Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Об ацикличности множества решений операторных уравнений, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 47–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:41:25

УДК 517.988.6

Б. Д. Гельман

Об ацикличности множества решений операторных уравнений

В работе рассматривается вполне непрерывное отображение, зависящее от параметра. Доказана теорема об ацикличности множества неподвижных точек этого отображения при некотором фиксированном значении параметра в предположении, что при близких значениях параметра отображение имеет единственную неподвижную точку. Полученные результаты использованы для доказательства ацикличности множества неподвижных точек “неразбрасывающего” отображения, а также для изучения топологической структуры множества неподвижных точек абстрактного отображения Вольтерра.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: ацикличное множество, неподвижная точка, вполне непрерывное отображение.

§ 1. Введение

В 1923 г. Г. Кнезером было установлено, что множество решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является связным множеством в пространстве непрерывных функций (см., например, [1]). В дальнейшем многими авторами этот факт был доказан для различных классов дифференциальных уравнений и включений (см., например, [2]). В 1959 г. в работе М. А. Красносельского и А. И. Перова [3] была доказана теорема о связности множества неподвижных точек вполне непрерывного отображения, являющаяся обобщением теоремы Кнезера на случай абстрактных операторных уравнений. В монографии [4] эти результаты получили свое дальнейшее развитие. Теорема Красносельского–Перова обобщалась многими авторами (отметим работы [5] и [6]). В работе [5] изучалась связность множества решений одного класса операторных включений, а в работе [6] было получено обобщение принципа связности Красносельского–Перова на случай многозначных отображений.

С другой стороны, в 1942 г. Н. Ароншайн в [7] доказал, что множество решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является ациклическим множеством в пространстве непрерывных функций, т.е. имеет такие же когомологии, что и точка. В работе [8] было доказано, что

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00192а).

при выполнении условий принципа связности Красносельского–Перова множество неподвижных точек вполне непрерывного отображения является ациклическим, и выяснено, что условиям этого принципа удовлетворяет абстрактное отображение Вольтерра, образы которого в начальный момент времени выходят из одной точки. В дальнейшем результат Аронштайна был распространен на многие классы дифференциальных уравнений и включений (см., например, монографии [2], [9], [10]). Интерес к этим теоремам был обусловлен тем, что ациклическость интегральной воронки дифференциального уравнения позволяет применять теорию неподвижных точек многозначных отображений к проблеме изучения периодических решений этих уравнений (см., например, [9], [10]).

Все теоремы о связности (ациклическости) множества неподвижных точек основаны на том, что сколь угодно близко к данному отображению существует отображение, имеющее единственную неподвижную точку, устойчивую при малых возмущениях, т.е. свойство связности (ациклическости) является предельным для отображений, имеющих единственную неподвижную точку. Естественно возникает вопрос о связности (ациклическости) множества неподвижных точек вполне непрерывного отображения, зависящего от параметра, при некотором фиксированном значении параметра при условии, что при близких значениях параметра отображение имеет единственную неподвижную точку.

В настоящей статье изучается этот вопрос. В ней рассматривается вполне непрерывное отображение, зависящее от параметра, и доказывается теорема об ациклическости множества неподвижных точек отображения при некотором фиксированном значении параметра. Затем эта теорема применяется для доказательства ациклическости множества неподвижных точек “неразбрасывающего” отображения, удовлетворяющего условиям теоремы Шаудера, а также для изучения топологической структуры множества неподвижных точек абстрактного отображения Вольтерра. Полученные результаты являются развитием результатов автора, изложенных в [6], [11].

§ 2. Ациклическость множества неподвижных точек вполне непрерывных отображений, зависящих от параметра

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты и определения. Пусть X – метрическое пространство, $H^n(X)$ – когомологии Александера–Спеньера пространства X с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Основные свойства теории когомологий содержатся, например, в [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пространство X является ациклическим, если приведенные когомологии $\bar{H}^n(X) = 0$ для любого $n \geq 0$.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть X – метрическое пространство, A – компактное подмножество в X . Пусть существует последовательность непрерывных отображений $\{h_n\}$, $h_n: [0, 1] \times A \rightarrow X$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n \geq n_0$ множество $h_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A)$;

- 2) для любых $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $x = h_n(0, x)$;
 3) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $a_n \in X$ такая, что $a_n = h_n(1, x)$ для всех $x \in A$.

Тогда множество A является ациклическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим число n такое, что

$$h_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A).$$

Пусть отображение $i_n: A \rightarrow A \subset U_\varepsilon(A)$ является отображением вложения, т.е. $i_n(x) = x$. В силу условий леммы это отображение гомотопно постоянному отображению $j_n(x) = a_n$, где гомотопия задается отображением $h(\lambda, x)$. Следовательно, индуцированный гомоморфизм

$$i_n^*: \bar{H}^n(U_\varepsilon(A)) \rightarrow \bar{H}^n(A)$$

является нулевым. Так как система окрестностей $U_\varepsilon(A)$ индуцирует прямой предел групп когомологий

$$\lim_{\rightarrow} \bar{H}^n(U_\varepsilon(A)) = \bar{H}^n(A)$$

(см., например, теорему 8.4 из [12]), то тождественное отображение $i: A \rightarrow A$ индуцирует нулевой гомоморфизм $i^*: \{\bar{H}^n(A)\} \rightarrow \{\bar{H}^n(A)\}$. Следовательно, $\bar{H}^n(A) = 0$ для любого $n \geq 0$, т.е. множество A является ациклическим.

Пусть E – банахово пространство, T – ограниченное замкнутое подмножество в E , $g: T \rightarrow E$ – вполне непрерывное отображение. Обозначим через A множество неподвижных точек отображения g . Будем предполагать, что $A \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует последовательность вполне непрерывных отображений $g_n: T \rightarrow E$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (I) существует выпуклое компактное множество K_0 такое, что

$$\bigcup_n g_n(T) \subset K_0;$$

- (II) для любой точки $x \in T$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$;

(III) на любом компакте $K \subset T$ последовательность отображений $\{g_n\}$ является равномерно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого n и любых $x_1, x_2 \in K$ таких, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$, выполнено $\|g_n(x_1) - g_n(x_2)\| < \varepsilon$;

- (IV) для любых n , точки $y \in A$ и числа $\lambda \in [0, 1]$ уравнение

$$x = g_n(x) + (1 - \lambda)(g(y) - g_n(y)) \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Тогда множество A ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в силу условия (II) множество $g(T) \subset K_0$. Обозначим

$$K_1 = \{a + b - c \mid a, b, c \in K_0\}.$$

Очевидно, что это множество также является компактом. Пусть $K = K_1 \cap T$. Нетрудно заметить, что множество $K \supset A$. Так как последовательность $\{g_n\}$ поточечно сходится на компакте K к непрерывному отображению g и равномерно непрерывна, то из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая будет сходиться к g на K равномерно. Без ограничения общности будем предполагать, что сама последовательность $\{g_n\}$ сходится к g равномерно на множестве K .

Рассмотрим последовательность отображений $h_n: [0, 1] \times A \rightarrow E$, $h_n(\lambda, y) = x$, где x является решением уравнения $x = g_n(x) + (1 - \lambda)(g(y) - g_n(y))$. Проверим, что последовательность отображений $\{h_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Нетрудно заметить, что в силу условия (IV) отображение h_n является однозначным и непрерывным.

Очевидно также, что для любой точки $y \in A$ и любого n образ $h_n(0, y) = y$ (так как y является единственным решением уравнения $x = g_n(x) + (g(y) - g_n(y))$) и $h_n(1, y)$ не зависит от выбора y и равно a_n , где a_n единственная неподвижная точка отображения g_n .

Проверим теперь выполнение условия 1) леммы 1. Пусть η – произвольное положительное число. Покажем, что существует номер n_0 такой, что для любого $n \geq n_0$ выполнено включение $h_n([0, 1] \times A) \subset U_\eta(A)$.

Используем для этого метод доказательства от противного. Предположим, что найдется число $\eta_0 > 0$, последовательность $\{(\lambda_n, y_n)\} \subset [0, 1] \times A$ и последовательность $\{x_n\}$, $x_n = h_n(\lambda_n, y_n)$, такие, что $x_n \notin U_{\eta_0}(A)$. В силу компактности множества $[0, 1] \times A$ без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y_*$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$. В силу условия (I) теоремы можно считать, что $g_n(x_n) \rightarrow z_*$. Также заметим, что

$$\begin{aligned} x_n &= g_n(x_n) + (1 - \lambda_n)(g(y_n) - g_n(y_n)) \\ &= g_n(x_n) + [(1 - \lambda_n)g(y_n) + \lambda_n g_n(y_n)] - g_n(y_n) \in K. \end{aligned}$$

Тогда последовательность $x_n \rightarrow x_0$, где

$$x_0 = z_* + (1 - \lambda_*)(g(y_*) - g_n(y_*)).$$

В силу равномерной сходимости отображений g_n к g на множестве K получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_n) = g(x_0) = z_*$. Тогда

$$\|g(x_0) - x_0\| = (1 - \lambda_*)\|g(y_*) - g_n(y_*)\| \leq \|g(y_*) - g_n(y_*)\|. \quad (2)$$

Пусть $D = T \setminus U_{\eta_0}(A)$. Очевидно, что это множество замкнуто и $g(x) \neq x$ для любого $x \in K$. В силу полной непрерывности отображения g существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\|g(x) - x\| \geq \varepsilon_0$ для любой точки $x \in D$. Рассмотрим номер n_1 столь большой, что $\|g(y_*) - g_n(y_*)\| < \varepsilon_0$ для любого $n > n_1$. Тогда в силу (2) выполнено неравенство $\|g(x_0) - x_0\| < \varepsilon_0$, т.е. точка $x_0 \in U_{\eta_0}(A)$.

Следовательно, для достаточно большого номера n точка $x_n \in U_{\eta_0}(A)$, что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие доказывает включение $h_n([0, 1] \times A) \subset U_{\eta}(A)$.

Таким образом, выполнены все условия леммы 1. Следовательно, множество A ациклично.

Применим теперь теорему 1 для изучения множества неподвижных точек вполне непрерывных отображений, зависящих от параметра.

Пусть E – банахово пространство, T – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество в E , $g: T \times [0, a] \rightarrow E$ – вполне непрерывное отображение. Рассмотрим семейство отображений $\{g_\tau\}_{\tau \in [0, a]}$, где $g_\tau = g(\cdot, \tau): T \rightarrow E$.

Обозначим через $\text{Fix}(g_0)$ множество неподвижных точек отображения g_0 .

ЛЕММА 2. *Если для любого $\tau \in (0, a]$ отображение g_τ имеет неподвижную точку, то множество $\text{Fix}(g_0)$ непусто.*

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $g: T \times [0, a] \rightarrow T$ – вполне непрерывное отображение. Если для любой точки $y \in \text{Fix}(g_0)$, любых $\tau \in (0, a]$ и $\lambda \in [0, 1]$ уравнение*

$$x = g_\tau(x) + (1 - \lambda)(y - g_\tau(y)) \quad (3)$$

имеет единственное решение, то множество $\text{Fix}(g_0)$ является ациклическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K_0 = \overline{\text{conv}}(g(T \times [0, \varepsilon])) \subset T$, а $K_1 = K_0 + K_0 - K_0$. Пусть $K = K_1 \cap T$. Очевидно, что K является выпуклым компактом. Пусть $\hat{g}$ – сужение отображения g на множество $K \times [0, a]$, $\hat{g}_\tau = \hat{g}(\cdot, \tau)$. Так как множество $K_0 \subset K$, то $\text{Fix}(g_0) = \text{Fix}(\hat{g}_0)$.

Пусть $\{\tau_n\} \subset [0, a]$ – такая последовательность чисел, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$. Обозначим $g_n = \hat{g}_{\tau_n}$, $g_n: K \rightarrow K$. Проверим, что последовательность $\{g_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Так как $g_n(K) \subset K$ для любого n , то условие (I) выполнено. В силу непрерывности отображения g по совокупности переменных имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x, \tau_n) = g(x, 0) = \hat{g}_0(x),$$

т.е. последовательность $\{g_n\}$ сходится к отображению $\hat{g}_0$ в каждой точке множества K .

Проверим теперь, что семейство отображений $\{g_n\}$ является равномерно непрерывным. Пусть ε – произвольное положительное число. Так как отображение $\hat{g}$ определено на компактном множестве $K \times [0, a]$, то оно равномерно непрерывно. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in K$, $\|x_1 - x_2\| < \delta$, и любых $\tau_1, \tau_2 \in [0, a]$, $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, справедливо неравенство $\|\hat{g}(x_1, \tau_1) - \hat{g}(x_2, \tau_2)\| < \varepsilon$.

Пусть $x_1, x_2 \in K$ и $\|x_1 - x_2\| < \delta$. Тогда

$$\|g_n(x_1) - g_n(x_2)\| = \|\hat{g}(x_1, \tau_n) - \hat{g}(x_2, \tau_n)\| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную непрерывность семейства $\{g_n\}$.

Рассмотрим уравнение

$$x = g_n(x) + (1 - \lambda)(y - g_n(y)), \quad (4)$$

где $y \in \text{Fix}(g_0)$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. В силу условий теоремы уравнение

$$x = g_{\tau_n}(x) + (1 - \lambda)(y - g_{\tau_n}(y))$$

имеет единственное решение. Обозначим его через x_n и покажем, что x_n является единственным решением уравнения (4). Это вытекает из того, что $x_n \in K$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_n &= g_{\tau_n}(x_n) + (1 - \lambda)(y - g_{\tau_n}(y)) = \widehat{g}_{\tau_n}(x_n) + (1 - \lambda)(y - \widehat{g}_{\tau_n}(y)) \\ &= g_n(x_n) + (1 - \lambda)(y - g_n(y)). \end{aligned}$$

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, множество $\text{Fix}(\widehat{g}_0)$ ациклично. В силу того, что $\text{Fix}(\widehat{g}_0) = \text{Fix}(g_0)$, получаем, что множество $\text{Fix}(g_0)$ также ациклично.

§ 3. Некоторые приложения полученных результатов

3.1. Множество неподвижных точек неразбрасывающего отображения. Пусть E – банахово пространство, $T \subset E$ – выпуклое ограниченное замкнутое множество, $g_0: T \rightarrow T$ – вполне непрерывное отображение.

ТЕОРЕМА 3. *Если для любых точек $x, y \in T$ справедливо неравенство*

$$\|g_0(x) - g_0(y)\| \leq \|x - y\|,$$

то множество $\text{Fix}(g_0)$ непусто и ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота множества $\text{Fix}(g_0)$ вытекает из теоремы Шаудера. Докажем ацикличность этого множества. Для этого рассмотрим отображение $g: T \times [0, 1] \rightarrow T$, определенное условием

$$g(x, \tau) = (1 - \tau)g_0(x) + \tau x_0,$$

где x_0 – произвольная фиксированная точка из T . Проверим, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 2. Полная непрерывность отображения $g(x, \tau)$ очевидна.

Рассмотрим уравнение

$$x = g_\tau(x) + (1 - \lambda)(y - g_\tau(y)),$$

где $y \in \text{Fix}(g_0)$, и покажем, что оно имеет единственное решение для любых $\tau \in (0, 1]$ и $\lambda \in [0, 1]$. Прежде всего проверим, что

$$f_\tau(x, \lambda) = g_\tau(x) + (1 - \lambda)(y - g_\tau(y)) \in T$$

для любых $\lambda \in [0, 1]$ и $x \in T$. Так как $y \in \text{Fix}(g_0)$, то

$$y - g_\tau(y) = y - [(1 - \tau)y + \tau x_0] = \tau(y - x_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_\tau(x, \lambda) &= [(1 - \tau)g_0(x) + \tau x_0] + (1 - \lambda)\tau(y - x_0) \\ &= (1 - \tau)g_0(x) + \tau[\lambda x_0 + (1 - \lambda)y]. \end{aligned}$$

Так как множество T выпукло, то

$$\lambda x_0 + (1 - \lambda)y \in T.$$

Следовательно, $f_\tau(x, \lambda) \in T$.

Проверим теперь, что отображение $f_\tau(\cdot, \lambda)$ является сжимающим для любых $\tau \in (0, 1]$ и $\lambda \in [0, 1]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|f_\tau(x_1, \lambda) - f_\tau(x_2, \lambda)\| &= \|g_\tau(x_1) - g_\tau(x_2)\| = (1 - \tau)\|g_0(x_1) - g_0(x_2)\| \\ &\leq (1 - \tau)\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$x = g_\tau(x) + (1 - \lambda)(y - g_\tau(y))$$

имеет единственное решение. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, из чего следует справедливость теоремы 3.

3.2. О структуре множества неподвижных точек отображения Вольтерра. Пусть $C_{[a,b]}$ – пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, $X \subset C_{[a,b]}$, $g: X \rightarrow C_{[a,b]}$ – вполне непрерывный оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что отображение g является отображением Вольтерра, если для любого $\varepsilon \in [0, b - a]$ и любых функций $x, y \in X$ из того, что $x(t) = y(t)$ для $t \in [a, a + \varepsilon]$, вытекает, что $g(x)(t) = g(y)(t)$ для t из того же промежутка $[a, a + \varepsilon]$.

Пусть $X \subset C_{[a,b]}$, $g: X \rightarrow C_{[a,b]}$ – вполне непрерывное отображение Вольтерра. Обозначим $X_0 = \{x(a) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X\}$. Пусть $i: X_0 \rightarrow X$ – некоторое вложение (не обязательно непрерывное), т.е. любому вектору $h \in X_0$ отображение i сопоставляет функцию $x \in X$ такую, что $x(a) = h$.

Рассмотрим отображение $g^0: X_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное условием

$$g^0(h) = g(i(h))(a).$$

Очевидно, что в силу вольтерровости g отображение g^0 определено корректно, т.е. оно не зависит от выбора вложения i .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим пример нахождения отображения g^0 . Пусть отображение $g: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ определено условием

$$g(x)(t) = \varphi(x(a)) + \alpha(t) + \int_a^t k(t, s)f(s, x(s)) ds,$$

где φ – непрерывное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, $\alpha \in C_{[a,b]}$, k – непрерывное отображение множества $[a, b] \times [a, b]$ в пространство $L(\mathbb{R}^n)$, $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторое непрерывное отображение. Очевидно, что отображение g является отображением Вольтерра и отображение g^0 определено соотношением $g^0(h) = \varphi(h) + \alpha(a)$.

Пусть $\gamma \in [0, b - a]$. Рассмотрим отображение $s_\gamma: [a, b] \rightarrow [a, b]$, определенное условием

$$s_\gamma(t) = \begin{cases} a, & \text{если } t \in [a, a + \gamma], \\ t - \gamma, & \text{если } t \in (a + \gamma, b]. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что множество $X \subset C_{[a,b]}$ является регулярным, если для любой функции $x \in X$ и любого $\gamma \in [0, b - a]$ функция $x_\gamma \in X$, где $x_\gamma(t) = x(s_\gamma(t))$.

ПРИМЕР 2. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество. Рассмотрим множество

$$X = \{x \in C_{[a,b]} \mid x(t) \in T \text{ для любого } t \in [a, b]\}.$$

Нетрудно проверить, что это множество является регулярным.

Пусть множество $X \subset C_{[a,b]}$ является регулярным, $g: X \rightarrow C_{[a,b]}$ – вполне непрерывное вольтеррово отображение. Рассмотрим семейство отображений $g_\gamma: X \rightarrow C_{[a,b]}$, $g_\gamma(x)(t) = g(x)(s_\gamma(t))$. Обозначим через $\text{Fix}(g)$ множество неподвижных точек отображения g . Будем предполагать, что $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 3. Пусть $X \subset C_{[a,b]}$ – регулярное ограниченное замкнутое выпуклое подмножество, $g: X \rightarrow X$ – вполне непрерывное вольтеррово отображение. Пусть отображение $g^0: X_0 \rightarrow X_0$ имеет единственную неподвижную точку. Если существует такое $\alpha \in (0, b - a]$, что для любых $\gamma \in (0, \alpha]$ и $\lambda \in [0, 1]$ уравнение

$$x = g_\gamma(x) + (1 - \lambda)(y - g_\gamma(y)) \quad (5)$$

имеет решение для любой точки $y \in \text{Fix}(g)$, то множество $\text{Fix}(g)$ ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой леммы воспользуемся теоремой 2. Рассмотрим отображение $f: X \times [0, \alpha] \rightarrow X$, определенное условием

$$f(x, \gamma) = \begin{cases} g(x), & \text{если } \gamma = 0, \\ g_\gamma(x), & \text{если } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

В силу условий теоремы это отображение является вполне непрерывным и для любых $\gamma \in (0, \alpha]$ и $\lambda \in [0, 1]$ уравнение

$$x = g_\gamma(x) + (1 - \lambda)(y - g_\gamma(y))$$

имеет решение для $y \in \text{Fix}(g)$. Докажем единственность этого решения.

Пусть у этого уравнения существуют два решения $x_1 = x_1(\cdot)$ и $x_2 = x_2(\cdot)$. Так как в силу вольтерровости отображения g имеем $g^0(x(a)) = g_\gamma(x)(a)$ для любого γ и любой точки $x \in X$, то

$$g_\gamma(x_1)(a) + (1 - \lambda)(y(a) - g_\gamma(y)(a)) = g^0(x_1(a)) = x_1(a),$$

т.е. $x_1(a)$ – неподвижная точка отображения g^0 . Аналогично можно проверить, что $x_2(a)$ – неподвижная точка отображения g^0 . Так как по условию отображение g^0 имеет единственную неподвижную точку, то $x_1(a) = x_2(a)$.

Пусть $t \in [a, a + \gamma]$. Тогда

$$x_1(t) - x_2(t) = g_\gamma(x_1)(t) - g_\gamma(x_2)(t) = g(x_1)(a) - g(x_2)(a) = 0,$$

т.е. $x_1(t) = x_2(t)$ на $[a, a + \gamma]$. Аналогично,

$$x_1(t) - x_2(t) = g_\gamma(x_1)(t) - g_\gamma(x_2)(t) = 0,$$

если $t \in [a + \gamma, a + 2\gamma]$. Таким образом, получаем, что $x_1(t) = x_2(t)$ на $[a + \gamma, a + 2\gamma]$.

Продолжая этот процесс дальше, получим, что $x_1(t) = x_2(t)$ на всем промежутке $[a, b]$. Таким образом, уравнение (5) имеет единственное решение и все условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, множество $\text{Fix}(g)$ ациклично.

Вернемся к общему случаю. Пусть U – ограниченное выпуклое открытое множество в пространстве $C_{[a,b]}$ такое, что $\bar{U}$ является регулярным; $g: \bar{U} \rightarrow U$ – вполне непрерывное вольтеррово отображение. Обозначим через $A(g)$ множество неподвижных точек отображения g , а через $A(g^0)$ – множество неподвижных точек отображения g^0 . Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\overline{g(\bar{U})} \subset U$, то отображение $p: A(g) \rightarrow A(g^0)$, $p(x) = x(a)$, порождает изоморфизм групп когомологий Александера–Чеха этих пространств.*

Для доказательства этой теоремы воспользуемся теоремой Виеториса–Бегла. Приведем ее формулировку в необходимой нам форме.

Пусть X, Y – метрические пространства, $p: Y \rightarrow X$ – непрерывное отображение.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть непрерывное отображение $p: Y \rightarrow X$ удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) *отображение p является собственным и сюръективным;*
- 2) *множество $p^{-1}(x)$ является ациклическим для любого $x \in X$.*

Тогда гомоморфизм когомологий $p^: H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$ является изоморфизмом для любого $n = 0, 1, \dots$.*

Эта теорема является частным случаем теоремы, доказанной в [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Покажем, что отображение p действует из множества $A(g)$ в множество $A(g_0)$. Действительно, если $x \in A(g)$, то

$$x(a) = g(x)(a) = g(i(x(a)))(a) = g^0(x(a)).$$

Следовательно, $p: A(g) \rightarrow A(g^0)$. Покажем, что отображение p удовлетворяет условиям теоремы Виеториса–Бегла.

Докажем сюръективность отображения p . Пусть h – произвольная точка из $A(g_0)$. Рассмотрим множество

$$T_h = \{x = x(\cdot) \in C_{[a,b]} \mid x(a) = h, x \in \bar{U}\}.$$

Очевидно, что отображение $g: T_h \rightarrow T_h$. Так как T_h является ограниченным выпуклым замкнутым множеством, то по теореме Шаудера отображение g имеет в нем неподвижную точку $x_0 \in A(g)$. Тогда $p(x_0) = h$, что и доказывает сюръективность.

Собственность отображения p вытекает из компактности множества $A(g)$.

Докажем теперь ацикличность множества $p^{-1}(h)$. Для этого достаточно доказать ацикличность множества неподвижных точек отображения $g: T_h \rightarrow T_h$. Для этого воспользуемся леммой 3.

Прежде всего проверим, что множество T_h также является регулярным. Действительно, если $x \in T_h$, то $x(a) = h$ и $x \in \bar{U}$. Тогда для любого $\gamma \in [0, b-a]$ точка $x_\gamma(a) = h$ и $x_\gamma \in \bar{U}$, т.е. $x_\gamma \in T_h$.

Очевидно, что h является единственной неподвижной точкой отображения g_0 на множестве T_h .

Остается доказать, что существует $0 < \alpha \leq b-a$ такое, что уравнение (5) имеет решение на множестве T_h для любого $\gamma \in (0, \alpha]$ и $\lambda \in [0, 1]$. Так как множество $\overline{g(U)} \subset U$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(y) \subset U$ для любой точки $y \in \overline{g(U)}$.

Так как отображение g является вполне непрерывным, то множество функций $g(T_h)$ является равномерно непрерывным. Следовательно, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in [a, b]$, то $|y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon$ для любой функции $y \in g(T_h)$. Следовательно,

$$\|g(x)(t) - g_\gamma(x)(t)\| = \|g(x)(t) - g(x)(s_\gamma(t))\| < \varepsilon,$$

если $|t - s_\gamma(t)| < \delta$. Так как $|t - s_\gamma(t)| \leq \gamma$, то при условии $|\gamma| < \delta$ выполнено неравенство $\|g(x) - g_\gamma(x)\| < \varepsilon$.

Пусть $0 < \alpha < \min\{b-a, \delta\}$, точка $y \in A(g) \cap T_h$. На множестве T_h рассмотрим уравнение

$$x = g_\gamma(x) + \lambda(y - g_\gamma(y)),$$

где $\gamma \in (0, \alpha]$ и $\lambda \in [0, 1]$. Покажем, что оно имеет решение.

Пусть $v(y) = y - g_\gamma(y)$. Тогда

$$\|v(y)\| = \|y - g_\gamma(y)\| = \|g(y) - g_\gamma(y)\| < \varepsilon.$$

Следовательно, так как $g_\gamma(x) \in \overline{g(U)}$, то

$$g_\gamma(x) + v(y) \in U_\varepsilon(g_\gamma(x)) \subset U.$$

Так как $v(a) = y(a) - g_\gamma(y)(a) = 0$, то

$$g_\gamma(x)(a) + v(y)(a) = h.$$

Тогда отображение φ , $\varphi(x) = g_\gamma(x) + \lambda v(y)$, переводит множество T_h в себя и является вполне непрерывным. Следовательно, по теореме Шаудера это отображение имеет неподвижную точку, которая и является решением этого уравнения. Таким образом, все условия леммы 3 выполнены, что и доказывает ацикличность множества неподвижных точек отображения $g: T_h \rightarrow T_h$, т.е. ацикличность множества $p^{-1}(h)$.

Таким образом, отображение p удовлетворяет всем условиям теоремы Виеториса–Бегла, из чего следует справедливость теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $B_R[x_0] \subset C_{[a,b]}$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0 , $g: X = B_R[x_0] \rightarrow C_{[a,b]}$ – вполне непрерывное вольтеррово отображение. Предположим, что:

- 1) отображение $g^0: X_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет единственную неподвижную точку;
- 2) существует такое $r \in (0, R)$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ выполнено неравенство $\|x_0 - g(x)\| < r$.

Тогда множество неподвижных точек отображения g непусто и ациклично.

Доказательство этой теоремы очевидным образом вытекает из теоремы 4.

Список литературы

- [1] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
- [2] R. Dragoni, J. W. Macki, P. Nistri, P. Zecca, *Solution sets of differential equations in abstract spaces*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **342**, Longman, Harlow, 1996.
- [3] М. А. Красносельский, А. И. Перов, “О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **126**:1 (1959), 15–18.
- [4] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skiĭ, P. P. Zabreĭko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **263**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [5] А. И. Булгаков, Л. Н. Ляпин, “О связности множеств решений функциональных включений”, *Матем. сб.*, **119(161)**:2(10) (1982), 295–300; англ. пер.: A. I. Bulgakov, L. N. Lyapin, “On the connectedness of the solution sets of functional inclusions”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 287–292.
- [6] Б. Д. Гельман, “Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 33–56; англ. пер.: B. D. Gel'man, “Topological properties of the set of fixed points of a multivalued map”, *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1761–1782.
- [7] N. Aronszajn, “Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles”, *Ann. of Math.* (2), **43**:4 (1942), 730–738.
- [8] S. Szuffla, “Sets of fixed points of nonlinear mappings in function spaces”, *Funkcial. Ekvac.*, **22**:1 (1979), 121–126.
- [9] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Math. Appl., **495**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 1999.
- [10] М. Камenskii, В. Обуховskii, P. Zecca, *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, de Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **7**, de Gruyter, Berlin, 2001.
- [11] Б. Д. Гельман, “О топологической структуре множества неподвижных точек абстрактного уравнения Вольтерра”, *Вестн. ВорГУ. Сер. 1. Матем., физ.*, 2001, № 2, 63–66.

- [12] У. Масси, *Теория гомологий и когомологий. Подход, основанный на применении коцепей Александера–Спеньера*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: W. S. Massey, *Homology and cohomology theory. An approach based on Alexander–Spanier cochains*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **46**, Marcel Dekker, New York–Basel, 1978.
- [13] Е. Г. Скляренко, “О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии”, *УМН*, **19**:6 (1964), 47–70; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “Some applications of the theory of sheaves in general topology”, *Russian Math. Surveys*, **19**:6 (1964), 41–62.

Б. Д. Гельман (B. D. Gel'man)

Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Поступила в редакцию

10.12.2008 и 12.04.2010