu_{l_b+1}, \quad \dots, \quad \mu_2^b = \mu_{l_b+b}, \quad \dots$$

Матрица $\rho(a)$ нашего представления состоит из блоков A_{ij} размера $(i+1) \times (j+1)$. Блоки, стоящие выше диагонали, равны нулю, диагональные блоки A_{ii} совпадают с единичными матрицами E_{i+1} , блок A_{i0} состоит из одного столбца с элементами $y_i, \dots, y_{i+i}$, блок A_{ij} с $i > j > 0$ имеет вид

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} y_{i-j} & 0 & \dots & 0 \\ y_{i-j+1} & y_{i-j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-j+i-j} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & y_{i-j+i-j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{i-j+i-j} \end{pmatrix}.$$

Здесь y_p – некоторые многочлены от параметров a_q . Можно также заметить, что y_p содержит слагаемое a_p , а многочлены с меньшим номером от a_p не зависят.

Модальность действия можно вычислять как максимальное по s число параметров во множестве орбит элементов вида $x_1 = \dots = x_c = 0$, $x_{c+1} \neq 0$. Чтобы получить размерность орбиты такого элемента, вычеркнем из матрицы первые s столбцов и будем рассматривать строки получившейся подматрицы. Из структуры матрицы следует, что размерность орбиты равна количеству различных y_i в этой подматрице. Соответственно, число параметров на 1 меньше разности размерности объединения орбит (т.е. количества оставшихся столбцов) и количества y_i . Рассмотрев устройство представления, несложно заметить, что при вычеркивании столбцов, отвечающих мономам одной степени, уменьшаемое в этой разности становится все меньше, а вычитаемое не меняется, и, следовательно, для вычисления модальности достаточно рассматривать столбцы с номерами l_i . Пусть выброшены столбцы с номерами $l_0, \dots, (l_{p-1} + p - 1)$, т.е. элементы, отвечающие мономам, степень которых меньше p . Тогда число различных y_i равно $2 + 3 + \dots + (k - p + 1)$, а количество параметров равно

$$(p+1) + (p+2) + \dots + (k+1) - 2 - 3 - \dots - (k-p+1) - 1 = pk - p^2 + p.$$

Это выражение достигает максимума при $p = [(k+1)/2]$.

Перейдем теперь к действию группы $\mathbb{G}_a^n$ на квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Мы уже знаем, что соответствующая ему алгебра имеет вид

$$R = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n] / (S_k^2 - S_l^2, S_i S_j \mid k, l = 1, \dots, n, i \neq j)$$

и $q = 2y_0 y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i^2$. Опишем замыкание орбиты прямой $\langle v_0 \rangle$, порожденной циклическим вектором $v_0 = 1 \in R$. Представление ρ можно записать при

помощи матриц

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \sum a_i^2 & a_1 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix},$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{G}_a^n$. Орбитой прямой $\langle 1 \rangle$ будет множество точек вида $(1 : a_1 : \dots : a_n : \frac{1}{2} \sum a_i^2)$. Эта орбита плотна в квадрике $2y_0y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$, а дополнение к ней состоит из точек вида $(0 : b_1 : \dots : b_n : c)$, для которых $\sum b_i^2 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Модальность локально транзитивного действия группы $\mathbb{G}_a^n$ на Q_n равна $n - 2$ при $n \geq 2$ и нулю при $n = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n \geq 2$ орбита точки $(0 : b_1 : \dots : b_n : c)$, где $\sum b_i^2 = 0$, состоит из элементов вида $(0 : b_1 : \dots : b_n : c + b_1 a_1 + \dots + b_n a_n)$. Это значит, что орбита определяется набором из координат от второй до предпоследней, которые связаны лишь соотношением $\sum b_i^2 = 0$. Следовательно, эти орбиты образуют $(n - 2)$ -мерное семейство и покрывают замыкание орбиты точки $\langle 1 \rangle$. При $n = 1$ на квадрике, кроме орбиты циклического вектора, лежит только неподвижная точка $(0 : 0 : 1)$.

Предложение 2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Число орбит локально транзитивного действия $\mathbb{G}_a^n$ на Q_n конечно тогда и только тогда, когда $n \leq 2$.*

При любом n на квадрике лежит единственная неподвижная точка; это $(0 : \dots : 0 : 1)$.

§ 6. Максимальные коммутативные подалгебры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие и $G \subseteq \text{Aut}(X)$ – конечномерная коммутативная алгебраическая подгруппа, действующая на X с открытой орбитой. Тогда G – максимальная коммутативная подгруппа в $\text{Aut}(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Gx_0 \subseteq X$ – открытая орбита и $g \in \text{Aut}(X) \setminus G$ – элемент, коммутирующий со всеми элементами подгруппы G . Из неприводимости X следует, что $gGx_0 \cap Gx_0 \neq \emptyset$, а значит, найдутся такие элементы $g_1, g_2 \in G$, что $gg_1x_0 = g_2x_0$. Тогда элемент $g' = g_2^{-1}gg_1$ стабилизирует точку x_0 , а так как $g_1, g_2 \in G$, а $g \notin G$, то этот элемент не лежит в группе G и, в частности, не равен единичному. Но тогда в силу коммутативности элемент g' действует тождественно на открытой орбите Gx_0 , а значит, и на всем многообразии X . Полученное противоречие доказывает предложение 3.

Каждому действию группы $\mathbb{G}_a^n$ на пространстве $\mathbb{P}^n$ отвечает коммутативная унипотентная подгруппа в $\text{SL}(n + 1)$, а каждому действию на квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – коммутативная унипотентная подгруппа в $\text{SO}(n + 2)$. При этом

если действие локально транзитивно, то по предложению 3 возникающая подгруппа максимальна среди коммутативных унипотентных подгрупп в $SL(n+1)$ или $SO(n+2)$ соответственно. Возникает вопрос: существует ли в группе $SL(n+1)$ (соответственно $SO(n+2)$) максимальная коммутативная унипотентная подгруппа размерности n , соответствующее которой действие не локально транзитивно? В работе [2] в явном виде перечислены все (с точностью до сопряженности) максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{sl}(n+1)$, где n не превосходит 4. Для каждого из этих малых n каждой максимальной коммутативной унипотентной подалгебре размерности n соответствует локально транзитивное действие $\mathbb{G}_a^n : \mathbb{P}^n$. В общем случае ответ для специальной линейной алгебры нам не известен. В ортогональном случае контрпример можно извлечь из работы [9]. Согласно теореме 4 в алгебре $\mathfrak{so}(n+2)$ лежит единственная (с точностью до сопряженности) подалгебра размерности n , соответствующая локально транзитивному действию $\mathbb{G}_a^n : Q_n$. В работе [9] указаны так называемые *free-rowed* максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры размерности n в $\mathfrak{so}_{n+2}$ для $n \geq 6$. Опишем эти подалгебры и проверим, что соответствующие им действия не локально транзитивны. Пусть форма B определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & E_4 \\ 0 & E_{n-6} & 0 \\ E_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а подалгебра состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A & Y \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица $Y \in \text{Mat}_{4 \times 4}$ кососимметрична, у матрицы $A \in \text{Mat}_{4 \times (n-6)}$ лишь первая строка $(m_1, \dots, m_{n-6})$ не равна нулю, а у матрицы $B \in \text{Mat}_{(n-6) \times 4}$ ненулевой только первый столбец $(-m_1, \dots, -m_{n-6})$. Несложно проверить, что это подалгебра в $\mathfrak{so}_{n+2}$ и размерность ее равна n . Квадрат любой матрицы X такого вида равен $(-m_1^2 - \dots - m_{n-6}^2)E_{1,n-1}$, а куб — нулевой матрице, и следовательно, экспонента ее равна

$$E + X + \frac{1}{2}(-m_1^2 - \dots - m_{n-6}^2)E_{1,n-1}.$$

Любой столбец при умножении на экспоненту матрицы такого вида сохранит четыре последних координаты, что позволяет заключить, что открытой орбиты при таком действии не возникает.

Список литературы

- [1] B. Hassett, Yu. Tschinkel, “Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$ ”, *Internat. Math. Res. Notices*, **22** (1999), 1211–1230.
- [2] Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич, *Перестановочные матрицы*, Наука и техника, Минск, 1966.

- [3] H. Matsumura, P. Monsky, “On the automorphisms of hypersurfaces”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **3** (1964), 347–361.
- [4] M. Doebeli, “Reductive group actions on affine quadrics with 1-dimensional quotient: Linearization when a linear model exists”, *Transform. Groups*, **1**:3 (1996), 187–214.
- [5] B. Totaro, “The automorphism group of an affine quadric”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **143**:1 (2007), 1–8.
- [6] Д. Н. Ахиезер, “О модальности и сложности действий редуктивных групп”, *УМН*, **43**:2 (1988), 129–130; англ. пер.: D. N. Akhiezer, “On the modality and complexity of actions of reductive groups”, *Russian Math. Surveys*, **43**:2 (1988), 157–158.
- [7] И. В. Аржанцев, “О модальности и сложности аффинных вложений”, *Матем. сб.*, **192**:8 (2001), 47–52; англ. пер.: I. V. Arzhantsev, “On modality and complexity of affine embeddings”, *Sb. Math.*, **192**:8 (2001), 1133–1138.
- [8] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV. Linear algebraic groups, invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.
- [9] V. Hussin, P. Winternitz, H. Zassenhaus, “Maximal abelian subalgebras of complex orthogonal Lie algebras”, *Linear Algebra Appl.*, **141** (1990), 183–220.

Е. В. Шаройко (E. V. Sharoiko)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sharojko@mccme.ru

Поступила в редакцию

09.12.2008 и 29.04.2009