Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 2, 29–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:33:29

УДК 517.53

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов

Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде

Изучаются аппроксимации Эрмита–Паде систем марковских функций, определяемых с помощью ориентированных графов. Для векторной меры, носители компонент которой принадлежат некоторой фиксированной системе отрезков, и для заданной матрицы взаимодействия между компонентами меры рассмотрена задача минимизации функционала энергии. В терминах решения этой задачи получена слабая асимптотика аппроксимаций. Так как у определяющего графа допускается наличие неориентированных циклов, задача минимизации энергии рассматривается над классом мер, массы которых не фиксированы, а могут “перетекать” между отрезками. Также получены формулы сильной асимптотики аппроксимаций. При этом важную роль играет алгебраическая риманова поверхность, определяемая носителями компонент экстремальной меры. Формулы сильной асимптотики содержат стандартные функции на этой римановой поверхности и решения некоторых краевых задач на ней. При доказательстве используется асимптотическое решение соответствующей матричной задачи Римана–Гильберта.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, совместно ортогональные многочлены, слабые и сильные асимптотики, экстремальные задачи равновесия для системы мер, матричная задача Римана–Гильберта.

§ 1. Введение

1.1. Марковские функции и их аппроксимации Эрмита–Паде. В работе А. А. Маркова [1] для степенных разложений функций, являющихся преобразованиями Коши положительных мер с компактными носителями

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad c_k = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x), \quad \mu > 0, \quad (1.1)$$

были рассмотрены непрерывные дроби

$$f(z) \doteq \frac{c_0}{z - b_0 - \frac{a_1^2}{z - b_1 - \frac{a_2^2}{z - b_2 - \ddots}}} \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00179), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 3906.2008.1), Программы № 1 ОМН РАН. Работа второго автора выполнена также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12160) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/1662).

и доказано, что подходящие дроби $\pi_n(z)$ выражения (1.2) равномерно сходятся на компактах комплексной плоскости вне отрезка E , содержащего носитель меры,

$$\text{supp } \mu \subset E \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (1.3)$$

Функции вида (1.1) в теории рациональных аппроксимаций называют *марковскими* (в теории операторов они носят название *резольвентных* или *функций Вейля*). Марковские функции образуют класс аналитических функций, удобный для изучения сходимости рациональных аппроксимаций, а теорема Маркова (1.1) является отправной точкой в этих исследованиях. Рациональные функции, получающиеся “обрыванием” нижних этажей непрерывной дроби (1.2) (подходящие дроби), являются частным случаем рациональных аппроксимаций Паде.

Дадим определение общей конструкции рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для вектора степенных рядов

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_p), \quad f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.4)$$

Вектор $\pi_{\vec{n}}$ рациональных функций с общим знаменателем $P_{\vec{n}}$,

$$\pi_{\vec{n}} = \left(\frac{Q_{\vec{n},1}}{P_{\vec{n}}}, \dots, \frac{Q_{\vec{n},p}}{P_{\vec{n}}} \right), \quad \vec{n} = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p, \quad (1.5)$$

называется *аппроксимацией Эрмита–Паде* (второго рода) с мультииндексом $\vec{n}$ для вектора степенных рядов $\vec{f}$, если выполняются соотношения

$$P_{\vec{n}} \not\equiv 0, \quad \deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := n_1 + \dots + n_p, \quad (1.6)$$

$$f_j(z)P_{\vec{n}}(z) - Q_{\vec{n},j}(z) =: R_{\vec{n},j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.7)$$

Эта конструкция была введена Ш. Эрмитом [2] в связи с его знаменитым доказательством трансцендентности числа e . При $p = 1$ аппроксимации называются *аппроксимациями Паде*. Соотношения (1.7) дают $|\vec{n}|$ линейных однородных уравнений для определения $|\vec{n}| + 1$ коэффициента многочлена (1.6). В случае, когда любой многочлен, удовлетворяющий (1.7), имеет степень $\vec{n}$ и тем самым определен однозначно с точностью до умножения на константу, мультииндекс будем называть *нормальным*, и будем нормировать многочлен $P_{\vec{n}}$ так:

$$P_{\vec{n}}(z) = z^{|\vec{n}|} + \dots. \quad (1.8)$$

Для знаменателя $P_{\vec{n}}$ аппроксимации Эрмита–Паде системы марковских функций

$$f_j(z) = \hat{\mu}_j(z) = \int_{E_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad E_j \subset \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.9)$$

имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{E_j} P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.10)$$

Многочлены, удовлетворяющие соотношениям ортогональности (1.10), называют также *совместно ортогональными многочленами*.

Аппроксимации Эрмита–Паде и совместно ортогональные многочлены, кроме традиционных приложений к теории диофантовых приближений чисел и теории аппроксимаций аналитических функций (см. [3]–[5]), оказываются полезными в спектральной теории несимметричных разностных операторов высокого порядка (см. [6]–[8]). В последнее время была установлена связь между ними теорией случайных матриц (см. [9]–[11]).

В отличие от обычных ортогональных многочленов ($p = 1$) соотношения ортогональности (1.10) для $p > 1$ не гарантируют нормальности индекса n и, таким образом, не гарантируют существование совместно ортогонального многочлена (1.8) степени $|\vec{n}|$. Для некоторых общих систем марковских функций нормальность их аппроксимаций Эрмита–Паде известна. Это следующие системы.

Система Анжелеско [12] определяется условиями

$$\mathcal{A} : \quad \{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \mu_j \subset E_j : \quad \overset{\circ}{E}_k \cap \overset{\circ}{E}_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, \dots, p. \quad (1.11)$$

Нетрудно видеть (см. (1.10)), что для системы Анжелеско многочлен $P_{\vec{n}}$ имеет n_j перемен знака во внутренних точках $\overset{\circ}{E}_j$ отрезка E_j , что обеспечивает нормальность произвольного мультииндекса $\vec{n}$.

Система Никишина [13] определяется при помощи набора мер с носителями на отрезках $\{E_j\}_{j=1}^p$,

$$\sigma := \{\sigma_j(x)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \sigma_j \subset E_j, \quad E_j \cap E_{j-1} = \emptyset,$$

который генерирует вектор мер $\mu = \{\mu_j(x)\}_{j=1}^p$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), \\ d\mu_2(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) := \left(\int_{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \\ &\dots \\ d\mu_j(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle := d\langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle \rangle, \quad j = 3, \dots, p. \end{aligned}$$

При этом отметим, что носители компонент μ расположены на одном отрезке, $\text{supp } \mu_j \subset E_1$. Соответствующая вектору μ система марковских функций $\{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p$ называется *системой Никишина*. Таким образом,

$$\mathcal{N} : \quad \{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \mu_j \subset E_1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.12)$$

Традиционное (см. [13], [14]) условие нормальности мультииндекса $\vec{n}$ для аппроксимаций Эрмита–Паде системы Никишина такое:

$$n_k \leq n_j + 1, \quad \text{если } k > j. \quad (1.13)$$

Недавно это условие было ослаблено, в частности, в [15] было доказано, что для $p = 2, 3$ все индексы $\vec{n}$ нормальны.

Для систем Анжелеско слабые асимптотики (т.е. асимптотики корня n -ой степени, предельные меры распределения полюсов) аппроксимаций Эрмита–Паде и, как следствие, решение задачи их сходимости, были получены в [16]. Отметим, что для систем Анжелеско (1.11) вопрос о сходимости или расходимости аппроксимаций зависит от расположения отрезков $\{E_j\}_{j=1}^p$. Сильные

асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Анжелеско (т.е. асимптотики самих аппроксимаций, нахождение индивидуальных позиций полюсов при больших $|\vec{n}|$) получены в [17]. Для систем Никишина сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде (аналог теоремы Маркова (1.3)) при $p = 2$ была доказана самим Никишиным в [13]. В отличие от систем Анжелеско аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина всегда сходятся, что для произвольного p доказано в [18]. Слабые асимптотики аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина изучены в [19], [20], а сильные асимптотики – в [21].

Обобщенные системы Никишина (так называемые $\mathcal{GN}$ -системы) марковских функций $\{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p$ были введены в [20] на основе понятия графа-дерева. Не останавливаясь на деталях определения (ниже мы обсудим подробно процесс генерации систем марковских функций с помощью графов), отметим, что $\mathcal{GN}$ -системы включают в себя системы Анжелеско и Никишина, а также некоторые смешанные системы. Например, для $p = 3$ появляются две такие системы:

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), & \text{supp } \sigma_1 &\subset E_1, \\ d\mu_2(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle(x) = \left(\int_{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{x-t}\right) d\sigma_1(x), \\ d\mu_3(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_3\rangle(x) = \left(\int_{E_3} \frac{d\sigma_3(t)}{x-t}\right) d\sigma_1(x), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где отрезки $\{E_j\}_{j=1}^3$ попарно не пересекаются, а также система

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), & \text{supp } \sigma_1 &\subset E_1, \\ d\mu_2(x) &:= d\sigma_2(x), & \text{supp } \sigma_2 &\subset E_2, \\ d\mu_3(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_3\rangle(x) = \left(\int_{E_3} \frac{d\sigma_3(t)}{x-t}\right) d\sigma_1(x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E_1 \cap E_3 = \emptyset$. Для аппроксимаций Эрмита–Паде $\mathcal{GN}$ -систем в работе [20] найдено условие нормальности мультииндекса $\vec{n}$ (аналогичное (1.13)) и решена задача о слабой асимптотике.

Задачи аппроксимаций Эрмита–Паде для конкретных систем марковских функций, связанных с графами, имеющими циклы, рассматривались в работе [3] в связи с приложениями в теории чисел.

Целью настоящей работы является расширение класса систем марковских функций, генерируемых графами, и нахождение асимптотик (слабых и сильных) для соответствующих аппроксимаций Эрмита–Паде.

Статья имеет следующую структуру. В пп. 1.2–1.4 мы даем ряд определений и формулируем результаты статьи. В п. 1.2 мы рассматриваем ориентированный граф и с помощью него определяем системы марковских функций (обобщающие $\mathcal{GN}$ -системы из [20]), для которых рассматриваются аппроксимации Эрмита–Паде. Здесь мы в основном следуем понятиям, введенным в [20], хотя возникает существенно новый момент – рассматриваемые графы не обязательно являются графами-деревьями, как в [20]. Это обстоятельство ведет к принципиально новым эффектам в асимптотическом поведении аппроксимаций и требует иных методик для их обоснования. В п. 1.3 мы обсуждаем полученные результаты о слабой асимптотике аппроксимаций. Результаты формулируются в терминах решения задачи минимизации функционала энергии векторной меры (носители компонент которой принадлежат некоторой фиксированной системе отрезков) с матрицей взаимодействия между компонентами меры. Так как

у графа, генерирующего систему марковских функций, допускается существование неориентированных циклов, данную задачу приходится рассматривать не над классом мер с фиксированными величинами масс, а мерам разрешается “перетекать” между отрезками (т.е. экстремальная задача рассматривается над классом мер с линейными связями между массами), что является новым моментом по сравнению с [20]. В п. 1.4 мы обсуждаем полученные результаты о сильной асимптотике. Ключевым моментом здесь является построение римановой поверхности, которая состоит из склеенных экземпляров комплексной плоскости, разрезанной по носителям компонент экстремальной меры. Формулы сильной асимптотики даются в терминах стандартных функций этой римановой поверхности и решений некоторых краевых задач на ней. Говоря о новизне этих результатов, отметим, что даже для $\mathcal{GN}$ -систем, определяемых графами-деревьями, сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде не была исследована ранее. Полученные результаты о сильной асимптотике согласуются с общими гипотезами Наттолла [22], которые и стимулировали наши исследования.

Следующие параграфы посвящены доказательству сформулированных во введении результатов. В § 2 доказана теорема о существовании, единственности и равновесии решения экстремальной задачи энергии векторных мер с матрицами взаимодействия и линейно связанными массами. В § 3 доказана теорема о предельном распределении нулей знаменателей аппроксимаций Эрмита–Паде. Параграф 4 посвящен доказательству формул сильной асимптотики, которое проводится методом матричной задачи Римана–Гильберта. Наконец, в § 5 мы обсуждаем в деталях новые эффекты в поведении аппроксимаций Эрмита–Паде на простейших примерах систем функций, порождаемых графами с неориентированными циклами.

1.2. Графы и соответствующие системы марковских функций. Рассмотрим ориентированный граф с кратными ребрами, имеющий множество вершин $\mathcal{V} := \{A, B, C, \dots\}$, $\#\mathcal{V} = p + 1$, и множество ребер $\mathcal{E} := \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, $\#\mathcal{E} = m$. Предположим, что

- 1) граф является ациклическим, т.е. не содержит ориентированных циклов;
- 2) существует вершина O такая, что для любой вершины $A \in \mathcal{V}$, отличной от O , найдется ориентированный путь, ведущий из O в A .

Заметим, что единственность такой вершины O следует из условия 1).

Обозначим этот граф через

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O), \quad (1.16)$$

а совокупность ребер, соединяющих две некоторые смежные вершины A и B , — через (A, B) .

На множестве $\mathcal{V}$ можно определить отношение частичного порядка следующим образом: считаем, что $A \preceq B$, если либо $A = B$, либо существует ориентированный путь из A в B . В последнем случае будем также писать $A \prec B$.

Для любой вершины $A \in \mathcal{G}$ обозначим множества ближайших к ней вершин через

$$A_+ := \{B \in \mathcal{V} : \exists \alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}\}, \quad A_- := \{B \in \mathcal{V} : \exists \alpha \in (B, A) \subset \mathcal{E}\}$$

соответственно; обозначим множества ребер, исходящих и входящих в вершину A через

$$\mathcal{E}_{A+} := \{\alpha \in (A, B) : B \in A_+\}, \quad \mathcal{E}_{A-} := \{\alpha \in (B, A) : B \in A_-\}.$$

Введем отношения на множестве $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \beta &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V} : \alpha \in \mathcal{E}_{A-}, \beta \in \mathcal{E}_{A+}; \\ \alpha \uparrow \uparrow \beta &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{V} : \alpha, \beta \in (A, B); \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V} : \alpha, \beta \in \mathcal{E}_{A-} \text{ или } \alpha, \beta \in \mathcal{E}_{A+}, \text{ но не выполнено } \alpha \uparrow \uparrow \beta.\end{aligned}$$

Следуя [20], определим систему марковских функций, порождаемую графом $\mathcal{G}$. Каждому ребру α графа $\mathcal{G}$ поставим в соответствие отрезок $E_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ и положительную борелевскую меру σ_α с носителем на E_α , т.е.

$$\forall \alpha \in \mathcal{E} \longrightarrow E_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha] \subset \mathbb{R}, \quad \sigma_\alpha : \quad \sigma'_\alpha > 0 \quad \text{п.в. на } E_\alpha. \quad (1.17)$$

При этом предполагаем, что если ребра α и β имеют общую вершину, то соответствующие отрезки E_α и E_β не пересекаются, т.е.

$$\alpha \rightarrow \beta \vee \beta \rightarrow \alpha \vee \alpha \uparrow \uparrow \beta \vee \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset. \quad (1.18)$$

Каждой вершине $A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} := \mathcal{V} \setminus \{O\}$ соответствует непустой набор $\mathcal{T}_A$ путей $t_A = (\omega, \dots, \beta, \alpha)$, ведущих из корневой вершины O в вершину A , т.е.

$$\begin{aligned}\forall A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{T}_A := \{t_A\}, \quad t_A := (\omega, \dots, \beta, \alpha) : \quad \omega \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha, \\ \omega \in \mathcal{E}_{O+}, \quad \alpha \in \mathcal{E}_{A-}.\end{aligned}$$

Каждой такой цепочке t_A соответствует мера μ_{t_A} , определенная по правилу Никишина:

$$\mu_{t_A}(x) = \langle \sigma_\omega, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle(x),$$

где

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) := \left(\int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \quad \dots, \quad d\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle := d\langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle \rangle.$$

Вершине A поставим в соответствие функцию

$$\hat{\mu}_A(x) := \sum_{t_A \in \mathcal{T}_A} \int \frac{d\mu_{t_A}(t)}{x-t}. \quad (1.19)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Набор функций $\{\hat{\mu}_A(x), A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$ называется *обобщенной системой Никишина* ($\mathcal{GN}$ -системой), соответствующей графу $\mathcal{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Понятие обобщенной системы Никишина, соответствующей графу, было введено в [20]. В настоящей работе мы рассматриваем более широкий класс графов, чем в [20], где рассматривались лишь графы-деревья, определяемые условием

$$\mathcal{G} : \quad \forall A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \#\mathcal{E}_{A-} = 1. \quad (1.20)$$

Таким образом, изучаемый здесь класс $\mathcal{GN}$ -систем шире, чем класс обобщенных систем Никишина, соответствующих графам-деревьям из [20].

Рис. 1. Графы, порождающие системы Анжелеско (рис. а)) и Никишина (рис. б))

Рис. 2. Графы-деревья, порождающие системы марковских функций (1.14) и (1.15)

Приведем примеры различных $\mathcal{GN}$ -систем. Как уже отмечалось, системы Анжелеско и Никишина являются $\mathcal{GN}$ -системами. Система Анжелеско генерируется графом-деревом (см. рис. 1, а)):

$$\mathcal{G} : \mathcal{E} = \mathcal{E}_{O+} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Системы Никишина генерируются графом-деревом (см. рис. 1, б)):

$$\mathcal{G} : \forall A \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \#A_- = 1, \quad \#A_+ \leq 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{N}.$$

На рис. 2 приведены примеры графов-деревьев. На рис. 2, а) – граф, порождающий систему марковских функций (1.14). На рис. 2, б) – граф, порождающий систему марковских функций (1.15).

На рис. 3 приведены примеры графов с неориентированными циклами. Граф на рис. 3, а) генерирует одну марковскую функцию с носителем на нескольких (m) отрезках. Граф на рис. 3, б) генерирует две марковские функции. Одна из них, $\hat{\mu}_A$, с носителем на объединении трех отрезков $E := E_\alpha \cup E_\beta \cup E_\gamma$, а другая, $\hat{\mu}_B$ – с носителем на отрезке E_β , причем

$$d\mu_B(x) := d\sigma_\beta(x), \quad \text{supp } \sigma_\beta \subset E_\beta,$$

$$d\mu_A(x) := \begin{cases} d\sigma_\alpha(x) & \text{на } E_\alpha, \\ \left(\int_{E_\delta} \frac{d\sigma_\delta(t)}{x-t} \right) d\sigma_\beta(x) & \text{на } E_\beta, \\ d\sigma_\gamma(x) & \text{на } E_\gamma. \end{cases}$$

Таким образом, графы с неориентированными циклами полезны для представления марковских функций, носители которых имеют общую часть (точнее,

Рис. 3. Графы с неориентированными циклами

один носитель содержит другой), при этом отношение весов на общей части носителя есть опять марковская функция с другого отрезка.

Перейдем к задаче аппроксимации Эрмита–Паде для $\mathcal{GN}$ -системы (1.19)

$$\vec{f} := \{\hat{\mu}_A(x), A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\},$$

соответствующей графу $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O)$, (см. (1.16)). Зафиксируем мультииндекс

$$\vec{n} := \{n_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\} : \quad n_A \leq n_B + 1, \quad \text{если } B \prec A. \quad (1.21)$$

Существует многочлен $P_{\vec{n}} \not\equiv 0$ степени $\deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := \sum_{A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} n_A$ такой, что

$$R_{\vec{n},A} := P_{\vec{n}} \hat{\mu}_A - Q_{\vec{n},A} = O(z^{-n_A-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad (1.22)$$

где $Q_{\vec{n},A}$ – некоторые многочлены. Это определение аппроксимаций Эрмита–Паде

$$\left\{ \frac{Q_{\vec{n},A}}{P_{\vec{n}}}, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \right\} \quad (1.23)$$

приводит к следующим соотношениям ортогональности

$$\sum_{t_A \in \mathcal{T}_A} \int P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_{t_A}(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n_A - 1, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.24)$$

При изучении этих аппроксимаций наряду с функциями второго рода $R_{\vec{n},A}$ удобно рассматривать функции $\Psi_{\vec{n},A}$, которые определяются по индукции относительно частичного порядка на графе:

$$\Psi_{\vec{n},O} = P_{\vec{n}}, \quad \Psi_{\vec{n},B}(x) = \sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A,B)} \int \frac{\Psi_{\vec{n},A}(t) d\sigma_{\alpha}(t)}{t-x}, \quad B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.25)$$

В работе [20] традиционное условие (1.13) нормальности мультииндекса $\vec{n}$ для системы Никишина было перенесено в виде

$$n_A \leq n_B + 1, \quad \text{если } B \prec A, \quad (1.26)$$

на обобщенную систему Никишина, задаваемую графом-деревом (1.20). При этом было показано, что полином $P_{\vec{n}}$ имеет $|\vec{n}|$ простых нулей на объединении отрезков $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_{\alpha}$. Таким образом, индексы (1.26) являются нормальными и аппроксимации Эрмита–Паде определены однозначно.

В случае $\mathcal{GN}$ -системы, генерируемой произвольным графом $\mathcal{G}$ (см. (1.16)), вопросы нормальности индексов и единственности аппроксимаций требуют дополнительного изучения. Однако, можно показать, что при условии (1.26) любое решение $P_{\vec{n}}$ имеет по меньшей мере $|\vec{n}| - g$ простых нулей на $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_{\alpha}$, где g – цикломатическое число (число независимых неориентированных циклов) графа $\mathcal{G}$, т.е.

$$g = \#\mathcal{E} - \#\mathcal{V} + 1. \quad (1.27)$$

Другие заключения о нормальности и единственности аппроксимаций Эрмита–Паде произвольной $\mathcal{GN}$ -системы мы приведем ниже, как следствия асимптотических результатов.

Фиксируем на $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ распределение вероятностей $v = \{v_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$:

$$v_A > 0, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad \sum_{A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} v_A = 1, \quad v_B \leq v_A, \quad \text{если } A \prec B.$$

Рассмотрим последовательность $\mathbf{N}$ мультииндексов $\vec{n} = \{n_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$ такую, что выполнено (1.26) и

$$\frac{n_A}{|\vec{n}|} \rightarrow v_A, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.28)$$

Целью настоящей работы является изучение асимптотики $P_{\vec{n}}$ при $\vec{n} \in \mathbf{N}$.

1.3. Слабые асимптотики. В качестве слабых асимптотик в настоящей работе изучаются предельные распределения нулей полинома $P_{\vec{n}}$ и функций $\Psi_{\vec{n},A}$ (1.25). Метод решения таких задач был предложен в [16], где на примере системы Анжелеско было доказано, что компоненты предельной меры распределения нулей полинома $P_{\vec{n}}$ (с носителями на интервалах $\{E_j\}_{j=1}^p$ системы (1.11)) являются компонентами экстремальной меры в задаче минимизации функционала энергии векторной меры с некоторой матрицей взаимодействия компонент меры между собой (детали см. ниже). В работе [20] этот метод был распространен на обобщенные системы Никишина, генерируемые графами-деревьями (1.20), что привело к расширению класса рассматриваемых матриц взаимодействия. В настоящей работе мы адаптируем эту методику к произвольным $\mathcal{GN}$ -системам (1.19). Новым моментом здесь (кроме дальнейшего расширения класса матриц взаимодействия) является то, что экстремальная задача минимизации энергии рассматривается в классе векторных мер, массы компонент которых не фиксированы (как это было ранее), а подчинены некоторым условиям связи. Общая задача такого вида будет поставлена в следующем п. 1.3.1, где также будет сформулирована теорема 1.1 о существовании, единственности и свойствах экстремальной векторной меры. Затем в п. 1.3.2 мы конкретизируем в общей экстремальной задаче матрицы взаимодействия и линейные связи для масс компонент векторных мер, соответствующие произвольному графу (1.16) и сформулируем теорему 1.2 (о предельном распределении нулей полинома $P_{\vec{n}}$ и его последовательных преобразований Коши) и ее следствие (для слабой асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде).

1.3.1. Равновесие потенциалов векторных мер с матрицами взаимодействия и линейно связанными массами. Начнем с постановки общей задачи минимизации энергии векторной меры с линейными ограничениям на массы ее компонент. Исходными данными задачи являются: набор регулярных компактов

в комплексной плоскости

$$\vec{E} = (E_1, \dots, E_m) \in \mathbb{C}^m,$$

вещественная симметричная неотрицательно определенная матрица

$$\mathcal{A} = (a_{kj})_{k,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathcal{A} \geq 0,$$

вещественная матрица $\mathcal{C}$ размера $r \times m$ и ранга r ,

$$\mathcal{C} = (c_{kj})_{k,j=1}^{r,m} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad \text{rank } \mathcal{C} = r,$$

и ненулевой вектор

$$b = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{R}^r, \quad b \neq 0.$$

Будем дополнительно предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$1) a_{jj} > 0; \quad 2) a_{kj} = 0, \text{ если } k \neq j \text{ и } E_k \cap E_j \neq \emptyset, \quad k, j = 1, \dots, m; \quad (1.29)$$

так же считаем, что многогранник, определяемый условиями

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m c_{kj} x_j = b_k, \quad k = 1, \dots, r; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \right\}, \quad (1.30)$$

непуст и ограничен.

Введем некоторые обозначения из теории потенциала. Для компакта K в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $\mathbf{M}(K)$ множество всех зарядов с конечной вариацией, а через $\mathbf{M}^+(K)$ – множество всех конечных положительных борелевских мер ν , носитель которых $S(\nu) := \text{supp}(\nu)$ принадлежит K . Логарифмическим потенциалом меры ν называется функция

$$V^\nu(z) = \int_K \ln \frac{1}{|z-t|} d\nu(t), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Взаимной энергией мер ν_1 и ν_2 называют интеграл

$$I(\nu_1, \nu_2) = \iint_{K \times K} \ln \frac{1}{|x-t|} d\nu_1(x) d\nu_2(t).$$

Полную вариацию (массу) меры ν обозначим через $|\nu|$.

Для конечного набора компактов E определим множество $\mathbf{M}^+(\vec{E})$ как декартово произведение множеств $\mathbf{M}^+(E_j)$ по всем $j = 1, \dots, m$. Таким образом, элементы μ из множества $\mathbf{M}^+(\vec{E})$ есть наборы конечных мер μ_j такие, что $S(\mu_j) \subset E_j$.

Для меры $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$ с матрицей взаимодействия $\mathcal{A}$ определим энергию $J(\mu)$ и векторный потенциал $W^\mu = (W_1^\mu, \dots, W_m^\mu)$ следующим образом:

$$J(\mu) = \sum_{k,j=1}^m a_{kj} I(\mu_k, \mu_j), \quad W_k^\mu(x) = \sum_{j=1}^m a_{kj} V^{\mu_j}(x). \quad (1.31)$$

Наконец, введем класс мер с линейными связями на массы компонент (определяемые исходными данными $\mathcal{C}, b$)

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E}) := \left\{ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k, \quad k = 1, \dots, r \right\}, \quad (1.32)$$

и рассмотрим следующую задачу минимизации энергии:

$$\begin{cases} J(\mu) \rightarrow \min, \\ \mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E}). \end{cases} \quad (1.33)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Существует единственная мера λ , называемая экстремальной, которая служит решением задачи (1.33) (т.е. минимизирует функционал энергии (1.31) с ограничениями на массы мер (1.32)).

2а) Существует набор постоянных $(l_1, \dots, l_r)$ такой, что экстремальная мера λ минимизирует лагранжиан:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mu) := J(\mu) + \sum_{k=1}^r l_k \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| \rightarrow \min, \\ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}). \end{cases} \quad (1.34)$$

2б) Если для некоторых постоянных $l_1, \dots, l_r$ мера $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E})$ является решением задачи (1.34), то она экстремальная.

3) Экстремальная мера λ является единственной мерой в классе (1.32), удовлетворяющей следующим условиям равновесия со связями на равновесные константы:

$$\begin{cases} W_k^\lambda(x) := \sum_{j=1}^m a_{kj} V^{\lambda_j}(x) \begin{cases} = \varkappa_k, & x \in S(\lambda_k), \\ \geq \varkappa_k, & x \in E_k, \end{cases} & k = 1, \dots, m, \\ (\varkappa_1, \dots, \varkappa_m) \in \text{Im } \mathcal{C}^T. \end{cases} \quad (1.35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Обратим внимание на то, что в формулировке теоремы линейные связи между массами компонент вектор-меры трансформируются в линейные связи между константами равновесия $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_m)$ в (1.35). Другими словами, если мерам (в соответствии с исходными данными $\mathcal{C}, b$) позволено “перетекать” между компактами $E_1, \dots, E_m$, то это накладывает дополнительные связи на константы равновесия.

Это замечание можно проиллюстрировать тривиальными примером. Пусть исходные данные соответствуют равновесной мере двух непересекающихся отрезков, т.е.

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} := \|1, 1\|, \quad b := 1, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$

Ясно, что

$$W_k^\lambda(x) := V^{\lambda_1}(x) + V^{\lambda_2}(x) = \varkappa_k, \quad k = 1, 2, \quad x \in E_1 \cup E_2, \quad \Rightarrow \quad \varkappa_1 = \varkappa_2.$$

Отметим, что экстремальные задачи (1.33) с условиями связи на массы (впервые они появились в [23]) играют ключевую роль при исследовании асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде общих классов аналитических функций с точками ветвления (см. [24]).

1.3.2. *Задача равновесия для графа и предельное распределение полюсов аппроксимаций.* Конкретизируем в общей экстремальной задаче (1.33) матрицы взаимодействия (1.31) и линейные связи для полных масс (1.32) у компонент векторных мер, соответствующих предельным мерам распределения полюсов аппроксимаций Эрмита–Паде и нулей функций (1.25) для системы марковских

функций (1.19), порожденных произвольным графом (1.16). По графу $\mathcal{G}$ построим симметрическую матрицу $\mathcal{A} = (a_{\alpha\beta})$:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} 2, & \text{если } \alpha = \beta \text{ или } \alpha \uparrow \uparrow \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha \leftrightarrow \beta, \\ -1, & \text{если } \alpha \rightarrow \beta \text{ или } \beta \rightarrow \alpha, \\ 0, & \text{если ребра } \alpha \text{ и } \beta \text{ не имеют общих вершин.} \end{cases} \quad (1.36)$$

Ограничения на массы меры имеют следующий вид:

$$\left\{ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A-}} |\mu_\alpha| - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} |\mu_\beta| = v_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \right\}, \quad (1.37)$$

где $\{v_A > 0, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$, $\sum v_A = 1$ заданы в (1.28) и предполагается, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю.

Матрица $\mathcal{A}$ неотрицательно определена. Это следует из того, что $\mathcal{A}$ есть матрица Грама: $a_{\alpha\beta} = (e_{A_2} - e_{A_1}, e_{B_2} - e_{B_1})$, где $\alpha \in (A_1, A_2)$ и $\beta \in (B_1, B_2)$, а $\{e_A, A \in \mathcal{V}\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{p+1}$, или из тождества

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{E}} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{A \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A-}} x_\alpha - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} x_\beta \right)^2.$$

Остальные условия предыдущего пункта на матрицу $\mathcal{A}$ и ограничения (1.32) легко проверяются.

Таким образом, существует единственная мера $\lambda = \{\lambda_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}\}$ из класса (1.32), удовлетворяющая соотношениям равновесия (1.35), т.е.

$$W_\alpha^\lambda(x) := \sum_{\beta \in \mathcal{E}} a_{\alpha\beta} V^{\lambda_\beta}(x) \begin{cases} = \tilde{\varkappa}_B - \tilde{\varkappa}_A, & x \in S(\lambda_\alpha), \\ \geq \tilde{\varkappa}_B - \tilde{\varkappa}_A, & x \in E_\alpha, \end{cases} \quad (1.38)$$

где $\alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}$, а $\{\tilde{\varkappa}_A, A \in \mathcal{V}\}$ – некоторое распределение констант в вершинах графа. Таким образом, на константы равновесия $\varkappa_\alpha := \tilde{\varkappa}_B - \tilde{\varkappa}_A$ наложено g линейных условий. При этом можно положить $\tilde{\varkappa}_O = 0$.

Предельные распределения нулей полинома $P_{\vec{n}}$ и функций $\Psi_{\vec{n}, A}$ (1.25) описываются в терминах экстремальной меры λ . Пусть $\alpha \in (A, B)$ и $q_{\vec{n}, \alpha}$ – полином, нули которого, с учетом кратности, совпадают с нулями $\Psi_{\vec{n}, A}$ на отрезке E_α , т.е.

$$q_{\vec{n}, \alpha}(z) := \prod_{x: \Psi_{\vec{n}, A}(x)=0, x \in E_\alpha} (z - x), \quad \left(\text{по соглашению: } \prod_{x \in \emptyset} (z - x) := 1 \right). \quad (1.39)$$

Через $\mu(q)$ обозначим дискретную меру массы $\deg q$, равномерно распределенную в нулях многочлена q :

$$\mu(q) = \sum_{x: q(x)=0} \delta_x.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Для любого $\alpha \in \mathcal{E}$ выполняются следующие предельные соотношения при $\vec{n} \in \mathbf{N}$ (см. (1.28)):

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(q_{\vec{n}, \alpha}) \rightarrow \lambda_\alpha.$$

В частности,

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(P_{\vec{n}}) \rightarrow \sum_{\alpha \in O_+} \lambda_\alpha.$$

В том случае, когда удастся показать, что функции $\Psi_{\vec{n},A}(\prod_{\alpha \in A_+} q_{\vec{n},\alpha})^{-1}$ не имеют нулей вне $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{A_+}} E_\alpha$, можно выписать асимптотические формулы для $\Psi_{\vec{n},A}$. Это условие выполнено, например, если граф $\mathcal{G}$ является деревом. Сформулируем соответствующее следствие теоремы 1.3 (предполагается, что старший коэффициент $P_{\vec{n}}$ нормирован единицей).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если для некоторой подпоследовательности $\tilde{\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$ имеем $\Psi_{\vec{n},A}(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{A_-} \cup \mathcal{E}_{A_+}} E_\alpha$, $A \in \mathcal{V}$, то справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\lim_{\vec{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |\Psi_{\vec{n},A}(x)| = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A_-}} V^{\lambda_\alpha}(x) - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A_+}} V^{\lambda_\alpha}(x) - \tilde{\varkappa}_A, \\ x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{A_-} \cup \mathcal{E}_{A_+}} E_\alpha.$$

В частности,

$$\lim_{\vec{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |P_{\vec{n}}(x)| = - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{O_+}} V^{\lambda_\alpha}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O_+}} E_\alpha.$$

1.4. Сильные асимптотики. В этом пункте мы сформулируем результат о сильной асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде (1.5)–(1.7) для $\mathcal{GN}$ -системы (1.19). В случае сильных асимптотик мы ограничимся рассмотрением диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде, т.е. последовательностей с мультииндексами $\vec{n} = \{n_A, A \in \mathcal{V}\}$:

$$n_A := n, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}}, \quad |\vec{n}| = pn, \quad \#\mathring{\mathcal{V}} = p. \quad (1.40)$$

Нам придется дополнить условия (1.17) и (1.18) на входные данные задачи, т.е. на меры

$$\{\sigma_\alpha : S(\sigma_\alpha) \subset E_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}\}.$$

Будем предполагать, что $d\sigma_\alpha(x) =: \rho_\alpha(x) dx$, где веса ρ_α непрерывны на $\mathring{E}_\alpha := (a_\alpha, b_\alpha)$ и

$$\begin{cases} \rho_\alpha(x) =: \rho_\alpha^{(0)}(x)(a_\alpha - x)^{\delta(a_\alpha)}(x - b_\alpha)^{\delta(b_\alpha)}, & \delta(a_\alpha), \delta(b_\alpha) > -1, \\ \rho_\alpha^{(0)}(x) \in C[a_\alpha, b_\alpha]. \end{cases}$$

Кроме того, будем требовать, чтобы весовые функции ρ_α были голоморфными внутри носителей компонент экстремальной меры λ задачи (1.33), (1.36), (1.37) (с $v_A = 1/p$, в (1.37) ввиду (1.40)):

$$\{S(\lambda_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{E}} =: \{\cup_{\beta \in (\alpha)^*} E_\beta^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}} \rightarrow \{E_\beta^*\}_{\beta \in \mathcal{E}^*} =: \vec{E}^*. \quad (1.41)$$

Здесь $(\alpha)^*$ – это множество компонент связности (отрезков) E_β^* , составляющих носитель $S(\lambda_\alpha)$, которые порождают новое множество отрезков $\vec{E}^*$. Обозначая

сужение ρ_α на компоненты носителя через $\bigcup_{\beta \in (\alpha)^*} E_\beta^*$, тем самым мы требуем, чтобы

$$\begin{cases} \rho_\alpha|_{E_\beta^*}(x) =: w_\beta(x), & \beta \in (\alpha)^* \subset \mathcal{E}^*, \quad \alpha \in \mathcal{E}, \\ \rho_\alpha^{(0)}|_{E_\beta^*}(x) =: w_\beta^{(0)}(x); \quad w_\beta^{(0)}, \frac{1}{w_\beta^{(0)}} \in \mathcal{H}(E_\beta^*), & \beta \in \mathcal{E}^*. \end{cases} \quad (1.42)$$

Наконец, мы наложим некоторые условия на геометрию задачи, выполнение которых исключает из рассмотрения вырожденные случаи, а именно, мы считаем, что расположение отрезков $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}}$ таково, что для равновесной меры и ее потенциала справедливо

$$\begin{aligned} \text{а) } \lambda'_\alpha &\neq 0 \quad \text{на } S(\lambda_\alpha), \quad \alpha \in \mathcal{E}, \\ \text{б) } W_\alpha^\lambda &\neq \kappa_\alpha \quad \text{на } E_\alpha \setminus S(\lambda_\alpha). \end{aligned} \quad (1.43)$$

В следующем пункте мы введем понятия, необходимые для формулировки теоремы 1.3 о сильной асимптотике, а затем сформулируем и саму теорему.

1.4.1. Риманова поверхность и стандартные функции на ней. Пусть $\alpha \in \mathcal{E}$ – произвольное ребро исходного графа $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O)$, которое соединяет вершины $A, B \in \mathcal{V}$. Пусть этому ребру поставлен в соответствие отрезок E_α и носитель $S(\lambda_\alpha) \subset E_\alpha$ соответствующей компоненты экстремальной меры λ задачи (1.33). Не вдаваясь в детали, отметим, что $S(\lambda_\alpha)$ есть либо объединение конечного числа непересекающихся отрезков (будем называть их компонентами $S(\lambda_\alpha)$ и использовать обозначение (1.41)), либо пустое множество. Построим новый граф $\mathcal{G}^*(\mathcal{V}, \mathcal{E}^*, O)$. Каждой компоненте $S(\lambda_\alpha)$ поставим в соответствие ребро, соединяющее вершины $A, B \in \mathcal{V}$; при этом пустому $S(\lambda_\alpha)$ ребро в соответствие не ставится. Таким образом, имеем

$$\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O) \rightarrow \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}} \rightarrow \{S(\lambda_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{E}} \rightarrow \{E_\beta^*\}_{\beta \in \mathcal{E}^*} \rightarrow \mathcal{G}^*(\mathcal{V}, \mathcal{E}^*, O). \quad (1.44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Как нетрудно убедиться, граф $\mathcal{G}^*$ остается частично упорядоченным множеством с наименьшим элементом, несмотря на возможное удаление некоторых ребер (в случае $S(\lambda_\alpha) = \emptyset$) или добавление ребер (в силу многосвязности $S(\lambda_\alpha)$).

С помощью графа $\mathcal{G}^*$ (1.44) определим *риманову поверхность* $\mathfrak{R}$, являющуюся $(p+1)$ -листным накрытием комплексной плоскости ($\#\mathcal{V} = p+1$). Каждой вершине $A \in \mathcal{V}$ графа $\mathcal{G}^*$ поставим в соответствие экземпляр комплексной плоскости, разрезанный по отрезкам $\{E_\beta^*\}$, соответствующим ребрам $\beta \in \mathcal{E}_{A+}^* \cup \mathcal{E}_{A-}^*$. Листы, соответствующие вершинам $A, B \in \mathcal{V}$, соединенным ребром β , переклеиваются “крест-накрест” вдоль отрезка E_β^* . Таким образом, получаем компактную риманову поверхность

$$\mathcal{G}^* \longrightarrow \mathfrak{R} := \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{V}} \mathfrak{R}_A} : \begin{cases} \pi(\mathfrak{R}_A) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}^* \cup \mathcal{E}_{A-}^*} E_\beta^*, \\ \pi_A^{-1}(E_{\beta\pm}^*) = \pi_B^{-1}(E_{\beta\mp}^*), \quad \beta \in (A, B)^*, \end{cases} \quad (1.45)$$

где π обозначает естественную проекцию с $\mathfrak{R}$ на $\mathbb{C}$, а π_A^{-1} – обратную проекцию (поднятие) с комплексной плоскости на A -й лист $\mathfrak{R}_A$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Отметим (см. (1.27)), что полученная поверхность имеет род

$$g^* = \#\mathcal{E}^* - \#\mathcal{V} + 1.$$

Определим *гомологический базис* $\{\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}, \mathbf{b}_{\mathfrak{R}}\}$ римановой поверхности следующим образом:

$$\mathbf{a}_{\mathfrak{R}} := \{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^{g^*}, \quad \mathbf{b}_{\mathfrak{R}} := \{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{g^*} \quad (1.46)$$

– множество циклических разрезов $\mathfrak{R}$, превращающих ее в односвязную область. Пусть в вершину A графа $\mathcal{G}^*$ входит $m_A + 1$ ребро,

$$\{\alpha_{A,j}\}_{j=0}^{m_A} := \mathcal{E}_{A-}^*.$$

Зафиксируем из них m_A ребер и вокруг образов на $\mathfrak{R}_A$ отрезков $\{E_{\alpha_{A,j}}^*\}_{j=1}^{m_A}$, соответствующих этим ребрам, проведем разрезы $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ -циклов, где

$$\mathbf{b}_{\mathfrak{R}} := \bigcup_{A \in \mathcal{V}} \bigcup_{j=1}^{m_A} \mathbf{b}_{A,j}, \quad \mathbf{b}_{A,j} := \pi_A^{-1} \{E_{\alpha_{A,j}+}^* \cup E_{\alpha_{A,j}-}^*\}. \quad (1.47)$$

Циклы $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ фиксируем произвольным образом так, чтобы они вместе с $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ -циклами (1.47) образовывали базис (1.46).

Определим *стандартный абелев интеграл* (3-го рода) G на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, как функцию с чисто мнимыми периодами на $\mathfrak{R}$, аналитическую (ограниченную) на $\mathfrak{R}$ с выколотыми бесконечными точками на всех листах, где она имеет логарифмические особенности

$$G : \begin{cases} \text{a) } G \in \mathcal{A} \left(\mathfrak{R} \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{V}} \{\infty^{(A)}\} \right), \\ \text{b) } G(\zeta) = \begin{cases} -p \log \zeta + O(1), & \zeta \rightarrow \infty^{(O)}, \\ \log \zeta + O(1), & \zeta \rightarrow \infty^{(A)}, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \end{cases} \\ \text{c) } g := \operatorname{Re} G - \text{однозначна на } \mathfrak{R}. \end{cases} \quad (1.48)$$

Такая функция G существует всегда (см., например, [25]), причем соотношения (1.48) определяют ее с точностью до аддитивной константы, которую мы фиксируем дополнительной нормировкой:

$$c') \quad \sum_{A \in \mathcal{V}} g_A = 0.$$

Традиционные рассуждения (см., например, [26], [27]) показывают, что ветви $\{g_A\}_{A \in \mathcal{V}}$ действительной части нормированного абелевого интеграла G связаны с потенциалами компонент равновесной меры (1.32), (1.38) следующими линейными соотношениями:

$$\begin{aligned} g_A &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A+}^*} V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}^*} V^{\lambda_\beta} + \gamma_A, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \\ g_O &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}^*} V^{\lambda_\alpha} - \sum_{A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} \gamma_A, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где нормировочные константы $\{\gamma_A\}_{A \in \mathcal{V}}$ и константы равновесия $\{\tilde{\gamma}_A\}_{A \in \mathcal{V}}$ из (1.38) выражаются друг через друга тоже линейным образом.

В соответствии с предложением 3.2 главный член асимптотик многочлена P_n и функций $\{\Psi_A\}_{A \in \mathcal{V}}$ задается функцией $\Phi := e^G$, где G определена в (1.48). Таким образом,

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{C_O z^p} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(O)}, \\ \frac{z}{C_A} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(A)}, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \end{cases} \quad (1.50)$$

где $C_A = \exp\{-\gamma_A\}$, и справедлива следующая нормировка ветвей Φ в бесконечно удаленной точке:

$$\prod_{A \in \mathcal{V}} \Phi_A(\infty) = 1.$$

Функция Φ неоднозначна на $\mathfrak{R}$, ее аргумент при обходе обоих берегов разреза вдоль отрезка E_α^* имеет приращение, равное $\Delta \arg \Phi = 2\pi|\lambda_\alpha|$. Поэтому, зная величины равновесной меры (1.32), (1.38), мы знаем приращения аргумента Φ при обходе $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ -циклов (1.47). Обозначим

$$\Delta_{\mathbf{b}_j} \arg \Phi =: 2\pi\omega_j, \quad j = 1, \dots, g^*. \quad (1.51)$$

Пусть $\vec{\Omega}(\zeta)$ – базис нормированных голоморфных абелевых интегралов (1-го рода) римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (см. [28]):

$$\vec{\Omega}(\zeta) := \{\Omega_k(\zeta)\}_{k=1}^{g^*}, \quad \zeta \in \mathfrak{R}: \quad \Delta_{\mathbf{a}_l} \Omega_k = \delta_{k,l}, \quad \Delta_{\mathbf{b}_l} \Omega_k = B_{k,l}, \quad \text{Im} \|B_{k,l}\| > 0. \quad (1.52)$$

Напомним определение тэта-функции. Кратный ряд

$$\theta(u_1, \dots, u_{g^*}) := \sum_{n_1=-\infty, \dots, n_{g^*}=-\infty}^{+\infty, \dots, +\infty} \exp \left\{ \pi i \sum_{\mu=1}^{g^*} \sum_{\nu=1}^{g^*} B_{\mu\nu} n_\mu n_\nu + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{g^*} n_\nu u_\nu \right\}$$

при положительной определенности мнимой части матрицы параметров $\|B_{k,l}\|$ равномерно сходится и представляет собой целую функцию g^* переменных $\vec{u} := (u_1, \dots, u_{g^*})$. Пусть $\vec{e} \in \mathbb{C}^{g^*}$ – произвольный вектор констант. Подстановка в качестве переменных в тэта-ряд θ вектора абелевых интегралов $\vec{\Omega}(\zeta)$ со сдвигом $\vec{e}$ приводит к следующей функции одной переменной (определенной на $\mathfrak{R}$):

$$\Theta^{(\vec{e})}(\zeta) := \theta(\vec{\Omega}(\zeta) - \vec{e}), \quad \zeta \in \mathfrak{R}, \quad (1.53)$$

которая называется *тэта-функцией римановой поверхности $\mathfrak{R}$* . Основные свойства тэта-функции $\Theta^{(\vec{e})}(\zeta)$: она голоморфна (аналитична и однозначна) на $\mathfrak{R}$, рассеченной $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ -циклами; она имеет g^* нулей (или является тождественным нулем), т.е.

$$\text{а) } \Theta^{(\vec{e})} \in \mathcal{H} \left(\mathfrak{R} \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^{g^*} \mathbf{a}_j \right\} \right); \quad (1.54)$$

$$\text{б) } \exists \{\dot{\zeta}_k\}_{k=1}^{g^*}: \quad \Theta^{(\vec{e})}(\dot{\zeta}_k) = 0, \quad k = 1, \dots, g^*.$$

Меняя вектор констант в $\Theta^{(\vec{e})}(\zeta)$, мы меняем положение нулей тэта-функции $\mathfrak{R}$:

$$\vec{e} \longleftrightarrow \{\dot{\zeta}_k\}_{k=1}^{g^*}. \quad (1.55)$$

1.4.2. Функция Сеге и формулы сильной асимптотики. Важным элементом формул сильной асимптотики ортогональных многочленов является так называемая функция Сеге – решение краевой задачи для аналитической функции, с граничными значениями, зависящими от весов ортогональности. В нашем случае краевая задача рассматривается на римановой поверхности (1.45):

$$\mathfrak{R} := \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{V}} \mathfrak{R}_A} = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{V}} \mathfrak{R}_A \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \partial \mathfrak{R}_\alpha \right), \quad \partial \mathfrak{R}_\alpha := \pi^{-1} \{E_{\alpha+}^* \cup E_{\alpha-}^*\},$$

где $\partial\mathfrak{R}_\alpha$ обозначает жорданову кривую, разделяющую листы $\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{R}_B$ для $\alpha \in (B, A)$.

Пусть $(Gr)_\Omega$ – комплексная функция Грина области Ω с особенностью в точке $\infty \in \Omega$ (т.е. ее действительная часть гармонична в $\Omega \setminus \{\infty\}$, имеет логарифмическую сингулярность в точке $\infty \in \Omega$ и равна нулю на границе $\partial\Omega$). Ее производная $h_\Omega^{(0)} := (Gr)_\Omega'$ голоморфна в Ω ,

$$h_\Omega^{(0)} \in \mathcal{H}(\Omega), \quad (1.56)$$

и имеет в Ω нули, число которых равно связности Ω , включая нуль в бесконечности.

С помощью входных данных $w = \{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}$ (см. (1.17), (1.42)) определим на контурах $\partial\mathfrak{R}(E^*) := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \partial\mathfrak{R}_\alpha$ аналоги “тригонометрических” весов при $\alpha \in \mathcal{E}^*$

$$\tilde{w} := \{\tilde{w}_\alpha\}, \quad \tilde{w}_\alpha := \begin{cases} i \frac{1}{(\tilde{h}_B^{(0)})_-} w_\alpha, & \alpha \in (O, B)^*, \\ -\frac{\tilde{h}_A^{(0)}}{(\tilde{h}_B^{(0)})_-} w_\alpha, & \alpha \in (A, B)^*, \quad A \neq O, \end{cases} \quad (1.57)$$

где $(\cdot)_-$ означает граничные значения при подходе к границе (здесь E_α^*) справа, а

$$\tilde{h}_A^{(0)} := h_{\Omega_{A-}}^{(0)}, \quad \Omega_{A-} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}^*} E_\beta^*, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}}. \quad (1.58)$$

Задание на контуре $\partial\mathfrak{R}_\alpha$ веса $\tilde{w}_\alpha$ означает, что на обоих берегах отрезка E_α^* задана одна и та же функция (1.57).

Назовем *функцией Сеге* кусочно голоморфную на $\mathfrak{R}$ функцию, являющуюся решением следующей однородной краевой задачи Римана (см. [29]):

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_A\}_{A \in \mathcal{V}} : \begin{cases} 1) \mathcal{F} \in \mathcal{H}\left(\mathfrak{R} \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \partial\mathfrak{R}_\alpha \cup \mathbf{a}_{\mathfrak{R}}\right)\right), \\ 2) \mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_- \tilde{w}_\alpha \text{ на } \partial\mathfrak{R}_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ 3) \prod_{A \in \mathcal{V}} \mathcal{F}_A(\infty) = 1. \end{cases} \quad (1.59)$$

Ниже (см. п. 4.4.1) мы обсудим краевую задачу (1.59) подробнее, в частности, с помощью мероморфных на $\mathfrak{R}$ дифференциалов (дифференциалов Коши) получим интегральное представление ее решения. Отметим, что функция Сеге (см. п. 1) в формуле (1.59)) претерпевает разрыв при прохождении через контуры $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ -циклов. Следовательно, она имеет нетривиальные $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ -периоды, которые мы обозначим

$$\triangle_{\mathbf{b}_k} \arg \mathcal{F} =: 2\pi c_w^{(k)}, \quad k = 1, \dots, g^*. \quad (1.60)$$

Теперь перейдем к формулировке результата о сильной асимптотике.

Рассмотрим множество $\{z_k^*\}_{k=1}^{g^*}$ всех конечных нулей производных функций Грина (1.56) для областей

$$\Omega_{A-} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}^*} E_\beta^*, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}},$$

и поднимем эти нули на соответствующие (т.е. на $\mathfrak{R}_A$) листы римановой поверхности,

$$\begin{aligned} \{z_k^*\}_{k=1}^{g^*} : \quad \exists A(k) : \quad h_{\Omega_{A-}}^0(z_k^*) = 0, \quad A \in \mathcal{V}, \\ \{\zeta_k^*\}_{k=1}^{g^*} : \quad \zeta_k^* := \pi_{A(k)}^{-1}(z_k^*), \quad k = 1, \dots, g^*. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Нетрудно видеть, что число таких точек равно роду $\mathfrak{R}$.

Определим вектор констант $\vec{e}$ так, чтобы тэта-функция (1.53) имела бы нули в этих точках $\mathfrak{R}$, т.е.

$$\vec{e} : \quad \Theta(\vec{e})(\zeta_k^*) = 0, \quad k = 1, \dots, g^*. \quad (1.62)$$

Обозначим вектор констант, состоящий из $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ -периодов абелева интеграла G (1.51) и функции Сеге $\mathcal{F}$ (1.60), через

$$\vec{c}_{n,w} := (n\omega_1 + c_w^{(1)}, \dots, n\omega_g^* + c_w^{(g^*)}), \quad (1.63)$$

и определим множество Λ индексов $\{n\}$ таких, что тэта-функция, задаваемая вектором констант $(\vec{e} - \vec{c}_{n,w})$, не имеет нулей в точках $\mathfrak{R}$, расположенных над бесконечностью, т.е.

$$\Lambda := \{n\} : \quad \Theta(\vec{e} - \vec{c}_{n,w})(\zeta) \neq 0, \quad \pi(\zeta) = \infty. \quad (1.64)$$

Наконец, обозначим

$$T^{(\vec{e}, \vec{c}_{n,w})}(\zeta) := \frac{\Theta(\vec{e} - \vec{c}_{n,w})(\zeta)}{\Theta(\vec{e})(\zeta)} =: \{T_A\}_{A \in \mathcal{V}}. \quad (1.65)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.3. *Для последовательности $\{P_n\}$ знаменателей диагональных (1.40) аппроксимаций Эрмита–Паде (1.5)–(1.7) обобщенной системы Никитина (1.19), порожденной $\mathcal{G}$ -графом (1.16), с условием (1.43) на отрезки $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}}$, с мерами (1.17), (1.18), удовлетворяющими условию (1.42), справедливы следующие асимптотические формулы при $\vec{n} = (n, \dots, n)$, $n \in \Lambda$, $n \rightarrow \infty$:*

$$P_n(z) = \left(\frac{C_O}{\Phi_O(z)} \right)^n \frac{\mathcal{F}_O(z)}{\mathcal{F}_O(\infty)} \frac{T_O(z)}{T_O(\infty)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

равномерно по z на компактах комплексной плоскости $K \Subset \mathbb{C} \setminus \{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}^*} E_\alpha^*\}$ и

$$\begin{aligned} P_n(x) = & \left[\left(\frac{C_O}{\Phi_{O+}(x)} \right)^n \frac{\mathcal{F}_{O+}(x)}{\mathcal{F}_O(\infty)} \frac{T_{O+}(x)}{T_O(\infty)} \right. \\ & \left. + \left(\frac{C_O}{\Phi_{O-}(x)} \right)^n \frac{\mathcal{F}_{O-}(x)}{\mathcal{F}_O(\infty)} \frac{T_{O-}(x)}{T_O(\infty)} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \end{aligned}$$

равномерно по x на компактах внутри системы отрезков $K \Subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}^*} E_\alpha^*$. Здесь в правых частях асимптотических формул стоят ветви функций (1.50), (1.59) и (1.65) с листа O римановой поверхности (1.45), соответствующего корню графа $\mathcal{G}^*$ (1.44).

Доказательству этой теоремы посвящен § 4 статьи. Для доказательства мы используем метод матричной задачи Римана–Гильберта [30], что, с одной стороны, вынуждает нас накладывать довольно ограничительные условия аналитичности, но, с другой стороны, дает глобальный асимптотический портрет $\{P_n\}$, включая локальные асимптотики в окрестностях концов отрезков $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}^*} E_\alpha^*$. Также мы получаем сильные асимптотики функций второго рода $\Psi_{n,A}$, $A \in \mathcal{V}$.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Нам понадобятся некоторые свойства функционала энергии, доказательства которых можно найти в [31].

Во-первых, для функционала энергии $I(\cdot)$ справедлив принцип понижения, т.е. если $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) \geq I(\mu)$.

Функционал $I(\cdot, \cdot)$ является билинейной формой в линейном пространстве $\mathbf{M}(K)$ всех зарядов $\delta = \delta_+ - \delta_-$ на компакте K таких, что $I(\delta_+ + \delta_-) < \infty$. Вторым необходимым нам фактом является положительная определенность этой формы. Точнее, при (техническом) условии $K \in \{z : |z| < 1\}$ для любого заряда $\delta \in \mathbf{M}(K)$ энергия $I(\delta) \geq 0$, и если $I(\delta) = 0$, то $\delta = 0$. Другими словами, $I(\cdot, \cdot)$ определяет скалярное произведение в $\mathbf{M}(K)$: $(\delta_1, \delta_2) := I(\delta_1, \delta_2)$.

Докажем существование экстремальной меры. Для функционала $J(\mu) = \sum_{k,j} a_{kj} I(\mu^k, \mu^j)$ также справедлив принцип понижения, так как он выполнен для $a_{jj} I(\mu^j)$, а для недиагональных слагаемых при $a_{kj} \neq 0$ выполнено $E_k \cap E_j = \emptyset$ (см. (1.29)), и поэтому $I(\mu_k, \mu_j)$ непрерывна.

Пусть $\mu_n \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E}) = \{\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k, k = 1, \dots, r\}$ — минимизирующая последовательность:

$$J(\mu_n) \rightarrow J_0 := \inf\{J(\mu) : \mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(E)\}.$$

Массы мер из $\mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ ограничены, так как многогранник (1.30) ограничен, поэтому множество $\mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ является компактом в слабой топологии. Выберем из последовательности μ_n сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_k} \rightarrow \lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$, $n \in \Lambda$. С одной стороны, $J(\lambda) \geq J_0$. С другой стороны, в силу полунепрерывности $J_0 \geq J(\lambda)$. Таким образом, λ есть экстремальная мера.

Для доказательства единственности заметим, что так как $\mathcal{A}$ неотрицательно определена, то $J(\mu)$ — выпуклый функционал. Если λ и λ' — две экстремальные меры, то $(\lambda + \lambda')/2$ также является экстремальной мерой: $J((\lambda + \lambda')/2) \leq (J(\lambda) + J(\lambda'))/2 = J_0$. Так как $J(\lambda - \lambda') + J(\lambda + \lambda') = 2J(\lambda) + 2J(\lambda')$, то $J(\lambda - \lambda') = 0$. Значит, $(\lambda - \lambda')\mathcal{A} = 0$. Рассмотрим заряд $\nu = \lambda - \lambda'$: $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $S(\nu_k) \subset E_k$, $k = 1, \dots, m$. Так как $\nu\mathcal{A} = 0$, то для всех k выполнено

$$-a_{kk}\nu_k = \sum_{j=1, j \neq k}^m a_{kj}\nu_j. \quad (2.1)$$

В последней сумме либо $a_{kj} = 0$, либо $E_k \cap E_j = \emptyset$ (см. (1.29)). Следовательно, носители зарядов в левой и правой частях (2.1) не пересекаются и $a_{kk}\nu_k = 0$. Так как $a_{kk} > 0$, то $\nu_k = 0$. Итак, $\lambda = \lambda'$, т.е. экстремальная мера единственна. Пункт 1) теоремы доказан.

2) По существу, утверждения а) и б) — это вариант теоремы Куна–Таккера [32]. Докажем это.

Пусть λ — экстремальная мера и $J(\lambda) = J_0$. Рассмотрим множество в $\mathbb{R}^{r+1}$:

$$\Xi := \left\{ (t_0, \dots, t_r) =: \mathbf{t} \mid \exists \mu \in \mathbf{M}^+(E) : J(\mu) \leq t_0 + J_0, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k + t_k, k = 1, \dots, r \right\}.$$

Нетрудно проверить, что это множество непусто, выпукло и имеет пустое пересечение с лучом

$$\Upsilon := \{(\omega_0, 0, \dots, 0) : \omega_0 < 0\}.$$

По теореме отделимости в конечномерном пространстве существует ненулевой вектор $(l_0, l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, для которого

$$\inf_{\Xi} \sum_{j=0}^r l_j t_j \geq \sup_{\omega_0 < 0} l_0 \omega_0 \geq 0,$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^r l_j t_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \Xi. \quad (2.2)$$

Покажем, что $l_0 > 0$. Заметим, что $l_0 \geq 0$, так как можно подставить $(1, 0, \dots, 0) \in \Xi$ в неравенство (2.2). Предположим, что $l_0 = 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^m$ справедливо

$$\sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} x_j \geq \sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} |\lambda_j|.$$

Отсюда $\sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} |\lambda_j| = 0$ и для всех $j : \sum_{k=1}^r l_k c_{kj} \geq 0$. Последние два условия возможны лишь при $l_1 = \dots = l_r = 0$, что противоречит условию $l \neq 0$. Итак, $l_0 > 0$, и поэтому можно положить $l_0 = 1$.

Пусть теперь $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$. Тогда

$$J(\mu) - J_0 + \sum_k l_k \left(\sum_j c_{kj} |\mu_j| - b_k \right) \geq 0,$$

т.е. $\mathcal{L}(\mu) \geq \mathcal{L}(\lambda)$.

Обратно, если для меры $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ выполнено

$$\mathcal{L}(\mu) \geq \mathcal{L}(\lambda) \quad \forall \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}),$$

то для любого $\mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ имеем $J(\mu) \geq J(\lambda)$. Пункт 2) теоремы доказан.

3) Покажем, что условия равновесия (1.35) равносильны задаче минимизации лагранжиана (1.34).

Пусть для $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ выполнено

$$\mathcal{L}(\lambda) \leq \mathcal{L}(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}). \quad (2.3)$$

Рассмотрим заряд $\nu^{(k)} = (0, \dots, \nu, \dots, 0) \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$, у которого только k -я компонента отлична от нуля. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda + \varepsilon \nu^{(k)}) - \mathcal{L}(\lambda) &= 2\varepsilon \sum_j a_{kj} I(\lambda_j, \nu) + \varepsilon \sum_j l_j c_{jk} |\nu| + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \int \left(2W_k^\lambda + \sum_j l_j c_{jk} \right) d\nu + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\varkappa_k = -\frac{1}{2} \sum_j l_j c_{jk} \quad (2.4)$$

и покажем, что $W_k^\lambda \geq \kappa_k$ на E_k . В силу непрерывности $W_k^\lambda - a_{kk}V^{\lambda_k}$ на регулярном компакте E_k достаточно показать, что $W_k^\lambda \geq \kappa_k$ квази всюду на E_k . Предположим обратное: существует $E \subset E_k$, $\text{cap } E > 0$, на котором $W_k^\lambda < \kappa_k$. Рассмотрим (скалярную) положительную меру $\nu \in \mathbf{M}^+(E_k)$. Тогда $\mathcal{L}(\lambda + \varepsilon\nu^{(k)}) - \mathcal{L}(\lambda) < 0$, что противоречит (2.3) при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Предположим теперь, что в точке $x_0 \in S(\lambda_k)$ выполнено $W_k^\lambda(x_0) > \kappa_k$. Тогда в силу полунепрерывности снизу W_k^λ найдется окрестность $U(x_0)$, в которой $W_k^\lambda > \kappa_k$. При этом $\lambda(U(x_0)) > 0$, так как $x_0 \in S(\lambda_k)$. Теперь подберем отрицательную меру ν с носителем на $U(x_0)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\lambda_k + \varepsilon\nu$ — положительная мера. Снова получим противоречие с (2.3).

Обратно: пусть выполнены соотношения равновесия (1.35). Тем самым определены константы $l_1, \dots, l_r$, удовлетворяющие (2.4). Предположим, что для некоторой $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$ выполнено $\mathcal{L}(\mu) < \mathcal{L}(\lambda)$. Тогда в силу выпуклости имеем $\mathcal{L}((1 - \varepsilon)\lambda + \varepsilon\mu) < \mathcal{L}(\lambda)$, при этом $(1 - \varepsilon)\lambda + \varepsilon\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$. Поэтому производная $\mathcal{L}$ по направлению $\mu - \lambda$ в точке λ отрицательна, т.е.

$$2 \sum_{j,k} a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k - \lambda_k) + \sum_j l_j \sum_k c_{jk} (|\mu_k| - |\lambda_k|) < 0.$$

Последнее неравенство равносильно следующему неравенству:

$$2 \sum_{j,k} a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k) + \sum_j l_j \sum_k c_{jk} (|\mu_k|) < \mathcal{L}(\lambda). \quad (2.5)$$

Проинтегрировав k -ое соотношение равновесия по λ_k и сложив по k , получим $\mathcal{L}(\lambda) = 0$. Интегрируя k -ое соотношение равновесия по μ_k , имеем

$$2 \sum_j a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k) + \sum_j l_j c_{jk} (|\mu_k|) \geq 0.$$

Суммируя по k , получим противоречие с (2.5). Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

3.1. Вспомогательные утверждения о функциях второго рода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. При условии (1.26) порядок нуля функции $\Psi_{\vec{n},A}$ в бесконечности не меньше, чем порядок нуля функции $R_{\vec{n},A}$, т.е. с учетом (1.22) имеем

$$\Psi_{\vec{n},A}(z) = O(z^{-n_A-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции второго рода $R_{\vec{n},A}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_{\vec{n},A}(z) &= \sum_{t_A \in \mathcal{T}_A} \int \frac{P_{\vec{n}}(x) d\mu_{t_A}(x)}{z - x} \\ &= \sum_{(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k) \in \mathcal{T}_A} \int \frac{P_{\vec{n}}(x_1) d\sigma_{\alpha_1}(x_1) \cdots d\sigma_{\alpha_k}(x_k)}{(z - x_1)(x_1 - x_2) \cdots (x_{k-1} - x_k)}. \end{aligned}$$

Функции $\Psi_{\vec{n},A}$, определяемые индуктивно, могут быть записаны в виде

$$\Psi_{\vec{n},A}(z) = \sum_{(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k) \in \mathcal{T}_A} \int \frac{P_{\vec{n}}(x_1) d\sigma_{\alpha_1}(x_1) \cdots d\sigma_{\alpha_k}(x_k)}{(x_1 - x_2) \cdots (x_{k-1} - x_k)(x_k - z)}.$$

Сложив эти два равенства, получим

$$R_{\vec{n},A}(z) + \Psi_{\vec{n},A}(z) = \sum_{(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k) \in \mathcal{T}_A} \int \frac{(x_k - x_1) P_{\vec{n}}(x_1) d\sigma_{\alpha_1}(x_1) \cdots d\sigma_{\alpha_k}(x_k)}{(z - x_1)(x_1 - x_2) \cdots (x_{k-1} - x_k)(x_k - z)}.$$

Заменим выражение $(x_k - x_1)$ в числителе на $-(x_1 - x_2) - \dots - (x_{k-1} - x_k)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} R_{\vec{n},A}(z) + \Psi_{\vec{n},A}(z) \\ = \sum_{(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k) \in \mathcal{T}_A} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \int \frac{P_{\vec{n}}(x) d\langle \sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_j} \rangle(x)}{z - x} \int \frac{d\langle \sigma_{\alpha_k}, \dots, \sigma_{\alpha_{j+1}} \rangle(x)}{x - z}. \end{aligned}$$

Данную сумму можно записать следующим образом, перегруппировав слагаемые:

$$R_{\vec{n},A}(z) + \Psi_{\vec{n},A}(z) = \sum_{B \prec A} \left(R_{\vec{n},B}(z) \sum_{(\beta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_l) \in \mathcal{T}_{BA}} (-1)^l \int \frac{d\langle \sigma_{\beta_l}, \dots, \sigma_{\beta_1} \rangle(x)}{x - z} \right),$$

где $\mathcal{T}_{BA}$ – множество всех путей из вершины B в вершину A . Отсюда при условии (1.26) следует, что $R_{\vec{n},A}(z) + \Psi_{\vec{n},A}(z) = O(z^{-n_A-1})$, $z \rightarrow \infty$. Тем самым предложение 3.1 доказано.

Обозначим (см. (1.39))

$$q_{B+} := \prod_{C \in B_+} \prod_{\beta \in (B,C)} q_\beta = \prod_{\beta \in \mathcal{E}_{B+}} q_\beta, \quad q_{B-} := \prod_{A \in B_-} \prod_{\alpha \in (A,B)} q_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}_{B-}} q_\alpha, \quad (3.1)$$

и соответственно

$$m_\beta := \deg q_\beta, \quad m_{B\pm} := \deg q_{B\pm}.$$

Если при этом $B_+ = \emptyset$, то положим $q_{B+} = 1$ и $m_{B+} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. 1) Для $B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A,B)} \int \Psi_{\vec{n},A}(x) x^k \frac{d\sigma_\alpha(x)}{q_{B+}(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, m_{B+} + n_B - 1. \quad (3.2)$$

2) Пусть $d_B := m_{B-} - m_{B+} - n_B + \text{ind } B_- - 1$, где $\text{ind } B_- := \#\{\alpha : \alpha \in (A, B), A \in B_-\}$. Тогда

$$d_B \geq 0, \quad B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad \sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} d_B \leq g. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем из предложения 3.1 и определения q_{B+} (см. (3.1), (1.39))

$$\frac{\Psi_{\vec{n},B}(z)}{q_{B+}(z)} = O\left(\frac{1}{z^{m_{B+}+n_B+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\Psi_{\vec{n},B}}{q_{B+}} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{B-}} E_\alpha\right).$$

Отсюда по теореме Коши и определению $\Psi_{\vec{n},B}$ (см. (1.25)), получаем

$$0 = \oint_{(\infty)} z^k \frac{\Psi_{\vec{n},B}(z)}{q_{B+}(z)} dz = \oint_{(\infty)} \frac{z^k}{q_{B+}(z)} \sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A,B)} \int \frac{\Psi_{\vec{n},A}(x) d\sigma_\alpha(x)}{x - z}$$

для $k = 0, \dots, m_{B+} + n_B - 1$. Теперь теорема Фубини, интегрирование по z и интегральная формула Коши приводят к справедливости (3.2).

Далее отметим, что из (3.1) следует, что функции $\Psi_{\vec{n}, A}$ при $A \in B_-$ имеют на $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{B_-}} E_\alpha$ в совокупности ровно m_{B_-} нулей. С учетом возможных перемен знака весовой функции в лакунах этой системы отрезков соотношения ортогональности (3.2) дают справедливость оценки снизу для m_{B_-} : $m_{B_-} \geq m_{B+} + n_B - \text{ind } B_- + 1$, т.е. $\delta_B \geq 0$. Просуммировав эти неравенства по всем $B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}$, получаем

$$\sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} \delta_B = \sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} (m_{B_-} - m_{B+} - n_B + \text{ind } B_-) - \# \overset{\circ}{\mathcal{V}} = \sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} (m_{B_-} - m_{B+}) - |\vec{n}| + g \geq 0.$$

С учетом того, что

$$\sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} (m_{B_-} - m_{B+}) = m_{O+},$$

получим оценку снизу для числа нулей многочлена $P_{\vec{n}}$, расположенных на системе отрезков $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_\alpha$:

$$m_{O+} \geq |\vec{n}| - \# \mathcal{E} + \# \overset{\circ}{\mathcal{V}} = |\vec{n}| - g. \quad (3.4)$$

С другой стороны, $|\vec{n}| \geq \deg P_{\vec{n}} \geq m_{O+}$. Отсюда $\sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} d_B \leq g$. Таким образом,

$$m_{B+} + n_B - \text{ind } B_- + 1 + g \geq m_{B_-} \geq m_{B+} + n_B - \text{ind } B_- + 1. \quad (3.5)$$

Предложение 3.2 доказано.

3.2. Вспомогательные утверждения об асимптотике квазиортогональных многочленов. В этом пункте будет показано, что теорема Гончара–Рахманова из [33] об асимптотике многочленов, ортогональных с переменным весом, остается верной и для квазиортогональных многочленов.

Введем некоторые определения. Пусть $E = \bigcup E_j$ – дизъюнктное объединение конечного числа отрезков вещественной оси, $\mathcal{F}(E)$ – множество функций из E в $(-\infty, +\infty]$, полунепрерывных снизу и слабо аппроксимативно непрерывных на E . Будем говорить, что последовательность f_n из $\mathcal{F}(E)$ сходится к f из $\mathcal{F}(E)$: $f_n \xrightarrow{\mathcal{F}} f$ при $n \rightarrow \infty$, если выполнены два условия: а) f_n сходится к f по мере Лебега на E ; б) для любого отрезка $\Delta \subset E$ выполняется $\min_{\Delta} f_n \rightarrow \min_{\Delta} f$.

Рассмотрим многочлен $Q_n(x) = x^n + \dots$, ортогональный с весом $e^{-nf_n(x)}$ на E :

$$\int Q_n(x) x^l e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) = 0, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

где $\sigma(x)$ – конечная положительная борелевская мера такая, что $\sigma'(x) > 0$ п.в. на E , а $f_n \in \mathcal{F}(E)$. Пусть $f_n \xrightarrow{\mathcal{F}} f$, $n \in \Lambda$, а единичная мера λ на E является равновесной в поле f : $(2V^\lambda + f)(x) = w := \min_E (2V^\lambda + f)$, $x \in S(\lambda)$. В работе [33] доказано, что

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \lambda, \quad n \in \Lambda, \quad (3.6)$$

$$\left(\int Q_n^2 e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) \right)^{1/n} \rightarrow e^{-w}, \quad n \in \Lambda. \quad (3.7)$$

В качестве следствия из этого результата легко получить оценку сверху для функций второго рода при $x \notin E$: $\overline{\lim} |R_n(x)|^{1/n} \leq e^{V^\lambda(x)-w}$, где

$$R_n(x) = \int \frac{Q_n(t)e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x-t} = \frac{1}{Q_n(x)} \int \frac{Q_n^2(t)e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x-t}.$$

Рассмотрим теперь последовательность квазиортогональных многочленов

$$p_n = x^n + \dots : \int p_n(x)x^l e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) = 0, \quad l = 0, \dots, n-1-g,$$

где $g > 0$ и не зависит от n . Предполагая, что справедливы приведенные выше условия на весовые функции, докажем следующее предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. 1) *Справедливо соотношение*

$$\frac{1}{n} \mu(p_n) \rightarrow \lambda, \quad n \in \Lambda;$$

2) *Если все нули p_n лежат на E , то на любом конечном объединении отрезков E' таком, что $E' \cap E = \emptyset$, имеет место следующая сходимость:*

$$-\frac{1}{n} \ln \left| \int \frac{p_n(t)e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{t-x} \right| \xrightarrow{\mathcal{F}(E')} -V^\lambda(x) + w, \quad n \in \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что считающая мера p_n мало отличается от считающей меры ортогонального многочлена, а именно, для их функций распределения выполняется неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^x d\mu(Q_n) - \int_{-\infty}^x d\mu(p_n) \right| \leq g. \quad (3.8)$$

В силу (3.6) отсюда будет следовать требуемая асимптотика. Рассмотрим последовательность многочленов $\{Q_k^{(n)} = x^k + \dots\}$, ортогональных относительно меры $e^{-nf_n(x)} d\sigma(x)$. Эти многочлены удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям:

$$xQ_k^{(n)}(x) = Q_{k+1}^{(n)}(x) + a_k^{(n)} Q_k^{(n)}(x) + b_k^{(n)} Q_{k-1}^{(n)}(x),$$

где

$$b_k^{(n)} = \int (Q_k^{(n)}(x))^2 e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) \left(\int (Q_{k-1}^{(n)}(x))^2 e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) \right)^{-1} \neq 0.$$

Отсюда можно выразить многочлен $Q_{k-1}^{(n)}$ через $Q_{k+1}^{(n)}$ и $Q_k^{(n)}$ и, продолжая процесс, многочлен $Q_{k-i}^{(n)}$ можно выразить через $Q_{k+1}^{(n)}$ и $Q_k^{(n)}$ с полиномиальными коэффициентами. Из соотношений ортогональности следует, что многочлен $p_n(x)$ лежит в линейной оболочке $(Q_n^{(n)}, \dots, Q_{n-g}^{(n)})$. Таким образом $p_n(x) = a_n(x)Q_n^{(n)}(x) + b_n(x)Q_{n-1}^{(n)}(x)$, где $\deg a_n \leq \max(0, g-2)$, $\deg b_n \leq g-1$. Известно, что нули $Q_n^{(n)} \equiv Q_n$ и $Q_{n-1}^{(n)}$ перемежаются. Поэтому если $x_1 < x_2$ — два соседних нуля $Q_n(x)$ и $b_n(x) \neq 0$ на $(x_1, x_2]$, то $p_n(x)$ имеет нуль на $[x_1, x_2)$. Так как $\deg b_n \leq g-1$, то получаем справедливость (3.8).

2) Покажем теперь, что если все нули p_n лежат на E , то

$$\left(\int p_n^2(x) e^{-nf_n(x)} d\sigma(x) \right)^{1/n} \rightarrow e^{-w}, \quad n \in \Lambda.$$

Напомним, что старшие коэффициенты всех рассматриваемых здесь многочленов равны единице, поэтому $p_n = Q_n + c_{1,n}Q_{n-1}^{(n)} + \dots + c_{g,n}Q_{n-g}^{(n)}$. Так как нули всех этих многочленов лежат на компакте E , т.е. ограничены в совокупности, то по теореме Виета $c_{i,n} = O(n^i)$ и поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_{i,n}|^{1/n} \leq 1$. Таким образом (см. (3.7)),

$$\left(\int p_n^2 e^{-nf_n} d\sigma \right)^{1/n} = \left(\int Q_n^2 e^{-nf_n} d\sigma + \sum_{j=1}^g c_{j,n}^2 \int (Q_{n-j}^{(n)})^2 e^{-nf_n} d\sigma \right)^{1/n} \rightarrow e^{-w},$$

$$n \in \Lambda.$$

Обозначим

$$r_n(x) := \int \frac{p_n(t) e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x - t}$$

и заметим, что имеет место следующая оценка сверху при $x \in E'$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)|^{1/n} \leq e^{V^\lambda(x) - w}.$$

Действительно, эта оценка следует из представления $r_n = R_n + \sum_{j=1}^g c_{j,n} R_{n-i}^{(n)}$ и наличия аналогичной оценки для функций

$$R_{n-i}^{(n)}(x) := \int \frac{Q_{n-i}^{(n)}(t) e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x - t}.$$

Заметим, что из доказанного в п. 1) следует, что на E' выполняется

$$-\frac{1}{n} \ln |p_n(x)| \rightrightarrows V^\lambda(x), \quad n \in \Lambda.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{n} \ln |(r_n p_n)(x)| \xrightarrow{\mathcal{F}} w.$$

Рассмотрим

$$(r_n p_n)(x) = \int \frac{p_n^2(t) e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x - t} + \int \frac{p_n(t)(p_n(x) - p_n(t)) e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{x - t}.$$

Из соотношений ортогональности для p_n следует, что второй интеграл есть многочлен $s_{n,g-1}(x)$ степени не более, чем $g-1$. Пусть $g' = 2[g/2] + 2$. Рассмотрим разделенную разность порядка $g' - 1$:

$$(r_n p_n)(x_1; \dots; x_{g'}) = \sum_j \frac{(r_n p_n)(x_j)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.$$

Имеем

$$(r_n p_n)(x_1; \dots; x_{g'}) = \int \frac{p_n^2(t) e^{-nf_n(t)} d\sigma(t)}{(t - x_1) \cdots (t - x_{g'})}. \quad (3.9)$$

Возьмем точки $x_1, \dots, x_{g'}$, лежащие в одной компоненте связности E' . Тогда мера

$$\frac{d\sigma(t)}{(t - x_1) \cdots (t - x_{g'})}$$

знакопостоянна на E и поэтому $|(r_n p_n)(x_1; \dots; x_{g'})|^{1/n} \rightarrow e^{-w}$. Отсюда следует, что

$$\max_{1 \leq j \leq g'} \{|r_n p_n|(x_j)\}^{1/n} \rightarrow e^{-w}. \quad (3.10)$$

Покажем, что имеет место сходимость по мере рассматриваемой последовательности. Действительно, фиксируем отрезок E'_1 — компоненту связности E' . Обозначим $\delta := \text{dist}(E'_1, E) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_1, \dots, x_{g'} \in e_\varepsilon := \{x \in E'_1 : |r_n p_n|(x) < (e^{-w} - \varepsilon)^n\}$. Тогда существует N такое, что для любого $n > N$, $n \in \Lambda$, выполнено $\int p_n^2 e^{-n f_n} d\sigma \geq (e^{-w} - \varepsilon/2)^n$. Отсюда и из (3.9) следует неравенство $|(r_n p_n)(x_1; \dots; x_{g'})| \geq \delta^{-g'} (e^{-w} - \varepsilon/2)^n$. Далее из оценки

$$|(r_n p_n)(x_1; \dots; x_{g'})| \leq \frac{g' \max_j |r_n p_n|(x_j)}{\min_{k, j: k \neq j} |x_k - x_j|^{g'-1}}$$

получаем

$$\min_{k, j: k \neq j} |x_k - x_j| \leq \left(g' \delta^{g'} \left(\frac{e^{-w} - \varepsilon}{e^{-w} - \varepsilon/2} \right)^n \right)^{1/(g'-1)} =: \varepsilon_1(n).$$

Так как это неравенство выполнено для любых g' точек из e_ε , то $|e_\varepsilon| \leq 2(g'-1) \times \varepsilon_1(n) \rightarrow 0$. Сходимость рассматриваемой последовательности по мере доказана. Отсюда и из (3.10) следует справедливость предложения 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. 1) Утверждения предложения 3.3 остаются верными, если $\deg p_n = n'$, где $n' \leq n$, при условии, что сохранена нормировка $p_n(x) = x^{n'} + \dots$.

2) Всюду в этом параграфе можно считать, что мера $d\sigma(x)$ знакопостоянна на каждом из отрезков E_j , так как за счет потери конечного числа соотношений ортогональности можно перейти к мере, положительной на всем E .

3.3. Доказательство теоремы 1.2. Перепишем соотношения ортогональности (3.2) в виде

$$\sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A, B)} \int q_{B_-}(x) x^k \frac{\Psi_{\vec{n}, A}(x) d\sigma_\alpha(x)}{q_{A+}(x) q_{B+}(x)} \frac{q_{A+}(x)}{q_{B-}(x)} = 0, \quad (3.11)$$

где $k = 0, \dots, m_{B_-} - 2 + \text{ind } B_- - d_B$ и $0 \leq d_B \leq g$.

Справедлива следующая формула, доказательство которой аналогично доказательству предложения 3.2:

$$\frac{\Psi_{\vec{n}, B}(x)}{q_{B+}(x)} = \sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A, B)} \int \frac{\Psi_{\vec{n}, A}(t) d\sigma_\alpha(t)}{(t-x) q_{B+}(t)}. \quad (3.12)$$

Возьмем произвольную предельную точку:

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(q_{\vec{n}, \alpha}) \rightarrow \mu_\alpha, \quad \vec{n} \in \Lambda, \quad \alpha \in \mathcal{E}.$$

Отметим, (3.5) влечет (1.37) для предельной точки. Так как многочлен q_{B_-} является квазиортогональным относительно знакопостоянного на компонентах

связности множества $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{B-}} E_\alpha$ переменного веса (с потерей не более чем g соотношений ортогональности), то из (3.11) и предложения 3.3 (индуктивно, двигаясь от корня O вверх) имеем

$$\sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} 2V^{\mu_\beta}(x) - \lim_{|\vec{n}|} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln \left| \frac{\Psi_{\vec{n},A}(x)}{q_{A+}(x)} \frac{q_{A+}(x)}{q_{B-}(x)q_{B+}(x)} \right| \begin{cases} = \tilde{\varkappa}_B, & x \in \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} S(\mu_\beta), \\ \geq \tilde{\varkappa}_B, & x \in \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} E_\beta, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$- \frac{1}{|\vec{n}|} \ln \left| \frac{\Psi_{\vec{n},B}(x)}{q_{B+}(x)} \right| \xrightarrow{\mathcal{F}} - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} V^{\mu_\beta}(x) + \tilde{\varkappa}_B, \quad x \in \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} E_\alpha \right\} \setminus \left\{ \bigcup_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} E_\beta \right\} \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получаем (1.38). Действительно, для любого $\alpha \in (A, B)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}} V^{\mu_\beta}(x) + \tilde{\varkappa}_A \\ & + \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B+}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} V^{\mu_\beta}(x) \begin{cases} = \tilde{\varkappa}_B, & x \in S(\mu_\alpha), \\ \geq \tilde{\varkappa}_B, & x \in E_\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}} V^{\mu_\beta}(x) + \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B+}} V^{\mu_\beta}(x) \\ & = 2 \sum_{\beta \in (A, B)} V^{\mu_\beta}(x) + \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B-}, \beta \notin (A, B)} V^{\mu_\beta}(x) + \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}, \beta \notin (A, B)} V^{\mu_\beta}(x) \\ & - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A-}} V^{\mu_\beta}(x) - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{B+}} V^{\mu_\beta}(x) \begin{cases} = \tilde{\varkappa}_B, & x \in S(\mu_\alpha), \\ \geq \tilde{\varkappa}_B, & x \in E_\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Наконец, в силу единственности решения задачи равновесия (1.38) получаем единственность предельной точки последовательности дискретных мер. Отсюда вытекает справедливость теоремы 1.2.

§ 4. Матричная задача Римана–Гильберта и доказательство теоремы 1.3

В этом параграфе мы докажем теорему 1.3. В основе доказательства лежит нахождение приближенного (при $n \rightarrow \infty$) решения матричной краевой задачи (Римана–Гильберта), эквивалентной определению аппроксимаций Эрмита–Паде (1.22):

$$R_{\vec{n},A} := P_{\vec{n}} \hat{\mu}_A - Q_{\vec{n},A} = O(z^{-n_A-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad \vec{n} := \{n_B = n, B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}, \quad (4.1)$$

где многочлен $P_{\vec{n}} \neq 0$ имеет степень $\deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| = \sum_{B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} n_B$, а $Q_{\vec{n},A}$ – некоторые многочлены.

Переформулировка определения совместно ортогональных многочленов в терминах матричной задачи Римана–Гильберта была предложена в [34], в частности, для систем Анжелеско (1.10), (1.11). В настоящей работе мы адаптируем для аппроксимаций Эрмита–Паде обобщенных систем Никишина матричную краевую задачу предложенную в [27]. Нахождение приближенных (при $n \rightarrow \infty$) решений матричных задач Римана–Гильберта размера 2×2 методом наискорейшего спуска впервые было продемонстрировано в [35]. В настоящей работе эта методика распространена на матричные краевые задачи произвольного размера $\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{V} = (p+1) \times (p+1)$. Мы используем новые приемы, касающиеся высокого размера матриц, разработанные в [23] для краевых задач размера 3×3 , а также методические разработки [36] для контроля эффектов, возникающих при положительном роде соответствующих римановых поверхностей.

4.1. Постановка матричной задачи Римана–Гильберта. Введем следующие обозначения для мультииндексов (см. (4.1)):

$$\begin{aligned} n^{(O)} &:= \vec{n} = \{n_B = n, B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}, \\ n^{(A)} &:= \{n_A = n-1, n_B = n, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \setminus A\}. \end{aligned}$$

Нормальность индекса $n^{(O)}$ эквивалентна тому, что $\deg P_{n^{(O)}}(z) = |n^{(O)}|$, т.е. многочлен может быть нормирован как в (1.64), т.е.

$$P_{n^{(O)}}(z) = z^{|n^{(O)}|} + \dots = z^{pn} + \dots, \quad (4.2)$$

и можно показать, что в этом случае $R_{n^{(A)},A}$ имеет в бесконечности нуль порядка n , что, в свою очередь (см. предложение 3.1), для функций второго рода¹ $\Psi_{n^{(A)},A}$

$$\Psi_{\vec{n},O} = P_{\vec{n}}, \quad \Psi_{\vec{n},A}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{B \in A_-} \sum_{\alpha \in (B,A)} \int \frac{\Psi_{\vec{n},B}(t) d\sigma_{\alpha}(t)}{t-x}$$

эквивалентно наличию в бесконечности нуля порядка n . Положим

$$c_O := 1, \quad c_A : \lim_{z \rightarrow \infty} c_A \Psi_{n^{(A)},A}(z) z^n = 1, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (4.3)$$

Упорядочим произвольным образом последовательность элементов множества $\{A\}_{A \in \mathcal{V}}$. Рассмотрим матричнозначную функцию

$$Y(z) := \{Y_{AB}(z)\}_{A,B \in \mathcal{V}}$$

размера $(p+1) \times (p+1)$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$Y_{AB} := c_A \Psi_{n^{(A)},B}, \quad A, B \in \mathcal{V}. \quad (4.4)$$

По формулам Сохоцкого имеем (предполагая отрезки ориентированными от a_{α} к b_{α})

$$\Psi_{\vec{n},A+}(x) - \Psi_{\vec{n},A-}(x) = \Psi_{\vec{n},B}(x) \rho_{\alpha}(x), \quad x \in E_{\alpha} := (a_{\alpha}, b_{\alpha}), \quad \alpha \in (B, A).$$

¹ нам удобно сменить нормировку в (1.25).

Таким образом, (с учетом (4.2) и (4.3)) функция Y является единственным решением следующей краевой задачи:

1) $Y(z)$ – матричнозначная функция размера $(p+1) \times (p+1)$, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus E$ ($E := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} E_\alpha$), имеющая непрерывные граничные значения слева и справа на $\overset{\circ}{E} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} \overset{\circ}{E}_\alpha$, связанные матрицей скачка J , определенной в п. 2) (см. ниже). Функция $Y(z)$ ведет себя в бесконечности так, как описано в п. 3). Поведение $Y(z)$ в окрестности концевых точек E_α задается в п. 4).

2) Функция $Y(z)$ имеет мультипликативный скачок на E в виде $Y_+ = Y_- W$, где элементы матрицы W на каждом E_α , $\alpha \in \mathcal{E}$ определяются по правилу

$$W_{AB}|_{E_\alpha} =: W_{AB}^\alpha(x) := \begin{cases} \rho_\alpha(x), & \text{если } \alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}, \\ 1, & \text{если } A = B, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.5)$$

3) Функция $Y(z)$ ведет себя в окрестности бесконечности как диагональная матрица D , т.е.

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) D(z), \quad (4.6)$$

где

$$D_{OO}(z) = z^{pn}, \quad D_{AA}(z) = z^{-n}, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}.$$

4) Функция $Y(z)$ имеет следующее поведение в окрестности концевых точек множества E . Пусть точка a – концевая точка отрезка E_α , $\alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}$, тогда столбец матрицы Y , соответствующий индексу C , при $z \rightarrow a$ ведет себя как

$$Y_{AC}(z) = \begin{cases} O(\kappa(z)), & \text{если } C = B, \\ O(1), & \text{если } C \neq B, \end{cases} \quad (4.7)$$

где (см. обозначения (1.42)) при $a \in \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}$

$$\kappa(z) = \begin{cases} |z - a|^{\delta(a)}, & \text{если } -1 < \delta(a) < 0, \\ \log |z - a|, & \text{если } \delta(a) = 0, \\ 1, & \text{если } \delta(a) > 0, \end{cases}$$

и при $a \notin \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}$ выполнено равенство $\kappa(z) = 1$.

Наша цель – найти приближенное решение этой краевой задачи при $n \rightarrow \infty$. Для этого с помощью серии эквивалентных преобразований мы перейдем от краевой задачи для матрицы-функции Y к краевой задаче для матрицы-функции $\mathcal{J} \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, $\mathcal{J}(\infty) = 1$, у которой скачок на линиях разрыва Σ равномерно при $n \rightarrow \infty$ стремится к единичной матрице

$$\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_- \tilde{I}_n \text{ на } \Sigma, \quad \tilde{I}_n \rightrightarrows I, \quad n \rightarrow \infty.$$

Стандартные рассуждения (см. [30]) позволяют заключить, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{J} \rightrightarrows I \text{ в } \bar{\mathbb{C}}. \quad (4.8)$$

Обращая проведенные преобразования и возвращаясь к матрице Y , мы в силу (4.4) из (4.8) получим асимптотические формулы для $P_{\vec{n}}$ и $\Psi_{\vec{n}, A}$, $A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}$.

4.2. Риманова поверхность и нормировка краевой задачи Римана–Гильберта в бесконечности. Важную роль для построения последовательности преобразований начальной краевой задачи для функции Y (см. (4.4)) в краевую задачу для функции $\mathcal{J}$ (см. (4.8)) играет введенная в п. 1.4 риманова поверхность $\mathfrak{R}$ (см. (1.45)).

Уточним расположение проекций $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ циклов (1.46) на $\mathbb{C}$. При обходе g^* отрезков $\{E_j^*\}_{j=1}^{g^*} \subset \{E_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}$ (зафиксированных выбором циклов $\mathbf{b}_{\mathfrak{R}}$ (см. (1.47)) соответствующие ветви $\{\Phi_A(z)\}_{A \in \mathcal{V}}$ – экспоненты абелевого интеграла Φ (см. (1.50)) имеют нетривиальные периоды (см. (1.51)). Следовательно, ветви Φ претерпевают скачки при пересечении проекции $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}} := \{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^{g^*}$ циклов. Поэтому это множество разрывов $\{\Phi_A(z)\}_{A \in \mathcal{V}}$ в $\mathbb{C}$ может быть представлено в виде

$$\tilde{a} := \bigcup_{j=1}^{g^*} \tilde{a}^{(j)} := \bigcup_{j=1}^{g^*} \bigcup_k \tilde{a}_k^{(j)}, \quad (4.9)$$

где $\tilde{a}_k^{(j)}$ – жорданова дуга в верхней полуплоскости, соединяющая пару отрезков из E^* , причем на каждом $\tilde{a}_k^{(j)}$ претерпевают разрыв две различные ветви $\Phi_{A(k)}$ и $\Phi_{B(k)}$, ($A \neq B$). Таким образом, для фиксированного j нами определены функции $\rho^\pm$

$$A = \rho^+(k), \quad B = \rho^-(k) \quad (4.9_1)$$

так, что часть $\mathbf{a}_j$ цикла с листа $\mathfrak{R}_A$ проектируется в $\tilde{a}_k^{(j)}$ с сохранением ориентации, а соответствующая часть $\mathbf{a}_j$ с листа $\mathfrak{R}_B$ переходит туда же в $\tilde{a}_k^{(j)}$ со сменой ориентации.

Обозначим через $\tilde{C}$ и $\tilde{\Phi}$ две диагональные матрицы (см. (1.50)):

$$\tilde{C} := \text{diag}\{C_A^n\}_{A \in \mathcal{V}}, \quad \tilde{\Phi}(z) := \text{diag}\{\Phi_A^n(z)\}_{A \in \mathcal{V}}.$$

Определим матрицу-функцию

$$Z := \tilde{C}Y\tilde{\Phi}. \quad (4.10)$$

Матрица Z является решением следующей краевой задачи:

- 1) $Z(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (E \cup \tilde{a}))$;
- 2) $Z_+ = Z_- J$ на $E \cup \tilde{a}$, где элементы матрицы скачка $\{J_{AB}(z)\}_{A, B \in \mathcal{V}}$, на отрезках E_α^* , $\alpha \in \mathcal{E}$ таковы:

$$J_{AB} = \begin{cases} w_\alpha, & \text{для } A, B : \alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}^*, \\ \frac{\Phi_{A,+}^n}{\Phi_{A,-}^n}, & \text{если } A = B \in \mathcal{V}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.10_1)$$

на множестве $E_\alpha \setminus S(\lambda_\alpha)$ скачок имеет следующий вид:

$$J_{AB} = \begin{cases} \rho_\alpha \frac{\Phi_B^n}{\Phi_A^n}, & \text{для } A, B : \alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}, \\ 1, & \text{если } A = B \in \mathcal{V}, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и на $\tilde{a}_k^{(j)}$ (см. (4.9)) скачок J есть диагональная матрица с двумя ненулевыми элементами J_{AA} и J_{BB} , $A(k) \neq B(k)$:

$$J_{AA} = \frac{\Phi_{A,+}^n}{\Phi_{A,-}^n} = e^{2\pi i n \omega_j}, \quad J_{BB} = \frac{\Phi_{B,+}^n}{\Phi_{B,-}^n} = e^{-2\pi i n \omega_j}, \quad j = 1, \dots, g^*;$$

3) $Z(z) = I + O(1/z)$, $z \rightarrow \infty$;

4) поведение в концевых точках E соответствует (4.7) и характеру ветвлений у Φ .

4.3. “Раскрытие локальных линз”. Наряду с каждым отрезком E_α^* рассмотрим две гладкие кривые E_α^{*+} и E_α^{*-} , концы которых совпадают с концами E_α^* , а сами они расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Обозначим через $L_\alpha^{(+)}$ (соответственно через $L_\alpha^{(-)}$) “линзообразную”, область между E_α^* и E_α^{*+} (соответственно между E_α^* и E_α^{*-}). Для всех ребер α графа $\mathcal{G}^*(\mathcal{V}, \mathcal{E}^*, O)$ рассмотрим матричные функции $D_\alpha(z)$, $\alpha \in \mathcal{E}^*$ с элементами:

$$D_{\alpha,BA} = \begin{cases} \frac{1}{w_\alpha(x)} \frac{\Phi_A^n}{\Phi_B^n}, & \text{для } A, B : \alpha \in (A, B), \\ 1, & \text{если } A = B, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Введем матричную функцию $\hat{Z}$:

$$\hat{Z}(z) = \begin{cases} ZD_\alpha^{-1} & \text{в } L_\alpha^{(+)}, \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ ZD_\alpha & \text{в } L_\alpha^{(-)}, \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ Z & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Матрица $\hat{Z}$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$, а ее скачок $\hat{Z}_+ = \hat{Z}_- \hat{J}$ на

$$\Sigma := (E \cup \tilde{a}) \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} E_\alpha^{*+} \cup E_\alpha^{*-},$$

имеет вид

$$\hat{J} = \begin{cases} D_\alpha & \text{на } E_\alpha^{*+} \cup E_\alpha^{*-}, \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ \widetilde{W}_\alpha & \text{на } E_\alpha^*, \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ J & \text{на } (E \cup \tilde{a}) \setminus E^*, \end{cases} \quad (4.12_1)$$

где $E^* := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} E_\alpha^*$, а матрица $\widetilde{W}_\alpha$ имеет блочную структуру,

$$\widetilde{W}_{\alpha,AB}(x) = \begin{cases} w_\alpha(x), & \text{для } A, B : \alpha \in (A, B), \\ -\frac{1}{w_\alpha(x)}, & \text{для } A, B : \alpha \in (B, A), \\ 1, & \text{если } A = B, \alpha \notin \mathcal{E}_{A-}^* \cup \mathcal{E}_{A+}^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Тот факт, что на контурах $\tilde{a}$ скачок одинаков как внутри линз, так и вне, следует из тождества $JD_+ = D_-J$ на $\tilde{a}$. Отметим, что при преобразовании $Z \rightarrow \hat{Z}$, нормировка в бесконечности сохраняется, т.е.

$$\hat{Z}(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

4.4. Предельная внешняя краевая задача. Обращаясь к явному виду (4.11) скачка D_α на внешней границе линз $E_\alpha^{*+} \cup E_\alpha^{*-}$ при $\alpha \in \mathcal{E}^*$, мы видим (с учетом а) из (1.43)), что вне концевых точек этот скачок стремится к единичной матрице при $n \rightarrow \infty$. То же самое (ввиду (1.38), (1.49) и а) из (1.43))

можно утверждать о скачке J на $E \setminus E^*$. Поэтому для перехода от краевой задачи для функции $\widehat{Z}$ из (4.12) к краевой задаче для функции $\mathcal{J}$ из (4.8) решим следующую предельную краевую задачу:

$$X : \begin{cases} X \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{E^* \cup \tilde{a}\}), \\ X_+ = X_- \begin{cases} \widetilde{W}_\alpha & \text{на } E_\alpha^*, \\ J & \text{на } \tilde{a}, \end{cases} \\ X(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.14)$$

Здесь, напомним, матрица $\widetilde{W}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{E}^*$, задана в (4.13), а скачок на проекции $\mathbf{a}_\mathfrak{R}$ -циклов (см. (4.9)) есть

$$J|_{\tilde{a}_k^{(j)}} := J_k^{(j)} := \text{diag}\{\tau_C^{(j,k)}\}_{C \in \mathcal{V}}, \quad j = 1, \dots, g^*,$$

где

$$\tau_C^{(j,k)} := \begin{cases} e^{2\pi i n \omega_j} & \text{для } C = \rho^+(k), \\ e^{-2\pi i n \omega_j} & \text{для } C = \rho^-(k), \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Решение этой задачи и составляет ключевой (новый) момент в получении и доказательстве асимптотических формул теоремы 1.3.

4.4.1. *Функция Сеге (решение краевой задачи (1.59)).* Пусть $d\widehat{\omega}_{\xi_1\xi_2}(\zeta)$ – дифференциал Коши (см. [29]), однозначный на $\widehat{\mathfrak{R}} := \mathfrak{R} \setminus \mathbf{a}_\mathfrak{R}$, с простыми полюсами в точках ξ_1, ξ_2 и вычетами в них соответственно $+1$ и -1 ,

$$\frac{d}{d\zeta} \widehat{\omega}_{\xi_1\xi_2}(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta - \xi_1} + O(1), & \zeta \rightarrow \xi_1, \\ \frac{-1}{\zeta - \xi_2} + O(1), & \zeta \rightarrow \xi_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Введем ряд обозначений. Функция $S: \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{V}$ ставит в соответствие точке римановой поверхности номер листа, на котором она находится, т.е.

$$S(\xi) = B \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in \mathfrak{R}_B.$$

Также обозначим через $\widetilde{\xi}^{(A)}$ точку $\mathfrak{R}_A$, имеющую ту же проекцию на $\overline{\mathbb{C}}$, что и точка ξ , но лежащую на другом листе $A \neq S(\xi)$, т.е.

$$\widetilde{\xi}^{(A)}(\xi) : \quad \xi \in \mathfrak{R}, \quad \widetilde{\xi}^{(A)} \in \mathfrak{R}_A : \quad \pi(\xi) = \pi(\widetilde{\xi}^{(A)}), \quad \xi \neq \widetilde{\xi}.$$

Определим на $\mathfrak{R}$ мероморфный дифференциал по формуле

$$dM_\xi(\zeta) := \sum_{A \in \mathcal{V} \setminus S(\xi)} d\widehat{\omega}_{\xi \widetilde{\xi}^{(A)}}(\zeta). \quad (4.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Кусочно голоморфная на $\widehat{\mathfrak{R}} \setminus \partial\mathfrak{R}(E^*)$ функция*

$$\mathcal{F}(\xi) := \exp\left\{ \frac{1}{(p+1)2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{R}(E^*)} \ln \widetilde{w}(\zeta) dM_\xi(\zeta) \right\}, \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{R}} \setminus \partial\mathfrak{R}(E^*), \quad (4.17)$$

является решением краевой задачи (1.59), а ее $\mathbf{b}_\mathfrak{R}$ -периоды (1.60) равны

$$c_w^{(j)} := -\frac{p}{(p+1)2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{R}(E^*)} \ln \widetilde{w}(\zeta) d\Omega_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, g. \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала напомним обозначения в (4.17), (4.18). Функция $\tilde{w}$ есть “тригонометрический” вес (1.57), $\{d\Omega_j(\zeta)\}_{j=1}^g$ – базис нормированных голоморфных (1-го рода) абелевых дифференциалов (1.52), $\partial\mathfrak{R}(E^*) := (\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \partial\mathfrak{R}_\alpha)$ и $(p+1) = \#\mathcal{V}$. Таким образом, (4.17) определяет функцию Сеге векторного веса w (см. (1.42)), рассматриваемого на E^* (см. (1.41)).

Докажем, что (4.17) и (4.18) удовлетворяют следующим основным свойствам краевой задачи (1.59):

$$\begin{cases} 1) \prod_{A \in \mathcal{V}} \mathcal{F}_A(z) \equiv 1, & z \in \bar{\mathbb{C}}, \\ 2) \mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_- \tilde{w}_\alpha \text{ на } \partial\mathfrak{R}_\alpha, & \alpha \in \mathcal{E}^*, \\ 3) \mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_- e^{2\pi i c_w^{(j)}} \text{ на } \mathbf{a}_j, & j = 1, \dots, g. \end{cases}$$

Свойство 1) справедливо, так как у дифференциала

$$dM_\xi(\zeta) + \sum_{A \in \mathcal{V} \setminus S(\xi)} dM_{\tilde{\xi}^{(A)}}(\zeta), \quad \zeta \in \hat{\mathfrak{R}}$$

все вычеты равны нулю (см. (4.15), (4.16)).

Докажем свойство 2). Из (4.17) с учетом 1) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{R}(E^*)} \ln \tilde{w}(\zeta) dM_\xi(\zeta) = p \ln \mathcal{F}(\xi) - \sum_{A \in \mathcal{V} \setminus S(\xi)} \ln \mathcal{F}(\tilde{\xi}^{(A)}) = (p+1) \ln \mathcal{F}(\xi).$$

Подставляя в левую часть выражение

$$\ln \tilde{w}_\alpha = \ln \mathcal{F}_+ - \ln \mathcal{F}_-,$$

справедливое на $\partial\mathfrak{R}_\alpha$, с помощью формул Сохоцкого (или по теореме Коши о вычетах) получаем тождество, доказывающее 2).

Свойство 3) следует из известного соотношения Римана (см. [29]):

$$t \in \mathbf{a} \Rightarrow d\hat{w}_{t+p}(\zeta) - d\hat{w}_{t-p}(\zeta) = -2\pi i d\Omega_k(\zeta), \quad k = 1, \dots, g.$$

4.4.2. *Предельная внешняя задача с не зависящими от веса скачками на E^* (постановка).* Пусть

$$F(z) := \text{diag}\{\mathcal{F}_A(z)\}_{A \in \mathcal{V}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad F_\infty := F(\infty). \quad (4.19)$$

Определим функцию (см. (4.14))

$$\tilde{X} := F_\infty^{-1} X F. \quad (4.20)$$

Тогда для этой функции получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \tilde{X} \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{E^* \cup \tilde{a}\}), \\ \tilde{X}_+ = \tilde{X}_- H \text{ на } E^* \cup \tilde{a}, \\ \tilde{X}_\infty = I. \end{cases} \quad (4.21)$$

Для матрицы скачка H на E^* имеем

$$H|_{E_\alpha^*} = F_-^{-1} \tilde{W}_\alpha F_+ =: \{H_{\alpha, AB}\}_{A, B \in \mathcal{V}}, \quad \alpha \in \mathcal{E}^*,$$

с учетом граничных свойств компонент векторной функции Сеге при $x \in E_\alpha^*$ получаем

$$H_{\alpha,AB}(x) := \begin{cases} w_\alpha(x) \frac{\mathcal{F}_{B+}(x)}{\mathcal{F}_{A-}(x)} = \frac{w_\alpha(x)}{\tilde{w}_\alpha(x)} & \text{для } A, B : \alpha \in (A, B), \\ \frac{(-1)}{w_\alpha(x)} \frac{\mathcal{F}_{A+}(x)}{\mathcal{F}_{B-}(x)} = -\frac{\tilde{w}_\alpha(x)}{w_\alpha(x)} & \text{для } A, B : \alpha \in (B, A), \\ 1, & \text{если } A = B, \quad \alpha \notin \mathcal{E}_{A-}^* \cup \mathcal{E}_{A+}^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.22)$$

где, вспоминая обозначение для “тригонометрических” весов (1.57), имеем

$$\frac{w_\alpha}{\tilde{w}_\alpha} := \begin{cases} -i(\tilde{h}_B^0)_-, & \alpha \in (O, B), \\ -\frac{(\tilde{h}_B^0)_-}{\tilde{h}_A^0}, & \alpha \in (A, B), \quad A \neq O. \end{cases} \quad (4.23)$$

Для матрицы скачка H на $\tilde{a}$ имеем при $j = 1, \dots, g^*$

$$H|_{\tilde{a}_k^{(j)}} := \text{diag}\{\zeta_C^{(j,k)}\}_{C \in \mathcal{V}}, \quad \zeta_C^{(j,k)} := \begin{cases} e^{2\pi i(n\omega_j + c_w^{(j)})} & \text{для } C = \rho^+(k), \\ e^{-2\pi i(n\omega_j + c_w^{(j)})} & \text{для } C = \rho^-(k), \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Итак, мы свели нашу задачу (4.14) к задаче (4.21)–(4.24), у которой скачок через отрезки E^* описывается стандартной (не зависящей от веса w) функцией $h^0 := \{h_A^0\}_{A \in \mathring{\mathcal{V}}}$, а скачок через проекцию $\mathbf{a}_{\mathfrak{A}}$ -цикла есть константа на каждой $\pi(\mathbf{a}_j)$, $j = 1, \dots, g^*$.

Для решения этой задачи мы сначала построим функцию, которая имеет скачок H на E^* и не “рвется” на $\tilde{a}$. Затем с помощью тэта-функции Римана, которая голоморфна на $\mathfrak{R}$ (см. (1.54)), т.е. не “рвется” на $\mathbf{b}_{\mathfrak{A}}$ -циклах, добьемся выполнения граничных условий на $\tilde{a}$.

4.4.3. Предельная внешняя задача с не зависящими от веса скачками (решение вспомогательной задачи). Напомним (см. (1.61)), что множество $\{\zeta_l^*\}_{l=1}^{g^*}$ обозначает точки на $\mathfrak{R}$, получающиеся поднятием всех конечных нулей производных функций Грина (1.56) для областей $\Omega_{A-} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\beta \in A-} E_\beta^*$, $A \in \mathring{\mathcal{V}}$, на соответствующие (т.е. на $\mathfrak{R}_A$) листы римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

1. Определим на $\mathfrak{R}$ набор однозначных рациональных функций $\{\chi^{(A)}\}_{A \in \mathring{\mathcal{V}}}$, кратных дивизору:

$$\chi^{(A)} \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}) : \quad \frac{(\in^{(O)})}{(\in^{(A)} \zeta_1^* \dots \zeta_g^*)} \Big| \chi^{(A)}, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}}, \quad (4.25)$$

т.е. мы зафиксировали $g^* + 1$ полюс (один в точке $\in^{(A)}$ и g полюсов $\{\zeta_l^*\}_{l=1}^{g^*}$) и один нуль в точке $\in^{(O)}$. Остальные g^* нулей займут какие-то предписанные позиции, чтобы χ была однозначной на $\mathfrak{R}$. Обозначим эти нули через $\{\zeta_l^{(A)}\}_{l=1}^{g^*}$. Таким образом,

$$\chi^{(A)}(\zeta_l^{(A)}) = 0, \quad l = 1, \dots, g^*. \quad (4.26)$$

Такие функции существуют с точностью до умножения на константу, которую мы фиксируем условием:

$$\chi^{(A)}(\xi) = \xi + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty^{(A)}. \quad (4.27)$$

2. Решим вспомогательную задачу, положив в (4.21) скачок $H|_{\tilde{a}} := I$, т.е. найдем функцию $\tilde{\tilde{X}}$ такую, что

$$\tilde{\tilde{X}} : \quad \begin{cases} \tilde{\tilde{X}} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E^*), \\ \tilde{\tilde{X}}_+ = \tilde{\tilde{X}}_- H \text{ на } E^*, \\ \tilde{\tilde{X}}(\infty) = I. \end{cases} \quad (4.28)$$

Положим (см. обозначение (1.58))

$$\tilde{\tilde{X}} := \{x_{AB}\}_{A,B \in \mathcal{V}} : \quad (4.29)$$

$$x_{OO} := 1, \quad x_{AO} := i\chi_O^{(A)}, \quad x_{OB} := ih_B^0, \quad x_{AB} := -h_B^0 \chi_B^{(A)}, \quad A, B \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}.$$

Условие голоморфности и нормировка в точке ∞ для (4.29) следует из определения функций h_A^0 (см. (1.57), (1.58)) и $\chi^{(A)} = \{\chi_B^{(A)}\}_{B \in \mathcal{V}}$, (см. (4.25)–(4.27)).

3. Проверим граничные условия на E_α^* , $\alpha \in (A, B)^* \subset \mathcal{E}^*$. При $\alpha \in (O, B)^*$ имеем

$$\forall C \in \mathcal{V} \quad \longrightarrow \quad x_{CO+} = x_{CB-} \left(\frac{-i}{h_{B-}^0} \right), \quad x_{CB+} = x_{CO-} (-ih_{B-}^0).$$

Подставляя сюда (4.29), получаем

$$\begin{aligned} C = O & \longrightarrow 1 = -ih_{B-}^0 \left(\frac{-i}{h_{B-}^0} \right), \quad ih_{B+}^0 = 1 \cdot (-i)(-h_{B+}^0), \\ C \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} & \longrightarrow i\chi_{O+}^{(C)} = -h_{B-}^0 \chi_{B-}^{(C)} \left(\frac{-i}{h_{B-}^0} \right), \quad -h_{B+}^0 \chi_{B+}^{(C)} = i\chi_{O-}^{(C)} (-i)(-h_{B+}^0). \end{aligned}$$

Аналогично, при $\alpha \in (A, B)$, $A \neq O$, имеем

$$\forall C \in \mathcal{V} \quad \longrightarrow \quad x_{CA+} = x_{CB-} \left(\frac{h_A^0}{h_{B-}^0} \right), \quad x_{CB+} = x_{CA-} \left(\frac{-h_{B-}^0}{h_A^0} \right).$$

Подставляя сюда (4.29), получаем

$$\begin{aligned} C = O & \longrightarrow ih_{A+}^0 = ih_{B-}^0 \left(\frac{h_A^0}{h_{B-}^0} \right), \quad ih_{B+}^0 = ih_A^0 \left(\frac{h_{B+}^0}{h_A^0} \right), \\ C \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} & \longrightarrow -h_{A+}^0 \chi_{A+}^{(C)} = -h_{B-}^0 \chi_{B-}^{(C)} \left(\frac{h_A^0}{h_{B-}^0} \right), \quad -h_{B+}^0 \chi_{B+}^{(C)} = -h_A^0 \chi_{A-}^{(C)} \left(\frac{h_{B+}^0}{h_A^0} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{\tilde{X}}$ из (4.29) является решением вспомогательной краевой задачи (4.28).

4.4.4. *Решение предельной внешней краевой задачи.* Модифицируем функцию $\tilde{\tilde{X}}$ (см. (4.29)) так, чтобы при сохранении прочих свойств задачи (4.28) преобразованная функция приобрела постоянные скачки H на проекциях $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ -циклах $\tilde{a}$ (см. (4.24)):

$$H|_{\tilde{a}_k^{(j)}} := \text{diag}\{\varsigma_C^{(j,k)}\}_{C \in \mathcal{V}}, \quad \varsigma_C^{(j,k)} := \begin{cases} e^{2\pi i c_{n,w}^{(j)}} & \text{для } C = \rho^+(k), \\ e^{-2\pi i c_{n,w}^{(j)}} & \text{для } C = \rho^-(k), \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $j = 1, \dots, g^*$ и (см. (1.51), (1.63), (4.18))

$$\vec{c}_{n,w} := (n\omega_1 + c_w^{(1)}, \dots, n\omega_g + c_w^{(g^*)}) =: (c_{n,w}^{(1)}, \dots, c_{n,w}^{(g^*)}).$$

Такое преобразование можно осуществить с помощью тэта-функции (1.53) римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

Определим (см. (1.55)) векторы констант e^A , $A \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} e^O : \quad \Theta^{(e^O)}(\zeta_l^*) &= 0, \\ e^A : \quad \Theta^{(e^A)}(\zeta_l^{(A)}) &= 0, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad l = 1, \dots, g^*, \quad (4.30)$$

так, чтобы тэта-функция $\Theta^{(e^O)}$ обращалась в нуль в точках (1.61) – “поднятиях” на $\mathfrak{R}$ конечных нулей производных функций Грина (1.56) для областей Ω_{A-} , $A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ и, соответственно, чтобы $\Theta^{(e^A)}$ обращалась бы в нуль в конечных нулях (4.26) рациональной на $\mathfrak{R}$ функции $\chi^{(A)}$, $A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ (см. (4.25)).

Рассмотрим набор мероморфных функций на $\widehat{\mathfrak{R}}$ (см. (1.53)):

$$T^{(A)}(\zeta) := \frac{\Theta^{(e^A - \vec{c}_{n,w})}(\zeta)}{\Theta^{(e^A)}(\zeta)}, \quad \zeta \in \widehat{\mathfrak{R}}, \quad A \in \mathcal{V}. \quad (4.31)$$

Удобство рассмотрения отношений тэта-функции заключается в том, что на $\mathbf{a}_{\mathfrak{R}}$ -циклах аргумент отношения претерпевает постоянный скачок (см. [28], [29]):

$$T_+^{(A)} = T_-^{(A)} e^{2\pi i c_{n,w}^{(j)}} \quad \text{на } \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, g^*, \quad A \in \mathcal{V}. \quad (4.32)$$

Пусть

$$T_\infty := \text{diag}\{T_A^{(A)}(\infty)\}_{A \in \mathcal{V}} \quad (4.33)$$

– диагональная матрица констант. Здесь нижний индекс (как обычно) обозначает ветвь функции (т.е. с какого листа $\mathfrak{R}$ берутся значения).

Теперь мы можем определить решение задачи (4.21). Пусть

$$\widehat{X} := \{\widehat{x}_{AB}\}_{A,B \in \mathcal{V}} : \quad \widehat{x}_{AB} := T_B^{(A)} x_{AB}, \quad A, B \in \mathcal{V},$$

где x_{AB} – элементы матрицы-функции $\tilde{\tilde{X}}$ (см. (4.29)), а $\{T_B^{(A)}\}_{B \in \mathcal{V}}$ – ветви отношения тэта-функций (4.31). Рассмотрим функцию

$$\tilde{X}(z) := T_\infty^{-1} \widehat{X}. \quad (4.34)$$

Проверим, что она является решением задачи (4.21). Первое условие (голоморфность) следует из (4.30), (4.25). Третье условие (нормировка) есть следствие (4.33) и 3) в (4.28).

Проверим скачки. Сначала на $\tilde{a} := \bigcup_{j=1}^{g^*} \bigcup_k \tilde{a}_k^{(j)}$ (обозначение см. в (4.9)). На $\tilde{a}_k^{(j)}$ имеем

$$\tilde{X}_+ := T_\infty^{-1} \{x_{AB} T_{B+}^{(A)}\}_{A,B \in \mathcal{V}} = T_\infty^{-1} \{x_{AB} T_{B-}^{(A)} \varsigma_B^{(j,k)}\}_{A,B \in \mathcal{V}},$$

где мы использовали (4.32), обозначение (4.24) и тот факт, что при $B = \rho^-(k)$ проекция части **a**-цикла с листа $\mathfrak{R}_B$ на $\mathbb{C}$ меняет ориентацию. Таким образом, получили, что

$$\tilde{X}_+ := \tilde{X}_- \operatorname{diag}\{\varsigma_B^{(j,k)}\}_{B \in \mathcal{V}} \quad \text{на } \tilde{a}_k^{(j)} \subset \mathbb{C}.$$

Теперь рассмотрим скачок на E^* (проекции **b**-цикла). Функции $T^{(A)}$ (см. (4.31)) на **b**-циклах непрерывны (как и $\chi^{(A)}$, см. (4.25)), т.е.

$$T_{B\pm}^{(A)} = T_{C\mp}^{(A)}, \quad \chi_{B\pm}^{(A)} = \chi_{C\mp}^{(A)} \quad \text{на } E_\alpha^*, \quad \alpha \in (B, C).$$

Так как функция T входит в матрицу $\tilde{X}$ (см. (4.34)) таким же образом, как и χ (см. (4.29)),

$$\begin{aligned} \hat{x}_{OO} &:= T_O^{(O)}, & \hat{x}_{OB} &:= ih_B^0 T_B^{(O)}, \\ \hat{x}_{AO} &:= i\chi_O^{(A)} T_O^{(A)}, & \hat{x}_{AB} &:= -h_B^0 \chi_B^{(A)} T_B^{(A)}, \end{aligned}$$

то скачок матрицы $\tilde{X}$ на E^* такой же, как и у матрицы $\tilde{\tilde{X}}$ (см. (4.28)).

Таким образом, (4.34) является решением задачи (4.21). Подытоживая, получаем, что функция

$$X := F_\infty \tilde{X} F^{-1}, \tag{4.35}$$

где F_∞ , F определены в (4.19), а $\tilde{X}$ – в (4.34), является решением внешней предельной краевой задачи (4.14).

4.5. Локальные краевые задачи. Вернемся к краевой задаче для функции $\hat{Z}$ (см. (4.12)). Так как скачки D_α (см. (4.11)) на $E_\alpha^{\pm*}$, $\alpha \in \mathcal{E}^*$, и J (см. краевую задачу для Z , определенной в (4.10)) на $E \setminus E^*$ не стремятся равномерно к единичной матрице в окрестности концевых точек отрезков E^* , то мы должны рассмотреть локальные краевые задачи в окрестности каждого из концов.

Пусть $e \in \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha := \alpha(e) \quad \Leftrightarrow \quad e = a_\alpha^* \quad \text{или} \quad e = b_\alpha^*.$$

Рассмотрим окрестность O_e точки e . Пусть

$$\begin{aligned} \Sigma_e &:= E_e^* \cup E_e^{*+} \cup E_e^{*-}, \\ E_e^* &:= E_{\alpha(e)}^* \cap O_e, \quad E_e^{\pm*} := E_{\alpha(e)}^{\pm*} \cap O_e, \quad E_e := (E \setminus E_e^*) \cap O_e. \end{aligned}$$

Нам требуются решения следующих двух локальных краевых задач.

Для

$$\begin{aligned} e \in \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \cap \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}} =: \{e\} &\longrightarrow \\ \begin{cases} U_e \in H^{(p+1) \times (p+1)}(O_e \setminus \Sigma_e), \\ U_{e_j+} = U_{e_j-} \hat{J} \quad \text{на } \Sigma_e, \\ U_{e_j} = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) X \text{ равномерно на } \partial O_{e_j} \text{ при } n \rightarrow \infty; \end{cases} &\tag{4.36} \end{aligned}$$

для

$$e \in \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \setminus \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}} =: \{e^*\} \longrightarrow \begin{cases} U_e \in H^{(p+1) \times (p+1)}(O_e \setminus \{\Sigma_e \cup E_e\}), \\ U_{e_j+} = U_{e_j-} \hat{J} \quad \text{на } \Sigma_e \cup E_e, \\ U_{e_j} = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) X \text{ равномерно на } \partial O_e \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.37)$$

где матрицы скачка $\hat{J}$ определены в (4.12₁) и элементы матрицы $U_e(z)$ имеют такое же предельное поведение, как и $\hat{Z}(z)$ при $z \rightarrow e$.

Отметим, что в силу условия (1.18) точки ветвления римановой поверхности $\mathfrak{R}$ являются квадратичными, поэтому матрицы решений локальных краевых задач (4.36), (4.37) будут состоять из двух блоков – блока размера 2×2 и единичной матрицы. Таким образом, решения краевых задач (4.36), (4.37) могут быть получены на основе известных решений соответствующих краевых задач для матриц размера 2×2 .

Анализ задачи (4.36), (4.37) зависит от поведения производной λ' равновесной меры (1.38) в окрестности концевой точки e . Известно (для концевой точки из $\{e^*\}$ см., например, [37]; случай $\{e\}$ анализируется аналогично), что

$$\lambda'(z) = (z - e)^{n-1/2} m(z), \quad m(z) \in \mathcal{H}(O_e), \quad m(e) \neq 0,$$

где n в зависимости от характера концевой точки принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} \{e\} &\Rightarrow n = 0, 1, 2, \dots, \\ \{e^*\} &\Rightarrow n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

При этом для основных (регулярных) случаев (случаев общего положения), когда

$$\{e\} \Rightarrow n = 0, \quad \{e^*\} \Rightarrow n = 1,$$

решения краевых задач (4.36), (4.37) для матриц размера 2×2 известны в явном виде (см. [38], [39]), а для остальных в (4.38) (сингулярных) случаев доказано существование решений (см. [38], [40]).

Приведем явные решения задач (4.36), (4.37) для регулярных случаев. Мы адаптируем соответствующие решения из [38] и [39] к нашим обозначениям и размерностям. Начнем с задачи (4.36).

Фиксируем

$$e \in \{e\} := \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \cap \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}},$$

что также фиксирует

$$\alpha \in \mathcal{E} : \quad \alpha := \alpha(e) \quad \text{и} \quad B, C \in \mathcal{V} : \quad \alpha \in (B, C).$$

Матрицы, представляющие решение U_e , имеют нетривиальный блок

$$U_e^{BC} := \begin{pmatrix} U_{e,BB} & U_{e,BC} \\ U_{e,CB} & U_{e,CC} \end{pmatrix}$$

размера 2×2 , а остальные элементы U_e таковы: на диагонали стоят единицы, а вне ее – нули. Блок U_e^{BC} имеет вид

$$U_e^{BC} = E_e^{BC} V_e^{BC} A_e^{BC},$$

где

$$A_e^{BC} = \text{diag} \left\{ \left(\frac{\Phi_B^{-n}}{\Phi_C^{-n}} w_\alpha^{1/2} \right)^{-1}, \frac{\Phi_B^{-n}}{\Phi_C^{-n}} w_\alpha^{1/2} \right\},$$

$$E_e^{BC} := \frac{1}{2} X^{BC} \text{diag}(w_\alpha^{1/2}, w_\alpha^{-1/2}) M_e \text{diag} \left(\sqrt{\pi n \varphi}, \frac{1}{\sqrt{\pi n \varphi}} \right).$$

Здесь X^{BC} – соответствующий блок матрицы (4.35) и

$$M_{a_\alpha} := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{b_\alpha} := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(z) = \log \left(\frac{\Phi_B(z)}{\Phi_C(z)} \right).$$

Для того, чтобы привести выражение для V_e^{BC} , введем матрицы

$$\Psi_{a_\alpha} := \begin{pmatrix} I_{\delta(a_\alpha)} \left(\frac{n\varphi}{2} \right) & \frac{i}{\pi} K_{\delta(a_\alpha)} \left(\frac{n\varphi}{2} \right) \\ n\pi i \varphi I'_{\delta(a_\alpha)} \left(\frac{n\varphi}{2} \right) & -n\varphi K'_{\delta(a_\alpha)} \left(\frac{n\varphi}{2} \right) \end{pmatrix},$$

и Ψ_{b_α} (такая же матрица, как и Ψ_{a_α} , но с заменой a_α на b_α и умножением второго столбца на -1). Здесь I, K – модифицированные функции Бесселя, а обозначение для показателей $\delta(e)$ см. в (1.42). Разобьем окрестность O_e на сектора $O_e^{(\pm)}$, ограниченные $\partial O_e^{(\pm)} := E_\alpha^{*\pm} \cap E_\alpha^*$, и сектор $O_e^* := O_e \setminus \{O_e^{(+)} \cup O_e^{(-)}\}$.

Теперь матрицы V_e^{BC} определяются в секторах $O_e^* \cup O_e^{(+)} \cup O_e^{(-)}$ по формулам:

$$V_{a_\alpha}^{BC} := \begin{cases} \Psi_{a_\alpha} & \text{в } O_{a_\alpha}^*, \\ \Psi_{a_\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\delta(a_\alpha)\pi i} & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_{a_\alpha}^{(+)}, \\ \Psi_{a_\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\delta(a_\alpha)\pi i} & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_{a_\alpha}^{(-)}, \end{cases}$$

$$V_{b_\alpha}^{BC} := \begin{cases} \Psi_{b_\alpha} & \text{в } O_{b_\alpha}^*, \\ \Psi_{b_\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\delta(b_\alpha)\pi i} & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_{b_\alpha}^{(+)}, \\ \Psi_{b_\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\delta(b_\alpha)\pi i} & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_{b_\alpha}^{(-)}. \end{cases}$$

Аналогично, для $e \in \{e^*\} := \{a_\alpha^*, b_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \setminus \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}}$ нетривиальный блок U_e^{BC} решения U_e задачи (4.37) имеет вид

$$U_e^{BC} = E_e^{BC} V_e^{BC} A_e^{BC},$$

где

$$A_e^{BC} := \text{diag} \left\{ \left(\frac{\Phi_B^{-n}}{\Phi_C^{-n}} w_\alpha^{1/2} \right)^{-1}, \frac{\Phi_B^{-n}}{\Phi_C^{-n}} w_\alpha^{1/2} \right\},$$

$$E_e^{BC} := -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/6} X^{BC} \text{diag}\{w_\alpha^{1/2}, w_\alpha^{-1/2}\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$\times \text{diag} \left\{ \left(\frac{3n}{2} \varphi \right)^{-1/6}, \left(\frac{3n}{2} \varphi \right)^{1/6} \right\},$$

Для того, чтобы привести выражение для V_e^{BC} , введем матрицы

$$\Psi_e := \begin{pmatrix} \text{Ai}\left(\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) & \text{Ai}\left(\epsilon_3^2\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) \\ \text{Ai}'\left(\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) & \epsilon_3^2 \text{Ai}'\left(\epsilon_3^2\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) \end{pmatrix} \tilde{\sigma},$$

$$\tilde{\Psi}_e := \begin{pmatrix} \text{Ai}\left(\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) & -\epsilon_3^2 \text{Ai}\left(\epsilon_3^2\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) \\ \text{Ai}'\left(\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) & -\text{Ai}'\left(\epsilon_3^2\left(\frac{3n}{2}\varphi\right)^{2/3}\right) \end{pmatrix} \tilde{\sigma},$$

где Ai – функция Айри и

$$\tilde{\sigma} := \text{diag}(e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/6}), \quad \epsilon_3 = e^{2\pi i/3}.$$

Разобьем сектор O_e^* на сектора $O_e^{*(\pm)}$, ограниченные $\partial O_e^{*(\pm)} := E_\alpha^{\pm} \cap E_e$.

Теперь матрицы V_e^{BC} определяются в секторах $O_e^{*(+)} \cup O_e^{*(-)} \cup O_e^{(+)} \cup O_e^{(-)}$ по формулам:

$$V_{b^*} := \begin{cases} \Psi_e & \text{в } O_e^{*(+)}, \\ \Psi_e \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_e^{(+)}, \\ \tilde{\Psi}_e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в } O_e^{(-)}, \\ \tilde{\Psi}_e & \text{в } O_e^{*(-)}. \end{cases}$$

4.6. Заключительное преобразование и асимптотические формулы. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{J} := \begin{cases} \hat{Z}X^{-1} & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} (O_{a_\alpha} \cup O_{b_\alpha}) \right\}, \\ \hat{Z}U_e^{-1} & \text{в } O_e, \quad e \in \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{E}^*}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Анализ задач для функций $\hat{Z}$, X и U_e (см. (4.12), (4.14) и (4.36), (4.37)) показывает, что

$$\mathcal{J} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\Sigma}), \quad \tilde{\Sigma} := \overset{\circ}{E}^{*\pm} \cup \partial \tilde{O} \cup \overset{\circ}{E},$$

где

$$\overset{\circ}{E}^{*\pm} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} \{(E_\alpha^{*+} \cup E_\alpha^{*-}) \setminus (O_{a_\alpha} \cup O_{b_\alpha})\}, \quad \partial \tilde{O} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} (\partial O_{a_\alpha} \cup \partial O_{b_\alpha}),$$

$$\overset{\circ}{E} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} (E_\alpha \setminus S(\lambda_\alpha)) \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}^*} (O_{a_\alpha} \cup O_{b_\alpha}).$$

Скачок на линиях разрыва равномерно при $n \rightarrow \infty$ стремится к единичной матрице

$$\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_- \tilde{I}_n \quad \text{на } \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{I}_n \rightrightarrows I, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, наконец, $J(\infty) = 1$.

Таким образом, наша цель (см. (4.8)) достигнута и мы заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{J} \rightrightarrows I \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}}. \quad (4.40)$$

Теперь обратим эквивалентные преобразования, приведшие от Y к $\mathcal{J}$. Подставляя (4.4) в (4.10) и далее в (4.12), получаем для

$$\widehat{Z} = \{\widehat{Z}_{A,B}\}_{A,B \in \mathcal{V}}$$

следующие результаты. Вне E^* имеем

$$\widehat{Z}_{A,B} = c_A \Psi_{n(A),B} C_A^n \Phi_B^n \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (L_{\alpha}^{(+)} \cup L_{\alpha}^{(-)}), \quad \alpha \in B_- \cup B_+. \quad (4.41)$$

Теперь рассмотрим окрестности внутренних точек E^* . Зафиксируем $E_{\alpha}^* \subset E^*$. Пусть $\alpha \in (C, D)$. Тогда (4.12), (4.13) дают в $L_{\alpha}^{(\pm)}$:

$$\widehat{Z}_{A,B} = \begin{cases} c_A \Psi_{n(A),B} C_A^n \Phi_B^n, & B \neq C, \\ c_A \Psi_{n(A),B} C_A^n \Phi_B^n \mp c_A \Psi_{n(A),D} C_A^n \Phi_D^n \frac{\Phi_B^n}{\Phi_D^n w_{\alpha}}, & B = C, \end{cases} \quad (4.42)$$

т.е. элементы C -го столбца матрицы $\widehat{Z}$ (см. (4.41)) в окрестностях внутренних точек отрезка E_{α}^* , $\alpha \in (C, D)$, принимают вид

$$\widehat{Z}_{A,C}(z) = c_A \Psi_{n(A),C}(z) C_A^n \Phi_C^n(z) \mp c_A \Psi_{n(A),D}(z) C_A^n \Phi_C^n(z) \frac{1}{w_{\alpha}(z)}, \quad z \in L_{\alpha}^{(\pm)}.$$

При этом отметим, что на отрезке E_{α}^* , $\alpha \in (C, D)$, функция $\Psi_{n(A),C}$ голоморфна, а функция $\Psi_{n(A),D}$ при подходе сверху и снизу принимает разные граничные значения.

Перейдем к асимптотике. Так как в силу (4.39), (4.40) имеем

$$\widehat{Z} = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) X, \quad n \rightarrow \infty,$$

то приходим к следующим асимптотическим формулам (вне E^*):

$$\begin{cases} P_n(z) = (C_O \Phi_O(z))^{-n} X_{OO}(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), & z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} \\ c_A \Psi_{n(A),B}(z) = (C_A \Phi_B(z))^{-n} X_{AB}(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), & z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{B+} \cup \mathcal{E}_{B-}} \end{cases}.$$

Также на рассматриваемом E_{α}^* , $\alpha \in (C, D)$, из (4.42) сразу следует, что

$$c_A \Psi_{n(A),D\pm}(z) = (C_A \Phi_{D\pm}(z))^{-n} X_{AD}(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

Кроме того, из (4.42) для $c_A \Psi_{n(A),C}$ на E_{α}^* при подходе сверху имеем

$$\begin{aligned} c_A \Psi_{n(A),C} &= \left(\frac{c_A \Psi_{n(A),D+}}{w_{\alpha}} + \frac{X_{A,C+}}{(C_A \Phi_{C+})^n} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \left(\frac{X_{A,D+}}{w_{\alpha} (C_A \Phi_{D+})^n} + \frac{X_{A,C+}}{(C_A \Phi_{C+})^n} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Так как (см. (4.14), (4.13)) на E_α^* , $\alpha \in (C, D)$, имеем

$$X_{AD+} = w_\alpha X_{AC-}, \quad \Phi_{D+} = \Phi_{C-},$$

то равномерно для $x \in K \subseteq E_\alpha^*$, $\alpha \in C_+$,

$$c_A \Psi_{n(A),C} = \left(\frac{X_{A,C-}}{(C_A \Phi_{C-})^n} + \frac{X_{A,C+}}{(C_A \Phi_{C+})^n} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

и, как частный случай, равномерно для $x \in K \subseteq E_\alpha^*$, $\alpha \in O_+$,

$$P_n(x) = \left\{ (C_O \Phi_{O+}(x))^{-n} X_{OO+}(x) + (C_O \Phi_{O-}(x))^{-n} X_{OO-}(x) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Напомним, что явный вид матрицы X выражается с помощью функций Сеге (см. (4.17)) и с помощью отношений тэта-функций (4.31) по формулам (4.35), (4.19), (4.34), (4.25).

Теорема доказана.

§ 5. Примеры

В задачах Эрмита–Паде, связанных с произвольными графами, возникают два новых эффекта, отсутствующих в случае графов-деревьев. Во-первых, минимум энергии может достигаться на границе допустимого множества мер, т.е. некоторые компоненты экстремальной меры могут быть равны нулю. Во-вторых, в специальных случаях возможно существование подпоследовательности индексов, не являющихся нормальными. В настоящем параграфе для иллюстрации этих особенностей рассмотрим два конкретных примера.

5.1. Граф-треугольник. Рассмотрим граф, содержащий три ребра α, β, γ и три вершины: A, B и наименьшую (корневую) вершину O (см. рис. 4). Ребрам графа поставлены в соответствие попарно непересекающиеся отрезки на вещественной оси E_α, E_β и E_γ . На этих отрезках определены положительные борелевские меры $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ и σ_γ такие, что производная абсолютно непрерывной составляющей $\sigma'_\kappa > 0$ почти всюду на E_κ относительно меры Лебега, при $\kappa \in \mathcal{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Вершинам A и B графа соответствует обобщенная система функций Никитина:

$$f_A(z) = \widehat{\sigma}_\alpha(z) + \int_{E_\beta} \frac{\widehat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x)}{z - x}, \quad (5.1)$$

$$f_B(z) = \widehat{\sigma}_\beta(z), \quad (5.2)$$

где $\widehat{\sigma}_\kappa(x) = \int_{E_\kappa} \frac{d\sigma_\kappa(t)}{x - t}$.

Зафиксируем диагональный мультииндекс (n, n) . Рассмотрим аппроксимации Эрмита–Паде этой системы – рациональные функции $(Q_{n,A}/P_n, Q_{n,B}/P_n)$ с общим знаменателем P_n такие, что $\deg P_n \leq 2n$ и при $z \rightarrow \infty$

$$R_{n,A} := f_A P_n - Q_{n,A} = O(z^{-n-1}), \quad (5.3)$$

$$R_{n,B} := f_B P_n - Q_{n,B} = O(z^{-n-1}). \quad (5.4)$$

Рис. 4. Граф-треугольник

Эти условия эквивалентны соотношениям ортогональности при $j = 0, \dots, n-1$:

$$\int P_n(x)x^j d\sigma_\alpha(x) + \int P_n(x)x^j \hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x) = 0, \quad (5.5)$$

$$\int P_n(x)x^j d\sigma_\beta(x) = 0. \quad (5.6)$$

Отсюда получаем следующие соотношения для функции второго рода $R_{n,B}$:

$$\int R_{n,B}(x)x^j d\sigma_\gamma(x) = - \int P_n(x)x^j \hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x), \quad j = 0, \dots, n. \quad (5.7)$$

Действительно, в силу соотношений ортогональности (5.6) и теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_\gamma} R_{n,B}(x)x^j d\sigma_\gamma(x) &= \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} \frac{P_n(t) d\sigma_\beta(t)}{x-t} x^j d\sigma_\gamma(x) \\ &= \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} P_n(t) \frac{x^j - t^j}{x-t} d\sigma_\beta(t) d\sigma_\gamma(x) + \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} \frac{P_n(t)t^j d\sigma_\beta(t)}{x-t} d\sigma_\gamma(x) \\ &= \int_{E_\gamma} \frac{d\sigma_\gamma(x)}{x-t} P_n(t)t^j d\sigma_\beta(t) = - \int_{E_\beta} P_n(t)t^j \hat{\sigma}_\gamma(t) d\sigma_\beta(t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Тогда выполняются соотношения:

$$\int P_n(x)x^j d\sigma_\alpha(x) - \int R_{n,B}(x)x^j d\sigma_\gamma(x) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (5.9)$$

Пусть $p_{n,\gamma}$ – многочлен с единичным старшим коэффициентом, построенный по нулям $R_{n,B}$ на E_γ (если нулей нет, то $p_{n,\gamma} = 1$), $m_\gamma = \deg p_{n,\gamma}$. Тогда интегральная формула Коши дает из (5.4) такие соотношения:

$$\int_{E_\beta} P_n(x)x^j \frac{d\sigma_\beta(x)}{p_{n,\gamma}(x)} = 0, \quad j = 0, \dots, m_\gamma + n - 1, \quad (5.10)$$

и, следовательно,

$$\frac{R_{n,B}(z)}{p_{n,\gamma}(z)} = \int \frac{P_n(x) d\sigma_\beta(x)}{(z-x)p_{n,\gamma}(x)}. \quad (5.11)$$

Пусть $p_{n,\alpha}$ и $p_{n,\beta}$ – многочлены, построенные по нулям P_n на отрезках E_α и E_β соответственно, а m_α и m_β – их степени. Тогда из условий (5.9) и (5.10) следует,

что $m_\alpha + m_\gamma \geq n - 1$ и $m_\beta \geq m_\gamma + n$. Отсюда $m_\alpha + m_\beta \geq 2n - 1$. Запишем соотношения ортогональности (5.9) в следующем виде:

$$\int_{E_\alpha} p_{n,\alpha}(x) p_{n,\gamma}(x) x^j \frac{P_n(x) d\sigma_\alpha(x)}{p_{n,\alpha}(x) p_{n,\gamma}(x)} - \int_{E_\gamma} p_{n,\alpha}(x) p_{n,\gamma}(x) x^j \frac{R_{n,B}(x) d\sigma_\gamma(x)}{p_{n,\gamma}(x) p_{n,\alpha}(x)} = 0. \quad (5.12)$$

Пусть $\mu_{n,\alpha}$, $\mu_{n,\beta}$, $\mu_{n,\gamma}$ – меры, считающие нули многочленов $p_{n,\alpha}$, $p_{n,\beta}$, $p_{n,\gamma}$ соответственно. Рассмотрим подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$ такую, что эти меры имеют некоторый слабый предел $\mu_{n,\alpha}/n \rightarrow \lambda_\alpha$, $\mu_{n,\beta}/n \rightarrow \lambda_\beta$, $\mu_{n,\gamma}/n \rightarrow \lambda_\gamma$. По теореме Гончара–Рахманова о слабой асимптотике многочленов, ортогональных относительно переменного веса (см. [33], [20]) из условий ортогональности (5.12) и (5.10) и представления (5.11) вытекают следующие соотношения равновесия потенциалов предельных мер:

$$2V^{\lambda_\alpha}(x) + V^{\lambda_\beta}(x) + V^{\lambda_\gamma}(x) \begin{cases} = \varkappa_\alpha, & x \in S(\lambda_\alpha), \\ \geq \varkappa_\alpha, & x \in E_\alpha, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$2V^{\lambda_\beta}(x) + V^{\lambda_\alpha}(x) - V^{\lambda_\gamma}(x) \begin{cases} = \varkappa_\beta, & x \in S(\lambda_\beta), \\ \geq \varkappa_\beta, & x \in E_\beta, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$2V^{\lambda_\gamma}(x) + V^{\lambda_\alpha}(x) - V^{\lambda_\beta}(x) \begin{cases} = \varkappa_\gamma := \varkappa_\alpha - \varkappa_\beta, & x \in S(\lambda_\gamma), \\ \geq \varkappa_\gamma, & x \in E_\gamma. \end{cases} \quad (5.15)$$

Действительно, соотношение (5.14) следует из (5.10), соотношение (5.13) следует из соотношений (5.12), рассмотренных на отрезке E_α , а (5.15) – из соотношений (5.12), рассмотренных на отрезке E_γ , с учетом (следующей из (5.11)) равномерной вне E_β асимптотики

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{R_{n,B}(z)}{p_{n,\gamma}(z)} \right| \Rightarrow V^{\lambda_\beta}(z) - \varkappa_\beta.$$

Так как существует единственная векторная мера $(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma)$, удовлетворяющая данным соотношениям равновесия и условиям $|\lambda_\beta| - |\lambda_\gamma| = 1$, $|\lambda_\alpha| + |\lambda_\gamma| = 1$, то

$$\frac{1}{n} (\mu_{n,\alpha}, \mu_{n,\beta}, \mu_{n,\gamma}) \rightarrow (\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma), \quad n \rightarrow \infty.$$

Формально возможны два вида вырожденных решений равновесной задачи: $|\lambda_\alpha| = 0$ и $|\lambda_\gamma| = 0$. В первом случае $(\lambda_\beta, \lambda_\gamma)$ будет равновесной мерой с матрицей взаимодействия Никишина, а на отрезке E_α должно выполняться неравенство $V^\beta + V^\gamma \geq \varkappa_\beta + \varkappa_\gamma$. Во втором случае $(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$ есть равновесная мера с матрицей взаимодействия Анжелеско с условием $V^\beta(x) - V^\alpha(x) \leq \varkappa_\beta - \varkappa_\alpha$, $x \in E_\gamma$.

Равновесные потенциалы для системы Никишина выражаются через ветви алгебраической функции $\Phi(z)$,

$$\Phi_O \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\beta), \quad \Phi_O(z) = z^{-2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

$$\Phi_B \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (E_\gamma \cup E_\beta)), \quad \Phi_A(z) = c_B z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.17)$$

$$\Phi_A \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\gamma), \quad \Phi_A(z) = c_A z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

следующим образом:

$$V^\beta = \ln |\Phi_O|, \quad (5.19)$$

$$V^\beta - V^\gamma = -\ln |\Phi_B| + \varkappa_\beta, \quad (5.20)$$

$$V^\gamma = -\ln |\Phi_A| + \varkappa_\beta + \varkappa_\gamma. \quad (5.21)$$

При этом $V^\beta + V^\gamma \geq \varkappa_\beta + \varkappa_\gamma$ тогда и только тогда, когда $|\Phi_O| \geq |\Phi_2|$. Однако, как было показано в [21], $|\Phi_2| > |\Phi_1| > |\Phi_0|$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus (E_\gamma \cup E_\beta)$. Таким образом, это краевое решение не реализуется.

Рассмотрим теперь случай, когда обращается в нуль мера λ_γ . Известно, что равновесные потенциалы задачи Анжелеско выражаются через ветви трехзначной алгебраической функции $\Phi(z)$ так:

$$V^\alpha + V^\beta = \ln |\Phi_O|, \quad (5.22)$$

$$V^\alpha = -\ln |\Phi_A| + \varkappa_\alpha, \quad (5.23)$$

$$V^\beta = -\ln |\Phi_B| + \varkappa_\beta, \quad (5.24)$$

где Φ_O, Φ_A, Φ_B – ветви функции $\Phi(z)$ такие, что

$$\Phi_O \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (E_\alpha^* \cup E_\beta^*)), \quad \Phi_O(z) = z^{-2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.25)$$

$$\Phi_A \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\alpha^*), \quad \Phi_A(z) = c_A z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.26)$$

$$\Phi_B \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\beta^*), \quad \Phi_B(z) = c_B z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.27)$$

Таким образом, условие $V^\beta - V^\alpha \leq \varkappa_\beta - \varkappa_\alpha$ эквивалентно условию $|\Phi_A| \leq |\Phi_B|$. На рис. 5–7 изображены линии, на которых равны абсолютные значения различных пар ветвей функции Φ . Укажем области, в которых выполнено неравенство $|\Phi_A| < |\Phi_B|$. На рис. 5, 6, б) и рис. 7 мера $|\lambda_\gamma| = 0$, когда отрезок E_γ лежит в области, содержащей точку $1 + 0$. На рис. 6, а) мера $|\lambda_\gamma| = 0$, когда отрезок E_γ лежит в дополнении к области, содержащей точку $-0,5 - 0$.

Рис. 5. Критические траектории для системы Анжелеско: $E_\alpha = [0, 1]$; $E_\beta = [-1, -1/2]$ (рис. а)), $E_\beta = [-4, -2]$ (рис. б))

Рис. 6. Критические траектории для системы Анжелеско: $E_\alpha = [0, 1]$; $E_\beta = [-1/2, -1/4]$ (рис. а)), $E_\beta = [-4, -1/2]$ (рис. б))

Рис. 7. Критические траектории для системы Анжелеско, в случае столкновения: $E_\alpha^* = [0, 1]$, $E_\beta = [-0.2, -0.0716]$ (рис. а)); $E_\alpha = [0, 1]$, $E_\beta^* = [-4, -1/7]$ (рис. б))

5.2. Граф-четыреугольник. Рассмотрим граф на рис. 8. Ребрам $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ этого графа поставлены в соответствие отрезки $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma, E_\delta$ и меры $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_\delta$ на них. При этом отрезки $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ попарно не пересекаются, и отрезки $E_\beta, E_\gamma, E_\delta$ также попарно не пересекаются. Вершинам графа соответствует система функций

$$f_A = \hat{\sigma}_\alpha, \quad f_B = \hat{\sigma}_\beta, \quad (5.28)$$

$$f_C(z) = \int_{E_\alpha} \frac{\hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\alpha(x)}{z-x} + \int_{E_\beta} \frac{\hat{\sigma}_\delta(x) d\sigma_\beta(x)}{z-x}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим аппроксимации Эрмита–Паде этой системы функций и мультииндекса (n, n, n) . Многочлен P_n степени $\deg P_n \leq 3n$ удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности при $j = 0, \dots, n-1$:

$$\int P_n(x) x^j d\sigma_\alpha(x) = \int P_n(x) x^j d\sigma_\beta(x) = 0, \quad (5.30)$$

$$\int P_n(x) x^j \hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\alpha(x) + \int P_n(x) x^j \hat{\sigma}_\delta(x) d\sigma_\beta(x) = 0. \quad (5.31)$$

Как и в предыдущем случае, можно показать, что $\deg P_n \geq 3n - 1$. Покажем, что, вообще говоря, нормальности индексов может не быть.

Рис. 8. Граф-четыреугольник

Рассмотрим симметричный случай:

$$E_\beta = -E_\alpha, \quad E_\gamma = -E_\delta, \quad d\sigma_\beta(-x) = -d\sigma_\alpha(x), \quad d\sigma_\gamma(-x) = -d\sigma_\delta(x).$$

В этом случае найдется четный многочлен P_n , удовлетворяющий (5.32), (5.33). Действительно, для четного многочлена достаточно наложить $[3n/2]$ условий:

$$\int P_n(x) x^j d\sigma_\alpha(x) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (5.32)$$

$$\int P_n(x) x^j \widehat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\alpha(x) + \int P_n(x) x^j \widehat{\sigma}_\delta(x) d\sigma_\beta(x) = 0, \quad j = 1, 3, \dots, 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1. \quad (5.33)$$

Число неизвестных коэффициентов при четных степенях многочлена P_n степени $2[3n/2]$ равно $[3n/2] + 1$. Таким образом, четный ортогональный многочлен существует. Поэтому индексы вида $(2k+1, 2k+1, 2k+1)$ не являются нормальными.

Список литературы

- [1] A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues”, *Acta Math.*, **19**:1 (1895), 93–104.
- [2] Ch. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), 18–24; 74–79; 226–233.
- [3] В. Н. Сорокин, “Циклические графы и теорема Апери”, *УМН*, **57**:3 (2002), 99–134; англ. пер.: V. N. Sorokin, “Cyclic graphs and Apéry’s theorem”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 535–571.
- [4] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* (University of Missouri–Columbia, Columbia, MO, USA, 1998), *Contemp. Math.*, **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.
- [5] А. И. Аптекарев (ред.), *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007.

- [6] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100; англ. пер.: V. A. Kalyagin, “Hermite–Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 199–216.
- [7] А. Аптекарев, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the 3rd international conference on functional analysis and approximation theory*. Vol. I (Acquafredda di Maratea (Potenza), Italy, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) Suppl., **52**, Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1998, 3–21.
- [8] А. И. Аптекарев, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.
- [9] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, **3** (2004), 109–129.
- [10] А. И. Аптекарев, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [11] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 34–57; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Global eigenvalue distribution regime of random matrices with an anharmonic potential and an external source”, *Theoret. and Math. Phys.*, **159**:1 (2009), 448–468.
- [12] A. Angelesco, “Sur deux extensions des fractions continues algébriques”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **168** (1919), 262–265.
- [13] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113**(155):4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [14] K. Driver, H. Stahl, “Simultaneous rational approximants to Nikishin-systems. I, II”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**:1–2 (1995), 245–263; **61**:1–4 (1995), 261–284.
- [15] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, “On perfect Nikishin systems”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **2**:2 (2002), 415–426.
- [16] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, Наука, М., 1981, 31–48.
- [17] А. И. Аптекарев, “Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско”, *Матем. сб.*, **136**(178):1(5) (1988), 56–84; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 57–84.
- [18] Ж. Бустаманте Гонсалес, Г. Лопес Лагомасино, “Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 117–138; англ. пер.: Zh. Bustamante, G. L. Lagomasino, “Hermite–Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 367–384.
- [19] Е. М. Никишин, “Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: E. M. Nikishin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [20] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.

- [21] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [22] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
- [23] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0).”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, Art. ID rpm007.
- [24] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Падэ для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [25] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*, Vol. I: Elliptic functions and uniformization theory, Wiley, New York–London–Sydney, 1969; Vol. II: Automorphic functions and Abelian integrals, Wiley, New York, 1971.
- [26] А. И. Аптекарев, В. А. Калягин, *Асимптотическое поведение корня n -ой степени многочленов совместной ортогональности и алгебраические функции*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, **60**, 1986.
- [27] В. Г. Лысов, “Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Падэ для системы стилтjesовских функций с весом Лагерра”, *Матем. сб.*, **196**:12 (2005), 99–122; англ. пер.: V. G. Lysov, “Strong asymptotics of the Hermite–Padé approximants for a system of Stieltjes functions with Laguerre weight”, *Sb. Math.*, **196**:12 (2005), 1815–1840.
- [28] Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1948.
- [29] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1 (1971), 113–179; англ. пер.: E. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.
- [30] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, Courant Lect. Notes Math., **3**, New York University, New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [31] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [32] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: L. C. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Saunders, Philadelphia–London–Toronto, ON, 1969.
- [33] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125**(167):1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [34] W. Van Assche, J. S. Geronimo, A. B. J. Kuijlaars, “Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials”, *Special functions 2000: current perspective and future directions* (Tempe, AZ, USA, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **30**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 23–59.
- [35] P. Deift, X. Zhou, “A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation”, *Ann. of Math. (2)*, **137**:2 (1993), 295–368.
- [36] A. I. Aptekarev, *Analysis of the matrix Riemann–Hilbert problems for the case of higher genus and asymptotics of polynomials orthogonal on a system of intervals*,

- Препринт №28 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2008; http://www.keldysh.ru/papers/2008/source/rep2008_28.pdf.
- [37] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, “New results on the equilibrium measure for logarithmic potentials in the presence of an external field”, *J. Approx. Theory*, **95**:3 (1998), 388–475.
- [38] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
- [39] A. B. J. Kuijlaars, K. T.-R. McLaughlin, W. Van Assche, M. Vanlessen, “The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ ”, *Adv. Math.*, **188**:2 (2004), 337–398.
- [40] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.

А. И. Аптекарев (A. I. Aptekarev)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша

РАН, г. Москва

E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступила в редакцию

22.12.2008 и 03.09.2009

В. Г. Лысов (V. G. Lysov)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша

РАН, г. Москва

E-mail: vlysov@mail.ru