Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Оценки поперечников весовых соболевских классов, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 15–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:14:54

УДК 517.982.256

А. А. Васильева

Оценки поперечников весовых соболевских классов

В работе получены оценки колмогоровских поперечников весовых классов Соболева в метрике $L_{q,v}$, а также аппроксимативных чисел соответствующих операторов вложения.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, аппроксимативные числа, весовые классы Соболева, операторы Римана–Лиувилля.

§ 1. Введение

В работе оцениваются значения колмогоровских поперечников весовых классов Соболева на отрезке и полуоси в пространстве L_q с весом и аппроксимативных чисел оператора вложения.

Будем обозначать через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ соответственно множества натуральных, целых, неотрицательных целых, действительных и неотрицательных действительных чисел.

Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$. Если $b = +\infty$, то обозначение $[a, b]$ будем понимать как $[a, +\infty)$.

Для измеримого подмножества $E \subset \mathbb{R}$ через $L_0(E)$ обозначим пространство измеримых действительныхзначных функций на E , а через $L_0(E, \mathbb{R}_+)$ – множество неотрицательных измеримых функций на E . Каждой функции $f \in L_0(E)$ поставим в соответствие величину $\|f\|_q \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $0 < q \leq \infty$:

$$\|f\|_q = \|f\|_{L_q(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)|, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

При этом если $\|f\|_{L_q(E)} < \infty$, то будем писать $f \in L_q(E)$. Пусть $f \in L_0(E)$, $v \in L_0(E, \mathbb{R}_+)$, $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|f\|_{q,v} = \|f\|_{L_{q,v}(E)} := \|vf\|_{L_q(E)} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\};$$

$L_{q,v}(E)$ – пространство функций $f \in L_0(E)$ таких, что $\|f\|_{q,v} < \infty$; $L_{0,q,v} = L_{0,q,v}(E)$ – пространство $L_0(E)$ с полунормой $\|\cdot\|_{q,v}$. Если E – промежутки, то для $1 \leq q < \infty$ через $L_q^{\text{loc}}(E)$ обозначим множество функций f таких, что $|f|^q$ интегрируема на любом компактном подмножестве E .

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3233.2008.1).

Пусть $AC[a, b]$ – множество функций, абсолютно непрерывных на $[a, b]$ (в случае полуоси это означает, что ограничение функции на любой отрезок, содержащийся в $[a, +\infty)$, абсолютно непрерывно).

Для $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ определим весовой класс Соболева на отрезке или полуоси $[a, b]$ для некоторого веса $g \in L_0([a, b], \mathbb{R}_+)$, положив

$$W_{p,g}^r[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(r-1)} \in AC[a, b], \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[a, b]} \leq 1 \right\}$$

и считая, что если $g(x) = 0$ на множестве $E \subset [a, b]$ положительной меры, то для любой функции $f \in W_{p,g}^r[a, b]$ выполнено

$$\left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[a, b]} = \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p([a, b] \setminus E)}.$$

В частности,

$$W_{\infty, g}^r[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(r-1)} \in AC[a, b], |f^{(r)}(t)| \leq g(t) \text{ п.в.}\}.$$

Пусть X, Y – множества, $f_1, f_2: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$. Положим

$$f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y) \quad \text{или} \quad f_2(x, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x, y),$$

если существует положительная функция $c: Y \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f_1(x, y) \leq c(y)f_2(x, y)$ для любого $x \in X$;

$$f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y),$$

если $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y)$.

Всюду далее будем обозначать

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad q' = \frac{q}{q-1}, \quad \varkappa = \frac{1}{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

В ряде работ рассматривалась задача об ограниченности (компактности) оператора вложения класса $\{f \in W_{p,g}^r[a, b]: f^{(k)}(a) = 0, k = 0, \dots, r-1\}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, в пространство $L_{q,v}[a, b]$, эквивалентная задаче об ограниченности (компактности) двухвесового оператора Римана–Лиувилля

$$(I_{r,g,v,a}f)(x) = v(x) \int_a^x (x-t)^{r-1} g(t) f(t) dt \quad (1)$$

из пространства $L_p[a, b]$ в $L_q[a, b]$. Окончательный результат получен В. Д. Степановым в [1]–[3] (см. также его обобщения в работах [4]–[6]). В частности, критерий ограниченности имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА А. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $r \geq 1$, $1 \leq q < p \leq \infty$. Тогда

$$\|I_{r,g,v,a}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} A_0(q, p, r, g, v, a, b) + A_1(q, p, r, g, v, a, b) =: A_0 + A_1,$$

где

$$A_0 = \left(\int_a^b \left(\int_t^b (x-t)^{q(r-1)} v^q(x) dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(y) dy \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} g^{\frac{p}{p-1}}(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

$$A_1 = \left(\int_a^b \left(\int_t^b v^q(x) dx \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\int_a^t (t-y)^{\frac{p(r-1)}{p-1}} g^{\frac{p}{p-1}}(y) dy \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} v^q(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Пусть $r \geq 1$, $1 < p \leq q < \infty$. Тогда

$$\|I_{r,g,v,a}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} B_0(q,p,r,g,v,a,b) + B_1(q,p,r,g,v,a,b) =: B_0 + B_1,$$

где

$$B_0 = \sup_{t \in (a,b)} \left(\int_t^b (x-t)^{q(r-1)} v^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$B_1 = \sup_{t \in (a,b)} \left(\int_t^b v^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^t (t-x)^{\frac{p(r-1)}{p-1}} g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

В случае $[a,b] = \mathbb{R}_+$, $g(t) \equiv 1$ или $v(t) \equiv 1$ Д. В. Прохоровым (см. [7]) был получен более простой критерий ограниченности операторов $I_{r,1,v,0}: L_p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_q(\mathbb{R}_+)$ и $I_{r,g,1,0}: L_p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_q(\mathbb{R}_+)$, а также критерий их компактности.

ТЕОРЕМА В. Пусть $r > 0$, $p > \max(\frac{1}{r}, 1)$. Если $0 < q < p \leq \infty$, то

$$\|I_{r,1,v,0}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(r-\frac{1}{p})} \frac{qp}{p-q} \|v\|_{L_q[2^k, 2^{k+1}]}^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

$$\|I_{r,g,1,0}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(r+\frac{1}{q}-1)} \frac{qp}{p-q} \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}[2^k, 2^{k+1}]}^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Если $p \leq q < \infty$, то

$$\|I_{r,1,v,0}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(r-\frac{1}{p})} \|v\|_{L_q[2^k, 2^{k+1}]},$$

$$\|I_{r,g,1,0}\|_{L_p \rightarrow L_q} \underset{q,p,r}{\asymp} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(r+\frac{1}{q}-1)} \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}[2^k, 2^{k+1}]}.$$

Пусть X – линейное пространство с полунормой (возможно, принимающей бесконечные значения), $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ – совокупность подпространств в X размерности не выше n . Обозначим через $L(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов из X в нормированное пространство Y , через $\text{rk } A$ – размерность образа оператора $A: X \rightarrow Y$. Колмогоровским n -поперечником множества $M \subset X$ в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|_X,$$

а линейным n -поперечником (для нормированного пространства) – величина

$$\lambda_n(M, X) = \inf_{A \in L(X, X), \text{rk } A \leq n} \sup_{x \in M} \|x - Ax\|_X.$$

Аппроксимативные числа оператора $A \in L(X, Y)$ определяются как

$$\mathcal{A}_n(A) = \inf\{\|A - A_n\|_{X \rightarrow Y} : \text{rk } A_n \leq n\}.$$

Заметим, что если $\dim Y < \infty$ и $\ker A = \{0\}$, то $\mathcal{A}_n(A) = \lambda_n(AB_X)$, где $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.

В 60–70-е годы XX века изучались задачи о значениях поперечников функциональных классов в L_q (см. [8]–[13], а также [14]–[16]) и конечномерных шаров B_p^n в l_q^n . Здесь l_q^n , $1 \leq q \leq \infty$, – пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_q \equiv \|(x_1, \dots, x_n)\|_{l_q^n} = \begin{cases} (|x_1|^q + \dots + |x_n|^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } q < \infty, \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

B_p^n – единичный шар в l_p^n . А. Пич (см. [17]) и М. И. Стесин (см. [18]) показали, что при $p \geq q$

$$d_n(B_p^\nu, l_q^\nu) = \lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu) = (\nu - n)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Для случая $p < q$ Б. С. Кашиным (см. [11]) и Е. Д. Глускиным (см. [19]) был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА С. Если $1 < p \leq q < \infty$, то

$$d_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p}{\asymp} \Phi(n, \nu, p, q), \quad (2)$$

$$\lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p}{\asymp} \Psi(n, \nu, p, q), \quad (3)$$

где

$$\Phi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \min\left\{1, (\nu^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}})^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}}\right\}, & \text{если } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ \max\left\{\nu^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min(1, \nu^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}) \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, & \text{если } 1 \leq p < 2 \leq q \leq \infty, \\ \max\left\{\nu^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{1 - \frac{2}{p}}}\right\}, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq 2, \end{cases}$$

$$\Psi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \Phi(n, \nu, p, q), & \text{если } q \leq p', \\ \Phi(n, \nu, q', p'), & \text{если } p' < q. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $0 < c_1 < c_2 < 1$, $c_1 \nu \leq n \leq c_2 \nu$, то

$$d_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p,c_1,c_2}{\asymp} \begin{cases} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, & \text{если } p \geq q \text{ или } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ 1, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq 2, \\ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}, & \text{если } 1 \leq p < 2 \leq q \leq \infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p,c_1,c_2}{\asymp} \begin{cases} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, & \text{если } p \geq q, \\ 1, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ или } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}, & \text{если } 1 \leq p < 2 \leq q \leq \infty, q \leq p', \\ n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leq p < 2 \leq q \leq \infty, q > p'. \end{cases} \quad (5)$$

Порядки поперечников соболевских классов имеют следующий вид:

$$d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]) \underset{p, q, r}{\asymp} \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geq q \text{ или } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ n^{-r - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq 2, \\ n^{-r - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 < p < 2 \leq q \leq \infty, \end{cases} \quad (6)$$

$$\lambda_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]) \underset{p, q, r}{\asymp} \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geq q, \\ n^{-r - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ или } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ n^{-r - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 < p < 2 \leq q \leq \infty, q \leq p', \\ n^{-r - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}, & \text{если } 1 < p < 2 \leq q \leq \infty, q > p'. \end{cases} \quad (7)$$

В работах [20]–[26] изучалось асимптотическое поведение аппроксимативных чисел двухвесового оператора типа Харди (т.е. оператора Римана–Лиувилля при $r = 1$) и колмогоровских поперечников его образа на единичном шаре. В частности, при $q \leq p$, $g \in L_{p'}[a, b]$, $v \in L_q[a, b]$ в [21] была получена асимптотическая формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{A}_n(I_{1, g, v, a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n d_n(W_{p, g}^1[a, b], L_{q, v}[a, b]) = c_{qp} \|gv\|_{\mathcal{K}}, \quad (8)$$

где c_{qp} зависит только от q и p . При $1 < p < q \leq 2$ и $2 \leq p < q < \infty$ и некоторых ограничениях на веса (см. ниже) были найдены двусторонние асимптотические оценки аппроксимативных чисел $\mathcal{A}_n(I_{1, g, v, a})$ с точностью до мультипликативной константы, зависящей только от q и p . При $1 < p < 2 < q < \infty$ были найдены верхняя и нижняя оценки аппроксимативных чисел, имеющие одинаковые порядки по n , но с разными зависимостями мультипликативных констант от весов.

А. П. Буслаевым (см. [27]) для произвольных $r \in \mathbb{N}$ в случае $q \leq p$ и кусочно непрерывных весов доказано асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(W_{p, g}^r[a, b], L_{q, v}[a, b]) = \lambda_{rqp}^{-1} \|gv\|_{\mathcal{K}}, \quad (9)$$

где λ_{rqp} – первое собственное значение задачи

$$(-1)^{r+1} ((x^{(r)})_{(p)})^{(r)} + \lambda^q x_{(q)} = 0$$

с периодическими краевыми условиями, $h_{(\sigma)} = |h|^{\sigma-1} \operatorname{sgn} h$.

Для $r \geq 2$ и более общих весов оценки колмогоровских поперечников и аппроксимативных чисел были получены только в одновесовом случае. В [28] В. Н. Коноваловым и Д. Левиатаном были найдены порядки колмогоровских поперечников класса $W_{p, g}^r[0, 1]$ в пространстве $L_q[0, 1]$ в случае степенного веса g . В [29] Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степановым было показано, что если $q \leq p$, $1 < p < q \leq 2$ или $2 \leq p < q < \infty$, $[a, b] = \mathbb{R}_+$, $g \equiv 1$, а вес v удовлетворяет условию

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} 2^{s\mathcal{K}(r - \frac{1}{p})} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]}^{\mathcal{K}} < \infty, \quad (10)$$

то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n(I_{r,1,v,0})}{\lambda_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1])} \underset{q,p,r}{\lesssim} \|v\|_{\mathcal{K}}.$$

В случае $1 < p < 2 < q < \infty$ при некоторых дополнительных условиях на вес v была получена аналогичная верхняя оценка, в которой вместо $\|v\|_{\mathcal{K}}$ стоит величина $\beta(v)$, которая, вообще говоря, больше $\|v\|_{\mathcal{K}}$. Нижняя оценка

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n(I_{r,1,v,0})}{\lambda_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1])} \underset{q,p,r}{\gtrsim} \|v\|_{\mathcal{K}}$$

была получена при всех $1 < q, p < \infty$ в предположении, что вес v приближается снизу последовательностью интервальных ступенчатых функций. Аналогичные результаты были получены в случае, когда единичным является вес v . При этом условие (10) заменялось на

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} 2^{s\mathcal{K}(r+\frac{1}{q}-1)} \|g\|_{L_{p'}^{[2^s, 2^{s+1}]}}^{\mathcal{K}} < \infty. \quad (11)$$

Если весовой оператор Римана–Лиувилля не является ограниченным, то необходимо формально определить, что понимается под непрерывным вложением класса $W_{p,g}^r[a,b]$ в пространство $L_{q,v}[a,b]$. Кроме того, даже в случае $g \equiv 1$, $v \equiv 1$ соболевский класс не является компактным, так как содержит подпространство полиномов степени не выше $r-1$, поэтому для того чтобы задать оператор вложения, нужно сначала профакторизовать класс по этому подпространству. В [30] было дано следующее определение: существует непрерывное вложение $W_{p,g}^r[a,b]$ в $L_{q,v}[a,b]$, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$d_n(W_{p,g}^r[a,b], L_{0,q,v}[a,b]) < \infty. \quad (12)$$

Затем был получен критерий существования непрерывного вложения и введено понятие приведенного соболевского класса, для которого непрерывный линейный оператор вложения уже строится естественным образом. Кроме того, было показано, что во многих случаях асимптотические оценки поперечников не зависят от выбора приведенного соболевского класса.

Пусть $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Положим

$$\begin{aligned} (\tilde{I}_{r,g,v,\beta} f)(x) &= v(x) \int_x^\beta (t-x)^{r-1} g(t) f(t) dt, \\ I_{r,g,v}^{\alpha,\beta,k} &= \tilde{I}_{k,1,v,\beta} \circ I_{r-k,g,1,\alpha}, \quad \tilde{I}_{r,g,v}^{\alpha,\beta,k} = I_{k,1,v,\alpha} \circ \tilde{I}_{r-k,g,1,\beta}, \quad k = 1, \dots, r-1, \\ I_{r,g,v}^{\alpha,\beta,0} &= \tilde{I}_{r,g,v}^{\alpha,\beta,r} = I_{r,g,v,\alpha}, \quad I_{r,g,v}^{\alpha,\beta,r} = \tilde{I}_{r,g,v}^{\alpha,\beta,0} = \tilde{I}_{r,g,v,\beta}. \end{aligned}$$

(Если $\beta = \infty$, то операторы определяются на функциях с ограниченным носителем и затем продолжаются по непрерывности, если это возможно.) Критерий ограниченности таких операторов при $k = 1, \dots, r-1$ был получен в [31].

В работе [30] показано, что выполнение (12) эквивалентно следующему условию: существует разбиение $T_* = \{[\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{i_0}$ отрезка или полуоси $[a,b]$ такое,

что

$$\begin{aligned}
 i_0 &\underset{r}{\lesssim} k, \quad \{1, \dots, i_0\} = \bigcup_{\nu=1}^4 I_\nu, \\
 i \in I_1, \quad &\text{если } v|_{[\alpha_i, \beta_i]} \equiv 0, \\
 i \in I_2, \quad &\text{если } g|_{[\alpha_i, \beta_i]} \equiv 0 \text{ и } i \notin I_1, \\
 i \in I_3, \quad &\text{если } g \in L_{p'}^{\text{loc}}[\alpha_i, \beta_i), v \in L_q^{\text{loc}}[\alpha_i, \beta_i), \beta_i < +\infty \text{ и } i \notin I_1 \cup I_2, \\
 i \in I_4, \quad &\text{если } i \notin I_1 \cup I_2 \cup I_3, \beta_i < +\infty, g \in L_{p'}^{\text{loc}}(\alpha_i, \beta_i], v \in L_q^{\text{loc}}(\alpha_i, \beta_i] \\
 &\text{или } \beta_i = +\infty, g \in L_{p'}^{\text{loc}}[\alpha_i, +\infty), v \in L_q^{\text{loc}}[\alpha_i, +\infty).
 \end{aligned}$$

При этом если $i \in I_3$, то для некоторого $k_i \in \{0, \dots, r\}$

$$\|I_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i}\|_{L_p[\alpha_i, \beta_i] \rightarrow L_q[\alpha_i, \beta_i]} < \infty;$$

если $i \in I_4$, то для некоторого $k_i \in \{0, \dots, r\}$

$$\|\widehat{I}_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i}\|_{L_p[\alpha_i, \beta_i] \rightarrow L_q[\alpha_i, \beta_i]} < \infty.$$

В работе [30] также даны следующие определения приведенного соболевского класса $\widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$ и оператора вложения этого класса в $L_{q,v}[a, b]$.

Скажем, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, если существует функция φ такая, что $\|\varphi\|_{L_p[a,b]} \leq 1$ и $\frac{f^{(r)}}{g}|_{(\alpha_i, \beta_i)} = \varphi|_{(\alpha_i, \beta_i)}$ при $i \in I_1$, $f|_{(\alpha_i, \beta_i)} = 0$ при $i \in I_2$, $f|_{(\alpha_i, \beta_i)} = c_{r,k_i}^{-1} I_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i}(\varphi|_{(\alpha_i, \beta_i)})$ при $i \in I_3$, $f|_{(\alpha_i, \beta_i)} = c_{r,k_i}^{-1} \widehat{I}_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i}(\varphi|_{(\alpha_i, \beta_i)})$ при $i \in I_4$, где $c_{r,k_i} = (k_i - 1)!(r - k_i - 1)!$.

Пусть $M \subset L_{q,v}[a, b]$ – выпуклое центрально-симметричное множество, X_M – линейная оболочка M , $\|\cdot\|_M$ – функционал Минковского множества M , а $\mathcal{J}_{M \rightarrow L_{q,v}}$ – оператор тождественного вложения X_M в пространство $L_{q,v}[a, b]$, т.е.

$$X_M \ni x \xrightarrow{\mathcal{J}_{M \rightarrow L_{q,v}}} x \in L_{q,v}[a, b].$$

В частности, если $M = \widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, то $\|x\|_M = \|x\|_{\widehat{W}_{p,g}^r} = \left\| \frac{x^{(r)}}{g} \right\|_p$, где $x^{(r)}$ – производная r -го порядка в классическом смысле, определенная п.в. на $[a, b]$.

Если оператор $I_{r,g,v,a}: L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ ограничен, то класс $\widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$ можно определить как множество

$$\{I_{r,g,v,a}\varphi : \|\varphi\|_{L_p[a,b]} \leq 1\} = \{f \in W_{p,g}^r[a, b] : f(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0\}.$$

Приведем основные результаты работы.

Теорема 1 дает верхнюю оценку для колмогоровских поперечников класса $\widehat{W}_{p,g}^r([a, b]) = \{I_{r,g,1,a}\varphi : \|\varphi\|_p \leq 1\}$ в пространстве $L_{q,v}[a, b]$ и ашпроксимативных чисел оператора вложения $\mathcal{J}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}} = I_{r,g,v,a}$ (из условий выводится, что оператор $I_{r,g,v,a}$ непрерывен). Теорема 2 является ее естественным обобщением и доказывается аналогично. Для простоты изложения будет приведено только доказательство теоремы 1.

Введем необходимые обозначения.

Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p \leq \infty$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, для любого $c \in (a, b)$ выполнено $g \in L_{p'}[a, c]$, $v \in L_q[c, b]$. Положим

$$G(x) = \int_a^x g^{p'}(t) dt, \quad V(x) = \int_x^b v^q(t) dt.$$

Пусть $\rho_g > 1$, $\rho_v > 1$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выберем ξ_k и η_k так, чтобы $G(\xi_k) = \rho_g^{kp'}$ (если $G(x) < \rho_g^{kp'}$ для любого x , то полагаем $\xi_k = b$) и $V(\eta_k) = \rho_v^{kq}$ (если $V(x) < \rho_v^{kq}$ для любого x , то полагаем $\eta_k = a$).

Положим

$$\tilde{a} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \xi_k, \quad \tilde{b} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \eta_k, \quad \mathcal{Z} = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Далее без ограничения общности будем считать, что $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$. Для любого $\delta > 0$ множество $\mathcal{Z} \cap [a + \delta, b - \delta]$ конечно. Значит, множество $\mathcal{Z}$ можно упорядочить следующим образом: $\mathcal{Z} = \{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\zeta_k < \zeta_{k+1}$. Числа j_k и l_k зададим равенством $[\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\xi_{j_k}, \xi_{j_k+1}] \cap [\eta_{l_k+1}, \eta_{l_k}]$. Так как $(\xi_j, \xi_{j+1}) \cap (\xi_{j'}, \xi_{j'+1}) = \emptyset$ при $j \neq j'$ и $(\eta_{l+1}, \eta_l) \cap (\eta_{l'+1}, \eta_{l'}) = \emptyset$ при $l \neq l'$, то числа j_k и l_k определены однозначно. Положим

$$\varkappa_1 = \frac{1}{r + \frac{1}{q} - 1}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{r - \frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p \leq \infty$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) функция g возрастает, функция v убывает на (a, b) и $gv \in L_{\varkappa}[a, b]$;
- 2) $r = 1$ или функция v убывает на (a, b) ; существует такое $\rho_g > 1$, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v\|_{L_{\varkappa_1}[\xi_k, \xi_{k+1}]}^{\varkappa} \rho_g^{k\varkappa} < \infty;$$

- 3) $r = 1$ или функция g возрастает на (a, b) ; существует такое $\rho_v > 1$, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g\|_{L_{\varkappa_2}[\eta_{k+1}, \eta_k]}^{\varkappa} \rho_v^{k\varkappa} < \infty;$$

- 4) $r \geq 2$ и существуют $\rho_g, \rho_v > 1$ такие, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\zeta_{k+1} - \zeta_k|^{(r-1)\varkappa} \rho_g^{j_k \varkappa} \rho_v^{l_k \varkappa} < \infty;$$

- 5) $[a, b] = \mathbb{R}_+$, $g \equiv 1$ и выполнено условие (10);
- 6) $[a, b] = \mathbb{R}_+$, $v \equiv 1$ и выполнено условие (11).

Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b])}{d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1])} \underset{q,p,r}{\lesssim} \|gv\|_{\varkappa}, \quad (13)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}})}{\lambda_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1])} \underset{q,p,r}{\lesssim} \|gv\|_{\varkappa}. \quad (14)$$

Условие 2) теоремы 1 в случае $r = 1$ совпадает с условием теорем о верхней оценке аппроксимативных чисел в работах М. А. Лифшица, В. Линде [20] и Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степанова [26]. При этом если $1 < p < 2 < q < \infty$, то верхняя оценка аппроксимативных чисел оказывается точнее. Условия 5) и 6) при $q \leq p$, $1 < p < q \leq 2$ и $2 \leq p < q < \infty$ совпадают с условиями теоремы из работы Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степанова [29], а при $1 < p < 2 < q < \infty$ являются менее ограничительными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p \leq \infty$, $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{i_0} [\tau_{i-1}, \tau_i]$, при этом для каждого $i = 1, \dots, i_0$ функции $g_i = g|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$, $v_i = v|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ или $\tilde{g}_i(t) = g_i(-t)$, $\tilde{v}_i(t) = v_i(-t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 (второй случай возможен, если $\tau_i < \infty$). Тогда выполнены соотношения (13) и (14).

Следующая теорема дает нижнюю оценку колмогоровских поперечников и аппроксимативных чисел.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q, p \leq \infty$, $pr > 1$ или $q \leq 2$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $gv \in L_{\mathcal{K}}[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b])}{d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1])} &\underset{q,p,r}{\gtrsim} \|gv\|_{\mathcal{K}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n(\mathcal{J}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}})}{\lambda_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1])} &\underset{q,p,r}{\gtrsim} \|gv\|_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Следующая теорема обобщает результаты А. П. Буслаева (9) и Д. Эдмундса, Я. Ланга (8) на случай более общих весов. Она получается из (9) с помощью предельного перехода.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 2 при $q \leq p$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) = \lambda_{rq}^{-1} \|gv\|_{\mathcal{K}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из результатов работы [30] следует, что при выполнении условий теоремы 2 двусторонние асимптотические оценки для поперечников $d_n(W_{p,g}^r[a, b], L_{0,q,v}[a, b])$ будут иметь такой же вид, как в теоремах 2–4.

§ 2. Доказательство оценки сверху

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть множество $\mathcal{G} \subset L_0([a, b], \mathbb{R}_+)$ является выпуклым конусом и содержит все кусочно постоянные функции; $\Gamma, \Gamma_0: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) Γ, Γ_0 – однородные функции порядка 1;
- 2) функция $\Gamma - \Gamma_0$ выпукла;
- 3) если $g_1 \leq g_2$ п.в., то $\Gamma_0(g_1) \leq \Gamma_0(g_2)$;
- 4) для любого $c \in [a, b]$ выполнено $\Gamma(\chi_{[c,b]}) \leq \Gamma_0(\chi_{[c,b]})$ (соответственно $\Gamma(\chi_{[a,c]}) \leq \Gamma_0(\chi_{[a,c]})$);

5) если для любого $t \in [a, b]$ последовательность $g_n(t)$ возрастает, $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$, то $\Gamma(g_n) \rightarrow \Gamma(g)$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда для любой возрастающей (соответственно убывающей) функции $g \in \mathcal{G}$ выполнено $\Gamma(g) \leq \Gamma_0(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай возрастающих функций.

Пусть g – кусочно постоянная возрастающая неотрицательная функция. Тогда $g = \alpha \sum_{k=1}^m \lambda_k \chi_{[c_k, b]}$, где $\alpha \geq 0$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, $c_k \in [a, b]$. Так как функция $\Gamma - \Gamma_0$ выпукла, то

$$\Gamma\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \chi_{[c_k, b]}\right) - \Gamma_0\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \chi_{[c_k, b]}\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k (\Gamma(\chi_{[c_k, b]}) - \Gamma_0(\chi_{[c_k, b]})) \leq 0.$$

Отсюда и из однородности Γ и Γ_0 следует, что $\Gamma(g) \leq \Gamma_0(g)$.

Пусть g – произвольная возрастающая функция, $\Gamma_0(g) < \infty$. Возьмем последовательность $\{g_n\}$ кусочно постоянных возрастающих функций такую, что $\{g_n(t)\}$ возрастает и сходится к $g(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Тогда $\Gamma(g_n) \leq \Gamma_0(g_n) \leq \Gamma_0(g)$, $\Gamma(g_n) \rightarrow \Gamma(g)$ при $n \rightarrow \infty$, откуда $\Gamma(g) \leq \Gamma_0(g)$.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ возрастает, $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ убывает на (a, b) , $r \geq 1$. Тогда если $1 \leq q < p \leq \infty$, то

$$A_0(q, p, r, g, v, a, b) + A_1(q, p, r, g, v, a, b) \lesssim_{q, p, r} \|gv\|_{\mathcal{X}};$$

если $1 < p \leq q < \infty$, то

$$B_0(q, p, r, g, v, a, b) + B_1(q, p, r, g, v, a, b) \lesssim_{q, p, r} \|gv\|_{\mathcal{X}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \geq p$, $t \in (a, b)$, $c_1, c_2 \in [a, b]$, $g = \chi_{[c_1, b]}$, $v = \chi_{[a, c_2]}$.

Если $c_2 \leq t$, то $\int_t^b (x - t)^{q(r-1)} v^q(x) dx = 0$; если $c_1 \geq t$, то $\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx = 0$.

Пусть $c_1 < t < c_2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^b (x - t)^{q(r-1)} v^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ & \leq (c_2 - t)^{r-1 + \frac{1}{q}} (t - c_1)^{1 - \frac{1}{p}} \leq (c_2 - c_1)^{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} = \|gv\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $g = \chi_{[c_1, b]}$, $v = \chi_{[a, c_2]}$, то

$$\left(\int_t^b (x - t)^{q(r-1)} v^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \|gv\|_{\mathcal{X}}. \quad (15)$$

Положим $w(x) = v^q(x)$. Тогда (15) переписывается в виде

$$\left(\int_t^b (x - t)^{q(r-1)} w(x) dx \right) \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{q \frac{p-1}{p}} \leq \|g^q w\|_{\frac{q}{q-1}}. \quad (16)$$

Из (обратного) неравенства Минковского (см. [32; теорема 198]) следует, что разность левой и правой частей (16) выпукла по $w \in L_1([a, b], \mathbb{R}_+)$, поэтому в силу леммы 1 неравенство (16) выполнено для всех убывающих функций $w \in L_1([a, b], \mathbb{R}_+)$ и функций $g = \chi_{[c, b]}$; значит, для любой убывающей функции $v \in L_q([a, b], \mathbb{R}_+)$ выполнено (15). Аналогичные рассуждения дают (15) для любой возрастающей функции g и любой убывающей функции v . В силу произвольности t отсюда следует, что $B_0(q, p, r, g, v, a, b) \leq \|gv\|_{\mathcal{K}}$. Аналогичная оценка выполнена для $B_1(q, p, r, g, v, a, b)$.

Пусть $q < p$. Оценим $A_0 = A_0(q, p, r, g, v, a, b)$. Пусть $g = \chi_{[c_1, b]}$, $v = \chi_{[a, c_2]}$. Если $t \geq c_2$, то

$$\int_t^b (x-t)^{q(r-1)} v^q(x) dx = 0;$$

если $t < c_1$, то $g^{\frac{p}{p-1}}(t) = 0$. Поэтому при $c_1 \geq c_2$ выполнено $A_0(q, p, r, g, v, a, b) = 0$, а при $c_1 < c_2$

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(\int_{c_1}^{c_2} \left(\int_t^{c_2} (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_{c_1}^t 1 dy \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{c_1}^{c_2} (c_2-t)^{\frac{(qr-q+1)p}{p-q}} (t-c_1)^{\frac{(q-1)p}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \leq (c_2 - c_1)^{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} = \|gv\|_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $g = \chi_{[c_1, b]}$, $v = \chi_{[a, c_2]}$, то

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b \left(\int_t^b (x-t)^{q(r-1)} v^q(x) dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(y) dy \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} g^{\frac{p}{p-1}}(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\leq \|gv\|_{\mathcal{K}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $q < p$, то $r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 1$. В силу неравенств Минковского разность левой и правой частей (17) выпукла по $v \in L_q([a, b], \mathbb{R}_+)$. Условие 5) леммы 1 следует из теоремы Б. Леви, а остальные условия легко проверяются. Значит, неравенство (17) выполнено для всех убывающих функций v и для $g = \chi_{[c, b]}$.

С помощью интегрирования по частям получаем, что для любой ограниченной функции g и любой ограниченной неотрицательной функции v с ограниченным носителем левая часть (17) равна

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^t g^{\frac{p}{p-1}}(y) dy \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \varphi_v(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

где φ_v – некоторая ограниченная функция. Отсюда и из неравенств Минковского следует условие 2) леммы 1 относительно g . Значит, по лемме 1 неравенство (17) выполнено для всех ограниченных убывающих финитных $v \in L_q([a, b], \mathbb{R}_+)$ и ограниченных возрастающих $g \in L_{\frac{p}{p-1}}([a, b], \mathbb{R}_+)$. От условия ограниченности и финитности можно избавиться в силу теоремы Б. Леви.

Аналогично оценивается $A_1(q, p, r, g, v, a, b)$.

Лемма 2 доказана.

Пусть $f \in L_{q,v}[a, b]$, $T = \{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^n$ – разбиение $[a, b]$. Положим

$$\|f\|_{q,p,T,v} = \left(\sum_{i=1}^n \|f\|_{L_{q,v}[t_{i-1}, t_i]}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (18)$$

где $\sigma = \min\{q, p\}$, $L_{q,p,T,v}[a, b]$ – пространство измеримых функций f таких, что $\|f\|_{q,p,T,v} < \infty$. Определим отображение $P_T: AC^{r-1}[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$ следующим образом: для $f \in AC^{r-1}[a, b]$ функция $(P_T f)|_{[t_{i-1}, t_i]}$ является многочленом Тейлора функции f степени $r-1$ в точке t_{i-1} , $1 \leq i \leq n$.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in W_{p,g}^r[a, b]$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ возрастает, $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ убывает на (a, b) , разбиение $T = \{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^n$ таково, что

$$\int_{[t_{i-1}, t_i]} (gv)^\varkappa dt = \frac{1}{n} \int_{[a, b]} (gv)^\varkappa dt.$$

Тогда

$$\|f - P_T f\|_{q,p,T,v} \underset{q,p,r}{\lesssim} \|gv\|_\varkappa n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$v(t)(f(t) - P_T f(t)) = \frac{1}{(r-1)!} I_{r,g,v,t_{i-1}} \frac{f^{(r)}(t)}{g}(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

теоремы [A](#), леммы [2](#) и определения разбиения T следует, что

$$\begin{aligned} \|f - P_T f\|_{q,p,T,v} &\underset{r}{\asymp} \left(\sum_{i=1}^n \left\| I_{r,g,v,t_{i-1}} \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_q[t_{i-1}, t_i]}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\underset{q,p,r}{\lesssim} \left(\sum_{i=1}^n \|gv\|_{L_\varkappa[t_{i-1}, t_i]}^\sigma \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[t_{i-1}, t_i]}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= \|gv\|_{L_\varkappa[a, b]} n^{-r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[t_{i-1}, t_i]}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\leq \|gv\|_{L_\varkappa[a, b]} n^{-r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[t_{i-1}, t_i]}^p \right)^{\frac{1}{p}} n^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})_+} \\ &= \|gv\|_{L_\varkappa[a, b]} n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \end{aligned}$$

(предпоследнее соотношение следует из неравенства Гёльдера).

Лемма [3](#) доказана.

Пусть $t_0, t_1 \in [a, b]$, $t_0 < t_1$.

ЛЕММА 4. Положим

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi(x, t_0) = \left(\int_{t_0}^x g(y)^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ W(x) &= W(x, t_1) = \left(\int_x^{t_1} v(y)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Пусть $q < p$. Тогда для $i = 0, 1$ в случае 2) теоремы 1

$$A_i(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \|v\Psi\|_{L_{\asymp_1}[t_0, t_1]}; \quad (19)$$

в случае 3)

$$A_i(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \|gW\|_{L_{\asymp_2}[t_0, t_1]}; \quad (20)$$

в случае 4)

$$A_i(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \|\Psi W\|_{L_{\frac{1}{r-1}}[t_0, t_1]}. \quad (21)$$

Пусть $q \geq p$. Тогда в случае 2)

$$B_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \sup_{t \in (t_0, t_1)} \|v\|_{L_{\asymp_1}[t, t_1]} \Psi(t), \quad (22)$$

$$B_1(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \|v\Psi\|_{L_{\asymp_1}[t_0, t_1]}; \quad (23)$$

в случае 3)

$$B_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \|gW\|_{L_{\asymp_2}[t_0, t_1]}, \quad (24)$$

$$B_1(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \sup_{t \in (t_0, t_1)} \|g\|_{L_{\asymp_2}[t_0, t]} W(t); \quad (25)$$

в случае 4)

$$B_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \sup_{t \in (t_0, t_1)} \Psi(t) \|W\|_{L_{\frac{1}{r-1}}[t, t_1]}, \quad (26)$$

$$B_1(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \sup_{t \in (t_0, t_1)} W(t) \|\Psi\|_{L_{\frac{1}{r-1}}[t_0, t]}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $a < t_0 < t_1 < b$ (случаи $t_0 = a$ или $t_1 = b$ получаются применением теоремы Б. Леви).

Пусть $q < p$. Сначала оценим $A_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1)$ в случаях 2) и 4) теоремы 1. Положим

$$w_r(t) = \left(\int_t^{t_1} v^q(x) (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

Функция w_r абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, и ее производная неположительна. Пусть

$$\varphi(t) = \Psi^{\frac{p}{p-1}}(t) = \int_{t_0}^t g^{\frac{p}{p-1}}(y) dy.$$

Тогда

$$(\varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}})'(t) = \frac{q(p-1)}{p-q} \left(\int_{t_0}^t g(y)^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} g(t)^{\frac{p}{p-1}}, \quad (28)$$

поэтому, интегрируя по частям, получим

$$A_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1) \lesssim_{q,p,r} \left(- \int_{t_0}^{t_1} w_r'(t) \varphi(t)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} = \tilde{A}. \quad (29)$$

Если $\varphi = \chi_{[\tau, t_1]}$, $\tau \in (t_0, t_1)$, то

$$\tilde{A}^{\frac{qp}{p-q}} = - \int_{\tau}^{t_1} w'_r(t) dt = w_r(\tau).$$

В случае 2) (если $r = 1$ или функция v убывает)

$$\left(\int_{\tau}^{t_1} v(x)^q (x - \tau)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \underset{q, r}{\lesssim} \left(\int_{\tau}^{t_1} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}}.$$

Действительно, если $r = 1$, то это очевидно. Если $r \geq 2$, то в силу неравенств Минковского левая часть неравенства выпукла и однородна порядка 1 по v , а правая вогнута и однородна порядка 1. Значит, в силу леммы 1 достаточно рассмотреть $v = \chi_{[\tau, \sigma]}$, а в этом случае неравенство легко проверяется.

Рассмотрим случай 4). Так как $r \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \left(\int_{\tau}^{t_1} v(x)^q (x - \tau)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} &\underset{q, r}{\lesssim} \left(\int_{\tau}^{t_1} W(x)^q (x - \tau)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\underset{q, r}{\lesssim} \left(\int_{\tau}^{t_1} W(x)^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1}. \end{aligned}$$

Первое неравенство следует из формулы интегрирования по частям. Второе неравенство легко проверяется для $W = \chi_{[\tau, \sigma]}$, а в случае произвольной убывающей функции W оно следует из леммы 1, так как его левая часть выпукла, а правая вогнута по W при $r \geq 2$.

Таким образом, в случае 2)

$$\left(- \int_{t_0}^{t_1} w'_r(t) \chi_{[\tau, t_1]}(t)^{\frac{p}{p-q}} dt \right)^{1-\frac{q}{p}} \underset{q, p, r}{\lesssim} \left(\int_{t_0}^{t_1} \chi_{[\tau, t_1]}(x)^{\frac{1}{q(r-1)+1}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{q(r-1)+1},$$

а в случае 4)

$$\left(- \int_{t_0}^{t_1} w'_r(t) \chi_{[\tau, t_1]}(t)^{\frac{qp}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{q, p, r}{\lesssim} \left(\int_{t_0}^{t_1} \chi_{[\tau, t_1]}(x)^{\frac{1}{r-1}} W(x)^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1}.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что для любой возрастающей функции F в случаях 2) и 4) соответственно выполнено

$$\left(- \int_{t_0}^{t_1} w'_r(t) F(t)^{\frac{p}{p-q}} dt \right)^{1-\frac{q}{p}} \underset{q, p, r}{\lesssim} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x)^{\frac{1}{q(r-1)+1}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{q(r-1)+1}$$

и

$$\left(- \int_{t_0}^{t_1} w'_r(t) F(t)^{\frac{qp}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{q, p, r}{\lesssim} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x)^{\frac{1}{r-1}} W(x)^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1}.$$

Подставив в эти выражения соответственно $F(x) = \Psi(x)^q$ и $F(x) = \Psi(x)$ и воспользовавшись соотношением (29), получим (19) и (21) для $i = 0$.

Теперь оценим $A_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1)$ в случае 3). Если $r = 1$, то доказательство соотношения (20) проводится аналогично доказательству в случае 2). Пусть $r \geq 2$. Тогда из (28) и формулы интегрирования по частям следует, что

$$\begin{aligned} A_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1) &\lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_t^{t_1} W(x)^q (x-t)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{p}{p-q}} (\varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}})'(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{t_1} W(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} g(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{r-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Докажем второе неравенство. В силу леммы 1 его достаточно проверить для $W = \chi_{[t_0, \tau]}$. Нужно показать, что

$$\left(\int_{t_0}^{\tau} \left(\int_t^{\tau} (x-t)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{p}{p-q}} (\varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}})'(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{\tau} g(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{r-\frac{1}{p}}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{t_0}^{\tau} \left(\int_t^{\tau} (x-t)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{p}{p-q}} (\varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}})'(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{\tau} (\tau-t)^{\frac{qp}{p-q}(r-1)} (\varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}})'(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{\tau} (\tau-t)^{\frac{qp}{p-q}(r-1)-1} \varphi^{\frac{q(p-1)}{p-q}}(t) dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{t_0}^{\tau} (\tau-t)^{\frac{qp}{p-q}(r-1)-1} \left(\int_{t_0}^t g^{\frac{p}{p-1}}(s) ds \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} dt \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} =: \tilde{B}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\tilde{B} \lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{\tau} g(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{r-\frac{1}{p}}.$$

Так как правая часть вогнута по g , а $\tilde{B}$ выпукла, то в силу леммы 1 достаточно рассмотреть $g = \chi_{[\sigma, \tau]}$, а в этом случае неравенство легко проверяется.

Величина $A_1(q, p, r, g, v, t_0, t_1)$ оценивается аналогично.

Теперь рассмотрим случай $q \geq p$. Оценим $B_0(q, p, r, g, v, t_0, t_1)$ (величина $B_1(q, p, r, g, v, t_0, t_1)$ оценивается аналогично). Рассмотрим случай 2) теоремы 1. Если $r = 1$, то неравенство (22) очевидно. Если $r \geq 2$, то функция

$$\Gamma_0(v) = \left(\int_t^{t_1} v(x)^{\varkappa_1} dx \right)^{\frac{1}{\varkappa_1}}$$

вогнута, а функция

$$\Gamma(v) = \left(\int_t^{t_1} (x-t)^{q(r-1)} v(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

выпукла по v . Так как функция v убывает, то в силу леммы 1

$$\left(\int_t^{t_1} v(x)^q (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \underset{q,r}{\lesssim} \left(\int_t^{t_1} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}},$$

откуда следует (22). В случае 4)

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^{t_1} v(x)^q (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \lesssim \left(\int_t^{t_1} W(x)^q (x-t)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{1}{q}} \underset{q,r}{\lesssim} \left(\int_t^{t_1} W(x)^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1}. \end{aligned}$$

Первое неравенство получается интегрированием по частям, последнее неравенство следует из леммы 1. Значит, выполнено (26). Рассмотрим случай 3). Положим $\psi(x) = g(x)^{\frac{p}{p-1}}$. Тогда (24) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (t_0, t_1)} \left(\int_t^{t_1} v(x)^q (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{p}{q(p-1)}} \left(\int_{t_0}^t \psi(x) dx \right) \\ & \lesssim_{q,p,r} \left(\int_{t_0}^{t_1} \psi(x)^{\frac{p-1}{p}} W(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{pr-1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Левая часть выпукла по ψ , а правая вогнута, поэтому достаточно рассмотреть $\psi = \chi_{[\tau, t_1]}$. Таким образом, нужно доказать неравенство

$$\sup_{t \in (\tau, t_1)} \left(\int_t^{t_1} v(x)^q (x-t)^{q(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} (t-\tau)^{1-\frac{1}{p}} \underset{q,p,r}{\lesssim} \left(\int_{\tau}^{t_1} W(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{r-\frac{1}{p}}. \quad (30)$$

Если $r = 1$, то (30) эквивалентно неравенству

$$\sup_{t \in (\tau, t_1)} (t-\tau) \widetilde{W}(t) \lesssim_{q,p,r} \int_{\tau}^{t_1} \widetilde{W}(x) dx,$$

где $\widetilde{W}(t) = W(t)^{\frac{p}{p-1}}$. Последнее неравенство следует из леммы 1, так как функция $\widetilde{W}$ убывает. Если $r \geq 2$, то правая часть (30) вогнута по W , а левая часть равна

$$q^{\frac{1}{q}} (r-1)^{\frac{1}{q}} \sup_{t \in (\tau, t_1)} \left(\int_t^{t_1} W(x)^q (x-t)^{q(r-1)-1} dx \right)^{\frac{1}{q}} (t-\tau)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Эта функция выпукла по W , поэтому в силу леммы 1 она оценивается через правую часть неравенства (30).

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $k, l \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $k < l$. Тогда

$$\begin{aligned} \|I_{r,1,v,2^k}\|_{L_p[2^k,2^l] \rightarrow L_q[2^k,2^l]} & \lesssim_{q,p,r} \left(\sum_{s=k}^{l-1} \|v\|_{L_q[2^s,2^{s+1}]}^{\mathcal{K}} 2^{s\mathcal{K}(r-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{\mathcal{K}}}, \\ \|I_{r,g,1,2^k}\|_{L_p[2^k,2^l] \rightarrow L_q[2^k,2^l]} & \lesssim_{q,p,r} \left(\sum_{s=k}^{l-1} \|g\|_{L_{p'}[2^s,2^{s+1}]}^{\mathcal{K}} 2^{s\mathcal{K}(r+\frac{1}{q}-1)} \right)^{\frac{1}{\mathcal{K}}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично). Продолжим функцию v нулем на $[0, +\infty) \setminus [2^k, 2^l]$. Тогда выполнено $\|I_{r,1,v,2^k}\|_{L_p[2^k,2^l] \rightarrow L_q[2^k,2^l]} \leq \|I_{r,1,v,0}\|_{L_p[0,\infty) \rightarrow L_q[0,\infty)}$. В силу теоремы В если $q \geq p$, то

$$\begin{aligned} \|I_{r,1,v,0}\|_{L_p[0,\infty) \rightarrow L_q[0,\infty)} &\lesssim \sup_{q,p,r} \sup_{s \in \mathbb{Z}} 2^{s(r-\frac{1}{p})} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]} \\ &= \sup_{k \leq s \leq l-1} 2^{s(r-\frac{1}{p})} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]} \leq \left(\sum_{s=k}^{l-1} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]}^{\frac{1}{\kappa}} 2^{s\kappa(r-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \end{aligned}$$

если $q < p$, то

$$\begin{aligned} \|I_{r,1,v,0}\|_{L_p[0,\infty) \rightarrow L_q[0,\infty)} &\lesssim \left(\sum_{q,p,r} 2^{s(r-\frac{1}{p})-\frac{qp}{p-q}} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]}^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{s=k}^{l-1} 2^{s(r-\frac{1}{p})-\frac{qp}{p-q}} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]}^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{s=k}^{l-1} \|v\|_{L_q[2^s, 2^{s+1}]}^{\frac{1}{\kappa}} 2^{s\kappa(r-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Для $\nu \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ определим функцию множества Φ_ν :

$$\begin{aligned} \Phi_2(A) &= \left(\int_A v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{\frac{r-1+\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int_A g(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1-\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}, \\ \Phi_3(A) &= \left(\int_A g(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{r-\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int_A v(x)^q dx \right)^{\frac{\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}, \\ \Phi_4(A) &= \left(\int_A g(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1-\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int_A v(x)^q dx \right)^{\frac{\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} |A|^{\frac{r-1}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}, \\ \Phi_5(A) &= \left(\int_A v(x)^q dx \right)^{\frac{\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} |A|^{\frac{r-\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}, \\ \Phi_6(A) &= \left(\int_A g(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1-\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} |A|^{\frac{r+\frac{1}{q}-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi_\nu(A_1 \sqcup A_2) \geq \Phi_\nu(A_1) + \Phi_\nu(A_2). \quad (31)$$

Докажем это для $\nu = 4$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Из неравенства Гёльдера следует, что если $x_j \geq 0$, $y_j \geq 0$, $z_j \geq 0$, $j = 1, 2$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то

$$x_1^\alpha y_1^\beta z_1^\gamma + x_2^\alpha y_2^\beta z_2^\gamma \leq (x_1 + x_2)^\alpha (y_1 + y_2)^\beta (z_1 + z_2)^\gamma.$$

Искомое неравенство получается, если положить

$$\begin{aligned} x_j &= \int_{A_j} g(x)^{\frac{p}{p-1}} dx, \quad y_j = \int_{A_j} v(x)^q dx, \quad z_j = |A_j|, \quad j = 1, 2, \\ \alpha &= \frac{1-\frac{1}{p}}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{q}}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \gamma = \frac{r-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Из свойств интеграла Лебега следует, что функция $\varphi(t) := \Phi_\nu([t_0, t])$ непрерывна на $[t_0, t_1] \subset [a, b]$, если $g \in L_{\frac{p}{p-1}}[t_0, t_1]$, $v \in L_q[t_0, t_1]$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнено условие 2), 3), 4), 5) или 6) теоремы 1 (номер этого условия обозначим ν). Тогда справедливы неравенства

$$\|I_{r,g,v,t_0}\|_{L_p[t_0,t_1] \rightarrow L_q[t_0,t_1]} \lesssim_{q,p,r} \Phi_\nu([t_0, t_1])^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu \in \{2, 3, 4\}$. Так как функция Ψ из леммы 4 возрастает, а функция W убывает, то правые части соотношений (19)–(27) оцениваются сверху через $\Phi_\nu([t_0, t_1])^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$, поэтому

$$\begin{aligned} A_i(q, p, r, g, v, t_0, t_1) &\lesssim_{q,p,r} \Phi_\nu([t_0, t_1])^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & i = 0, 1, \quad q < p, \\ B_i(q, p, r, g, v, t_0, t_1) &\lesssim_{q,p,r} \Phi_\nu([t_0, t_1])^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & i = 0, 1, \quad q \geq p. \end{aligned}$$

В силу теоремы А получаем утверждение. Случай $\nu \in \{5, 6\}$ легко получаются непосредственно с помощью неравенства Гёльдера.

Следствие доказано.

Для произвольного отрезка $[\alpha, \beta]$ обозначим через $\mathfrak{M}[\alpha, \beta]$ множество всех его измеримых подмножеств.

ЛЕММА 6. Пусть функция $\Phi: \mathfrak{M}[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что $\Phi(A_1) + \Phi(A_2) \leq \Phi(A_1 \sqcup A_2)$ для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}[\alpha, \beta]$, и функция $\varphi_\tau(t) = \Phi([\tau, t])$ непрерывна на $[\tau, \beta]$ для любого $\tau \in [\alpha, \beta]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует семейство разбиений $\{T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ со следующими свойствами:

- 1) для любого отрезка $\Delta \in T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}$ выполнено $\Phi(\Delta) \leq \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{2^m n}$;
- 2) $T_{n,m+1}^{[\alpha,\beta],\Phi}$ является измельчением $T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}$;
- 3) каждый отрезок из $T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}$ является объединением двух отрезков из разбиения $T_{n,m+1}^{[\alpha,\beta],\Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = 0$. Положим $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$. Пусть $1 \leq k \leq n-1$ и точка t_{k-1} построена. Если $\Phi([t_{k-1}, \beta]) \geq \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{n}$, то выбираем $t_k \geq t_{k-1}$ так, что $\Phi([t_{k-1}, t_k]) = \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{n}$ (это можно сделать в силу монотонности и непрерывности функции $\varphi_{t_{k-1}}$), иначе полагаем $t_k = \beta$. Построенное разбиение $\{[t_{k-1}, t_k]\}_{1 \leq k \leq n}$ обозначим $T_{n,0}^{[\alpha,\beta],\Phi}$. Тогда если $1 \leq k \leq n-1$, то по построению $\Phi([t_{k-1}, t_k]) = \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{n}$ в случае $t_k < \beta$, $\Phi([t_{k-1}, t_k]) \leq \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{n}$ в случае $t_k = \beta$. Если $t_{n-1} < \beta$, то

$$\Phi([t_{n-1}, \beta]) \leq \Phi([\alpha, \beta]) - \sum_{k=1}^{n-1} \Phi([t_{k-1}, t_k]) \leq \frac{\Phi([\alpha, \beta])}{n}.$$

Пусть построено $T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}$. Каждый отрезок $\Delta \in T_{n,m}^{[\alpha,\beta],\Phi}$ разобьем на два непересекающихся подотрезка Δ' и Δ'' так, чтобы выполнялось $\Phi(\Delta') \leq \frac{\Phi(\Delta)}{2}$ и $\Phi(\Delta'') \leq \frac{\Phi(\Delta)}{2}$. Полученное разбиение обозначим $T_{n,m+1}^{[\alpha,\beta],\Phi}$.

Лемма 6 доказана.

Для отрезка $[\alpha, \beta]$ и последовательности $\{\tau_k\}_{k=0}^\infty$ такой, что $\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$, $\tau_k \rightarrow \beta$ при $k \rightarrow \infty$, $\tau_\infty = \beta$, и чисел $C_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $C = \sum_{k=1}^\infty C_k$ таких, что $0 < C < \infty$, положим $\mu(\bigcup_{k \in K} [\tau_{k-1}, \tau_k]) = \sum_{k \in K} C_k$ для каждого $K \subset \mathbb{N}$.

Пусть $K_n = \{k \in \mathbb{N} : C_k > \frac{C}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что

$$\text{card } K_n \leq n - 1. \quad (32)$$

Построим разбиение $\tilde{T}_{\mu,n} = \tilde{T}_{\mu,n}^{\alpha,\beta}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ следующим образом. Если $k \in K_n$, то $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ является отрезком разбиения $\tilde{T}_{\mu,n}$. Множество

$$[\alpha, \beta] \setminus \left(\bigcup_{k \in K_n} (\tau_{k-1}, \tau_k) \right)$$

является дизъюнктивным объединением конечного числа отрезков, которые обозначим через $\Delta_s = \Delta_s(n)$, $1 \leq s \leq s_0$. Построим разбиение каждого Δ_s . Пусть $\Delta_s = [\tau_{k_1}, \tau_{k_2}]$, где $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Положим $t_0 = \tau_{k_1}$. Пусть определена точка $t_{2j} = \tau_{r_j}$, $r_j < k_2$. Построим точки t_{2j+1} и t_{2j+2} . Положим

$$k_* = \sup \left\{ k \geq r_j + 1 : \sum_{i=r_j+1}^k C_i \leq \frac{C}{n} \right\}$$

(так как $C_{r_j+1} \leq \frac{C}{n}$, то k_* корректно определено). Если $k_* \geq k_2$, то $t_{2j+1} = t_{2j+2} = \tau_{k_2}$, иначе $t_{2j+1} = \tau_{k_*}$, $t_{2j+2} = \tau_{k_*+1}$. В последнем случае

$$\mu([t_{2j}, t_{2j+2}]) > \frac{C}{n}. \quad (33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Число отрезков разбиения $\tilde{T}_{\mu,n}$, содержащихся в $\bigcup_s \Delta_s$, не превосходит $4n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (32) следует, что число отрезков Δ_s не превосходит n . Рассмотрим один из отрезков $\Delta_s = [\tau_{k_1}, \tau_{k_2}]$. Пусть $t_{2l_s} < \tau_{k_2}$, $t_{2l_s+2} = \tau_{k_2}$. Тогда Δ_s разбивается не более чем на $2l_s + 2$ отрезков,

$$l_s \frac{C}{n} \leq \sum_{k=1}^{l_s} \mu([t_{2k-2}, t_{2k}]) \leq \mu(\Delta_s),$$

откуда $\sum_s l_s \leq \frac{n}{C} \sum_s \mu(\Delta_s) \leq n$. Значит, число отрезков разбиения $\tilde{T}_{\mu,n}$, содержащихся в $\bigcup_s \Delta_s$, не превосходит $\sum_s 2l_s + 2(\text{card } K_n + 1) \leq 4n$.

Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $m \leq 2n$. Тогда каждый отрезок из $\tilde{T}_{\mu,n}$, содержащийся в $\Delta_s(n)$, разбивается отрезками из $\tilde{T}_{\mu,m}$ не более чем на шесть частей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть один такой отрезок Δ разбивается на $[\tau_{l_{i-1}}, \tau_{l_i}]$, $1 \leq i \leq i_0$, $i_0 \geq 7$. Докажем, что $\mu(\Delta) > \frac{C}{n}$. Положим $I = \{i : l_{i-1} = l_i - 1, l_i \in K_m\}$. Тогда $\text{card } I \leq 1$. В самом деле, если $\text{card } I \geq 2$, то $\mu(\Delta) > 2\frac{C}{m} \geq \frac{C}{n}$.

Если $I = \emptyset$, то из построения $\tilde{T}_{\mu,m}$ и (33) с $n := m$ следует, что

$$\mu([\tau_{l_1}, \tau_{l_3}]) > \frac{C}{m}, \quad \mu([\tau_3, \tau_{l_5}]) > \frac{C}{m}$$

или

$$\mu([\tau_{l_2}, \tau_{l_4}]) > \frac{C}{m}, \quad \mu([\tau_{l_4}, \tau_{l_6}]) > \frac{C}{m}.$$

Поэтому $\mu(\Delta) > \frac{2C}{m} \geq \frac{C}{n}$.

Пусть $\text{card } I = 1$. Если $I \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset$, то

$$\mu([\tau_{l_1}, \tau_{l_3}]) > \frac{C}{m} \quad \text{или} \quad \mu([\tau_{l_2}, \tau_{l_4}]) > \frac{C}{m}.$$

В остальных случаях

$$\mu([\tau_{l_3}, \tau_{l_5}]) > \frac{C}{m} \quad \text{или} \quad \mu([\tau_{l_4}, \tau_{l_6}]) > \frac{C}{m}.$$

Поэтому $\mu(\Delta) > 2\frac{C}{m} \geq \frac{C}{n}$.

Предложение 2 доказано.

Пусть $\delta > 0$. Определим точки α и β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Если $g \in L_{\frac{p}{p-1}}[a, b]$ и $b < \infty$, то полагаем $\beta = b$. Если $b = \infty$, $g \in L_{\frac{p}{p-1}}[a, \infty)$ и выполнено условие 2) теоремы 1 (в частности, $\xi_k = \infty$ для некоторого k и поэтому $v \in L_{\kappa_1}[c, \infty)$ для достаточно большого $c > a$), то выбираем $\beta < \infty$ так, что $\Phi_2([\beta, +\infty)) < \delta$. Пусть $g \notin L_{\frac{p}{p-1}}[a, b]$ и выполнено условие 2), 3), 4), 5) или 6) теоремы 1 или $b = \infty$ и выполнено условие 3), 4), 5) или 6) (номер этого условия обозначим ν). Тогда при $\nu = 2$ положим $\beta = \xi_{k_0}$, где k_0 таково, что

$$\sum_{k \geq k_0} \left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} v(x)^{\frac{1}{r+\frac{1}{q}-1}} dx \right)^{\frac{r+\frac{1}{q}-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \rho_g^{\frac{k}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} < \delta.$$

При $\nu = 3$ положим $\beta = \eta_{-k_0}$, где k_0 таково, что

$$\sum_{k \leq -k_0} \left(\int_{\eta_k}^{\eta_{k-1}} g(x)^{\frac{1}{r-\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{r-\frac{1}{p}}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \rho_v^{\frac{k}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} < \delta.$$

При $\nu = 4$ положим $\beta = \zeta_{k_0}$, где k_0 таково, что

$$\sum_{k \geq k_0} |\zeta_{k+1} - \zeta_k|^{\frac{r-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \rho_g^{\frac{j_k}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \rho_v^{\frac{l_k}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} < \delta.$$

При $\nu \in \{5, 6\}$ положим $\beta = 2^{k_0}$, где k_0 таково, что

$$\sum_{k \geq k_0} (\|g\|_{L_{p'}[2^k, 2^{k+1}]} \|v\|_{L_q[2^k, 2^{k+1}]} 2^{k(r-1)})^{\varkappa} < \delta.$$

Точка $\alpha \leq \beta$ определяется аналогично.

Пусть $\delta_1 > 0$, g_0, v_0 – кусочно постоянные функции на $[\alpha, \beta]$, $g_0|_{\Delta_i} = c_i$, $v_0|_{\Delta_i} = d_i$, $1 \leq i \leq i_0$, $\|g - g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}[\alpha, \beta]} < \delta_1$, $\|v - v_0\|_{L_q[\alpha, \beta]} < \delta_1$. Пусть $n \geq i_0$. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ построим разбиение $T_m = T_m(\delta, \delta_1, n)$ отрезка $[a, b]$. Сначала построим это разбиение на $[\alpha, \beta]$. Для этого в случае $\nu \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ теоремы 1 положим

$$n_i = \left\lceil \frac{\Phi_\nu(\Delta_i)}{\sum_{j=1}^{i_0} \Phi_\nu(\Delta_j)} n \right\rceil + 1 \quad (34)$$

и возьмем разбиение $T_{n_i, m}^{\Delta_i, \Phi_\nu}$ отрезка Δ_i .

Построим разбиение $[\beta, b]$ (разбиение $[a, \alpha]$ строится аналогично). Если $b = \infty$, $g \in L_{\frac{p}{p-1}}[a, b]$ и выполнено условие 2) теоремы 1, то в качестве этого разбиения берется $T_{n, m}^{[\beta, \infty), \Phi_2}$.

Рассмотрим остальные случаи. Определим τ_k и C_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, следующим образом:

- в случае 2) $\tau_k = \xi_{k_0+k}$, $C_{k+1} = (\|v\|_{L_{\kappa_1}[\xi_{k_0+k}, \xi_{k_0+k+1}]} \rho_g^{k_0+k})^\kappa$;
- в случае 3) $\tau_k = \eta_{-k_0-k}$, $C_{k+1} = (\|g\|_{L_{\kappa_2}[\eta_{-k_0-k}, \eta_{-k_0-k-1}]} \rho_v^{-k_0-k})^\kappa$;
- в случае 4) $\tau_k = \zeta_{k_0+k}$, $C_{k+1} = (|\zeta_{k_0+k+1} - \zeta_{k_0+k}|^{r-1} \rho_g^{j_{k_0+k}} \rho_v^{l_{k_0+k}})^\kappa$;
- в случаях 5) и 6) $\tau_k = 2^{k_0+k}$,

$$C_{k+1} = (\|g\|_{L_{p'}[\tau_k, \tau_{k+1}]} \|v\|_{L_q[\tau_k, \tau_{k+1}]} 2^{(r-1)(k_0+k)})^\kappa.$$

По последовательностям τ_k и C_k определяем число $C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k < \delta$, функцию μ , множество $K_{2^m n} \subset \mathbb{N}$ и разбиение $\tilde{T}_{\mu, 2^m n}^{\beta, b}$. Те его элементы, которые не совпадают с $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in K_{2^m n}$, считаем элементами T_m . Пусть $C_k > \frac{C}{2^m n}$. Определим разбиение $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, элементы которого будем считать элементами T_m . Если $\frac{C}{2^{m-i} n} < C_k \leq \frac{C}{2^{m-i-1} n}$, $0 \leq i \leq m-1$, то в случае $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ берем разбиение $T_{1, i+1}^{[\tau_{k-1}, \tau_k], \Phi_\nu}$ (множество таких k обозначим $K_{2^m n}^i$). Если $\frac{C}{n} r_k < C_k \leq \frac{C}{n} (r_k + 1)$, $r_k \in \mathbb{N}$, то берем разбиение $T_{r_k+1, m}^{[\tau_{k-1}, \tau_k], \Phi_\nu}$ (множество таких k обозначим $\tilde{K}$).

Положим $T_{-1} = \{[a, b]\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда элементы T_m пересекаются не более чем с семью элементами $T_{m \pm 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ – элемент T_m . Если $\Delta \subset [\alpha, \beta]$, то Δ содержится в элементе T_{m-1} и является объединением двух элементов T_{m+1} .

Пусть $\Delta \subset [\beta, b]$ (случай $\Delta \subset [a, \alpha]$ рассматривается аналогично). Возможны два случая:

1) Δ не содержится в $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ с $k \in K_{2^m n}$. Тогда Δ пересекается не более чем с шестью элементами $\tilde{T}_{\mu, 2^{m \pm 1} n}^{\beta, b}$ в силу предложения 2. При этом

$$\{j \in K_{2^{m-1} n} : [\tau_{j-1}, \tau_j] \subset \Delta\} = \emptyset$$

(иначе $\frac{C}{2^{m-1} n} < \mu([\tau_{j-1}, \tau_j]) \leq \mu(\Delta) \leq \frac{C}{2^m n}$ для некоторого j) и

$$\text{card}\{j \in K_{2^{m+1} n} : [\tau_{j-1}, \tau_j] \subset \Delta\} \leq 1$$

(иначе $\frac{C}{2^m n} \geq \mu(\Delta) > 2 \cdot \frac{C}{2^{m+1} n} = \frac{C}{2^m n}$). Если $j \in K_{2^{m+1} n}$, $[\tau_{j-1}, \tau_j] \subset \Delta$, то $C_j \leq \frac{C}{2^m n}$, поэтому $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ содержит не более двух элементов T_m . Значит, Δ пересекается не более чем с семью элементами $T_{m \pm 1}$;

2) $\Delta \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in K_{2^m n}$. Если $C_k > \frac{C}{n}$, то Δ содержится в элементе T_{m-1} и является объединением двух элементов T_{m+1} (по свойству разбиения $T_{r_k+1, m}^{[\tau_{k-1}, \tau_k], \Phi_\nu}$).

Пусть $k \in K_{2^m n}^i = K_{2^{m+1} n}^{i+1}$, где $0 \leq i \leq m-1$. Тогда Δ является объединением двух элементов T_{m+1} . В самом деле, тогда элементы T_m (соответственно T_{m+1}), содержащиеся в $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, принадлежат $T_{1, i+1}^{[\tau_{k-1}, \tau_k], \Phi_\nu}$ (соответственно $T_{1, i+2}^{[\tau_{k-1}, \tau_k], \Phi_\nu}$). Покажем, что Δ содержится в некотором элементе разбиения T_{m-1} . Пусть $m \geq 1$. Если $i \geq 1$, то при построении T_{m-1} отрезок $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ разбивается на 2^i отрезков, каждый из которых при построении T_m делится на две части. Если $i = 0$, то $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ содержится в элементе $\tilde{T}_{\mu, 2^{m-1} n}^{\beta, b}$.

Предложение 3 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Число элементов T_m не превосходит $20 \cdot 2^m n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число элементов T_m , содержащихся в $[\alpha, \beta]$, не превосходит $2^{m+1} n$. Оценим число элементов T_m , содержащихся в $[\beta, b]$ (для отрезка $[a, \alpha]$ будет тот же результат). В силу предложения 1 число элементов $\tilde{T}_{\mu, 2^m n}$, не совпадающих с $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in K_{2^m n}$, не превосходит $4 \cdot 2^m n$. Оценим число элементов T_m , содержащихся в $\bigcup_{k \in K_{2^m n}} [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Если $k \in K_{2^m n}^i$, $0 \leq i \leq m-1$, то $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ содержит 2^{i+1} элементов T_m и $2^i < \frac{2^m n}{C} C_k$. Поэтому число отрезков из T_m , содержащихся в $\bigcup_{i=0}^{m-1} \bigcup_{k \in K_{2^m n}^i} [\tau_{k-1}, \tau_k]$, не превосходит

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k \in K_{2^m n}^i} 2^{i+1} \leq 2 \cdot \frac{2^m n}{C} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k \in K_{2^m n}^i} C_k \leq 2 \cdot 2^m n.$$

Пусть $k \in \tilde{K} := K_{2^m n} \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} K_{2^m n}^i$. Тогда $\frac{C}{n} r_k < C_k \leq \frac{C}{n} (r_k + 1)$ для некоторого $r_k \in \mathbb{N}$ и $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ содержит $2^m (r_k + 1)$ элементов T_m . Заметим также, что $|\tilde{K}| \leq n$. Поэтому число отрезков $\Delta \in T_m$ таких, что $\Delta \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in \tilde{K}$, не превосходит

$$\sum_{k \in \tilde{K}} 2^m (r_k + 1) \leq 2^m n + 2^m \sum_{k \in \tilde{K}} \frac{n}{C} C_k \leq 2 \cdot 2^m n.$$

Отсюда следует утверждение.

Предложение 4 доказано.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in W_{p, g}^r[a, b]$ и выполнено условие 2), 3), 4), 5) или 6) теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что для любых $n \geq N$, $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f - P_{T_m} f\|_{q, p, T_m, v} \lesssim_{q, p, r} (\|gv\|_\infty + \varepsilon) (2^m n)^{-r + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, \quad (35)$$

где $T_m = T_m(\delta, \delta_1, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Phi = \Phi_\nu$, $\nu \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ – соответствующий номер выполняющегося условия теоремы 1.

В силу неравенства Минковского

$$\begin{aligned} \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[a,b]} &\leq \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[a,\alpha]} \\ &\quad + \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[\alpha,\beta]} + \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[\beta,b]}. \end{aligned} \quad (36)$$

Оценим второе слагаемое. Обозначим для каждого $i = 1, \dots, i_0$ элементы разбиения $T_{n_i,m}^{\Delta_i,\Phi}$ через Δ_{ij} (n_i определяется формулой (34)). Тогда силу теоремы A и следствия

$$\begin{aligned} \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[\alpha,\beta]} &= \left(\sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{2^m n_i} \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,v}(\Delta_{ij})}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\lesssim_{q,p,r} \left(\sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{2^m n_i} \Phi(\Delta_{ij})^{\sigma(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p(\Delta_{ij})}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\leq \|(\Phi(\Delta_{ij})^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})_{i,j}\|_{l_\gamma^{N_*(m)}} =: M_\gamma, \end{aligned}$$

где $\gamma = +\infty$ при $q \geq p$ и $\gamma = \frac{qp}{p-q}$ при $q < p$, $N_*(m) = 2^m \sum_{i=1}^{i_0} n_i$. Последняя оценка следует из неравенства Гёльдера и условия $\left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_p \leq 1$. Для любых $i = 1, \dots, i_0$, $j = 1, \dots, n_i$ выполнено (по определению $T_{n_i,m}^{\Delta_i,\Phi}$)

$$\Phi(\Delta_{ij}) \leq \frac{\Phi(\Delta_i)}{2^m n_i} \stackrel{(34)}{\leq} \frac{1}{2^m n} \sum_{i'=1}^{i_0} \Phi(\Delta_{i'}).$$

Если δ_1 достаточно мало, то

$$\left(\sum_{i=1}^{i_0} \Phi(\Delta_i) \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lesssim_{q,p,r} \|gv\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (37)$$

В самом деле, из неравенств Гёльдера и Минковского следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_0} \Phi(\Delta_i) &\leq \sum_{i=1}^{i_0} |\Delta_i|^{\mathcal{X}(r-1)} \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \|v\|_{L_q(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_0} |\Delta_i|^{\mathcal{X}(r-1)} (\|g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)} \|v_0\|_{L_q(\Delta_i)} + \|g - g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)} \|v_0\|_{L_q(\Delta_i)} \\ &\quad + \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)} \|v - v_0\|_{L_q(\Delta_i)})^{\mathcal{X}} \\ &\lesssim_{q,p,r} \sum_{i=1}^{i_0} |\Delta_i|^{\mathcal{X}(r-1)} \|g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \|v_0\|_{L_q(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i_0} |\Delta_i|^{\mathcal{X}(r-1)} \|g - g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \|v_0\|_{L_q(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i_0} |\Delta_i|^{\mathcal{X}(r-1)} \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \|v - v_0\|_{L_q(\Delta_i)}^{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{i_0} \|g_0 v_0\|_{L_{\kappa}^{\kappa}(\Delta_i)} + |\beta - \alpha|^{\kappa(r-1)} \|g - g_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}^{\kappa}[\alpha, \beta]} \|v_0\|_{L_q^{\kappa}[\alpha, \beta]} \\
&\quad + |\beta - \alpha|^{\kappa(r-1)} \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}^{\kappa}[\alpha, \beta]} \|v - v_0\|_{L_q^{\kappa}[\alpha, \beta]} \\
&\leq \|g_0 v_0\|_{L_{\kappa}^{\kappa}[\alpha, \beta]} + |\beta - \alpha|^{\kappa(r-1)} \delta_1^{\kappa} (\|v_0\|_{L_q^{\kappa}[\alpha, \beta]} + \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}^{\kappa}[\alpha, \beta]})
\end{aligned}$$

(в предпоследнем неравенстве использовалось то, что функции g_0 и v_0 постоянны на Δ_i , а также соотношение, аналогичное неравенству (31)). Отсюда следует соотношение (37).

Поэтому

$$\begin{aligned}
M_{\infty} &\lesssim_{q,p,r} \frac{1}{(2^m n)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \left(\|gv\|_{\kappa} + \frac{\varepsilon}{2} \right), \\
M_{\gamma} &\lesssim_{q,p,r} \frac{1}{(2^m n)^r} \left(\|gv\|_{\kappa} + \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \text{если } \gamma = \frac{qp}{p-q}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при малых δ_1

$$\|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[\alpha, \beta]} \lesssim_{q,p,r} \left(\|gv\|_{\kappa} + \frac{\varepsilon}{2} \right) (2^m n)^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \quad (38)$$

Теперь оценим третье слагаемое в (36) (первое оценивается аналогично). Покажем, что для любого $\Delta \in T_m$, $\Delta \subset [\beta, b]$, выполнено

$$\|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,v}(\Delta)} \lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p(\Delta)}. \quad (39)$$

Если $b = \infty$, $g \in L_{\frac{p}{p-1}}[a, +\infty)$ и выполнено условие 2) теоремы 1, то это вытекает из следствия и свойств разбиения $T_{n,m}^{[\beta, \infty), \Phi_2}$. Рассмотрим остальные случаи. Пусть $\Delta \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in K_{2^m n}$. Из определения τ_k , C_k и Φ_{ν} следует, что

$$\Phi_{\nu}([\tau_{k-1}, \tau_k]) \lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} C_k.$$

Напомним также, что $C \leq \delta$. Если $\frac{C}{n} r_k < C_k \leq \frac{C}{n} (r_k + 1)$, $r_k \in \mathbb{N}$, то по построению

$$\Phi_{\nu}(\Delta) \leq \frac{\Phi_{\nu}([\tau_{k-1}, \tau_k])}{2^m (r_k + 1)} \lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \frac{C}{2^m n} \leq \frac{\delta}{2^m n}.$$

Если $\frac{C}{2^{m-i} n} < C_k \leq \frac{C}{2^{m-i-1} n}$, где $0 \leq i \leq m-1$, то

$$\Phi_{\nu}(\Delta) \leq \frac{\Phi_{\nu}([\tau_{k-1}, \tau_k])}{2^{i+1}} \lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \frac{C}{2^m n} \leq \frac{\delta}{2^m n}.$$

В силу следствия

$$\begin{aligned}
\|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,v}(\Delta)} &\lesssim_{q,p,r} \Phi_{\nu}(\Delta)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p(\Delta)} \\
&\lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p(\Delta)}.
\end{aligned}$$

Теперь предположим, что $\Delta = \bigcup_{k=k_1}^{k_2} [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Пусть $q < p$. По лемме 4 в случае 2) теоремы 1 для $i = 0, 1$

$$\begin{aligned}
 A_i(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}) &\lesssim_{q,p,r} \left(\int_{\tau_{k_1-1}}^{\tau_{k_2}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} \Psi(x, \tau_{k_1-1})^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \\
 &\lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_g^{\frac{k_0+k-1}{r-1+\frac{1}{q}}} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_g^{\frac{k_0+k-1}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{\frac{r-1+\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{C}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

В случаях 3) и 4) это неравенство доказывается аналогично. Пусть $q \geq p$. По лемме 4 в случае 2) выполнено

$$B_0(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}) \lesssim_{q,p,r} \sup_{t \in (\tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})} \left(\int_t^{\tau_{k_2}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \Psi(t, \tau_{k_1-1}).$$

Пусть $t \in [\tau_{\hat{k}-1}, \tau_{\hat{k}}] \subset [\tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \left(\int_t^{\tau_{k_2}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \Psi(t, \tau_{k_1-1}) &\lesssim_{\rho_g} \left(\int_{\tau_{\hat{k}-1}}^{\tau_{k_2}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \rho_g^{k_0+\hat{k}-1} \\
 &\leq \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} \rho_g^{\frac{k_0+k-1}{r-1+\frac{1}{q}}} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} \rho_g^{\frac{k_0+k-1}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{\frac{r-1+\frac{1}{q}}{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} C_k \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{C}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 B_1(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}) &\stackrel{(23)}{\lesssim}_{q,p,r} \left(\int_{\tau_{k_1-1}}^{\tau_{k_2}} v(x)^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} \Psi(x, \tau_{k_1-1})^{\frac{1}{r-1+\frac{1}{q}}} dx \right)^{r-1+\frac{1}{q}} \\
 &\lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

(последняя оценка доказывается так же, как при $q < p$). В случае 3) теоремы 1 величина $B_i(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})$ оценивается аналогично. В случае 4)

$$B_0(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}) \stackrel{(26)}{\lesssim}_{q,p,r} \sup_{t \in (\tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})} \left(\int_t^{\tau_{k_2}} W(x, \tau_{k_2})^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \Psi(t, \tau_{k_1-1}).$$

Пусть $t \in [\tau_{\hat{k}-1}, \tau_{\hat{k}}] \subset [\tau_{k_1-1}, \tau_{k_2}]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_t^{\tau_{k_2}} W(x, \tau_{k_2})^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \Psi(t, \tau_{k_1-1}) \leq \left(\int_{\tau_{\hat{k}-1}}^{\tau_{k_2}} W(x, \tau_{k_2})^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \Psi(\tau_{\hat{k}}, \tau_{k_1-1}) \\
 & = \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} \Psi(\tau_{\hat{k}}, \tau_{k_1-1})^{\frac{1}{r-1}} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} W(x, \tau_{k_2})^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \\
 & \lesssim_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} \rho_g^{\frac{j_{k_0}+k-1}{r-1}} \rho_v^{\frac{l_{k_0}+k-1}{r-1}} (\tau_k - \tau_{k-1}) \right)^{r-1} \\
 & \leq \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} \rho_g^{\frac{j_{k_0}+k-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \rho_v^{\frac{l_{k_0}+k-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} (\tau_k - \tau_{k-1})^{\frac{r-1}{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \\
 & \leq \left(\sum_{k=\hat{k}}^{k_2} C_k \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{C}{2^m n} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Аналогично оценивается $B_1(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})$. Из этих оценок и теоремы А следует соотношение (39) в случаях 2), 3) и 4) теоремы 1. В случаях 5) и 6) соотношение (39) следует из леммы 5.

Обозначим через $\tilde{\Delta}_s$ элементы разбиения T_m , содержащиеся в $[\beta, b]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,p,T_m,v}[\beta,b]} &= \left(\sum_s \|f - P_{T_m} f\|_{L_{q,v}(\tilde{\Delta}_s)}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
 &\stackrel{(39)}{\lesssim}_{q,p,r,\rho_g,\rho_v} \left(\sum_s \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{\sigma(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \left\| \frac{f(r)}{g} \right\|_{L_p(\tilde{\Delta}_s)}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} =: M.
 \end{aligned}$$

При $q \geq p$ эта величина не превосходит

$$\left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left\| \frac{f(r)}{g} \right\|_p \leq \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},$$

а при $q < p$ в силу неравенства Гёльдера и того, что число элементов T_m не превосходит $20 \cdot 2^m n$ (см. предложение 4), выполнено

$$M \leq \left(\sum_s \left(\frac{\delta}{2^m n} \right)^{\frac{qp}{p-q}r+1} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lesssim_{q,p,r} \frac{\delta^{r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{(2^m n)^r}.$$

Если взять δ достаточно малым, то получится утверждение леммы.

Лемма 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для $A_i(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})$, $B_i(q, p, r, g, v, \tau_{k_1-1}, \tau_{k_2})$ взять $k_1 = -\infty$, $k_2 = +\infty$, то из полученных оценок и условий теоремы 1 следует ограниченность оператора $I_{r,g,v,a}$.

ЛЕММА 8. Пусть

$$1 < p \leq q < \infty, \quad q \geq 2, \quad \omega > \frac{1}{p}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \nu(m) \lesssim_{q,p,\omega} 2^m n.$$

Тогда существуют последовательности $k(m) \in \{0, \dots, \nu(m)\}$ и $\tilde{k}(m) \in \{0, \dots, \nu(m)\}$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} k(m) \underset{q,p,\omega}{\lesssim} n, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \tilde{k}(m) \underset{q,p,\omega}{\lesssim} n$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)})(2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \underset{q,p,\omega}{\lesssim} \begin{cases} n^{-\omega + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & \text{если } p \leq 2, \\ n^{-\omega}, & \text{если } p > 2, \end{cases} \quad (40)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{\tilde{k}(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)})(2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \underset{q,p,\omega}{\lesssim} \begin{cases} n^{-\omega + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & \text{если } p \leq \frac{q}{q-1}, \\ n^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}, & \text{если } \frac{q}{q-1} < p \leq 2. \end{cases} \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение (40). Заметим, что если $\nu_1, \nu_2, k \in \mathbb{Z}_+, \nu_1 \leq \nu_2$, то

$$d_k(B_p^{\nu_1}, l_q^{\nu_1}) \leq d_k(B_p^{\nu_2}, l_q^{\nu_2}). \quad (42)$$

Положим

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4^{\omega - \frac{1}{p}}} \right), \quad m_0 := \frac{\min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\} - \frac{1}{q}}{\omega + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \log_2 n,$$

$$k(m) = 0 \quad \text{при } m > m_0, \quad k(m) = [n\sigma^m] \quad \text{при } 1 \leq m \leq m_0, \quad k(0) = \nu(0).$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty} k(m) = \sum_{m=0}^{m_0} [n\sigma^m] \underset{q,p,\omega}{\asymp} n.$$

Если $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, то

$$\begin{aligned} \sum_{m > m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} d_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)}) &= \sum_{m > m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \underset{q,p,\omega}{\asymp} n^{-\omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}, \\ \sum_{1 \leq m \leq m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} d_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)}) &\underset{(2),(42)}{\lesssim} \sum_{q,p,\omega} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{m}{q}} \sigma^{-\frac{m}{2}} \\ &= n^{-\omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{(2^{\omega - \frac{1}{p}} \sigma^{\frac{1}{2}})^m} \underset{q,p,\omega}{\asymp} n^{-\omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Пусть $2 \leq p \leq q < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m > m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} d_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)}) &= \sum_{m > m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \underset{q,p,\omega}{\asymp} n^{-\omega}, \\ \sum_{1 \leq m \leq m_0} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} d_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, l_q^{\nu(m)}) &\underset{(2),(42)}{\lesssim} \sum_{q,p,\omega} (2^m n)^{-\omega - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \cdot (2^{\frac{m}{q}} \sigma^{-\frac{m}{2}})^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \lesssim n^{-\omega}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (3), аналогично получаем (41).

Лемма 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из условий теоремы, леммы 2 и замечания 2 следует, что оператор $I_{r,g,v,a} : L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ ограничен, и можно считать, что

$$\widehat{W}_{p,g}^r[a, b] = \{I_{r,g,1,a}\varphi : \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Кроме того, из теоремы А следует, что для любого многочлена P степени не выше $r - 1$ и для любого $c \in (a, b)$ выполнено $vP \in L_q[c, b]$. Пусть $f \in \widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, T – конечное разбиение $[a, b]$. Тогда функция $P_T f$ на каждом элементе T является многочленом степени не выше $r - 1$, а в окрестности точки a равна нулю. Поэтому $P_T f \in L_{q,v}[a, b]$.

Пусть T – конечное разбиение $[a, b]$. Обозначим через $S_{r,q,v,T}[a, b]$ подпространство $L_{q,v}[a, b]$, являющееся линейной оболочкой множества функций $\{P_T f : f \in \widehat{W}_{p,g}^r[a, b]\}$. Для каждого $\Delta \in T$ положим

$$\mathcal{P}(\Delta) := \{\psi|_{\Delta} : \psi \in S_{r,q,v,T}[a, b]\}.$$

Тогда $\mathcal{P}(\Delta)$ является подпространством в пространстве полиномов степени не выше $r - 1$ на Δ . Отсюда следует, что размерность пространства $S_{r,q,v,T}[a, b]$ не превосходит rN , где $N = \text{card } T$.

Если $q < p$ или $p \leq q \leq 2$, то оценка колмогоровских поперечников следует из леммы 3 (если выполнено условие 1) теоремы 1) и леммы 7 (если выполнено условие 2), 3), 4), 5) или 6)). В качестве приближающего подпространства берется $S_{r,q,v,T_0}[a, b]$. Аналогично получается оценка аппроксимативных чисел в случаях $q < p$, $p \leq q \leq 2$, $2 \leq p \leq q$ (в качестве приближающего оператора берется проектор P_{T_0} , образом которого является $S_{r,q,v,T_0}[a, b]$).

В остальных случаях применим метод дискретизации Майорова (см. [12]). Из лемм 3 и 7 следует, что если $f \in \widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, то

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} (P_{T_m} f - P_{T_{m-1}} f),$$

где ряд суммируется в метрике $L_{q,v}[a, b]$, а $P_{T_{-1}} := 0$.

Построим разбиения $\tilde{T}_m$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть выполнено условие 1) теоремы 1. Положим $\tilde{T}_0 = T$, где T – разбиение из леммы 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и построено разбиение $\tilde{T}_{m-1}$. Разбиение $\tilde{T}_m$ получается делением каждого отрезка $\Delta \in \tilde{T}_{m-1}$ на два отрезка Δ' и Δ'' так, что

$$\int_{\Delta'} (g(t)v(t))^{\times} dt = \int_{\Delta''} (g(t)v(t))^{\times} dt = \frac{1}{2} \int_{\Delta} (g(t)v(t))^{\times} dt.$$

Тогда $\nu(m) := \text{card } \tilde{T}_m = 2^m n$ и для каждого отрезка $\Delta \in \tilde{T}_m$ выполнено

$$\int_{\Delta} (g(t)v(t))^{\times} dt \leq \frac{1}{2^m n} \int_{[a,b]} (g(t)v(t))^{\times} dt. \quad (43)$$

Пусть выполнено условие 2), 3), 4), 5) или 6). Положим $\tilde{T}_0 = T_0$. При $m \geq 1$ через $\tilde{T}_m$ обозначим разбиение, элементами которого являются отрезки вида

$\Delta' \cap \Delta''$, где $\Delta' \in T_{m-1}$, $\Delta'' \in T_m$. Из предложений 3 и 4 следует, что $\nu(m) := \text{card } \tilde{T}_m \lesssim 2^m n$,

$$\|f\|_{q,p,\tilde{T}_m,v} \lesssim_{q,p} \|f\|_{q,p,T_m,v}, \quad \|f\|_{q,p,\tilde{T}_m,v} \lesssim_{q,p} \|f\|_{q,p,T_{m-1},v}. \quad (44)$$

Обозначим через $\tilde{\Delta}_l^m$ отрезки разбиения $\tilde{T}_m$, через d_l – размерность подпространства $\mathcal{P}(\tilde{\Delta}_l^m)$ в $L_{q,v}(\tilde{\Delta}_l^m)$. Так как $d_l \leq r$, то в силу теоремы Ф. Джона об эллипсоиде (см. [33; гл. 1 и 3]) существует линейный изоморфизм $A_{lm}: \mathcal{P}(\tilde{\Delta}_l^m) \rightarrow \mathbb{R}^{d_l}$ такой, что $\|A_{lm}\|_{L_{q,v}(\tilde{\Delta}_l^m) \rightarrow l_2^{d_l}} \leq 1$, $\|A_{lm}^{-1}\|_{l_2^{d_l} \rightarrow L_{q,v}(\tilde{\Delta}_l^m)} \lesssim_r 1$. Положим

$$\tilde{\nu}(m) = \sum_{l=1}^{\nu(m)} d_l \lesssim_r 2^m n.$$

Определим оператор $A_m: S_{r,q,v,\tilde{T}_m}[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{\nu}(m)}$ по формуле

$$A_m f = (A_{lm}(f|_{\tilde{\Delta}_l^m}))_{1 \leq l \leq \nu(m)}.$$

Пусть $\varphi \in S_{r,q,v,\tilde{T}_m}[a,b]$, $A_{lm}(\varphi|_{\tilde{\Delta}_l^m}) = (c_{ls})_{1 \leq s \leq d_l}$. Тогда

$$\|\varphi\|_{L_{q,v}[a,b]}^q = \sum_l \int_{\tilde{\Delta}_l^m} |\varphi(x)v(x)|^q dx \leq \sum_l \|A_{lm}^{-1}\|_{l_q^{d_l} \rightarrow L_{q,v}}^q \sum_{s=1}^{d_l} |c_{ls}|^q \lesssim_{q,r} \|(c_{ls})\|_{l_q^{\tilde{\nu}(m)}}^q,$$

поэтому

$$\|A_m^{-1}\|_{l_q^{\tilde{\nu}(m)} \rightarrow L_{q,v}[a,b]} \lesssim_{q,r} 1. \quad (45)$$

Далее,

$$\|(c_{ls})\|_{l_p^{\tilde{\nu}(m)}}^p \leq \sum_l \|A_{lm}\|_{L_{q,v} \rightarrow l_p^{d_l}}^p \|\varphi\|_{L_{q,v}(\tilde{\Delta}_l^m)}^p \lesssim_{q,p,r} \|\varphi\|_{q,p,\tilde{T}_m,v}^p.$$

Значит,

$$\alpha_m := \|A_m\|_{L_{q,p,\tilde{T}_m,v}([a,b]) \cap S_{r,q,v,\tilde{T}_m}([a,b]) \rightarrow l_p^{\tilde{\nu}(m)}} \lesssim_{q,p,r} 1. \quad (46)$$

Теперь оценим величину $d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a,b], L_{q,v}[a,b])$. Пусть $\{k(m)\}_{m \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{Z}_+$ – некоторая финитная последовательность, Λ_m – экстремальное подпространство для $d_{k(m)}(B_p^{\tilde{\nu}(m)}, l_q^{\tilde{\nu}(m)}) =: \gamma_m$, а E_m – метрический проектор на Λ_m . Пусть I_m – тождественный оператор на $l_q^{\tilde{\nu}(m)}$. Определим отображение $\tilde{E}$:

$$\tilde{E}: f \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{-1} E_m A_m (P_{T_m} f - P_{T_{m-1}} f).$$

Так как последовательность $k(m)$ финитна, то сумма ряда конечная, а множество $\tilde{E}(L_{q,v}[a,b])$ содержится в подпространстве размерности не больше $N := \sum_m k(m)$. Поэтому

$$d_N(\widehat{W}_{p,g}^r[a,b], L_{q,v}[a,b]) \leq \sup_{f \in \widehat{W}_{p,g}^r[a,b]} \|f - \tilde{E}f\|_{L_{q,v}[a,b]}.$$

Если $f \in \widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, то

$$\begin{aligned}
 \|f - \tilde{E}f\|_{L_{q,v}[a,b]} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|A_m^{-1}(I_m - E_m)A_m(P_m f - P_{m-1}f)\|_{L_{q,v}[a,b]} \\
 &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|A_m^{-1}\|_{l_q^{\tilde{v}(m)} \rightarrow L_{q,v}[a,b]} \gamma_m \alpha_m \|P_m f - P_{m-1}f\|_{q,p,\tilde{T}_m,v} \\
 &\stackrel{(45),(46)}{\lesssim} \sum_{q,p,r}^{\infty} \gamma_m (\|f - P_{m-1}f\|_{q,p,\tilde{T}_m,v} + \|f - P_m f\|_{q,p,\tilde{T}_m,v}) \\
 &\stackrel{(44)}{\lesssim} \sum_{q,p}^{\infty} \gamma_m (\|f - P_{m-1}f\|_{q,p,T_{m-1},v} + \|f - P_m f\|_{q,p,T_m,v}) \\
 &\lesssim_{q,p,r} n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|gv\|_{L_{\kappa}[a,b]} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m 2^{-m(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}.
 \end{aligned}$$

Последняя оценка следует из (43), леммы 3 и леммы 7.

Положим $\omega = r$. В силу леммы 8 существует последовательность $k(m)$ такая, что $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} k(m) \lesssim_{q,p,r} n$ и

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (2^m n)^{-(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} &\lesssim_{q,p,r} n^{-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \stackrel{(6)}{\gtrsim}_{q,p,r} d_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1]) \quad \text{при } p \leq 2, \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (2^m n)^{-(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} &\lesssim_{q,p,r} n^{-r} \stackrel{(6)}{\gtrsim}_{q,p,r} d_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1]) \quad \text{при } p > 2.
 \end{aligned}$$

Аппроксимативные числа оцениваются аналогично с применением соотношения (7) заменой колмогоровских поперечников конечномерных шаров на линейные и метрических проекторов на экстремальные линейные операторы.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так же, как в лемме 2, доказывается, что если функция g убывает на $[a, +\infty)$, функция v возрастает на $[a, +\infty)$ и $gv \in L_{\kappa}[a, +\infty)$, то для любого $b \in (a, +\infty)$ оператор $\tilde{I}_{r,g,v,b}: L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ ограничен и выполнена оценка $\|\tilde{I}_{r,g,v,b}\|_{L_p[a,b] \rightarrow L_q[a,b]} \lesssim_{q,p,r} \|gv\|_{\kappa}$. Поэтому

$$\|\tilde{I}_{r,g,v,\infty}\|_{L_p[a,+\infty) \rightarrow L_q[a,+\infty)} \lesssim_{q,p,r} \|gv\|_{\kappa}.$$

Положим

$$\widehat{W}_{p,g}^r[a, +\infty) = \{\tilde{I}_{r,g,v,\infty}\varphi : \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, +\infty), L_{q,v}[a, +\infty)) &\lesssim_{q,p,r} \|gv\|_{L_{\kappa}[a,+\infty)} d_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1]), \\
 \mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r[a,+\infty), L_{q,v}[a,+\infty)}) &\lesssim_{q,p,r} \|gv\|_{L_{\kappa}[a,+\infty)} \lambda_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1]).
 \end{aligned}$$

§ 3. Доказательство оценки снизу

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Для функции $w \in L_0[a, b]$ и множества $M \subset L_{q,|w|}[a, b]$ обозначим $wM = \{wf \mid f \in M\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $v \in L_0([a, b], \mathbb{R}_+)$, $M \subset L_{q,v}[a, b]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено равенство $d_n(M, L_{q,v}[a, b]) = d_n(vM, L_q[a, b])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный оператор $A_v : L_{q,v}[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$, $A_v f = v f$. Тогда $\|A_v\| \leq 1$, поэтому $d_n(M, L_{q,v}[a, b]) \geq d_n(vM, L_q[a, b])$. Пусть $E = \text{supp } v$, $X = \{f \in L_q[a, b] : \text{supp } f \subset E\}$. Рассмотрим линейный оператор $A_{v^{-1}} : X \rightarrow L_{q,v}[a, b]$ такой, что $A_{v^{-1}} f(x) = v^{-1}(x)f(x)$ при $x \in E$, $A_{v^{-1}} f(x) = 0$ при $x \notin E$. Тогда $\|A_{v^{-1}}\| \leq 1$. Значит, $d_n(M, L_{q,v}[a, b]) \leq d_n(vM, X)$. Осталось показать, что $d_n(vM, X) \leq d_n(vM, L_q[a, b])$. В самом деле, пусть $\Lambda \in \mathcal{L}_n(L_{q,v}[a, b])$, $\tilde{\Lambda} = \chi_E \Lambda \subset X$, $f \in vM$, $\varphi \in \Lambda$, $\|f - \varphi\|_{L_{q,v}[a, b]} = \text{dist}_{L_q}(f, \Lambda)$. Тогда $f = v\tilde{f}$, $\tilde{f} \in M$,

$$\|f - \chi_E \varphi\|_{L_q[a, b]} = \|v\tilde{f} - \chi_E \varphi\|_{L_q[a, b]} = \|f - \varphi\|_{L_q(E)} \leq \|f - \varphi\|_{L_q[a, b]},$$

т.е. $\text{dist}_{L_q}(f, \tilde{\Lambda}) \leq \text{dist}_{L_q}(f, \Lambda)$.

Предложение 5 доказано.

Пусть $g, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $\{[\alpha_i, \beta_i], i \in \bigcup_{\nu=1}^4 I_\nu\}$, — конечное разбиение отрезка $[a, b]$, а $I_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i} : L_p[\alpha_i, \beta_i] \rightarrow L_q[\alpha_i, \beta_i]$, $i \in I_3$, и $\tilde{I}_{r,g,v}^{k_i, \alpha_i, \beta_i} : L_p[\alpha_i, \beta_i] \rightarrow L_q[\alpha_i, \beta_i]$, $i \in I_4$, — операторы, по которым задан класс $\widehat{W}_{p,g}^r([a, b])$.

Предположим, что $\tilde{g}, \tilde{v} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, при этом если $i \in I_\nu$, $\nu \in \{1, 2, 3, 4\}$, то функции $\tilde{g}, \tilde{v}$ на $[\alpha_i, \beta_i]$ удовлетворяют тому же условию, что и функции g, v . Рассмотрим оператор $F_{\tilde{g}} : L_p[a, b] \rightarrow L_{q,\tilde{v}}[a, b]$ такой, что $(F_{\tilde{g}}\varphi)|_{[\alpha_i, \beta_i]} = 0$, если $i \in I_1 \cup I_2$, $(F_{\tilde{g}}\varphi)|_{[\alpha_i, \beta_i]} = I_{r,\tilde{g},1}^{k_i, \alpha_i, \beta_i} \varphi$, если $i \in I_3$, $(F_{\tilde{g}}\varphi)|_{[\alpha_i, \beta_i]} = \tilde{I}_{r,\tilde{g},1}^{k_i, \alpha_i, \beta_i}$, если $i \in I_4$. Пусть

$$E = \bigcup_{i \in I_1} [\alpha_i, \beta_i], \quad W_{p,\tilde{g}}^r(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, f|_{[\alpha_i, \beta_i]} \in W_{p,\tilde{g}}^r[\alpha_i, \beta_i]\}.$$

Тогда множество $\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b] \subset \{F_{\tilde{g}}\varphi + f : \|\varphi\|_{L_p[a, b]} \leq 1, f \in W_{p,\tilde{g}}^r(E)\}$ ограничено в $L_{q,\tilde{v}}[a, b]$, при этом $\tilde{v}\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b] = \{\tilde{v}F_{\tilde{g}}\varphi : \|\varphi\|_{L_p[a, b]} \leq 1\}$. Заметим, что отображение $F_{\tilde{g}}$ можно аналогично определить для знакопеременной функции $\tilde{g}$.

Пусть $g_0, v_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ — кусочно постоянные функции, удовлетворяющие следующим условиям. Если $i \in I_1 \cup I_2$, то $g_0|_{[\alpha_i, \beta_i]} \equiv 0$ и $v_0|_{[\alpha_i, \beta_i]} \equiv 0$; если $i \in I_3 \cup I_4$, то $g_0|_{[\alpha_i, \beta_i]}$ и $v_0|_{[\alpha_i, \beta_i]}$ равны нулю в некоторой окрестности точек α_i, β_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \\ & \leq \min_{n_1+n_2+n_3=n} (d_{n_1}(\widehat{W}_{p,g_0}^r[a, b], L_{q,v_0}[a, b]) + d_{n_2}(\widehat{W}_{p,|g-g_0|}^r[a, b], L_{q,v_0}[a, b]) \\ & \quad + d_{n_3}(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,|v-v_0|}[a, b])), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_n(\widehat{W}_{p,g_0}^r[a, b], L_{q,v_0}[a, b]) \\
& \leq \min_{n_1+n_2+n_3=n} (d_{n_1}(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) + d_{n_2}(\widehat{W}_{p,|g-g_0|}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \\
& \quad + d_{n_3}(\widehat{W}_{p,g_0}^r[a, b], L_{q,|v-v_0|}[a, b])), \\
& \mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r} \rightarrow L_{q,v}) \\
& \leq \min_{n_1+n_2+n_3=n} (\mathcal{A}_{n_1}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g_0}^r} \rightarrow L_{q,v_0}) + \mathcal{A}_{n_2}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,|g-g_0|}^r} \rightarrow L_{q,v_0}) \\
& \quad + \mathcal{A}_{n_3}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r} \rightarrow L_{q,|v-v_0|})), \\
& \mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g_0}^r} \rightarrow L_{q,v_0}) \\
& \leq \min_{n_1+n_2+n_3=n} (\mathcal{A}_{n_1}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r} \rightarrow L_{q,v}) + \mathcal{A}_{n_2}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,|g-g_0|}^r} \rightarrow L_{q,v}) \\
& \quad + \mathcal{A}_{n_3}(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g_0}^r} \rightarrow L_{q,|v-v_0|})).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in v\widehat{W}_{p,g}^r[a, b]$, то существует функция φ такая, что $\|\varphi\|_{L_p[a,b]} \leq 1$, и

$$f = vF_g\varphi = v_0F_{g_0}\varphi + v_0F_{g-g_0}\varphi + (v-v_0)F_g\varphi = v_0F_{g_0}\varphi + v_0F_{|g-g_0|}\tilde{\varphi} + (v-v_0)F_g\varphi,$$

где $\tilde{\varphi} = \text{sgn}(g - g_0)\varphi$, т.е.

$$f \in v_0\widehat{W}_{p,g_0}^r[a, b] + v_0\widehat{W}_{p,|g-g_0|}^r[a, b] + (v-v_0)\widehat{W}_{p,g}^r[a, b].$$

Осталось заметить, что

$$d_{n_3}((v-v_0)\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_q[a, b]) = d_{n_3}(|v-v_0|\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_q[a, b]),$$

и воспользоваться предложением 5. Второе неравенство для колмогоровских поперечников и неравенства для аппроксимативных чисел доказываются аналогично.

Предложение 6 доказано.

Используя предложение 6, можно получить нижнюю оценку поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Можно считать, что функции g и v ограничены и $b < +\infty$. В самом деле, пусть $b = +\infty$, а $\tilde{b} \in (a, +\infty)$ таково, что $\|gv\|_{L_\infty[a, \tilde{b}]} \geq \frac{1}{2}\|gv\|_{L_\infty[a, +\infty)}$. Обозначим через $\mathcal{R}_{\tilde{b}}$ оператор ограничения функции на $[a, \tilde{b}]$. Тогда

$$\begin{aligned}
& d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, +\infty), L_{q,v}[a, +\infty)) \\
& = d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, +\infty), L_{q,v}[a, +\infty))\|\mathcal{R}_{\tilde{b}}\|_{L_{q,v}[a, +\infty) \rightarrow L_{q,v}[a, \tilde{b}]} \\
& \geq d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, \tilde{b}], L_{q,v}[a, \tilde{b}]),
\end{aligned}$$

поэтому достаточно оценить снизу последнюю величину. Если функция g или v неограничена, то можно взять такое $M > 0$, что $\|g_M v_M\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|gv\|_\infty$, где $g_M(t) = \min\{g(t), M\}$, $v_M(t) = \min\{v(t), M\}$. Так как

$$\widehat{W}_{p,g_M}^r[a, b] \subset \widehat{W}_{p,g}^r[a, b], \quad L_{q,v}[a, b] \subset L_{q,v_M}[a, b],$$

$\|f\|_{\widehat{W}_{p,g_M}^r} \geq \|f\|_{\widehat{W}_{p,g}^r}$ для любого $f \in \widehat{W}_{p,g_M}^r[a, b]$ и $\|\varphi\|_{q,v_M} \leq \|\varphi\|_{q,v}$ для любого $\varphi \in L_{q,v}[a, b]$, то из свойств колмогоровских поперечников и аппроксимативных чисел следует, что

$$d_n(\widehat{W}_{p,g_M}^r[a, b], L_{q,v_M}[a, b]) \leq d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b])$$

$$\text{и } \mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g_M}^r \rightarrow L_{q,v_M}}) \leq \mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}}).$$

Сначала докажем утверждение для случая, когда функции g и v являются кусочно постоянными. Пусть $\{\Delta_i\}_{1 \leq i \leq i_1}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, являющееся измельчением $\{[\alpha_i, \beta_i]\}_{1 \leq i \leq i_0}$, такое, что $v|_{\Delta_i} = a_i$, $g|_{\Delta_i} = c_i$,

$$J = \{i = 1, \dots, i_1 : a_i c_i \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Для каждого $i \in J$ положим

$$n_i = \left\lceil \frac{(a_i c_i)^\varkappa |\Delta_i|}{\sum_{j \in J} (a_j c_j)^\varkappa |\Delta_j|} 2n \right\rceil + 1,$$

где $m := \sum_{i \in J} n_i$. Тогда при достаточно больших n выполнено

$$2 \frac{(a_i c_i)^\varkappa |\Delta_i|}{\sum_{j \in J} (a_j c_j)^\varkappa |\Delta_j|} n \leq n_i \leq 4 \frac{(a_i c_i)^\varkappa |\Delta_i|}{\sum_{j \in J} (a_j c_j)^\varkappa |\Delta_j|} n, \quad 2n \leq m \leq 4n. \quad (47)$$

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ имеет носитель в $(0, 1)$,

$$\int_0^1 |\varphi^{(r)}(x)|^p dx = 1, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = \gamma_r > 0.$$

Для каждого $i \in J$ разделим Δ_i на n_i равных отрезков $\Delta_{i,j} = x_{ij} + \frac{|\Delta_i|}{n_i}[0, 1]$ и положим

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi\left(\frac{n_i}{|\Delta_i|}(x - x_{ij})\right), \quad V = \left\{ \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{ij} \varphi_{ij}, \xi_{ij} \in \mathbb{R}, i \in J, j = 1, \dots, n_i \right\}.$$

Оценим снизу поперечник множества $\widehat{W}_{p,g}^r[a, b] \cap V = W_{p,g}^r[a, b] \cap V$.

Рассмотрим оператор $A: L_{q,v}[a, b] \rightarrow l_q^m$,

$$Af = (\xi_{ij})_{i \in J, 1 \leq j \leq n_i}, \quad \xi_{ij} = \frac{1}{c_i |\Delta_{i,j}|^{r - \frac{1}{p} + 1}} \int_{\Delta_{i,j}} f(t) dt.$$

Тогда при $q < \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \sum_j |\xi_{ij}|^q &= \sum_{i \in J} \sum_j \frac{1}{c_i^q |\Delta_{i,j}|^{rq - \frac{q}{p} + q}} \left(\int_{\Delta_{i,j}} f(x) dx \right)^q \\ &\leq \sum_{i \in J} \sum_j \frac{n_i^{rq - \frac{q}{p} + 1}}{|\Delta_i|^{rq - \frac{q}{p} + 1}} \frac{1}{(a_i c_i)^q} \int_{\Delta_{i,j}} a_i^q |f(x)|^q dx \\ &\stackrel{(47)}{\leq} 4^{qr+1} \left(\frac{n^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}}{\|gv\|^\varkappa} \right)^q \|f\|_{L_{q,v}[a,b]}^q. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|A\|_{L_{q,v}[a,b] \rightarrow l_q^m} \lesssim_r \frac{n^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{\|gv\|_{\mathcal{K}}}. \quad (48)$$

Аналогичное неравенство выполнено при $q = \infty$.

Пусть $f \in V$, $f = \sum_{i,j} \beta_{ij} \varphi_{ij}$. Тогда при $p < \infty$

$$\begin{aligned} \|Af\|_{l_p^m}^p &= \sum_{i,j} \frac{1}{c_i^p |\Delta_{i,j}|^{rp-1+p}} |\beta_{ij}|^p \left(\int_{\Delta_{i,j}} \varphi_{ij}(x) dx \right)^p \\ &= \sum_{i,j} \frac{|\beta_{ij}|^p}{c_i^p |\Delta_{i,j}|^{rp-1}} \left(\int_0^1 \varphi(y) dy \right)^p = \sum_{i,j} \frac{\gamma_r^p |\beta_{ij}|^p}{c_i^p |\Delta_{i,j}|^{rp-1}} \int_0^1 |\varphi^{(r)}(y)|^p dy \\ &= \gamma_r^p \sum_{i,j} \frac{|\beta_{ij}|^p}{c_i^p} \int_{\Delta_{i,j}} |\varphi_{ij}^{(r)}(x)|^p dx = \gamma_r^p \|f\|_{W_{p,g}^r[a,b]}^p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|Af\|_{l_p^m} \asymp_r \|f\|_{\widehat{W}_{p,g}^r}. \quad (49)$$

При $p = \infty$ соотношение (49) доказывается аналогично. Поэтому

$$\|A|_V\|_{\widehat{W}_{p,g}^r[a,b] \rightarrow l_p^m} \asymp_r 1, \quad \ker A|_V = \{0\}, \quad \text{Im } A = l_p^m,$$

т.е. $A|_V: V \rightarrow l_p^m$ обратим. Обозначим обратный оператор через B . В силу соотношения (49) получаем $\|B\|_{l_p^m \rightarrow W_{p,g}^r[a,b]} \asymp_r 1$.

Докажем оценку для колмогоровских поперечников (аспроксимативных чисел). Пусть $\Lambda_n \subset L_{q,v}[a,b]$ – n -мерное подпространство, $X_{\widehat{W}_{p,g}^r[a,b]}$ – линейная оболочка множества $\widehat{W}_{p,g}^r[a,b]$,

$$K_n: X_{\widehat{W}_{p,g}^r[a,b]} \rightarrow \Lambda_n$$

– метрический проектор в $L_{q,v}[a,b]$ (соответственно произвольный линейный непрерывный оператор). Рассмотрим отображение $C: l_p^m \rightarrow l_q^m$, $C = AK_nB$. Его образ лежит в подпространстве $A(\Lambda_n)$ размерности не больше n ; если отображение K_n линейное, то C тоже линейное. Для любого $x \in B_p^m$ выполнено

$$\begin{aligned} \|x - Cx\|_{l_q^m} &= \|A(\mathcal{J}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}} - K_n)B\|_{l_p^m \rightarrow l_q^m} \\ &\leq \|B\|_{l_p^m \rightarrow W_{p,g}^r} \|\mathcal{J}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}} - K_n\|_{W_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}} \|A\|_{L_{q,v} \rightarrow l_q^m} \\ &\stackrel{(48),(49)}{\lesssim_r} \frac{n^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{\|gv\|_{\mathcal{K}}} \|\mathcal{J}_{\widehat{W}_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}} - K_n\|_{W_{p,g}^r \rightarrow L_{q,v}}. \end{aligned}$$

В силу произвольности Λ_n отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a,b], L_{q,v}[a,b]) &\gtrsim_r \frac{\|gv\|_{\mathcal{K}}}{n^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} d_n(B_p^m, l_q^m) \\ &\stackrel{(4),(6),(47)}{\gtrsim_{r,q,p}} \|gv\|_{\mathcal{K}} d_n(W_p^r[0,1], L_q[0,1]); \end{aligned}$$

аналогично, применяя соотношения (5) и (7), в силу произвольности Λ_n и K_n получаем нижнюю оценку для аппроксимативных чисел.

Теперь рассмотрим общий случай. Докажем оценку для колмогоровских поперечников (для аппроксимативных чисел она доказывается аналогично). Пусть $\delta > 0$, $\tilde{g}$, $\tilde{v}$ – кусочно постоянные функции такие, что $\|g - \tilde{g}\|_{p'} < \delta$, $\|v - \tilde{v}\|_q < \delta$. В силу предложения 6

$$\begin{aligned} d_{3n}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) &\leq d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) + d_n(\widehat{W}_{p,|g-\tilde{g}|}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \\ &\quad + d_n(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,|v-\tilde{v}|}[a, b]). \end{aligned} \quad (50)$$

Из теоремы 1 следует, что существуют такие $C(r, q, p) < \infty$ и $N_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N_1$ выполнено

$$\begin{aligned} d_n(\widehat{W}_{p,|g-\tilde{g}|}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) &\leq C(r, q, p) \|(g - \tilde{g})v\|_{L_\infty[a, b]} d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]), \\ d_n(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,|v-\tilde{v}|}[a, b]) &\leq C(r, q, p) \|\tilde{g}(v - \tilde{v})\|_{L_\infty[a, b]} d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]). \end{aligned}$$

Как уже доказано, существуют такие $c(r, q, p) > 0$ и $N_2 > 0$, что для любого $n \geq N_2$ выполнено

$$d_{3n}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) \geq c(r, q, p) \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{\infty} d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]).$$

Если δ достаточно мало, то отсюда и из (50) следует, что при $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \geq \frac{1}{2} c(r, q, p) \|gv\|_{\infty} d_n(W_p^r[0, 1], L_q[0, 1]).$$

Теорема 3 доказана.

§ 4. Доказательство асимптотической формулы для колмогоровских поперечников при $q \leq p$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{i_0} [\tau_{i-1}, \tau_i]$, при этом функции $g_i = g|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ или $\tilde{g}_i(t) = g_i(-t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1/7)$ и $\delta > 0$.

Выберем окрестности U_i точек τ_i , $0 \leq i \leq i_0$, так, чтобы $\|gv\|_{L_\infty(U)} < \delta$, где $U = \bigcup_{i=0}^{i_0} U_i$. Пусть $\tilde{g}$, $\tilde{v}$ – кусочно постоянные функции такие, что $\tilde{g}|_U = 0$, $\tilde{v}|_U = 0$, $\|g - \tilde{g}\|_{L_{p'}([a, b] \setminus U)} < \delta$, $\|v - \tilde{v}\|_{L_q([a, b] \setminus U)} < \delta$.

Докажем оценку сверху. Из предложения 6 следует, что

$$\begin{aligned} d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) &\leq d_{[n(1-2\varepsilon)]}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) \\ &\quad + d_{[n\varepsilon]}(\widehat{W}_{p,|g-\tilde{g}|}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) + d_{[n\varepsilon]}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,|v-\tilde{v}|}[a, b]). \end{aligned} \quad (51)$$

Пусть $\tilde{b} \in (a, b)$ таково, что $\tilde{g}|_{(\tilde{b}, b)} \equiv 0$, $\tilde{v}|_{(\tilde{b}, b)} \equiv 0$. В силу равенства (9) существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N_1$ выполнено

$$\begin{aligned} d_{[n(1-2\varepsilon)]}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) &= d_{[n(1-2\varepsilon)]}(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, \tilde{b}], L_{q,\tilde{v}}[a, \tilde{b}]) \\ &\leq \lambda_{rqp}^{-1} (1 + \varepsilon) \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_\infty[a, \tilde{b}]} (1 - 3\varepsilon)^{-r} n^{-r} \leq \lambda_{rqp}^{-1} (1 + 8\varepsilon)^r (\|gv\|_{L_\infty[a, b]} + \varepsilon) n^{-r}, \end{aligned}$$

если δ достаточно мало.

Оценим второе слагаемое в правой части (51). По теореме 2 существуют такие $N_2 \in \mathbb{N}$ и $C(r, q, p) > 0$, что для любого $n \geq N_2$ выполнено

$$d_{[n\varepsilon]}(\widehat{W}_{p,|g-\tilde{g}|}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) \leq C(r, q, p) \|(g - \tilde{g})v\|_{L_\infty[a, b]} [n\varepsilon]^{-r} \leq \varepsilon n^{-r},$$

если δ достаточно мало.

Третье слагаемое оценивается аналогично.

Значит, при $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \leq (\lambda_{rqp}^{-1}(1 + 8\varepsilon)^r (\|gv\|_{L_\infty[a, b]} + \varepsilon) + 2\varepsilon) n^{-r},$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(\widehat{W}_{p,g}^r[a, b], L_{q,v}[a, b]) \leq \lambda_{rqp}^{-1} \|gv\|_\infty$.

Оценка снизу доказывается аналогично с учетом того, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(\widehat{W}_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_{n+2r i_0}(W_{p,\tilde{g}}^r[a, b], L_{q,\tilde{v}}[a, b]) \\ &\stackrel{(9)}{=} \lambda_{rqp}^{-1} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_\infty[a, b]}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, А. С. Кочурову и Б. С. Кашину за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

- [1] Э. Н. Батуев, В. Д. Степанов, “О весовых неравенствах типа Харди”, *Сиб. матем. журн.*, **30**:1 (1989), 13–22; англ. пер.: E. N. Batuev, V. D. Stepanov, “Weighted inequalities of Hardy type”, *Siberian Math. J.*, **30**:1 (1989), 8–16.
- [2] В. Д. Степанов, “Двухвесовые оценки интегралов Римана–Лиувилля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 645–656; англ. пер.: V. D. Stepanov, “Two-weighted estimates of Riemann–Liouville integrals”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 669–681.
- [3] V. D. Stepanov, “Two-weighted estimates for Riemann–Liouville integrals”, *Ceskoslov. Akad. Věd. Mat. Ústav.*, **39**, Praha, 1988, 1–28.
- [4] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities for integral operators and related topics”, *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, Proceedings of the Spring School, v. 5 (Prague, 1994), Prometheus, Praha, 1994, 139–175.
- [5] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **50**:1 (1994), 105–120.
- [6] Р. Ойнаров, “Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 16*, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 240–250; англ. пер.: R. Oinarov, “Two-sided norm estimates for certain classes of integral operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **204** (1994), 205–214.
- [7] D. V. Prokhorov, “On the boundedness and compactness of a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **61**:2 (2000), 617–628.
- [8] С. Б. Бабаджанов, В. М. Тихомиров, “О поперечниках одного класса в пространстве L^p ”, *Изв. АН УССР. Сер. физ.-мат.*, **11**:2 (1967), 24–30.
- [9] А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, “Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов”, *Матем. сб.*, **181**:12 (1990), 1587–1606; англ. пер.: A. P. Buslaev, V. M. Tikhomirov, “Spectra of nonlinear differential equations and widths of Sobolev classes”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:2 (1992), 427–446.

- [10] Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29:3** (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29:3** (1974), 169–186.
- [11] Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41:2** (1977), 334–351; англ. пер.: B. S. Kašin, “Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Math. USSR-Izv.*, **11:2** (1977), 317–333.
- [12] В. Е. Майоров, “Дискретизация задачи о поперечниках”, *УМН*, **30:6** (1975), 179–180.
- [13] Ю. И. Маковоз, “Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **87(129):1** (1972), 136–142; англ. пер.: J. I. Makovoz, “O a method for estimation from below of diameters of sets in Banach spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **16:1** (1972), 139–146.
- [14] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
- [15] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [16] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [17] A. Pietsch, “s-numbers of operators in Banach spaces”, *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.
- [18] М. И. Стесин, “Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Докл. АН СССР*, **220:6** (1975), 1278–1281; англ. пер.: M. L. Stesin, “Aleksandrov diameters of finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **16** (1975), 252–256.
- [19] Е. Д. Глускин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Матем. сб.*, **120(162):2** (1983), 180–189; англ. пер.: E. D. Gluskin, “Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets”, *Math. USSR-Sb.*, **48:1** (1984), 173–182.
- [20] M. A. Lifshits, W. Linde, *Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **157**, no. 745, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [21] D. E. Edmunds, J. Lang, “Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case”, *Math. Nachr.*, **297:7** (2006), 727–742.
- [22] D. E. Edmunds, R. Kerman, J. Lang, “Remainder estimates for the approximation numbers of weighted Hardy operators acting on L^2 ”, *J. Anal. Math.*, **85:1** (2001), 225–243.
- [23] W. D. Evans, D. J. Harris, J. Lang, “Two-sided estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators in L^∞ and L^1 ”, *Studia Math.*, **130:2** (1998), 171–192.
- [24] J. Lang, “Estimates for the approximation numbers and n -widths of the weighted Hardy-type operators”, *J. Approx. Theory*, 2004.
- [25] J. Lang, “Improved estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators”, *J. Approx. Theory*, **121:1** (2003), 61–70.
- [26] E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators”, *Function spaces and applications*, Proceedings of Delhi conference (New Delhi, India, 1997), Narosa Publ., New Delhi, 2000, 153–187.
- [27] А. П. Буслаев, “Об асимптотике поперечников и спектров нелинейных дифференциальных уравнений”, *Алгебра и анализ*, **3:6** (1991), 108–118; англ. пер.:

- E. D. Gluskin, “On the asymptotics of widths and spectra of nonlinear differential equations”, *St. Petersburg Math. J.*, **3**:6 (1991), 1303–1312.
- [28] V. N. Konovalov, D. Leviatan, “Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval”, *Anal. Math.*, **28**:4 (2002), 251–278.
- [29] Е. Н. Ломакина, В. Д. Степанов, “Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля”, *Матем. тр.*, **9**:1 (2006), 52–100; англ. пер.: E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “Asymptotic estimates for the approximation and entropy numbers of a one-weight Riemann–Liouville operator”, *Siberian Adv. Math.*, **17**:1 (2007), 1–36.
- [30] А. А. Васильева, “Criterion for the existence of a continuous embedding of a weighted Sobolev class on a closed interval and on a semiaxis”, *Russian J. Math. Phys.*, **16**:4 (2009), 543–562.
- [31] А. Куфнер, Г. П. Хейниг, “Неравенство Харди для производных высших порядков”, *Дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Тр. МИАН, **192**, Наука, М., 1990, 105–113; англ. пер.: Н. Р. Heinig, A. Kufner, “Hardy’s inequality for higher order derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **192** (1992), 113–121.
- [32] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [33] G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Math., **94**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

А. А. Васильева (A. A. Vasil’eva)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступила в редакцию

14.01.2009 и 23.12.2009