Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Драгошанский, Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных,
Матем. сб., 2003, том 194, номер 7, 57–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:09:56

УДК 517.51

О. С. Драгошанский

Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных

В этой работе получен критерий совпадения в многомерном случае класса функций ограниченной Λ -вариации и класса функций, непрерывных по Λ -вариации, для широкого семейства последовательностей Λ (для которых существует предел отношения λ_{2n}/λ_n при $n \rightarrow \infty$).

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Начнем с введения некоторых обозначений.

Пусть функция $f(x)$ определена на каком-то промежутке действительной оси. Если $\Delta = [d_1, d_2]$ — это отрезок, содержащийся в области определения функции f , то через $f(\Delta)$ мы обозначим *разность* $f(d_2) - f(d_1)$.

В соответствии с этим, если функция $f(x, y)$ определена на квадрате $[0, 1]^2$, а числа a^1, a^2 и отрезки $\Delta^1 = [d_1^1, d_2^1]$, $\Delta^2 = [d_1^2, d_2^2]$ содержатся в $[0, 1]$, то тогда естественны следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(a^1, \Delta^2) &= f(a^1, d_2^2) - f(a^1, d_1^2), & f(\Delta^1, a^2) &= f(d_2^1, a^2) - f(d_1^1, a^2), \\ f(\Delta^1, \Delta^2) &= f(d_2^1, \Delta^2) - f(d_1^1, \Delta^2) = f(\Delta^1, d_2^2) - f(\Delta^1, d_1^2) \\ &= f(d_2^1, d_2^2) - f(d_1^1, d_2^2) - f(d_2^1, d_1^2) + f(d_1^1, d_1^2). \end{aligned}$$

Вообще, если для функций $g(x_1, \dots, x_{m-1})$ от $m-1$ переменных уже определено смешанное приращение $g(\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1})$, то для функций от m переменных полагаем

$$f(\Delta_1, \dots, \Delta_m) = f(\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}, d_2^m) - f(\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}, d_1^m),$$

где $\Delta_m = [d_1^m, d_2^m]$.

Все отрезки мы будем считать невырожденными.

Через $C, C(\dots)$ мы будем обозначать константы, зависящие лишь от выражений, перечисленных в скобках; при этом значения констант могут меняться в ходе изложения.

Далее, для заданного отрезка I через $\Omega(I)$ мы обозначим совокупность всех конечных систем $\{I_n\}$ попарно неперекрывающихся отрезков, содержащихся в I . Пусть задана неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \lambda =$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00315) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1657.2003.1).

$\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$, λ -*вариацией функции* $f(\cdot)$, определенной на отрезке $[0, 1]$, называется величина

$$\text{Var}_\lambda f(\cdot) = \sup_{\{\delta_i\} \in \Omega([0, 1])} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|f(\delta_i)|}{\lambda_i}.$$

Это определение, а также класс ΛBV функций одного переменного, имеющих ограниченную λ -вариацию, были введены Д. Ватерманом [1].

На последовательность λ в этом определении естественно наложить требование

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty, \quad (1)$$

поскольку в противном случае любая ограниченная функция будет иметь конечную λ -вариацию. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь последовательности, для которых условие (1) выполнено.

Рассмотрим функцию f , определенную на параллелепипеде $[0, 1]^m$. Если даны m неубывающих последовательностей положительных чисел

$$\{\Lambda^j\}_{j=1}^m = \{\lambda^j\}_{j=1}^m = \{\{\lambda_i^j\}_{i=0}^\infty\}_{j=1}^m,$$

для каждой из которых выполнено условие (1), то m -мерной $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m)$ -*вариацией функции* f называется величина

$$\text{Var}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^m)} f(\cdot, \dots, \cdot) = \sup_{\{\delta_{i_1}^1\}, \dots, \{\delta_{i_m}^m\} \in \Omega([0, 1])} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} \frac{|f(\delta_{i_1}^1, \dots, \delta_{i_m}^m)|}{\lambda_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \lambda_{i_m}^m}.$$

Далее, $(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ -*вариацией функции* f относительно набора из k переменных $(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$, обозначаемой через $V_{\lambda^1, \dots, \lambda^k}^{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}}(f)$, мы назовем точную верхнюю грань k -мерной $(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ -вариации f (как функции от $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$) при всевозможных значениях остальных переменных.

Полной $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ -*вариацией функции* f мы будем называть сумму

$$V_{\lambda^1, \dots, \lambda^m}(f) = \sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m} V_{\lambda^{j_1}, \dots, \lambda^{j_k}}^{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}}(f).$$

Множество функций, для которых эта сумма конечна, называется *классом* $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV$. В случае, когда все последовательности λ^j совпадают, скажем, $\lambda^1 = \dots = \lambda^m = \lambda$, мы будем писать просто ΛBV .

Далее, для данной последовательности λ через λ_{n+} обозначим ее подпоследовательность, начинающуюся с n -го номера, т.е.

$$(\lambda_{n+})_i = \lambda_{n+i}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Определим также функцию

$$\Lambda(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Скажем, что функция $f(x)$ одного переменного, принадлежащая классу ΛBV , непрерывна по Λ -вариации, если величина

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{\lambda_n+} f(\cdot)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Класс таких функций обозначим через CAV .

Вопрос о соотношении между классами ΛBV и CAV был поставлен в работе [2] Д. Ватерманом. Впервые пример неограниченной последовательности λ , для которой классы ΛBV и CAV не совпадают, был построен Дж. Фораном и Р. Флейссеном [3]. Некоторые достаточные условия для совпадения или несовпадения этих классов были получены в работах А. И. Саблина [4], [5]. Точнее, им были установлены следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А. Пусть последовательность λ такова, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(2n)}{\Lambda(n)} = 2.$$

Тогда классы CAV и ΛBV не совпадают.

ТЕОРЕМА В. Пусть последовательность λ такова, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} = 2^\gamma.$$

В таком случае классы CAV и ΛBV совпадают тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$.

Отметим сразу тот простой факт, что если последовательность λ положительна, монотонно не убывает и для какого-то числа $\alpha > 1$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{[\alpha n]}}{\lambda_n} = \alpha^\gamma, \quad (2)$$

то найдется такая последовательность λ' , эквивалентная λ (т.е. $0 < C_1(\alpha) \leq \lambda_n/\lambda'_n \leq C_2(\alpha) < \infty$ при всех n), что для нее соотношение (2) будет выполнено уже при всех $\alpha > 1$. То же самое верно для верхних и нижних пределов.

Естественное обобщение понятия непрерывности по λ -вариации на многомерный случай состоит в следующем. Скажем, что функция $f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна по $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ -вариации, если для любого набора переменных $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})$ ее $(\lambda_{n_1+}^{j_1}, \dots, \lambda_{n_k+}^{j_k})$ -вариация относительно этого набора стремится к нулю, когда хотя бы одно из чисел $n_1, \dots, n_k$ стремится к бесконечности. Класс таких функций мы обозначим через $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V$.

Следующий результат, принадлежащий А. Н. Бахвалову [6], дает хорошее описание этих классов.

ТЕОРЕМА С. Функция $f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V$ тогда и только тогда, когда существуют такие неубывающие последовательности неотрицательных чисел $\mu^1, \dots, \mu^m$, что $\mu_i = o(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$, и $f \in (\mu^1, \dots, \mu^m)BV$.

В этой работе мы попытаемся выяснить возможность перенесения теоремы В на многомерный случай, при этом мы будем брать последовательности λ^i одинаковыми, т.е. $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda$. По аналогии с теоремой В мы получим критерий совпадения или несовпадения классов CAV и ΛBV в том случае, когда существует предел отношения λ_{2n}/λ_n при $n \rightarrow \infty$.

Для размерности 2 получим следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ и число $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ таковы, что справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} = 2^\gamma. \quad (3)$$

Пусть также

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i)^{1/\gamma}} = \infty. \quad (4)$$

Тогда двумерные классы ΛBV и $CLV = C(\Lambda, \Lambda)V$ совпадают.

Заметим, что при $\gamma = 1$ условие (4) превращается в неравенство (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, стремящаяся к бесконечности, и число $\gamma \in [0, 1)$ таковы, что верно предельное соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \leq 2^\gamma \quad (5)$$

и, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

- а) $\gamma \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} (1/\lambda_n)^{1/\gamma} = A < \infty$;
- б) $\gamma \leq \frac{1}{2}$.

Тогда двумерные классы ΛBV и CLV не совпадают, точнее, существует непрерывная функция $f(x, y)$, определенная на квадрате $[0, 1]^2$, равная нулю, когда хотя бы один из ее аргументов равен нулю, принадлежащая классу $(\Lambda, \Lambda)BV$ и обладающая тем свойством, что величины

$$\sup_{a \in [0, 1]} \text{Var}_{\lambda_{n+}} f(a, \cdot), \quad \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{n+})} f(\cdot, \cdot)$$

в случае а) и величины

$$\text{Var}_{(\lambda, \lambda_{n+})} f(\cdot, \cdot), \quad \text{Var}_{(\lambda_{n+}, \lambda)} f(\cdot, \cdot)$$

в случае б) не стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Доказательству теорем 1 и 2 посвящены соответственно §2 и §3 этой статьи. А сейчас мы перейдем к случаю больших размерностей. Недавно А. Н. Бахваловым [6] был установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА Д. Пусть неограниченные положительные неубывающие последовательности $\lambda^1, \dots, \lambda^m$, для которых выполнено (1), таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено условие

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k \neq p} \frac{1}{\lambda_j^k} < \infty. \quad (6)$$

Тогда в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV$ существует непрерывная функция f , не принадлежащая классу $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V$.

Воспользовавшись этим утверждением, а также теоремой 2, мы покажем, что верна следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть размерность $m > 2$, а последовательность λ такова, что существует предел отношения λ_{2n}/λ_n при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует такая непрерывная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ от m переменных, что $f \in \Lambda BV \setminus \Lambda V$.

Действительно, пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} = 2^\gamma.$$

Пусть $\gamma \leq \frac{1}{2}$. В таком случае применима теорема 2. Пусть $g(x, y)$ — это та функция, о существовании которой говорится в ней. Тогда функция $f(x_1, \dots, x_m) \equiv g(x_1, x_2)$ будет искомой.

Если же $\gamma > \frac{1}{2}$, то, взяв число $\gamma' \in (\frac{1}{2}, \gamma)$, мы будем иметь

$$\frac{1}{\lambda_n} = o\left(\frac{1}{n^{\gamma'}}\right).$$

Как следствие условие (6), которое в нашем случае имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{m-1}} < \infty,$$

будет выполнено. Применение теоремы D завершает доказательство.

В завершение этого параграфа автор статьи хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю, профессору Михаилу Ивановичу Дьяченко, за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Совпадение классов ΛBV и ΛV

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(x, y)$ имеет ограниченную двумерную Λ -вариацию, где неубывающая последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ и число $\gamma \in (0, 1]$ таковы, что для любого числа $\alpha > 1$ выполнено

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{[\alpha l]}}{\lambda_l} = \alpha^\gamma. \quad (7)$$

Тогда если

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i)^{1/\gamma}} = \infty, \quad (8)$$

то одномерная вариация f как функции от второго аргумента

$$\text{Var}_{\lambda_{N+}} f(a, \cdot)$$

стремится при $N \rightarrow \infty$ к нулю равномерно по первому аргументу a .

Доказательство мы будем вести от противного. Допустим, что утверждение леммы неверно. В этом случае найдется такая последовательность натуральных чисел W_j , стремящихся к бесконечности, а также последовательность действительных чисел $a_j \in [0, 1]$, что

$$\text{Var}_{\lambda_{W_j+}} f(a_j, \cdot) \geq \delta > 0. \quad (9)$$

Домножая при необходимости функцию f на константу, мы можем считать, что $\delta = 1$. Выберем на отрезке $[0, 1]$ какую-нибудь предельную точку a последовательности $\{a_j\}$. Ясно, что существует подпоследовательность $\{a_{j'}\}$, которая сходится к a и либо не убывает, либо не возрастает. Поэтому, не ограничивая общности (переходя к подпоследовательности и, возможно, к функции $f(1-x, y)$), мы можем считать, что сама последовательность $\{a_j\}$ не убывает.

Покажем, что двумерная Λ -вариация функции f удовлетворяет неравенству

$$\text{Var}_{(\lambda, \lambda)} f(\cdot, \cdot) \geq \sup_{\{\alpha_j\}: 0 \leq \alpha_j \leq 1} \sum_{s=1}^K \frac{(1-\alpha_1) \cdots (1-\alpha_{s-1}) \alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s} = A(K) \quad (10)$$

для любого $K \geq 1$.

Ясно, что величину $A(K)$ можно определить как

$$\sup_{\{\alpha_j\}: 0 < \alpha_j < 1, \alpha_j \in Q} \sum_{s=1}^K \frac{(1-\alpha_1) \cdots (1-\alpha_{s-1}) \alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s},$$

где Q — множество рациональных чисел.

Возьмем произвольный набор рациональных чисел $\alpha_j = Q_j/R_j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, K$. Возьмем также произвольное число $\varepsilon > 0$. Построим по индукции последовательности натуральных чисел $\{N'_k\}_{k=1}^K$, $\{N_k\}_{k=1}^K$, строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{j_k\}_{k=0}^K$ и последовательность систем отрезков

$$\{\Omega^k\}_{k=0}^K = \{\{\Delta_i^k\}_{i=0}^{M_k-1}\}_{k=0}^K,$$

обладающие следующими свойствами:

- i) для любого k отрезки $\{\Delta_i^k\}_{i=0}^{M_k-1}$ системы Ω^k взаимно не перекрываются, при $k = 0$ система Ω^0 состоит всего из одного отрезка $[0, 1]$, при $k \geq 1$ каждый из отрезков Δ_i^k содержится целиком в одном из отрезков системы Ω^{k-1} ;
- ii) при любом k объединение всех отрезков из системы Ω^k есть отрезок $[0, 1]$;
- iii) $N'_k > N_{k-1} + M_{k-1}$, $k = 2, \dots, K$;
- iv) при $k = 1, \dots, K$ выполнено

$$\text{Var}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_{k-1}}, \cdot) < \varepsilon;$$

- v) при $k = 1, \dots, K$

$$\sup_{\substack{s/t \geq R_k/Q_k \\ t \geq N'_k}} \frac{\lambda_s}{\lambda_t} \geq \left(\frac{R_k}{Q_k}\right)^\gamma - \varepsilon;$$

- vi) $N_k \geq N'_k R_k + R_k, k = 1, \dots, K$;
 vii) при $k = 1, \dots, K$ выполнено

$$\sum_{i=0}^{M_k-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^k)|}{\lambda_{N_k+i}} > 1 - \varepsilon.$$

Сначала мы положим $j_0 = 1, \Omega^0 = \{[0, 1]\}$ (соответственно, $M_0 = 1$).

Пусть для некоторого $k \geq 1$ уже определены все члены последовательностей N_l, N'_l, j_l, Ω^l с номерами $l < k$.

Выберем число N'_k столь большим, чтобы выполнялись требования iii) (в случае $k \geq 2$), iv) (что возможно, поскольку к функции одного переменного $f(a_{j_{k-1}}, \cdot)$ при фиксированном $a_{j_{k-1}}$ применима одномерная теорема В о непрерывности Л-вариации), а также v) (это возможно благодаря условию (7)).

Далее, возьмем число N_k таким, чтобы выполнялось требование vi), а также условие

$$\frac{2 \sup_{x, y \in [0, 1]} |f(x, y)|}{\lambda_{N_k}} M_{k-1} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (11)$$

что возможно благодаря тому, что последовательность λ_n стремится при $n \rightarrow \infty$ к бесконечности.

Так как последовательность W_j стремится к бесконечности, то мы можем выбрать число j_k так, что $W_{j_k} \geq N_k$. Тогда по построению последовательности a_j (в силу (9)) мы будем иметь

$$\text{Var}_{\lambda_{N_k+}} f(a_{j_k}, \cdot) \geq 1.$$

В этом случае найдется такая система неперекрывающихся отрезков $\{\delta_l^k\}_{l=0}^{\widetilde{M}_k-1}$, что

$$\sum_{l=0}^{\widetilde{M}_k-1} \frac{|f(a_{j_k}, \delta_l^k)|}{\lambda_{N_k+l}} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \quad (12)$$

Из всего набора $D = \{\delta_l^k\}_{l=0}^{\widetilde{M}_k-1}$ не более чем M_{k-1} отрезков не лежат целиком ни в одном из отрезков системы Ω^{k-1} . Поэтому если мы составим из тех отрезков из D , которые содержатся целиком в одном из отрезков из Ω^{k-1} , новый набор $\{\Delta_i^k\}_{i=0}^{M'_k-1}$, сохранив тот же порядок, в котором эти отрезки стояли в D , то в силу (11) и (12), а также неубывания последовательности λ мы будем иметь

$$\sum_{i=0}^{M'_k-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^k)|}{\lambda_{N_k+i}} > 1 - \frac{\varepsilon}{4} - M_{k-1} \frac{2 \sup |f|}{\inf_{n \geq N_k} \lambda_n} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Мы получили систему отрезков $\{\Delta_i^k\}_{i=0}^{M'_k-1}$, которая удовлетворяет требованию i). Но в таком случае легко дополнить ее некоторыми отрезками $\{\Delta_i^k\}_{i=M'_k}^{M_k-1}$ так, чтобы полученная система $\Omega^k = \{\Delta_i^k\}_{i=0}^{M_k-1}$ удовлетворяла требованиям i) и ii). Поскольку

$$\sum_{i=0}^{M_k-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^k)|}{\lambda_{N_k+i}} \geq \sum_{i=0}^{M'_k-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^k)|}{\lambda_{N_k+i}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

то требование vii) также выполняется. Таким образом мы определим числа j_k , N'_k , N_k и системы отрезков Ω^k при $k = 1, \dots, K$, причем по построению для них будут выполнены все требования i)–vii).

Рассмотрим набор независимых случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^K$ таких, что ξ_k принимает только целочисленные значения от 0 до $R_k - 1$, причем каждое значение принимается с одинаковой вероятностью $1/R_k$.

Определим теперь некие последовательности систем отрезков, зависящих от набора $\{\xi\}$, а следовательно, тоже случайных,

$$\begin{aligned} \{A^l\}_{l=1}^K &= \{A^l(\xi_1, \dots, \xi_l)\}_{l=1}^K, \\ \{\{B_k^l\}_{k=l+1}^K\}_{l=0}^{K-1} &= \{\{B_k^l(\xi_1, \dots, \xi_l)\}_{k=l+1}^K\}_{l=0}^{K-1}. \end{aligned}$$

Через $\delta_i^{(l)}$, $i = 0, \dots, |A^l| - 1$, обозначим отрезки набора A^l , а через $\Delta_i^{(l,k)}$, $i = 0, \dots, |B_k^l| - 1$, — отрезки набора B_k^l .

Сначала мы положим

$$B_k^0 = \Omega^k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Далее, пусть A^1 — это набор, составленный из всех отрезков из B_1^0 , номер n которых в системе B_1^0 удовлетворяет соотношению

$$(n - \xi_1) \pmod{R_1} \in \{0, \dots, Q_1 - 1\},$$

расставленных в том же порядке, в котором они стояли в B_1^0 .

Определим при $k = 2, \dots, K$ набор B_k^1 , составленный из всех отрезков B_k^0 , которые не перекрываются ни с одним из отрезков системы A^1 , расставленных, опять-таки, в порядке возрастания их номеров в системе B_k^0 .

Продолжим наше построение по индукции. Пусть число $l \in \{2, \dots, K\}$ и все системы $A^{l'}$ и $B_{k'}^{l'}$, у которых верхний индекс l' меньше l , уже построены. Тогда мы определим систему A^l , составленную из всех отрезков из B_l^{l-1} , номер n которых в системе B_l^{l-1} удовлетворяет соотношению

$$(n - \xi_l) \pmod{R_l} \in \{0, \dots, Q_l - 1\}, \quad (14)$$

расставленных в том же порядке. (То есть, если

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{N-1}$$

— это все числа из множества $\{0, \dots, |B_l^{l-1}| - 1\}$, которые удовлетворяют условию (14), то тогда длина набора A^l равна N , а его элементы имеют вид $A^l = \{\delta_i^{(l)}\}_{i=0}^{|A^l|-1} = \{\Delta_{n_i}^{(l-1,l)}\}_{i=0}^{|A^l|-1}$.) После этого мы для каждого $k = l+1, \dots, K$ построим систему B_k^l , составленную из всех отрезков из B_k^{l-1} , которые не перекрываются ни с одним из отрезков набора A^l , расставленных в порядке возрастания их номеров в системе B_k^{l-1} .

Итак, нужные нам последовательности построены.

Теперь покажем, что при $l = 1, \dots, K-1$, $k > l$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{|B_k^l|-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^{(k,l)})|}{\lambda_{N_k+i}} \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) \geq \left(1 - \frac{Q_l}{R_l} \right) \sum_{i=0}^{|B_k^{l-1}|-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^{(k,l-1)})|}{\lambda_{N_k+i}}. \quad (15)$$

Действительно, пусть значения величин $\xi_1, \dots, \xi_{l-1}$ фиксированы. Определим функцию $\chi^{(\xi_l)}(i)$, $i = 0, \dots, |B_k^{l-1}| - 1$, равную 1 или 0 в зависимости от того, попадает или нет отрезок $\Delta_i^{(k, l-1)}$ в набор B_k^l при заданном значении ξ_l . Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{|B_k^l|-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^{(k, l)})|}{\lambda_{N_k+i}} \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) &= \frac{1}{R_l} \sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \left(\sum_{i=0}^{|B_k^l|-1} \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^{(k, l)})|}{\lambda_{N_k+i}} \right) \bigg|_{\xi_l=\widehat{\xi}_l} \\ &\geq \frac{1}{R_l} \sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \left(\sum_{i=0}^{|B_k^{l-1}|-1} \chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) \frac{|f(a_{j_k}, \Delta_i^{(k, l-1)})|}{\lambda_{N_k+i}} \right). \end{aligned}$$

(В последнем неравенстве мы воспользовались монотонностью последовательности λ .)

Теперь мы поменяем в последнем выражении порядок суммирования и учтем, что по построению систем B_k^l при всех $i = 0, \dots, |B_k^{l-1}| - 1$ справедливо

$$\sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) = (R_l - Q_l).$$

В итоге мы получим искомое неравенство (15).

Покажем также, что при $l = 1, \dots, K$ справедливо соотношение

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{|A^l|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \delta_i^{(l)})|}{\lambda_{N'_l+i}} \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) \geq \frac{Q_l}{R_l} \left(\left(\frac{R_l}{Q_l} \right)^\gamma - \varepsilon \right) \sum_{i=0}^{|B_l^{l-1}|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \Delta_i^{(l, l-1)})|}{\lambda_{N_l+i}}. \quad (16)$$

Опять-таки, зафиксируем значения $\xi_1, \dots, \xi_{l-1}$. Пусть $\varphi^{(\xi_l)}(i)$ — это функция, которая сопоставляет числу $i \in \{0, 1, \dots, |B_l^{l-1}| - 1\}$, являющемуся номером отрезка $\Delta = \Delta_i^{(l, l-1)}$ системы B_l^{l-1} , номер этого отрезка в системе A^l в случае, если Δ принадлежит A^l при заданном значении ξ_l , в противном же случае мы полагаем $\varphi^{(\xi_l)}(i) = 0$. По аналогии с предыдущим мы определим функцию $\chi^{(\xi_l)}(i)$, равную 0 или 1 в зависимости от того, попадает или нет отрезок $\Delta_i^{(l, l-1)}$ в систему A^l .

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{|A^l|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \delta_i^{(l)})|}{\lambda_{N'_l+i}} \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) &= \frac{1}{R_l} \sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \left(\sum_{i=0}^{|A^l|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \delta_i^{(l)})|}{\lambda_{N'_l+i}} \right) \bigg|_{\xi_l=\widehat{\xi}_l} \\ &= \frac{1}{R_l} \sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \left(\sum_{i=0}^{|B_l^{l-1}|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \Delta_i^{(l, l-1)})|}{\lambda_{N'_l+\varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(i)}} \chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно построению систем A^l функция $\varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(i)$ может быть определена следующим образом. Пусть $i_0 < i_1 < \dots < i_{Q_l-1}$ — это все целые числа от 0 до $R_l - 1$, для которых справедливо соотношение

$$(i - \widehat{\xi}_l) \pmod{R_l} \in \{0, 1, \dots, Q_l - 1\}.$$

Тогда те i , для которых $\chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) = 1$, суть в точности числа вида $i = R_l n + i_m$, где $m = 0, \dots, Q_l - 1$, $n = 0, 1, \dots$. При этом

$$\varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(R_l n + i_m) = Q_l n + m,$$

а значит,

$$\frac{\varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(i)}{i + R_l} = \frac{Q_l n + m}{R_l n + i_m + R_l} \leq \frac{Q_l n + Q_l}{R_l n + R_l} = \frac{Q_l}{R_l}.$$

Согласно условию vi) выполнено $N_l \geq N'_l R_l + R_l$, а значит, справедлива оценка

$$\frac{N_l + i}{N'_l + \varphi^{(\xi_l)}(i)} \geq \frac{N'_l R_l + R_l + i}{N'_l + \varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(i)} \geq \frac{R_l}{Q_l}.$$

Поэтому в силу условия v) мы будем иметь

$$\frac{\lambda_{N_l + i}}{\lambda_{N'_l + \varphi^{(\widehat{\xi}_l)}(i)}} \geq \left(\frac{R_l}{Q_l} \right)^\gamma - \varepsilon. \quad (18)$$

Продолжим цепочку соотношений (17). Учтем неравенство (18) и поменяем порядок суммирования, в результате получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{|A^l|-1} \frac{|f(a_{j_l}, \delta_i^{(l)})|}{\lambda_{N'_l + i}} \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) \\ & \geq \left(\left(\frac{R_l}{Q_l} \right)^\gamma - \varepsilon \right) \frac{1}{R_l} \sum_{i=0}^{|B^{l-1}|-1} \left(\frac{|f(a_{j_l}, \Delta_i^{(l, l-1)})|}{\lambda_{N_l + i}} \sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) \right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что по построению систем A^l при всех i справедливо равенство

$$\sum_{\widehat{\xi}_l=0}^{R_l-1} \chi^{(\widehat{\xi}_l)}(i) = Q_l,$$

и неравенство (16) доказано.

Если мы обозначим через $\text{VS}_{\lambda_{n+}} f(a, X)$ вариационную сумму

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{|f(a, \delta_i)|}{\lambda_{n+i}},$$

соответствующую набору неперекрывающихся отрезков $X = \{\delta_i\}_{i=0}^{M-1}$, то доказанные неравенства (15) и (16) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\text{VS}_{\lambda_{N_k+}} f(a_{j_k}, B_k^l) \middle| \xi_1, \dots, \xi_{l-1} \right) \geq (1 - \alpha_l) \text{VS}_{\lambda_{N_k+}} f(a_{j_k}, B_k^{l-1}), \\ & k = 2, \dots, K, \quad l = 1, \dots, k-1; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\text{VS}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_k}, A^k) \middle| f\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \right) \geq \alpha_k \left(\left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^\gamma - \varepsilon \right) \text{VS}_{\lambda_{N_k+}} f(a_{j_k}, B_k^{k-1}), \\ & k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно условию vii) мы имеем

$$\text{VS}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_k}, B_k^0) = \text{VS}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_k}, \Omega^k) \geq 1 - \varepsilon,$$

а значит, из неравенств (19) и (20) следует, что при каждом $k = 1, \dots, K$ математическое ожидание вариационной суммы

$$\mathbb{E}_{\lambda_{N'_k+}} (\text{VS}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_k}, A^k)) \geq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k \left(\left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^\gamma - \varepsilon \right) (1 - \varepsilon).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{\text{VS}_{\lambda_{N'_1+}} f(a_{j_1}, A^1)}{\lambda_1} + \frac{\text{VS}_{\lambda_{N'_2+}} f(a_{j_2}, A^2)}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\text{VS}_{\lambda_{N'_K+}} f(a_{j_K}, A^K)}{\lambda_K} \right) \\ \geq \sum_{k=1}^K \frac{(1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k ((1/\alpha_k)^\gamma - \varepsilon)}{\lambda_k} (1 - \varepsilon) = D(\varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому существует такой набор чисел $\{\widehat{\xi}_k\}$, что при $\xi_1 = \widehat{\xi}_1, \xi_2 = \widehat{\xi}_2, \dots, \xi_K = \widehat{\xi}_K$ выражение, математическое ожидание которого оценивается в неравенстве (21), само не меньше $D(\varepsilon)$. Будем считать эти значения величин $\{\xi_k\}$ зафиксированными до окончания доказательства.

Возьмем следующие две системы (неперекрывающихся) отрезков

$$\{\Delta_k^1\}_{k=1}^K, \quad \{\Delta_i^2\}_{i=0}^{|A^1|+|A^2|+\cdots+|A^K|-1}.$$

Отрезок Δ_k^1 при $k = 1, \dots, K$ мы положим равным $[a_{j_{k-1}}, a_{j_k}]$, а набор $\{\Delta_i^2\}$ мы составим из всех отрезков всех наборов A^k , т.е.

$$\begin{aligned} \{\Delta_i^2\}_{i=0}^{|A^1|+|A^2|+\cdots+|A^K|-1} \\ = (\delta_0^{(1)}, \dots, \delta_{|A^1|-1}^{(1)}, \delta_0^{(2)}, \dots, \delta_{|A^2|-1}^{(2)}, \dots, \delta_0^{(K)}, \dots, \delta_{|A^K|-1}^{(K)}). \end{aligned}$$

Для количества отрезков в системе A^k верна оценка $|A^k| \leq |\Omega^k| = M_k$, откуда в силу условия iii) выполнено неравенство $N'_k + |A^k| \leq N_k + |A^k| \leq N'_{k+1}$, и, следовательно, для всех k

$$|A^1| + |A^2| + \cdots + |A^{k-1}| < N'_k.$$

Следовательно, двумерная вариационная сумма, соответствующая разбиению $\{\Delta_i^1\} \cdot \{\Delta_j^2\}$, оценивается снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{|A^1|+\cdots+|A^K|-1} \frac{|f(\Delta_k^1, \Delta_i^2)|}{\lambda_k \lambda_i} &\geq \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=|A^1|+\cdots+|A^{k-1}|}^{|A^1|+\cdots+|A^K|-1} \frac{|f(\Delta_k^1, \Delta_i^2)|}{\lambda_i} \\ &\geq \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=0}^{|A^k|-1} \frac{|f(\Delta_k^1, \delta_i^{(k)})|}{\lambda_{N'_k+i}} \\ &\geq \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} \left(\sum_{i=0}^{|A^k|-1} \frac{|f(a_{j_k}, \delta_i^{(k)})|}{\lambda_{N'_k+i}} - \sum_{i=0}^{|A^k|-1} \frac{|f(a_{j_{k-1}}, \delta_i^{(k)})|}{\lambda_{N'_k+i}} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} (\text{VS}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_k}, A^k) - \text{Var}_{\lambda_{N'_k+}} f(a_{j_{k-1}}, \cdot)) \geq D(\varepsilon) - \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(в последнем переходе мы воспользовались условием iv)). Осталось заметить, что последнее выражение при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $A(K)$, откуда и следует искомое соотношение (10).

Теперь, чтобы прийти к противоречию, нам осталось доказать, что при выполнении условий, накладываемых леммой на последовательность λ_s , величина

$$A(K) = \sup_{\{\alpha_j\}: 0 \leq \alpha_j \leq 1} \sum_{s=1}^K \frac{(1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_{s-1}) \alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s},$$

стоящая в правой части неравенства (10), стремится к бесконечности с ростом K . Сначала мы покажем, что

$$A(K) \geq 2^{\gamma-2} \sup_{\substack{\{\beta_j\}_{j=1}^K: \beta_j \geq 0 \\ \sum \beta_j = 1}} \sum_{s=1}^K \frac{\beta_s^{1-\gamma}}{\lambda_s} = 2^{\gamma-2} B(K). \quad (22)$$

Действительно, возьмем произвольный набор неотрицательных чисел $\{\beta_j\}_{j=1}^K$, в сумме дающих 1. Положим

$$\alpha_j = \frac{\beta_j/2}{1 - (\beta_1 + \cdots + \beta_{j-1})/2}, \quad j = 1, \dots, K.$$

Имеем $0 \leq \alpha_j \leq 1$ и

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^K \frac{(1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_{s-1}) \alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s} &= \sum_{s=1}^K \frac{(1 - (\beta_1 + \cdots + \beta_{s-1})/2) \alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^K \frac{\alpha_s^{1-\gamma}}{\lambda_s} \geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^K \frac{(\beta_s/2)^{1-\gamma}}{\lambda_s} \geq 2^{\gamma-2} \sum_{s=1}^K \frac{\beta_s^{1-\gamma}}{\lambda_s}, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое неравенство (22). Далее, полагая $\beta_j = b_j^{1/(1-\gamma)}$, имеем

$$B(K) = \sup_{\{b_j\}: \sum_{j=1}^K b_j^{1/(1-\gamma)} \leq 1} \sum_{s=1}^K b_s \cdot \frac{1}{\lambda_s} = \left(\sum_{s=1}^K \left(\frac{1}{\lambda_s} \right)^{1/\gamma} \right)^\gamma,$$

а эта величина по условию стремится при $K \rightarrow \infty$ к бесконечности. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В соответствии с нашим замечанием мы можем считать, что при всех $\alpha > 1$ выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{[n]}}{\lambda_n} = \alpha^\gamma$$

и как следствие

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq \alpha l} \frac{\lambda_k}{\lambda_l} \right) \geq \alpha^\gamma. \quad (23)$$

В силу одномерной теоремы В нам достаточно показать, что для любой функции $f(x, y)$ из класса $(\Lambda, \Lambda)BV$ величина

$$\text{Var}_{(\lambda_{N_1+}, \lambda_{N_2+})} f(\cdot, \cdot)$$

стремится к нулю, когда хотя бы одно из чисел N_1, N_2 стремится к бесконечности. Покажем, например, что величина $W_N = \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N+})} f(\cdot, \cdot)$ стремится к нулю. Поскольку последовательность $\{W_N\}$ неотрицательна и не возрастает, то предел $\lim_{N \rightarrow \infty} W_N$ существует. Пусть этот предел не равен нулю. Тогда, домножая функцию f на константу, мы можем считать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N = 1. \quad (24)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рациональное число $Q/R \in (0, 1)$, $Q, R \in \mathbb{N}$. Выберем натуральное число N'_1 столь большим, что

$$\sup_{\substack{s/t \geq R/Q \\ t \geq N'_1}} \frac{\lambda_s}{\lambda_t} \geq \left(\frac{R}{Q}\right)^\gamma - \varepsilon,$$

а также натуральные $N'_2 \geq N'_1$ и $N_1 \geq N'_1 R + R$.

Возьмем теперь число $N_2 \geq RN'_2 + R$ таким, чтобы было выполнено соотношение

$$\sup_{a \in [0, 1]} \text{Var}_{\lambda_{N_2+}} f(a, \cdot) \leq \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\sum_{i=0}^{N_1-1} 1/\lambda_i}, \quad (25)$$

что возможно в силу леммы 1.

В соответствии с предположением (24) мы найдем такие две системы неперекрывающихся отрезков $\{\tilde{\delta}_i^1\}_{i=0}^{\tilde{V}_1-1}$ и $\{\delta_j^2\}_{j=0}^{V_2-1}$, что

$$\sum_{i=0}^{\tilde{V}_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} \frac{|f(\tilde{\delta}_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{N_2+j}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда согласно неравенству (25) для “урезанной” суммы справедлива оценка

$$\sum_{i=N_1}^{\tilde{V}_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} \frac{|f(\tilde{\delta}_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{N_2+j}} \geq \sum_{i=0}^{\tilde{V}_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} \frac{|f(\tilde{\delta}_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{N_2+j}} - \sum_{i=0}^{N_1-1} \frac{1}{\lambda_i} 2 \sup_{a \in [0, 1]} \text{Var}_{\lambda_{N_2+}} f(a, \cdot) \geq 1 - \varepsilon.$$

Полагая $V_1 = \tilde{V}_1 - N_1$ и $\delta_i^1 = \tilde{\delta}_{N_1+i}^1$, мы имеем

$$\sum_{i=0}^{V_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} \frac{|f(\delta_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_{N_1+i} \lambda_{N_2+j}} \geq 1 - \varepsilon. \quad (26)$$

Добавляя недостающие отрезки в конец к наборам $\{\delta_i^1\}$ и $\{\delta_j^2\}$ (и, тем самым, увеличивая числа V_1 и V_2), мы можем считать, что

$$\bigcup_{i=0}^{V_1-1} \delta_i^1 = \bigcup_{j=0}^{V_2-1} \delta_j^2 = [0, 1],$$

но, как и прежде, отрезки в каждой из систем $\{\delta_i^1\}$ и $\{\delta_j^2\}$ не перекрываются. Неравенство (26) при этом, очевидно, сохранится.

Положим теперь $M_1 = N_1 + V_1$ и выберем число $M_2 > N_2 + V_2$ столь большим, чтобы были выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_{M_2}} \leq \frac{\varepsilon}{8(\text{Var}_{(\lambda, \lambda)} f)V_2}, \quad (27)$$

$$\sup_{a \in [0, 1]} \text{Var}_{\lambda_{M_2+}} f(a, \cdot) \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon/4}{\sum_{i=0}^{M_1-1} (1/\lambda_i)}, \frac{\varepsilon/4}{V_1/\lambda_{M_1}} \right\}. \quad (28)$$

Опять-таки, согласно предположению (24) найдем такие системы неперекрывающихся отрезков $\{\tilde{\Delta}_i^1\}_{i=0}^{\tilde{U}_1-1}$ и $\{\Delta_j^2\}_{j=0}^{U_2-1}$, что

$$\sum_{i=0}^{\tilde{U}_1-1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\tilde{\Delta}_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{M_2+j}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для “урезанной” суммы верна оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=M_1}^{\tilde{U}_1-1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\tilde{\Delta}_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{M_2+j}} &\geq \sum_{i=0}^{\tilde{U}_1-1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\tilde{\Delta}_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_{M_2+j}} - \sum_{i=0}^{M_1-1} \frac{1}{\lambda_i} 2 \sup_{a \in [0, 1]} \text{Var}_{\lambda_{M_2+}} f(a, \cdot) \\ &\geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством (28)). Полагая $U_1 = \tilde{U}_1 - M_1$ и $\Delta_i^1 = \tilde{\Delta}_{M_1+i}^1$, мы имеем

$$\sum_{i=0}^{U_1-1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} \geq 1 - \varepsilon. \quad (29)$$

Пусть X^1 и X^2 – это множества номеров тех отрезков из $\{\Delta_i^1\}$ и $\{\Delta_j^2\}$ соответственно, которые не лежат целиком ни в одном из отрезков семейств $\{\delta_i^1\}$ и $\{\delta_j^2\}$, а следовательно, содержат строго внутри себя левый или правый конец какого-то из отрезков соответствующего семейства. Ясно, что число элементов в X^1 и X^2 оценивается сверху удвоенным количеством отрезков в наборах $\{\delta_i^1\}$ и $\{\delta_j^2\}$:

$$|X^1| \leq 2V_1, \quad |X^2| \leq 2V_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=0 \\ i \notin X^1}}^{U_1-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin X^2}}^{U_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} &\geq \sum_{i=0}^{U_1-1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} - \sum_{i \in X^1} \sum_{j=0}^{U_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{U_1-1} \sum_{j \in X^2} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} = \Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим величину Σ_1 . В силу неравенства (28) и неубывания последовательности λ имеем

$$\Sigma_1 \leq \sum_{i \in X^1} \frac{1}{\lambda_{M_1+i}} 2 \sup_{a \in [0,1]} \text{Var}_{\lambda_{M_2+}} f(a, \cdot) \leq \frac{2V_1}{\lambda_{M_1}} 2 \sup_{a \in [0,1]} \text{Var}_{\lambda_{M_2+}} f(a, \cdot) \leq \varepsilon. \quad (31)$$

Далее, используя соотношение (27), оценим Σ_2 :

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \sum_{j \in X^2} \frac{1}{\lambda_{M_2}} \sum_{i=0}^{U_1-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i} \\ &= \sum_{j \in X^2} \frac{\lambda_0}{\lambda_{M_2}} \sum_{i=0}^{U_1-1} \sum_{k=0}^0 \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_{j+k}^2)|}{\lambda_k \lambda_i} \leq \frac{2V_2}{\lambda_{M_2}} \lambda_0 \text{Var}_{(\lambda, \lambda)} f(\cdot, \cdot) \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (32)$$

(Сумма $\sum_{i=0}^{U_1-1} \sum_{k=0}^0 |f(\Delta_i^1, \Delta_{j+k}^2)| / (\lambda_k \lambda_i)$ — это, как нетрудно видеть, вырожденная двумерная вариационная сумма для функции f , в которой разбиение по второй координатной оси состоит всего из одного отрезка.)

Объединяя оценки (29)–(32), мы получаем

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \notin X^1}}^{U_1-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin X^2}}^{U_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} \geq 1 - 3\varepsilon.$$

“Выбросим” из систем $\{\Delta_i^1\}$ и $\{\Delta_j^2\}$ отрезки с номерами из множеств X^1 и X^2 соответственно. Из оставшихся отрезков, сохранив их порядок, составим наборы, которые мы обозначим теми же символами $\{\Delta_i^1\}$ и $\{\Delta_j^2\}$. Пусть количество отрезков в них равно соответственно W_1 и W_2 . В силу монотонности последовательности λ мы будем иметь

$$\sum_{i=0}^{W_1-1} \sum_{j=0}^{W_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i} \lambda_{M_2+j}} \geq 1 - 3\varepsilon. \quad (33)$$

Теперь рассмотрим две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 , каждая из которых принимает целочисленные значения от 0 до $R-1$, причем каждое значение принимается с вероятностью $1/R$.

Пусть при $s = 1, 2$ набор $A^s = A^s(\xi_s) = (a_0^s, \dots, a_{|A^s(\xi_s)|-1}^s)$ составлен из всех целых чисел a от 0 до $V_1 - 1$, которые удовлетворяют соотношению

$$(a - \xi_s) \pmod{R} \in \{0, \dots, Q-1\},$$

расставленных в порядке возрастания.

Обозначим также через $B^s = B^s(\xi_s) = (b_0^s, \dots, b_{|B^s(\xi_s)|-1}^s)$ при $s = 1, 2$ набор, составленный из всех целых чисел b таких, что отрезок Δ_b^s не перекрывается ни с одним из отрезков системы $\{\delta_{a_i}^s\}_{i=0}^{|A^s|-1}$.

Составим сумму

$$S(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i'=0}^{|A^1(\xi_1)|-1} \sum_{j'=0}^{|A^2(\xi_2)|-1} \frac{|f(\delta_{a_{i'}}^1, \delta_{a_{j'}}^2)|}{\lambda_{N'_1+i'}\lambda_{N'_2+j'}} + \sum_{i'=0}^{|B^1(\xi_1)|-1} \sum_{j'=0}^{|B^2(\xi_2)|-1} \frac{|f(\Delta_{b_{i'}}^1, \Delta_{b_{j'}}^2)|}{\lambda_{N'_1+|A^1(\xi_1)|+i'}\lambda_{N'_2+|A^2(\xi_2)|+j'}}.$$

Обозначим через $X_E(i)$ характеристическую функцию множества E . Определим функции $\varphi_{\xi_s}^s(i)$, $s = 1, 2$, следующим образом: если число $i = a_{i'}^s$, то мы положим $\varphi_{\xi_s}^s(i) = i'$; если же i не принадлежит совокупности $\{a_{i'}^s\}$, то тогда $\varphi_{\xi_s}^s(i) = 0$.

Используя монотонность последовательности λ и то, что согласно выбору чисел M_s при $s = 1, 2$ выполнено неравенство $N'_s + |A^s(\xi_s)| \leq N_s + V_s \leq M_s$, мы получаем

$$S(\xi_1, \xi_2) \geq \sum_{i=0}^{V_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} X_{A^1(\xi_1)}(i) X_{A^2(\xi_2)}(j) \frac{|f(\delta_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_{N'_1+\varphi_{\xi_1}^1(i)}\lambda_{N'_2+\varphi_{\xi_2}^2(j)}} + \sum_{i=0}^{W_1-1} \sum_{j=0}^{W_2-1} X_{B^1(\xi_1)}(i) X_{B^2(\xi_2)}(j) \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i}\lambda_{M_2+j}} = S_1 + S_2. \quad (34)$$

Точно так же, как и при доказательстве леммы 1, при $s = 1, 2$ имеем $\varphi_{\xi_s}^s(i) \leq (Q/R)(i + R)$, откуда

$$\frac{N'_s + \varphi_{\xi_s}^s(i)}{N_s + i} \leq \frac{N'_s + (Q/R)(i + R)}{N'_s R + R + i} \leq \frac{Q}{R}.$$

Значит, по построению величин N'_1 и N'_2 при всех $i = 0, \dots, V_s - 1$ справедливо неравенство

$$\frac{\lambda_{N_s+i}}{\lambda_{N'_s+\varphi_{\xi_s}^s(i)}} \geq \left(\frac{R}{Q}\right)^\gamma - \varepsilon.$$

Поэтому для слагаемого S_1 верна оценка

$$S_1 \geq \sum_{i=0}^{V_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} X_{A^1(\xi_1)}(i) X_{A^2(\xi_2)}(j) \frac{|f(\delta_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_{N_1+i}\lambda_{N_2+j}} \left(\left(\frac{R}{Q}\right)^\gamma - \varepsilon \right)^2. \quad (35)$$

Оценим математическое ожидание суммы $S(\xi_1, \xi_2)$. Принимая во внимание линейность математического ожидания из неравенств (34) и (35) получаем

$$\mathbb{E}(S) \geq \left(\left(\frac{R}{Q}\right)^\gamma - \varepsilon \right)^2 \sum_{i=0}^{V_1-1} \sum_{j=0}^{V_2-1} \mathbb{E}(X_{A^1(\xi_1)}(i) X_{A^2(\xi_2)}(j)) \frac{|f(\delta_i^1, \delta_j^2)|}{\lambda_{N_1+i}\lambda_{N_2+j}} + \sum_{i=0}^{W_1-1} \sum_{j=0}^{W_2-1} \mathbb{E}(X_{B^1(\xi_1)}(i) X_{B^2(\xi_2)}(j)) \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_{M_1+i}\lambda_{M_2+j}}.$$

По построению систем A^s и B^s имеем

$$\begin{aligned} E(X_{A^1(\xi_1)}(i)X_{A^2(\xi_2)}(j)) &= \left(\frac{Q}{R}\right)^2, \quad i = 0, \dots, V_1 - 1, \quad j = 0, \dots, V_2 - 1, \\ E(X_{B^1(\xi_1)}(i)X_{B^2(\xi_2)}(j)) &= \left(1 - \frac{Q}{R}\right)^2, \quad i = 0, \dots, W_1 - 1, \quad j = 0, \dots, W_2 - 1. \end{aligned}$$

Поэтому, используя неравенства (26) и (33), получаем оценку

$$E(S) \geq \left(\frac{Q}{R}\right)^2 \left(\left(\frac{R}{Q}\right)^\gamma - \varepsilon\right)^2 (1 - \varepsilon) + \left(1 - \frac{Q}{R}\right)^2 (1 - 3\varepsilon). \quad (36)$$

Значит, существуют такие значения величин ξ_1 и ξ_2 , что в этом случае для суммы $S(\xi_1, \xi_2)$ выполнена та же самая оценка (36). Зафиксируем эти значения до окончания доказательства.

Заметим теперь, что если к сумме $S(\xi_1, \xi_2)$ прибавить неотрицательный член

$$\begin{aligned} &\sum_{i'=0}^{|A^1(\xi_1)|-1} \sum_{j'=0}^{|B^2(\xi_2)|-1} \frac{|f(\delta_{a_{i'}}^1, \Delta_{b_{j'}}^2)|}{\lambda_{N'_1+i'}\lambda_{N'_2+j'}|A^2(\xi_2)|+j'} \\ &+ \sum_{i'=0}^{|B^1(\xi_1)|-1} \sum_{j'=0}^{|A^2(\xi_2)|-1} \frac{|f(\Delta_{b_{i'}}^1, \delta_{a_{j'}}^2)|}{\lambda_{N'_1+i'}|A^1(\xi_1)|+i'} \lambda_{N'_2+j'} \lambda_{N'_1+i'} \lambda_{N'_2+j'}, \end{aligned}$$

то получится двумерная вариационная сумма функции f по паре последовательностей $(\lambda_{N'_1+i'}, \lambda_{N'_2+j'})$, соответствующая паре систем неперекрывающихся отрезков (Ω^1, Ω^2) , где

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= (\delta_{a_0}^1, \delta_{a_1}^1, \dots, \delta_{a_{|A^1|-1}}^1, \Delta_{b_0}^1, \Delta_{b_1}^1, \dots, \Delta_{b_{|B^1|-1}}^1), \\ \Omega^2 &= (\delta_{a_0}^2, \delta_{a_1}^2, \dots, \delta_{a_{|A^2|-1}}^2, \Delta_{b_0}^2, \Delta_{b_1}^2, \dots, \Delta_{b_{|B^2|-1}}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$S(\xi_1, \xi_2) \leq \text{Var}_{(\lambda_{N'_1+i'}, \lambda_{N'_2+j'})} f(\cdot, \cdot) \leq \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N'_2+})} f(\cdot, \cdot).$$

Учитывая видоизмененное соотношение (36), в котором слева вместо величины $E(S)$ стоит $S(\xi_1, \xi_2)$, получаем

$$\text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N'_2+})} f(\cdot, \cdot) \geq S(\xi_1, \xi_2) \geq \alpha^2 (\alpha^{-\gamma} - \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon) + (1 - \alpha)^2 (1 - 3\varepsilon),$$

где число $\alpha = Q/R$.

Теперь заметим, что числа $\varepsilon > 0$ и $Q/R \in (0, 1)$ можно было взять произвольными, а при фиксированных ε , Q , R число N'_2 — сколь угодно большим. Отсюда следует, что

$$\lim_{N'_2 \rightarrow \infty} \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N'_2+})} f(\cdot, \cdot) \geq \alpha^{2(1-\gamma)} + (1 - \alpha)^2 \quad (37)$$

для любого рационального (а значит, и для любого действительного) $\alpha \in (0, 1)$. Согласно предположению (24) предел, стоящий в левой части неравенства (37), равен 1.

Теперь для того чтобы прийти к противоречию, осталось заметить, что при $\gamma > \frac{1}{2}$ неравенство

$$1 \geq f(\alpha) = \alpha^{2(1-\gamma)} + (1-\alpha)^2$$

не может быть выполнено, когда число α достаточно близко к нулю, поскольку значение функции f в нуле равно 1, а правая производная $f'_+(0) = +\infty$. Итак, наше предположение о том, что предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N+})} f(\cdot, \cdot) > 0$, привело к противоречию, а значит, этот предел равен нулю.

§ 3. Несовпадение классов ABV и CAV

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится одна вспомогательная

ЛЕММА 2. Пусть неубывающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ и число $\gamma \in [0, 1)$ таковы, что справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \leq 2^\gamma. \quad (38)$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon, \gamma, \{\lambda_n\})$, что при любых натуральных N и M , $N \geq \tilde{N}$, $M \leq N$, справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{n=0}^M (1/\lambda_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} (1/\lambda_n)} \leq C(\gamma) \left(\left(\frac{M}{N} \right)^{1-\gamma} + \varepsilon \right). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при $j = 1, 2, \dots$ суммы

$$\sigma_j = \sum_{n=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{\lambda_n}.$$

В силу неубывания λ_n при всех $j \geq 1$ мы имеем

$$\sigma_{j+1} = \sum_{n=2^{j-1}+1}^{2^j} \left(\frac{1}{\lambda_{2n-1}} + \frac{1}{\lambda_{2n}} \right) \geq \sum_{n=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{2}{\lambda_{2n}} \geq \frac{2}{\sup_{n \geq 2^{j-1}} (\lambda_{2n}/\lambda_n)} \sigma_j. \quad (40)$$

Положим $\tilde{\gamma} = (\gamma + 1)/2$ и выберем число $\gamma' \in (\gamma, \tilde{\gamma})$ столь близким к γ , что

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} |\alpha^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma'}| \leq \varepsilon. \quad (41)$$

В силу предельного соотношения (38) найдется такое число n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \leq 2^{\gamma'}. \quad (42)$$

Возьмем такое натуральное число r , что $n_0 \leq 2^{r-1}$, и положим

$$R = \sum_{n=0}^{2^{r-1}} \frac{1}{\lambda_n}.$$

В силу неравенства (40) величина σ_j стремится к бесконечности при $j \rightarrow \infty$. Поэтому мы выберем число $\tilde{N} \geq 2$ столь большим, что

$$\frac{2R}{\sigma_j} \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad j \geq \log_2 \tilde{N}. \quad (43)$$

Пусть теперь N и M – два натуральных числа, $N \geq \tilde{N}$ и $M \leq N$. Вследствие монотонности $\{\lambda_n\}$ справедлива оценка

$$\frac{\sum_{n=0}^M (1/\lambda_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} (1/\lambda_n)} \leq 2 \frac{\sum_{n=0}^M (1/\lambda_n)}{\sum_{n=0}^{2N-1} (1/\lambda_n)} \leq 2 \frac{\sum_{n=0}^M (1/\lambda_n)}{\sum_{n=0}^{2^k} (1/\lambda_n)} \leq 2 \frac{\sum_{n=0}^M (1/\lambda_n)}{\sigma_k} = A_1,$$

где натуральное число k таково, что $2^k \leq 2N - 1 \leq 2^{k+1} - 1$.

Если $M \leq 2^{r-1}$, то тогда

$$A_1 \leq 2 \left(\sum_{n=0}^{2^{r-1}} \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{1}{\sigma_k} \leq \frac{2R}{\sigma_k},$$

и ввиду неравенства (43) и того, что $k \geq \log_2 N \geq \log_2 \tilde{N}$, будем иметь

$$A_1 \leq \varepsilon.$$

Если же $M > 2^{r-1}$, то найдем такое натуральное l , что $2^{l-1} + 1 \leq M \leq 2^l$. Тогда верна оценка

$$A_1 \leq 2 \left(\sum_{n=0}^{2^l} \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{1}{\sigma_k} \leq \frac{2(\sigma_l + \sigma_{l-1} + \dots + \sigma_r + R)}{\sigma_k}.$$

Пользуясь соотношениями (40) и (42), мы получаем, что при $q \geq r$ справедлива цепочка неравенств

$$\frac{\sigma_{q+1}}{\sigma_q} \geq \frac{2}{\sup_{n \geq 2^{q-1}} (\lambda_{2n}/\lambda_n)} \geq \frac{2}{\sup_{n \geq n_0} (\lambda_{2n}/\lambda_n)} \geq 2^{1-\gamma'} \geq 2^{1-\tilde{\gamma}}.$$

Кроме того, так как $M \leq N$, то $l \leq k$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{2}{\sigma_k} \left(\sigma_l \left(1 + \frac{1}{2^{1-\tilde{\gamma}}} + \left(\frac{1}{2^{1-\tilde{\gamma}}} \right)^2 + \dots \right) + R \right) \leq \frac{2R}{\sigma_k} + C(\gamma) \frac{\sigma_l}{\sigma_k} \\ &\leq \varepsilon + C(\gamma) \left(2^{1-\gamma'} \right)^{l-k} = \varepsilon + C(\gamma) \left(\frac{2^l}{2^k} \right)^{1-\gamma'} \\ &\leq \varepsilon + C(\gamma) \left(\frac{2M}{N} \right)^{1-\gamma'} \leq \varepsilon + C(\gamma) \left(\frac{M}{N} \right)^{1-\gamma'}. \end{aligned}$$

Во всех перечисленных случаях

$$A_1 \leq \varepsilon + C(\gamma) \left(\left(\frac{M}{N} \right)^{1-\gamma} + \sup_{\alpha \in [0,1]} |\alpha^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma'}| \right) \leq C(\gamma) \left(\left(\frac{M}{N} \right)^{1-\gamma} + \varepsilon \right),$$

что и завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Определим при $k = 0, 1, 2, \dots$ числа $a_k = 1 - (1/(k+1))$. Рассмотрим функцию $r(y)$, определенную на действительной оси, равную нулю при $y = 0$ и $y = 1$, единице при $y = \frac{1}{2}$, линейную на отрезках $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ и периодическую с периодом 1. Для натуральных N положим $r_N(y) = r(Ny)$. Рассмотрим также последовательность функций $\{q_k(x)\}_{k \geq 1}$, определенных следующим образом: функция $q_k(x)$ равна нулю при $x \in [0, a_{k-1}] \cup [a_{k+1}, 1]$, единице при $x = a_k$ и линейна на отрезках $[a_{k-1}, a_k]$ и $[a_k, a_{k+1}]$. Определим так же, как и ранее, при $N \geq 0$ числа

$$\Lambda(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_n}.$$

При $k \geq 1$ положим $\varepsilon_k = 1/2^k$. Построим последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k \geq 0}$ и строго убывающую последовательность чисел $\{U_k\}_{k \geq 0}$, лежащих в интервале $(0, 1)$, обладающие следующими свойствами:

- i) $U_0 = 1/2$, $N_0 = 1$;
- ii) при всех $k \geq 1$ для любого семейства неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_j\}_{j=0}^{D-1}$, содержащихся в отрезке $[0, 1]$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j: |\Delta_j| \geq U_{k-1}} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \leq \varepsilon_k;$$

- iii) при $k \geq 1$ справедливо $1/(2N_k) \leq U_{k-1}$;
- iv) при $k \geq 1$ выполнено $N_k \geq \tilde{N}(\varepsilon_k, \gamma)$, где $\tilde{N}$ – то число, существование которого доказывается в лемме 2;
- v) $\Lambda(2N_k) \geq 4\Lambda(2N_{k-1})$, $k \geq 1$;
- vi) при всех $k \geq 1$ для любого семейства неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_j\}_{j=0}^{D-1}$, содержащихся в отрезке $[0, 1]$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j: |\Delta_j| \leq U_k} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \leq \varepsilon_k;$$

- vii) при $k \geq 1$ верно $U_k \leq 1/(2N_k)$.

Вначале мы положим, естественно, $U_0 = \frac{1}{2}$ и $N_0 = 1$. Предположим, что при некотором $k \geq 1$ все числа U_l , N_l с номерами $l < k$ уже построены.

Покажем, что при достаточно больших N_k требование п. ii) будет выполняться. Действительно, возьмем произвольный набор неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_j\}_{j=0}^{D-1}$, содержащихся в $[0, 1]$. Тогда количество тех отрезков Δ_j , длина которых не меньше U_{k-1} , не превосходит $[1/U_{k-1}] + 1$, а величина

$$|r_{N_k}(\Delta_j)| \leq \max_y r_{N_k}(y) - \min_y r_{N_k}(y) \leq 1.$$

Поэтому мы будем иметь

$$\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j: |\Delta_j| \geq U_{k-1}} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j=0}^{[1/U_{k-1}]} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Поскольку число U_{k-1} у нас фиксировано, а в силу условия (5) при $N \rightarrow \infty$ величина $\Lambda(N)$ стремится к бесконечности, то требование ii) действительно выполняется, когда N_k достаточно велико. Значит, мы можем выбрать N_k таким, чтобы для данного k выполнялись условия ii)–v).

Снова возьмем набор неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_j\}$ и рассмотрим выражение, которое оценивается в п. vi). Поскольку при любых y_1 и y_2 верно

$$|r_{N_k}(y_1) - r_{N_k}(y_2)| \leq 2N_k|y_1 - y_2|,$$

а сумма длин $\sum |\Delta_j| \leq 1$, то мы имеем

$$V = \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j: |\Delta_j| \leq U_k} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sup_{\substack{\{\alpha_j\}: \sum \alpha_j \leq 1 \\ 0 \leq \alpha_j \leq U_k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2N_k \alpha_j}{\lambda_j}.$$

Поскольку последовательность $\{1/\lambda_j\}$ не возрастает, то точная верхняя грань в последнем выражении достигается, когда

$$\begin{aligned} \alpha_j &= U_k, \quad j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{1}{U_k} \right\rfloor - 1, \\ \alpha_{[1/U_k]} &= 1 - \left\lfloor \frac{1}{U_k} \right\rfloor U_k, \quad \alpha_j = 0 \quad \text{при } j > \left\lfloor \frac{1}{U_k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо следующее:

$$V \leq \frac{2N_k}{\Lambda(2N_k)} U_k \sum_{j=0}^{[1/U_k]} \frac{1}{\lambda_j} \leq \frac{2N_k}{\Lambda(2N_k)} \frac{1}{[1/U_k]} \sum_{j=0}^{[1/U_k]} \frac{1}{\lambda_j} = W. \quad (44)$$

По условию теоремы последовательность $\{1/\lambda_j\}$ стремится к нулю, следовательно, выражение

$$\frac{1}{[1/U_k]} \sum_{j=0}^{[1/U_k]} \frac{1}{\lambda_j}$$

также стремится к нулю при $U_k \rightarrow +0$. Величина $2N_k/\Lambda(2N_k)$ у нас фиксирована. Значит, W может быть сделано сколь угодно малым при уменьшении U_k . Выберем $U_k < \min\{U_{k-1}, 1/(2N_k)\}$ таким, чтобы величина W не превосходила ε_k , и тогда требования п.п. vi), vii) будут выполнены.

Так мы построим все члены последовательностей $\{N_k\}$ и $\{U_k\}$.

Приступим к построению функции f в случае а). Мы определим $f(x, y)$ как сумму ряда

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda(2N_k)} r_{N_k}(y) q_k(x).$$

В силу условия v) этот ряд сходится равномерно на квадрате $[0, 1]^2$ к непрерывной функции. Поскольку $r_{N_k}(0) = q_k(0) = 0$, то функция $f(x, y)$ обращается в нуль, когда хотя бы один из ее аргументов равен нулю. Поэтому для того чтобы доказать, что f принадлежит классу $(\Lambda, \Lambda)BV$, достаточно показать, что ее двумерная (λ, λ) -вариация конечна.

Пусть $\{\delta_i\}_{i=0}^{d-1}$ и $\{\Delta_j\}_{j=0}^{D-1}$ — две системы отрезков, в каждой из которых отрезки не перекрываются и содержатся в $[0, 1]$. Рассмотрим при $k \geq 1$ множество Ω_k всех отрезков из семейства $\{\Delta_j\}$, длина которых удовлетворяет неравенству $U_{k-1} > |\Delta_j| > U_k$. Пусть L_k — это сумма длин всех отрезков из множества Ω_k . Ясно, отрезки из Ω_k не перекрываются между собой, а также с отрезками из $\Omega_{k'}$ при всех $k' \neq k$, а потому

$$\sum_{k \geq 1} L_k \leq 1.$$

Оценим λ -вариационную сумму функции f , соответствующую паре систем отрезков $(\{\delta_i\}, \{\Delta_j\})$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{D-1} \frac{|f(\delta_i, \Delta_j)|}{\lambda_i \lambda_j} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{D-1} \frac{|q_k(\delta_i)|}{\lambda_i} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{|q_k(\delta_i)|}{\lambda_i} \right) \left(\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j=0}^{D-1} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} G_k H_k. \end{aligned} \quad (45)$$

Величину H_k мы оценим следующим образом:

$$H_k \leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \left(\sum_{j: |\Delta_j| \geq U_{k-1}} + \sum_{j: |\Delta_j| \leq U_k} + \sum_{j: \Delta_j \in \Omega_k} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j)|}{\lambda_j} \right) = H_k^{(1)} + H_k^{(2)} + H_k^{(3)}.$$

Из условий ii) и vi) вытекает, что $H_k^{(1)} \leq \varepsilon_k$ и $H_k^{(2)} \leq \varepsilon_k$. Далее, величина $|r_{N_k}(\Delta_j)| \leq \min\{1, 2N_k |\Delta_j|\}$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} H_k^{(3)} &\leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j: \Delta_j \in \Omega_k} \frac{\min\{1, 2N_k |\Delta_j|\}}{\lambda_j} \\ &\leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sup_{\substack{\{\alpha_j\}: \sum \alpha_j \leq L_k \\ \alpha_j \geq 0}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\min\{1, 2N_k \alpha_j\}}{\lambda_j} \\ &= \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sup_{\substack{\{\alpha_j\}: \sum \alpha_j \leq L_k \\ 0 \leq \alpha_j \leq 1/(2N_k)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2N_k \alpha_j}{\lambda_j}. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве неравенства (44), получаем

$$H_k^{(3)} \leq \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j=0}^{[2N_k L_k]} \frac{1}{\lambda_j} = \frac{\sum_{j=0}^{[2N_k L_k]} (1/\lambda_j)}{\sum_{j=0}^{2N_k-1} (1/\lambda_j)} \leq C(\gamma)(L_k^{1-\gamma} + \varepsilon_k)$$

(в последнем переходе мы воспользовались условием iv) и леммой 2). В итоге имеем

$$H_k \leq C(\gamma)(L_k^{1-\gamma} + \varepsilon_k). \quad (46)$$

Оценим сумму G_k . Пусть при $k \geq 1$ множество O_k состоит из номеров всех тех отрезков δ_i , у которых хотя бы один конец принадлежит интервалу (a_{k-1}, a_{k+1}) , а $i(k)$ — это наименьший элемент O_k . Тогда мы будем иметь

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{|q_k(\delta_i)|}{\lambda_i} = \sum_{i \in O_k} \frac{|q_k(\delta_i)|}{\lambda_i} \leq \sum_{i \in O_k} |q_k(\delta_i)| \frac{1}{\min_{i \in O_k} \lambda_i} \leq \frac{2}{\lambda_{i(k)}}. \quad (47)$$

Подставляя оценки (46) и (47) в неравенство (45) и учитывая то, что сумма $\sum \varepsilon_k \leq C$, мы получаем

$$\sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{D-1} \frac{|f(\delta_i, \Delta_j)|}{\lambda_i \lambda_j} \leq C(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i(k)}} (L_k^{1-\gamma} + \varepsilon_k) \leq C(\gamma) + C(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k^{1-\gamma}}{\lambda_{i(k)}}.$$

Поскольку для любого номера i как правый, так и левый концы отрезка δ_i принадлежат самое большее двум интервалам вида (a_{k-1}, a_{k+1}) , то это i может принадлежать не более чем четырем множествам O_k при разных k . Значит, в последовательности $\{i(k)\}_{k \geq 1}$ каждый номер i участвует не более четырех раз. Поэтому, вспоминая о том, что сумма величин L_k не превосходит единицы, мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k^{1-\gamma}}{\lambda_{i(k)}} &\leq 4 \sup_{\substack{\{l_i\}: l_i \geq 0 \\ \sum l_i \leq 1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l_i^{1-\gamma}}{\lambda_i} = 4 \sup_{\substack{\{\beta_i\}: \beta_i \geq 0 \\ \sum \beta_i^{1/(1-\gamma)} \leq 1}} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \\ &= 4 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^{1/\gamma} \right)^{\gamma} \leq 4A^{\gamma}. \end{aligned}$$

Итак, вариационная сумма

$$\sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{D-1} \frac{|f(\delta_i, \Delta_j)|}{\lambda_i \lambda_j}$$

не превосходит константы, не зависящей от систем $(\{\delta_i\}, \{\Delta_j\})$, следовательно, функция f действительно принадлежит классу $(\Lambda, \Lambda)BV$.

Теперь возьмем натуральное число N и зафиксируем его. Рассмотрим при всех $k \geq 1$ систему неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_j^{(k)}\}_{j=N}^{2N_k-1}$, заданную следующим образом:

$$\Delta_j^{(k)} = \left[\frac{j}{2N_k}, \frac{j+1}{2N_k} \right].$$

Оценим соответствующую одномерную (λ_{N+}) -вариационную сумму функции $f(a_k, \cdot)$. Поскольку из всего семейства $\{q_l(x)\}$ лишь одна функция $q_k(x)$ отлична от нуля при $x = a_k$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{|f(a_k, \Delta_j^{(k)})|}{\lambda_j} &= \frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{q_k(a_k) |r_{N_k}(\Delta_j^{(k)})|}{\lambda_j} \\ &= \frac{\sum_{j=N}^{2N_k-1} (1/\lambda_j)}{\sum_{j=0}^{2N_k-1} (1/\lambda_j)} = 1 - \left(\frac{\sum_{j=0}^{N-1} (1/\lambda_j)}{\Lambda(2N_k)} \right) = 1 - \frac{S}{\Lambda(2N_k)}. \end{aligned}$$

Сумма S у нас фиксирована, а величина $\Lambda(2N_k)$ стремится к бесконечности при $k \rightarrow +\infty$. Значит, справедливо соотношение

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}_{\lambda_{N+}} f(a_k, \cdot) \leq \sup_{a \in [0,1]} \text{Var}_{\lambda_{N+}} f(a, \cdot)$$

и последняя величина не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Далее, поскольку при всех $a \in [0, 1]$ справедливо

$$\text{Var}_{\lambda_{N+}} f(a, \cdot) \leq \lambda_0 \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N+})} f(\cdot, \cdot) + \text{Var}_{\lambda_{N+}} f(0, \cdot) = \lambda_0 \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N+})} f(\cdot, \cdot) = \lambda_0 V,$$

то двумерная вариация V также не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Перейдем к построению функции f в случае б). Мы определим $f(x, y)$ как сумму равномерно сходящегося ряда

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{N_k}(x) r_{N_k}(y)}{(\Lambda(2N_k))^2}.$$

Ясно, что функция $f(x, y)$ обращается в нуль, когда хотя бы один из ее аргументов равен нулю. Поэтому для того чтобы доказать, что f принадлежит классу $(\Lambda, \Lambda)BV$, достаточно показать, что ее двумерная (λ, λ) -вариация конечна.

Пусть $\{\Delta_i^1\}_{i=0}^{D_1-1}$ и $\{\Delta_j^2\}_{j=0}^{D_2-1}$ — две системы отрезков, в каждой из которых отрезки не пересекаются и содержатся в $[0, 1]$. Рассмотрим при $k \geq 1$ и $s = 1, 2$ множество Ω_k^s всех отрезков из семейства $\{\Delta_j^s\}$, длина которых удовлетворяет неравенству $U_{k-1} > |\Delta_j^s| > U_k$. Пусть $L_{s,k}$ — это сумма длин всех отрезков из множества Ω_k^s . При $s = 1, 2$ справедливо неравенство

$$\sum_{k \geq 1} L_{s,k} \leq 1.$$

Оценим (λ, λ) -вариационную сумму функции f , соответствующую паре систем отрезков $(\{\Delta_i^1\}, \{\Delta_j^2\})$:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=0}^{D_1-1} \sum_{j=0}^{D_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_j} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{i=0}^{D_1-1} \frac{|r_{N_k}(\Delta_i^1)|}{\lambda_i} \right) \left(\frac{1}{\Lambda(2N_k)} \sum_{j=0}^{D_2-1} \frac{|r_{N_k}(\Delta_j^2)|}{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} H_{1,k} H_{2,k}. \end{aligned}$$

Действуя так же, как и при оценке величины H_k в предыдущем случае, получаем

$$H_{s,k} \leq C(\gamma)(L_{s,k}^{1-\gamma} + \varepsilon_k), \quad s = 1, 2.$$

Следовательно, для величины V справедлива оценка

$$\begin{aligned} V &\leq C(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} ((L_{1,k}^{1-\gamma} + \varepsilon_k)(L_{2,k}^{1-\gamma} + \varepsilon_k)) \\ &\leq C(\gamma) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (L_{1,k}^{1-\gamma} + \varepsilon_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (L_{2,k}^{1-\gamma} + \varepsilon_k)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C(\gamma) \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} L_{1,k}^{2(1-\gamma)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\quad \times \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} L_{2,k}^{2(1-\gamma)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского). Ясно, что сумма квадратов ε_k не превосходит единицы. Так как число $\gamma \leq \frac{1}{2}$, то степень $2(1-\gamma) \geq 1$, следовательно, с учетом того, что при $s = 1, 2$ величины $L_{s,k} \leq 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_{s,k}^{2(1-\gamma)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_{s,k} \leq 1.$$

Итак, вариационная сумма

$$\sum_{i=0}^{D_1-1} \sum_{j=0}^{D_2-1} \frac{|f(\Delta_i^1, \Delta_j^2)|}{\lambda_i \lambda_j}$$

не превосходит константы, не зависящей от систем $(\{\Delta_i^1\}, \{\Delta_j^2\})$, следовательно, функция f действительно принадлежит классу $(\Lambda, \Lambda)BV$.

Теперь возьмем натуральное число N и зафиксируем его. Рассмотрим при всех $k \geq 1$ пару систем неперекрывающихся отрезков $(\{\Delta_i^{1,k}\}_{i=0}^{2N_k-1}, \{\Delta_j^{2,k}\}_{j=N}^{2N_k-1})$, заданных следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_i^{1,k} &= \left[\frac{i}{2N_k}, \frac{i+1}{2N_k} \right], \quad i = 0, \dots, 2N_k - 1, \\ \Delta_j^{2,k} &= \left[\frac{j}{2N_k}, \frac{j+1}{2N_k} \right], \quad j = N, \dots, 2N_k - 1. \end{aligned}$$

Оценим соответствующую двумерную (λ, λ_{N+}) -вариационную сумму функции $f(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} W(k) &= \sum_{i=0}^{2N_k-1} \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{|f(\Delta_i^{1,k}, \Delta_j^{2,k})|}{\lambda_i \lambda_j} \\ &\geq \sum_{i=0}^{2N_k-1} \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{|r_{N_k}(\Delta_i^{1,k})| |r_{N_k}(\Delta_j^{2,k})|}{(\Lambda(2N_k))^2 \lambda_i \lambda_j} \\ &\quad - \sum_{l \geq 1, l \neq k} \sum_{i=0}^{2N_k-1} \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{|r_{N_l}(\Delta_i^{1,k})| |r_{N_l}(\Delta_j^{2,k})|}{(\Lambda(2N_l))^2 \lambda_i \lambda_j}. \end{aligned}$$

Длина любого из отрезков $\Delta_i^{1,k}$, $\Delta_j^{2,k}$ равна $1/(2N_k)$, а это число в силу неравенств iii) и vii) не принадлежит интервалу (U_l, U_{l-1}) при $l \neq k$. Следовательно, ввиду условий ii) и vi) справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{2N_k-1} \frac{|r_{N_l}(\Delta_i^{1,k})|}{\Lambda(2N_l)\lambda_i} \leq \varepsilon_l, \quad \sum_{j=N}^{2N_k-1} \frac{|r_{N_l}(\Delta_j^{2,k})|}{\Lambda(2N_l)\lambda_j} \leq \varepsilon_l.$$

Далее, при всех i, j величины $|r_{N_k}(\Delta_i^{1,k})| = |r_{N_k}(\Delta_j^{2,k})| = 1$, поэтому, вспоминая определение чисел $\Lambda(2N_k)$, мы получаем

$$\begin{aligned} W(k) &\geq \frac{\sum_{i=0}^{2N_k-1} \sum_{j=N}^{2N_k-1} (1/(\lambda_i \lambda_j))}{(\Lambda(2N_k))^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^2 \\ &\geq 1 - \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (1/\lambda_j)}{\Lambda(2N_k)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{S}{\Lambda(2N_k)}. \end{aligned}$$

Сумма S у нас фиксирована, а величина $\Lambda(2N_k)$ стремится к бесконечности при $k \rightarrow +\infty$. Значит, справедливо соотношение

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} W(k) \leq \text{Var}_{(\lambda, \lambda_{N+})} f(\cdot, \cdot)$$

и последняя величина не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Поскольку функция $f(x, y)$ симметрична по переменным x и y , то ее двумерная (λ_{N+}, λ) -вариация также не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of bounded generalized variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. №1. P. 107–117.
2. *Waterman D.* Generalized bounded variation – recent results and open questions // *Real Anal. Exchange.* 1979–1980. V. 5. P. 148–150.
3. *Foran J., Fleissner R.* A note on Λ -bounded variation // *Real Anal. Exchange.* 1978–1979. V. 4. P. 185–191.
4. *Саблин А. И.* Λ -вариация и ряды Фурье // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1987. №10. С. 66–68.
5. *Саблин А. И.* Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье. Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1987.
6. *Бахвалов А. Н.* Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость рядов Фурье // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. №12. С. 3–20.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: dragosh@mccme.ru, dragoshanski@mail.ru

Поступила в редакцию
19.07.2002