Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Клименко, О количестве классов марковских разбиений для гиперболического автоморфизма двумерного тора, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 8, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:50:11

УДК 517.938.5

А. В. Клименко

О количестве классов марковских разбиений для гиперболического автоморфизма двумерного тора

В исследованиях свойств аносовского диффеоморфизма на двумерном торе важную роль играют марковские разбиения, построенные Адлером и Вейссом (R. L. Adler, B. Weiss), и связанные с ними предмарковские разбиения. В работе установлена связь между числом классов простейших предмарковских разбиений заданного диффеоморфизма относительно естественной эквивалентности и цепной дробью для углового коэффициента неустойчивого направления матрицы, задающей этот диффеоморфизм.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Аносова, марковские разбиения, цепные дроби.

Рассмотрим линейный диффеоморфизм Аносова двумерного тора $\mathbb{T}^2$:

$$\hat{A}: x \mapsto Ax \pmod{\mathbb{Z}^2}, \quad A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) - \text{гиперболическая матрица.} \quad (1)$$

Обозначим через $\lambda_{u,s}$ собственные значения матрицы A , $|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$, а через $e_{u,s}$ и $L^{u,s} = \mathbb{R}e_{u,s}$ – соответствующие им собственные векторы и подпространства.

Адлером и Вейссом [1] была построена символическая модель для таких автоморфизмов. Именно, существуют марковская цепь (Ω_M, μ, σ) (понимаемая как ограничение топологического сдвига Бернулли в подходящем пространстве $\{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$ на подходящий марковский компакт Ω_M , см. [2; § 1.9]) и непрерывное отображение $h: \Omega_M \rightarrow \mathbb{T}^2$, которое полусопрягает сдвиг σ и диффеоморфизм $\hat{A}$, переводя инвариантную марковскую меру μ в меру Лебега на $\mathbb{T}^2$ (очевидно, $\hat{A}$ -инвариантную). При этом обратное отображение является взаимно однозначным и непрерывным всюду, за исключением нескольких полупрямых с иррациональными наклонами.

Пусть $M_i = h(\{\omega \mid \omega_0 = i\})$. Отметим, что набор $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^n$ однозначно задает (если задает) символическую модель $(\Omega_M, \mu, \sigma, h)$. В конструкции Адлера–Вейсса множества M_i являются замкнутыми параллелограммами со сторонами, параллельными собственным направлениям L^u и L^s матрицы A . При этом следующие условия гарантируют, что соответствующая символическая модель существует и является марковской цепью:

- 1) если $\partial^{u,s} M_i$ – объединение сторон M_i , параллельных $L^{u,s}$, а $\partial^{u,s} \mathcal{M} = \bigcup_i \partial^{u,s} M_i$, то

$$\hat{A}(\partial^u \mathcal{M}) \supset \partial^u \mathcal{M}, \quad \hat{A}(\partial^s \mathcal{M}) \subset \partial^s \mathcal{M};$$

- 2) для любых i, j множество $\text{int } \hat{A}(M_i) \cap \text{int } M_j$ связно (в частности, оно может быть пустым).

Назовем такой набор $\mathcal{M}$ *марковским разбиением* для $\hat{A}$. (Отметим, что существуют и другие разбиения $\mathcal{M}$, которые задают марковскую модель $(\Omega_M, \mu, \sigma, h)$. В частности, существует такое разбиение, что соответствующая модель является бернуллиевской; см. [3].)

Для любого N существуют диффеоморфизмы вида (1), энтропия которых больше $\log N$. Они не могут обладать марковским разбиением из не более чем N элементов. Тем не менее, для всякого диффеоморфизма вида (1) существует *предмарковское разбиение* $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$ на два параллелограмма с более слабыми условиями, из которого можно получить марковское разбиение $\mathcal{M}$, взяв в качестве элементов M_i замыкания связных компонент множеств $\text{int } K_i \cap \hat{A}(\text{int } K_j) \cap \hat{A}^2(\text{int } K_k)$ (если оба собственных значения A положительны, то можно брать замыкания связных компонент $\text{int } K_i \cap \hat{A}(\text{int } K_j)$).

Прежде чем сформулировать эти условия, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Если тор разбит на два параллелограмма $K_{1,2}$, стороны которых имеют иррациональный наклон, то граница состоит всего из двух отрезков, причем оба конца одного являются внутренними точками другого.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения $\partial^{1,2}$, аналогичные ранее введенным $\partial^{u,s}$, условно называя одно из направлений сторон параллелограммов “первым”, а другое – “вторым”. Рассмотрим любую точку пересечения отрезков границы. Она не может являться общим концом этих отрезков, поскольку тогда одна из областей разбиения имеет угол, который больше развернутого. Следовательно, в ней либо пересекаются два отрезка, либо один отрезок проходит через эту точку, а другой в ней заканчивается. Обозначая через $N(\cdot)$ число точек пересечения разных типов (на значках первое направление горизонтально, а второе вертикально), получаем

$$N(\vdash) = N(\dashv) > 0, \quad N(\top) = N(\perp) > 0, \quad (2a)$$

$$4 \times 2 = 2(N(\top) + N(\perp) + N(\vdash) + N(\dashv)) + 4N(+). \quad (2b)$$

Здесь первое соотношение из (2a) следует из того, что каждая связная компонента $\partial^1 \mathcal{K}$ является отрезком, один конец которого имеет тип $\vdash$, а другой – $\dashv$ (она не может замкнуться в окружность, поскольку наклон сторон иррационален), второе получается аналогично с перестановкой первого и второго направлений. Уравнение (2b) выражает то, что число углов параллелограммов равно числу углов во всех точках пересечения $\partial^1 \mathcal{K}$ и $\partial^2 \mathcal{K}$. Эта система имеет единственное решение

$$N(+) = 0, \quad N(\top) = N(\perp) = N(\vdash) = N(\dashv) = 1.$$

Однако, как было указано выше, $N(\dashv)$ равно числу связных компонент $\partial^1 \mathcal{K}$, что завершает доказательство леммы.

Четыре вершины такого разбиения мы будем обозначать и называть следующим образом. Конец отрезка $\partial^u \mathcal{K}$, из которого этот отрезок выходит в направлении вектора e_u , назовем $(+e_u)$ -вершиной. Аналогично определяются $(-e_u)$ -, $(+e_s)$ - и $(-e_s)$ -вершины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (*Двухэлементным*) *предмарковским разбиением* называется такое разбиение тора на два параллелограмма $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$ со сторонами, параллельными L^u и L^s , для которого отрезки $\partial^s \mathcal{K}$ и $\partial^u \mathcal{K}$ содержат по неподвижной точке $\hat{A}$.

Отметим, что в этом случае для разбиения $\mathcal{L} = \mathcal{K} \vee \hat{A}(\mathcal{K})$ выполнено условие 1 из определения марковского разбиения, а рассмотрение связанных компонент $\mathcal{L} \vee \hat{A}(\mathcal{L})$ дает марковское разбиение.

Мы будем исследовать вопрос о числе различных предмарковских разбиений. Очевидно, что имея одно предмарковское разбиение $\mathcal{K}$, можно построить бесконечную серию $\{\hat{A}^n(\mathcal{K})\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Поэтому дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два предмарковских разбиения $\mathcal{K}_{1,2}$ называются *эквивалентными*, если $\hat{B}\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ для некоторого аффинного диффеоморфизма $\hat{B}: x \mapsto Bx + b \pmod{\mathbb{Z}^2}$, коммутирующего с A .

Можно было бы рассматривать и более слабую эквивалентность: $\mathcal{K}_1 \sim \mathcal{K}_2$, если $\mathcal{K}_2 = \hat{A}^n \mathcal{K}_1$. Такая эквивалентность будет рассмотрена ниже в замечании 4.

Опишем сначала условие коммутирования линейных частей A и B аффинных преобразований $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

ЛЕММА 2. Пусть $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ – гиперболическая матрица, $Z(A) = \{B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mid AB = BA\}$ – ее централизатор. Тогда существует матрица $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, для которой $Z(A) = \{\pm C^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Выписывая условие коммутирования в собственном базисе матрицы A , получим, что любая $B \in Z(A)$ имеет те же собственные векторы $e_{u,s}$. Следовательно, сопоставив каждой матрице $B \in Z(A)$ пару $(\mu_u, \mu_s) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ее собственных значений, получим дискретную подгруппу $G \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, причем указанное соответствие между $Z(A)$ и G биективно. Заметим также, что $G \subset \{(\alpha, \beta) \mid \alpha\beta = \pm 1\}$.

2. Рассмотрим (аддитивную) группу $H = \{(\ln|\alpha|, \ln|\beta|) \mid (\alpha, \beta) \in G\}$. Это дискретная подгруппа $\mathbb{R}^2$, причем $H \subset \{(x, y) \mid x + y = 0\}$. Тогда в силу условия $H \neq \{(0, 0)\}$ группа H имеет вид $\{n(x_0, -x_0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Следовательно, в силу условия $(-1, -1) \in G$ имеет место один из двух случаев:

- 1) $G = \{(\pm\alpha_0^n, \pm\beta_0^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
- 2) $G = \{(\pm\alpha_0^n, \pm\beta_0^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (знаки независимы), где (α_0, β_0) – некоторая заданная пара чисел таких, что $\alpha_0\beta_0 = \pm 1$.

3. В случае 1) лемма доказана: матрица C соответствует паре $(\alpha_0, \beta_0) \in G$. Покажем, что случай 2) невозможен. Пусть он имеет место. Тогда $(1, -1) \in G$. Следовательно, в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ существует матрица $B \neq E$, для которой

$Be_u = e_u$. Это система линейных уравнений на координаты e_u , причем все коэффициенты рациональны, а ранг системы равен единице. Но тогда $e_u = \lambda(q_1, q_2)$ для некоторых $q_i \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, что противоречит иррациональности его наклона.

Заметим, что так как $A \in Z(A)$, то C является корнем некоторой степени из $\pm A$. Например, $Z\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\right\}$.

Условие $Ab = b \pmod{\mathbb{Z}^2}$, налагаемое коммутированием $\hat{A}$ и $\hat{B}$ на вектор сдвига b , означает, что $b \in \text{Fix}(\hat{A})$, где $\text{Fix}(\hat{A}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = x \pmod{\mathbb{Z}^2}\}$ – поднятие на накрывающую плоскость множества неподвижных точек $\hat{A}$ на торе. Следовательно, каждое предмарковское разбиение сдвигом, коммутирующим с $\hat{A}$, приводится к такому разбиению, у которого на неустойчивом отрезке границы лежит точка $(0, 0)$. Дальнейшее описание предмарковских разбиений распадается на два этапа: во-первых, описываются все возможные разбиения тора на два параллелограмма со сторонами, параллельными $L^{u,s}$, рассматриваемые с точностью до произвольного сдвига, а во-вторых, описываются предмарковские разбиения, которые можно получить сдвигами из одного такого разбиения тора.

Начнем с первого этапа – построения всех возможных разбиений тора на два параллелограмма. Достаточно рассмотреть те разбиения, где $(0, 0)$ является $(+e_u)$ -вершиной. Обозначим $z(t) = p(0 + te_u)$, где $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – естественная проекция. Пусть при возрастании “времени” t от нуля точка $z(t)$ впервые попадает на некоторый заранее выбранный отрезок $I \subset L^s$ при $t = s$. Точка нуль разбивает отрезок I на две части. Обозначим ту из них, которая содержит $z(s)$, через I_1 . Другую часть обозначим через I_2 , и пусть T_2 – первый “момент” попадания $z(t)$ на I_2 . Помимо s , на интервале $(0, T_2)$ могут быть и другие моменты попадания $z(t)$ на I_1 ; обозначим через T_1 тот из всех этих моментов (включая s), при котором $z(t)$ оказывается ближе всего на отрезке I (в его внутренней метрике) к нулю. Обозначим $a = z(T_1)$, $b = z(T_2)$. Кроме того, если даны точки $c, d \in I$, то обозначим через $[c, d]$ подотрезок отрезка I с концами c и d (при этом никаких условий на порядок концов не накладываемся: вектор cd может быть как сонаправлен с e_s , так и нет).

ЛЕММА 3. 1. В обозначениях предыдущего абзаца отрезок $[a, b] \subset I$ и отрезок $z([0, T_3])$, где $T_3 = T_1 + T_2$, разбивают тор на два параллелограмма со сторонами, параллельными e_u и e_s . В частности, точка $c = z(T_3)$ лежит на $[a, b] \subset I$.

2. Всякое разбиение $\mathcal{K}$ такое, что нуль является $(+e_u)$ -вершиной, получается таким образом из некоторого отрезка I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть T'_3 – момент первого пересечения $\{z(t) \mid t > T_2\}$ с интервалом $(a, b) \subset I$, $z(T'_3) = c'$. Покажем, что существуют два параллелограмма $P_{1,2}$, граница которых входит в $Y = [a, b] \cup z([0, T'_3])$.

Действительно, пусть $J_1 = [a, 0] \subset I$, $J_2 = [0, b] \subset I$. Будем смещать J_j в направлении e_u : $J_j(t) = J_j + te_u$. При малом $t > 0$ лишь концы $J_j(t)$ лежат в Y . Однако это может измениться лишь в те моменты t_j^* , когда либо $\text{int } J_j(t_j^*)$

пересекается с $[a, b]$, либо $0 \in \text{int } J_j(t_j^*)$, либо $c' \in \partial J_j(t_j^*)$. Во всех этих случаях $X = \text{int } J_j(t_j^*) \cap [a, b] \neq \emptyset$.

Если $a \in X$, то $z(T_1 - \varepsilon) \in \text{int } J_j(t_j^* - \varepsilon)$, но при $t = t_j^* - \varepsilon$ лишь концы $J_j(t)$ входят в Y . Следовательно, $a \notin X$; по тем же причинам $b, c' \notin X$. Тогда либо $J_j(t_j^*) \subset [a, c']$, либо $J_j(t_j^*) \subset [c', b]$. Поскольку $\partial J_j(t_j^* - \varepsilon) \subset z([0, T_3'])$, то $\partial J_j(t_j^*) \subset z((0, T_3'])$, т.е. $\partial J_j(t_j^*) \subset z((0, T_3']) \cap [a, b] = \{a, b, c'\}$. Поэтому либо $J_j(t_j^*) = [a, c']$, либо $J_j(t_j^*) = [c', b]$.

Итак, $J_j(t)$ при $0 \leq t \leq t_j^*$ замечает параллелограмм P_j , причем вся его граница входит в Y .

2. Заметим, что $J_1(t_1^*) = [c', b]$, иначе $J_1(0) = [a, 0]$ и $J_1(t_1^*) = [a, c']$ имели бы одинаковую длину, т.е. $c' = 0 \pmod{\mathbb{Z}^2}$, что противоречит иррациональности e_u . Следовательно, $b = 0 + t_1^* e_u \pmod{\mathbb{Z}^2}$, т.е. $t_1^* = T_2$. Тогда $c' = a + t_1^* e_u = 0 + (T_1 + T_2)e_u \pmod{\mathbb{Z}^2}$. Значит, $T_3 = T_3'$, $c = c'$.

3. Покажем, что $P_1 \cup P_2 = \mathbb{T}^2$. Пусть x — произвольная точка на торе. Если $x \in Y$, то, либо $x \in [a, b] \subset P_1 \cup P_2$, либо $x \in z([0, T_2]) \cup z([T_1, T_3]) = \partial^u P_1$. Если же $x \notin Y$, то рассмотрим первую точку пересечения $x - \hat{t}e_u$ луча $\{x - te_u, t > 0\}$ с Y . Ясно, что $x - \hat{t}e_u \in [a, b]$. Поэтому $x - \hat{t}e_u \in \text{int } J_j$, а тогда $x - (\hat{t} - \varepsilon)e_u \in \text{int } P_j$. Так как отрезок $x - [0, \hat{t} - \varepsilon]e_u$ не пересекается с ∂P_j , то он лежит целиком в $\text{int } P_j$. Следовательно, $x \in P_j$.

4. Для доказательства последнего утверждения леммы достаточно взять $I = \partial^s \mathcal{K}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что леммы 1 и 3 верны для разбиений тора на два параллелограмма со сторонами, параллельными любым иррациональным направлениям $L^{1,2}$ (не обязательно являющихся собственными для некоторого оператора $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$). Такие разбиения, как и аналогичные разбиения на большее число параллелограммов, в [4] названы *квазимарковскими*.

ЛЕММА 4. Все $(+e_u)$ -разбиения можно выстроить в бесконечную в обе стороны последовательность $\{\mathcal{K}_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ так, что

$$\partial^u \mathcal{K}_{j+1} \supset \partial^u \mathcal{K}_j, \quad \partial^s \mathcal{K}_{j+1} \subset \partial^s \mathcal{K}_j.$$

Образующая S централизатора (выбранная так, что $Se_u = \kappa e_u$, $\kappa > 0$) действует на этой последовательности сдвигом: $\mathcal{K}_j \mapsto \mathcal{K}_{j+S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что для любых двух разбиений $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ либо $\partial^u \mathcal{K} \supset \partial^u \mathcal{K}'$, $\partial^s \mathcal{K} \subset \partial^s \mathcal{K}'$, либо наоборот. Пусть эти разбиения получаются из отрезков I, I' при помощи конструкции, описанной в предыдущей лемме. Положим $I_0 = I \cup I'$. Точки $0, a, a', b, b'$ и “моменты времени” $T_{1,2,3}, T'_{1,2,3}$ определим как в предыдущей лемме. Без ограничения общности будем считать, что $T_1 \leq T'_1$. Тогда возможны следующие случаи.

а) $T_1 < T_2 \leq T'_1 < T'_2$. Тогда $T_3 < T'_3$, т.е. $\partial^u \mathcal{K} \subset \partial^u \mathcal{K}'$. С другой стороны, на I_0 точки a и b не могут попасть на интервал между a' и b' , поскольку на нем нет точек $z(t)$ с $t \leq T'_2$. Следовательно, $\partial^s \mathcal{K}' = [a', b'] \subset [a, b] = \partial^s \mathcal{K}$.

б) $T_1 < T'_1 < T_2 \leq T'_2$. Тогда a и b лежат вне интервала $[a', b'] \subset I_0$, поэтому $[a', b'] \subset [a, b]$. Но $T'_1 < T_2$ и тогда $a' \notin [a, b]$. Получаем противоречие.

в) $T_1 < T'_1 < T'_2 < T_2$. Тогда a', b' лежат вне $[a, b]$, т.е. $[a, b] \subset [a', b']$, что противоречит тому, что a лежит вне $[a', b']$.

г) $T_1 = T'_1 < T_2 < T'_2$. Здесь $T_3 \leq T'_3$, т.е. $\partial^u \mathcal{K} \subset \partial^u \mathcal{K}'$. С другой стороны, b лежит вне $[a', b']$, откуда $\partial^s \mathcal{K}' = [a', b'] \subset [a, b] = \partial^s \mathcal{K}$.

д) $T_1 = T'_1 < T'_2 < T_2$. Сводится к предыдущему заменой $\mathcal{K} \leftrightarrow \mathcal{K}'$.

2. Таким образом, любые два разбиения “сравнимы” в смысле следующего отношения порядка:

$$\mathcal{K} \prec \mathcal{K}' \iff \partial^s \mathcal{K} \supset \partial^s \mathcal{K}', \quad \partial^u \mathcal{K} \subset \partial^u \mathcal{K}',$$

которое поэтому оказывается линейным порядком. Этот порядок дискретен (между любыми двумя элементами лежит лишь конечное число других), поскольку возможные моменты $T_{1,2}^*$ для разбиения $\mathcal{K}^*$, $\mathcal{K} \prec \mathcal{K}^* \prec \mathcal{K}'$, – это моменты пересечения $\partial^u \mathcal{K}'$ и $\partial^s \mathcal{K}$, которых конечное число. Следовательно, такой порядок изоморфен либо $(\mathbb{Z}, \leq)$, либо $(\mathbb{Z} \cap (0, +\infty), \leq)$, либо $(\mathbb{Z} \cap (-\infty, 0), \leq)$, либо $(\{1, \dots, n\}, \leq)$. Но последовательность разбиений не ограничена ни сверху (если взять достаточно короткий отрезок I , то уже первое пересечение $0 + te_u$ с ним будет при сколь угодно большом $t = t^*$, поэтому $T_3 > t^*$ будет также произвольно велико), ни снизу (если взять очень короткий интервал $[0, T]e_u$, то, взяв отрезок I достаточно большим в обе стороны от нуля, получим, что $[0, T]e_u$ пересекает обе части I , поэтому существует разбиение с $T_3 = T_1 + T_2 < T + T = 2T$). Следовательно, множество разбиений изоморфно $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Легко видеть, что применение C к разбиениям задает изоморфизм этого упорядоченного множества. Но все изоморфизмы $(\mathbb{Z}, \leq)$ – это сдвиги.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поменяв местами L^u и L^s , можно получить аналогичную последовательность $\{\mathcal{K}'_j\}$ $(+e_s)$ -разбиений, причем с ростом номера $\partial^s \mathcal{K}'_j$ растет, а $\partial^u \mathcal{K}'_j$ сокращается. Однако каждое $(+e_u)$ -разбиение может быть сдвигом на некоторый вектор переведено в $(+e_s)$ -разбиение. Учитывая порядки на последовательностях $\{\mathcal{K}_j\}$ и $\{\mathcal{K}'_j\}$, получаем, что $\mathcal{K}'_j = \mathcal{K}_{j_0-j} + v_j$ для некоторого числа $j_0 \in \mathbb{Z}$ и векторов $v_j \in \mathbb{R}^2$. При этом если образующая $C \in Z(A)$ действует на $\{\mathcal{K}_j\}$ сдвигом на S : $\mathcal{K}_j \mapsto \mathcal{K}_{j+S}$, то $\pm C$ будет действовать на $\{\mathcal{K}'_j\}$ сдвигом на $-S$: $\mathcal{K}'_j \mapsto \mathcal{K}'_{j-S}$.

Рис. 1. Островной (a) и паркетный (b) типы разбиения

Поднятие разбиения на накрывающую плоскость может иметь один из двух типов: *островной* (рис. 1, (а)) и *паркетный* (рис. 1, (б)). Обычно рисунки примеров разбиений изображают островной тип, поскольку они строятся для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а для него все разбиения являются островными (см. ниже). По-видимому, впервые паркетный тип изображен в работе Э. Риккен [5], хотя там и не отмечено отличие этого типа от островного.

Дадим несколько эквивалентных определений этих типов.

1. Для паркетного разбиения каждое из множеств $p^{-1}(K_j)$ несвязно (состоит из бесконечного числа “полос”), для островного – одно из них связно, а другое несвязно, причем каждая его компонента связности однозначно проектируется на параллелограмм на торе.
2. Для островного разбиения длины обеих сторон одного параллелограмма больше длин соответствующих сторон другого, для паркетного – одна из сторон больше у одного параллелограмма, а другая – у другого.
3. Для любого разбиения различные участки $\partial^{u,s}\mathcal{K}$ разделяют K_1 и K_2 (т.е. для внутренней точки x такого участка $x + \varepsilon e_{s,u} \in K_1$, $x - \varepsilon e_{s,u} \in K_2$), K_2 и K_1 , $K_{j_u,s}$ и $K_{j_s,s}$ ($j_{u,s} \in \{1, 2\}$). Для островного разбиения $j_u = j_s$, а для паркетного $j_u \neq j_s$.

Оказывается, что распределение разбиений этих типов в последовательности $\{\mathcal{K}_j\}$ из леммы 4 связано с разложением наклона e_u в цепную дробь.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$e_u \sim (\omega_u, 1), \quad \omega_u = [a_0, \dots, a_k, (b_1, \dots, b_l)]^1, \quad S = b_1 + \dots + b_l.$$

Тогда существует такое $j_0 \in \mathbb{Z}$, что островными являются разбиения $\mathcal{K}_{j_0+nS+(b_1+\dots+b_r)}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $r = 1, \dots, l$, и только они. Образующая C централизатора действует на последовательности $\{\mathcal{K}_j\}$ сдвигом на $\pm S$. (Заменой $C \leftrightarrow C^{-1}$ можно добиться того, чтобы сдвиг был на S элементов.)

Рис. 2. “Бабочка” (а) и связанное с ней преобразование разбиений (b), (c)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Выберем отрезок I_0 так, чтобы все поднятия “бабочки” (рис. 2, (а)), образованной им, отрезком оси абсцисс и отрезками, параллельными L^u , не пересекались. Пусть J_0 – отрезок этой бабочки, лежащий на оси абсцисс.

¹ ω_u является квадратичной иррациональностью, поэтому по теореме Лагранжа ([6; теорема 28]) его разложение в цепную дробь является предпериодическим.

ЛЕММА 5. Если $s_1 < s_2 < \dots$ – моменты пересечения луча $\{z(t), t > 0\}$ с I_0 , а $t_1 < t_2 < \dots$ – моменты его пересечения с J_0 , то $\max(t_i, s_i) < \min(t_{i+1}, s_{i+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Луч $z(t)$ может войти в “бабочку” или выйти из нее только через отрезки I_0 и J_0 . Пусть u_i^+ – моменты входа луча в “бабочку”, а u_i^- – моменты выхода. Тогда

$$0 < u_1^+ < u_1^- < u_2^+ < u_2^- < \dots.$$

Заметим, что если вход произошел через I_0 , то выход произойдет через J_0 и наоборот. Следовательно, в каждой паре $\{u_i^+, u_i^-\}$ один элемент входит в последовательность $\{s_j\}$, а другой – в $\{t_j\}$. Тогда $u_i^+ = \min(t_i, s_i)$, $u_i^- = \max(t_i, s_i)$, что и требовалось.

2. Пусть $h: I_0 \rightarrow J_0$ сопоставляет каждой точке $x \in I_0$ другой конец $h(x) \in J_0$ отрезка $[x, h(x)]$, лежащего в “бабочке” и параллельного L^u . В частности, $h(z(s_i)) = z(t_i)$. Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие между (I) разбиениями $\mathcal{K}$ тора на два параллелограмма со сторонами, параллельными L^u и L^s , $(+e_u)$ -вершиной в нуле такими, что $\partial^s \mathcal{K} \subset I_0$, и (II) разбиениями $\mathcal{L}$ на два параллелограмма со сторонами, параллельными L^u и оси абсцисс, которую обозначим через L^x , $(+e_u)$ -вершиной в нуле такими, что $\partial^x \mathcal{L} \subset J_0$. Отметим, что, несмотря на рациональность направления L^x , леммы 1, 3 верны для разбиений класса (II), поскольку они используют лишь тот факт, что $\partial^x \mathcal{L}$ не может замкнуться в окружность. Доказательство леммы 4 также проходит для этих двух классов разбиений, за исключением того, что порядок $\prec$ имеет минимальный элемент (но по-прежнему не имеет максимального).

Это соответствие сопоставляет разбиению $\mathcal{K}$ из класса (I) такое разбиение $\mathcal{L}$ из класса (II), что $\partial^x \mathcal{L} = h(\partial^s \mathcal{K})$ и $\partial^u \mathcal{L} = z([0, t_j])$, если $\partial^u \mathcal{K} = z([0, s_j])$ (см. рис. 2, (b), (c)). Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначно, сохраняет порядок $\prec$ и островной/паркетный типы (поскольку длины сторон параллелограммов, параллельных L^s (L^x), при соответствии меняются пропорционально, а длины сторон, параллельных L^u , меняются на одну и ту же величину $(t_j - s_j)e_u$).

Далее мы опишем распределение островных и паркетных разбиений в классе (II), тем самым получая их распределение в классе (I), который является правым хвостом последовательности $\{\mathcal{K}_j\}$. Учитывая периодичность этого распределения в последовательности $\{\mathcal{K}_j\}$, получим утверждение теоремы для всей последовательности $\{\mathcal{K}_j\}$.

3. Домножив вектор e_u на положительное число (это не меняет луча $z(t)$), можно считать, что $e_u = \pm(\omega_u, 1)$. Изменяя, если необходимо, знаки обеих координат на торе (выше использовалась лишь ось абсцисс, которая при такой замене не меняется), будем считать, что $e_u = (\omega_u, 1)$. Моменты s_j пересечения луча $z(t)$ с отрезком J_0 являются целыми числами (так как ордината $z(t)$ растет с единичной скоростью). Следовательно, абсциссы точек $z(s_j)$ равны $s_j \omega_u \pmod{1}$. Расположение этих точек на отрезке J_0 описывается следующей теоремой о цепных дробях.

ТЕОРЕМА 2. Число p/q называется наилучшим приближением снизу (приближением сверху, двусторонним приближением) второго рода для иррационального числа ω ,² если пара (p, q) доставляет минимум выражению $|b\omega - a|$ на множестве пар (a, b) таких, что $a \in \mathbb{Z}$, $0 < b \leq q$, $a/b \leq \omega$ (последнее неравенство заменяется на $a/b \geq \omega$ для приближения сверху и опускается для двустороннего).

1. Если $\omega = [a_0, a_1, \dots]$, то наилучшими двусторонними приближениями являются подходящие дроби $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ и только они.

2. Наилучшими приближениями снизу и сверху являются подходящие и промежуточные дроби $[a_0, \dots, a_n, c]$, $c = 1, \dots, a_{n+1}$:

$$\underbrace{[1], [2], \dots, [a_0]}_{\text{снизу}}, \underbrace{[a_0, 1], \dots, [a_0, a_1]}_{\text{сверху}}, \underbrace{[a_0, a_1, 1], \dots, [a_0, a_1, a_2]}_{\text{снизу}}, \dots, \quad (3)$$

причем знаменатели в этой последовательности возрастают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт этой теоремы хорошо известен (см. [6; теоремы 16, 17]), второй известен значительно меньше. Мы приведем вывод второго пункта из первого.³

Обозначим $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$, $p_{n,c}/q_{n,c} = [a_0, \dots, a_n, c]$. Из формул $p_{n,c} = p_{n-1} + cp_n$, $q_{n,c} = q_{n-1} + cq_n$ видно, что последовательности приближений сверху (снизу) из формулы (3) дают монотонные последовательности для величин $q\omega - p$, поэтому достаточно доказать, что любое одностороннее приближение входит в последовательность (3).

Пусть p'/q' является наилучшим приближением снизу (сверху) и $q_{n-1} \leq q' \leq q_{n+1}$ для некоторого нечетного (четного) числа n . Тогда $u' = q'\omega - p' \in (0, q_{n-1}\omega - p_{n-1})$.

Точки $u_k = q_{n,k}\omega - p_{n,k}$, $k = 0, \dots, a_{n+1}$, образуют арифметическую прогрессию с шагом $\delta_n = q_n\omega - p_n$, причем $u_0 = q_{n-1}\omega - p_{n-1}$ и $|u_{a_{n+1}}| \leq |\delta_n|$ (поскольку $p_{n,a_{n+1}}/q_{n,a_{n+1}} = p_{n+1}/q_{n+1}$ является лучшим приближением, чем p_n/q_n).

Следовательно, существует такое $k = 0, \dots, a_{n+1}$, что $|u' - u_k| \leq |\delta_n|$. Но тогда дробь $(\pm(p' - p_{n,k})) / (\pm(q' - q_{n,k}))$ (выбираются одинаковые знаки так, чтобы знаменатель был положителен) является лучшим приближением, чем p_n/q_n :

$$|(q_{n,k} - q')\omega - (p_{n,k} - p')| = |(q'\omega - p') - (q_{n,k}\omega - p_{n,k})| = |u' - u_k| < |\delta_n|,$$

однако ее знаменатель меньше q_{n+1} , что противоречит первому утверждению теоремы, за исключением того случая, когда эта дробь есть отношение вида $0/0$, т.е. $p' = p_{n,k}$, $q' = q_{n,k}$.

²Нам не понадобится случай рационального ω , хотя теорема верна и в этом случае. Иррациональность ω гарантирует бесконечность цепной дроби и различие всех чисел $|q\omega - p|$ при $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

³Второй пункт можно также вывести из теорем 2.21 и 2.22 книги [7], утверждающих, что дроби последовательности (3) и только они являются наилучшими приближениями снизу и сверху *первого рода*, т.е. доставляют минимум выражению $|\omega - a/b|$ по тем же множествам пар (a, b) . Нетрудно показать, что односторонние приближения первого и второго рода совпадают: если $\omega - a/b \in [0, \omega - p/q]$, $0 < b \leq q$, то $b\omega - a \in [0, q\omega - p]$, а если $b\omega - a \in [0, q\omega - p]$, то либо $\omega - a/b \in [0, \omega - p/q]$, либо $\omega - (p - a)/(q - b) \in [0, \omega - p/q]$.

Итак, абсциссы точек $a = z(T_1)$ и $b = z(T_2)$ задаются выражениями $q\omega_u - p$ для некоторых приближений $p_{(a)}/q_{(a)}$ и $p_{(b)}/q_{(b)}$ для ω_u , $q_{(b)} > q_{(a)}$, причем одно из них является приближением снизу, а другое – сверху. Более того, в силу условий леммы 3 на момент T_1 в последовательности (3) между $p_{(a)}/q_{(a)}$ и $p_{(b)}/q_{(b)}$ нет других приближений с той же стороны, что и $p_{(a)}/q_{(a)}$. Следовательно,

$$p_{(a)}/q_{(a)} = [a_0, \dots, a_n], \quad p_{(b)}/q_{(b)} = [a_0, \dots, a_n, h], \quad h = 1, \dots, a_{n+1}.$$

Покажем, что разбиение является островным только тогда, когда $h = a_{n+1}$. Действительно, высота параллелограмма с основанием $[a, 0]$ равна T_2 , а высота параллелограмма с основанием $[0, b]$ равна T_1 (см. п. 3 доказательства леммы 3). Поэтому если $[a, 0]$ длиннее $[0, b]$ (что по п. 1 приведенной теоремы имеет место только при $h = a_{n+1}$), то разбиение является островным.

4. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что существует автоморфизм $C \in Z(A)$, сдвигающий последовательность $\{\mathcal{H}_j\}$ на S .

Пусть такое C построено. Рассмотрим разбиение $\mathcal{H}$ из класса (I) и поднимем его на накрывающую плоскость. Поднятие отрезка $\partial^u \mathcal{H}$, выходящее из нуля, проходит через поднятия $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ точек a, b, c для этого разбиения. Если $\mathcal{L}$ – соответствующее ему разбиение из класса (II), то аналогичные поднятия $\tilde{\tilde{a}}, \tilde{\tilde{b}}, \tilde{\tilde{c}}$ его вершин $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ лежат на тех же поднятиях “бабочки”, что и $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ соответственно. Если разбиение $\mathcal{L}$ соответствовало приближениям $p_{(a)}/q_{(a)} = [a_0, \dots, a_n]$, $p_{(b)}/q_{(b)} = [a_0, \dots, a_n, h]$, то эти поднятия “бабочки” будут содержать целые точки $(p_{(a)}, q_{(a)})$, $(p_{(b)}, q_{(b)})$, $(p_{(a)} + p_{(b)}, q_{(a)} + q_{(b)})$ соответственно.

Итак, $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ лежат в малых окрестностях точек $(p_{(a)}, q_{(a)})$ и $(p_{(b)}, q_{(b)})$. Если отображение C переводит $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$, то оно переводит $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в аналогичные точки $\tilde{a}'$ и $\tilde{b}'$ для разбиения $\mathcal{H}'$. Но тогда поскольку C сохраняет целочисленную решетку, то и близкие этим точкам целые точки должны преобразовываться так же: $(p_{(a)}, q_{(a)}) \mapsto (p_{(a')}, q_{(a')})$, $(p_{(b)}, q_{(b)}) \mapsto (p_{(b')}, q_{(b')})$. Обратно, если отображение C переводит точки $(p_{(a)}, q_{(a)})$ и $(p_{(b)}, q_{(b)})$ в $(p_{(\tilde{a})}, q_{(\tilde{a})})$ и $(p_{(\tilde{b})}, q_{(\tilde{b})})$, а также сохраняет направления L^u, L^s , то оно переводит $\mathcal{H}$ в $\widehat{\mathcal{H}}$.

Будем считать, что $n > k$, где $\omega = [a_0, \dots, a_k, (b_1, \dots, b_l)]$, полагая также $a_{k+l+j+i} = b_i$ при $j \geq 0$, $i = 1, \dots, l$.

Итак, нужно построить отображение $C \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$, сохраняющее собственные направления L^u, L^s (и потому коммутирующее с A), которое переводит точки $(p_{(a)}, q_{(a)})$ и $(p_{(b)}, q_{(b)})$ в точки $(p_{(a')}, q_{(a')})$ и $(p_{(b')}, q_{(b')})$, где $p_{(a')}/q_{(a')} = [a_0, \dots, a_{n+l}]$, $p_{(b')}/q_{(b')} = [a_0, \dots, a_{n+l}, h]$,

Построим сначала отображение $C_0 \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$, индуцированное действие которого на проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ переводит $(p_{(a)} : q_{(a)})$ и $(p_{(b)} : q_{(b)})$ в $(p_{(a')} : q_{(a')})$ и $(p_{(b')} : q_{(b')})$ и сохраняет точки $\{\lambda e_{u,s}\} \in \mathbb{RP}^1$.

Заметим, что $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ индуцирует отображение $x \mapsto x + 1$ на $\mathbb{RP}^1$, а $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – отображение $x \mapsto 1/x$. Следовательно, искомое преобразование задается формулой:

$$C_0 = T^{a_0} R T^{a_1} R \dots T^{a_k} R T^{b_1} R \dots T^{b_l} R T^{-a_k} R \dots T^{-a_1} R T^{-a_0}.$$

Ему соответствует преобразование, которое переводит $[a_0, \dots, a_k, \alpha]$ в $[a_0, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, \alpha]$ (α – любое число). В частности, при $\alpha = [(b_1, \dots, b_l)]$ получим, что направление L^u является собственным для C_0 . Поскольку матрица C_0 целочисленная, то и алгебраически сопряженное ему направление L^s также является собственным для C_0 . Отметим, что $\det C_0 = (-1)^l$.

Рассмотрим теперь действие C_0 на $\mathbb{R}^2$. Имеем

$$C_0 \begin{pmatrix} p(a) & p(b) \\ q(a) & q(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 p(a') & k_2 p(b') \\ k_1 q(a') & k_2 q(b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(a') & p(b') \\ q(a') & q(b') \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\det \begin{pmatrix} p(a) & p(b) \\ q(a) & q(b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} + hp_n \\ q_n & q_{n-1} + hq_n \end{pmatrix} = (-1)^n,$$

$$\det \begin{pmatrix} p(a') & p(b') \\ q(a') & q(b') \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_{n+l} & p_{n+l-1} + hp_{n+l} \\ q_{n+l} & q_{n+l-1} + hq_{n+l} \end{pmatrix} = (-1)^{n+l},$$

получим, что $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, т.е. $k_1 = k_2 = \pm 1$. Следовательно, $C_1 = k_1 C$ – искомое преобразование.

Проиллюстрируем это на классическом примере $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку $A = C^2$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $\omega_u = (\sqrt{5} - 1)/2 = [0, (1)]$, то все разбиения $\{\mathcal{K}_j\}$ имеют островной тип, C сдвигает $\{\mathcal{K}_j\}$ на один элемент, а A – на два.

Перейдем ко второму этапу – получению всех возможных предмарковских разбиений по имеющемуся разбиению тора на два параллелограмма.

ТЕОРЕМА 3. Пусть дано разбиение $\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$ тора на два параллелограмма такое, что нуль является $(+e_u)$ -вершиной. Тогда если поднятие параллелограммов разбиения на накрывающую плоскость имеет вид

$$\tilde{N}_j = \{\alpha_j \theta_u e_u + \beta_j \theta_s e_s \mid 0 \leq \theta_u, \theta_s \leq 1\}, \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_1 < 0 < \beta_2,$$

то число неэквивалентных предмарковских разбиений, которые можно получить из него сдвигом, равно

$$\lceil 0.5 |\Pi \cap \mathrm{Fix}(\hat{A})| \rceil,$$

где $\Pi = \{ae_u + be_s \mid a \in [0, \alpha_1 + \alpha_2], b \in [-\beta_2, -\beta_1]\}$ (Здесь $\lceil x \rceil$ означает округление x вверх до ближайшего целого).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Прежде всего заметим, что

$$a - 0 = \alpha_1 e_u = \beta_2 e_s \pmod{\mathbb{Z}^2}, \quad b - 0 = \alpha_2 e_u = \beta_1 e_s \pmod{\mathbb{Z}^2},$$

откуда $\alpha_1 e_u - \beta_2 e_s, \alpha_2 e_u - \beta_1 e_s \in \mathbb{Z}^2$.

2. Каждое разбиение $\mathcal{N} + v$, содержащее точку $w \in \mathrm{Fix}(\hat{A})$ на неустойчивой границе, эквивалентно посредством сдвига $x \mapsto x - w$ разбиению $\mathcal{N} + (v - w)$, неустойчивая граница которого содержит нуль. Таким образом, достаточно описать все разбиения $\mathcal{N} + v$ с условием $0 \in \partial^u(\mathcal{N} + v)$ и выяснить, какие

из них эквивалентны. Поскольку $\partial^u \mathcal{N} = [0, \alpha_1 + \alpha_2]e_u$, $\partial^s \mathcal{N} = [\beta_1, \beta_2]e_s$, то вектор v удовлетворяет следующим условиям:

$$\exists a \in [0, \alpha_1 + \alpha_2], \quad b \in [\beta_1, \beta_2] \quad v + ae_u = 0, \quad v + be_s \in \text{Fix}(\hat{A}). \quad (4)$$

Итак, каждому такому v однозначно сопоставляется точка $ae_u - be_s \in \Pi \cap \text{Fix}(\hat{A})$.

3. Пусть $\mathcal{N} + v_1$ и $\mathcal{N} + v_2$ эквивалентны, причем $0 \in \partial^u \mathcal{N} + v_j$, так что $\mathcal{N} + v_j$ соответствуют точкам $a_j e_u - b_j e_s \in \Pi \cap \text{Fix}(\hat{A})$. Тогда возможны два случая: либо $\mathcal{N} + v_2 = (\mathcal{N} + v_1) + w$, либо $\mathcal{N} + v_2 = -(\mathcal{N} + v_1) + w$ для некоторого $w \in \text{Fix}(\hat{A})$.

В первом случае в силу (4) $w = v_2 - v_1$ лежит на прямой L_u , но имеет рациональные координаты, так как принадлежит $\text{Fix}(\hat{A})$. Поэтому $w = 0$, $v_1 = v_2$.

Во втором случае в силу условия $-\mathcal{N} = \mathcal{N} - (c - 0) = \mathcal{N} - (\alpha_1 + \alpha_2)e_u$ получаем, что $v_2 = -v_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)e_u + w$. Используя (4), имеем $w = (\alpha_1 + \alpha_2)e_u - a_2 e_u - a_1 e_u$, откуда $w = 0$, $a_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 - a_1)e_u$. Таким образом,

$$\begin{aligned} b_2 e_s &= a_2 e_u + w_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 - a_1)e_u + w_1 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)e_u - b_1 e_s + w_2 = (\beta_1 + \beta_2 - b_1)e_s + w_3, \end{aligned}$$

где $w_j \in \text{Fix}(\hat{A})$. Следовательно, $b_2 = \beta_1 + \beta_2 - b_1$.

Итак, точки $\Pi \cap \text{Fix}(\hat{A})$ разбиваются на пары $(x, ((\alpha_1 + \alpha_2)e_u + (\beta_1 + \beta_2)e_s) - x)$ эквивалентных точек. Единственный случай, когда точки в паре совпадают, имеет место при $x = ((\alpha_1 + \alpha_2)e_u + (\beta_1 + \beta_2)e_s)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Стороны параллелограмма Π содержат четыре целочисленные (а потому принадлежащие $\text{Fix}(\hat{A})$) точки, которые разбиваются на две пары эквивалентных:

$$\{0, (\alpha_1 + \alpha_2)e_u + (\beta_1 + \beta_2)e_s\} \quad \text{и} \quad \{\alpha_1 e_u + \beta_2 e_s, \alpha_2 e_u + \beta_1 e_s\}.$$

Первая пара отвечает $(\pm e_u)$ -, а вторая $(\pm e_s)$ -разбиениям, которые вместе образуют *вершинный тип* разбиений, характеризующийся тем, что неподвижной точкой является одна из вершин, т.е. общих точек устойчивой и неустойчивой границы. Остальные точки $\Pi \cap \text{Fix}(\hat{A})$ отвечают разбиениям *реберного типа*, у которых на устойчивой и неустойчивой границе лежат разные неподвижные точки.

Если $\hat{A}$ имеет более одной неподвижной точки, то реберные разбиения существуют среди сдвигов каждого $\mathcal{N}$. Действительно, $p(\Pi) = \mathbb{T}^2$, поскольку Π содержит параллелограммы $P_1 + (\alpha_2 e_u - \beta_1 e_s)$ и $P_2 + (\alpha_1 e_u - \beta_2 e_s)$, отличающиеся от P_1 и P_2 лишь сдвигом и потому покрывающие весь тор.

Покажем, что в исключительном случае наличия единственной неподвижной точки на торе реберных разбиений нет. Докажем сначала, что всякая матрица сопряжена в $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ с такой матрицей, у которой все элементы либо неотрицательны, либо неположительны. В доказательстве леммы 4 показано, что действие A на проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ переводит $[a_0, \dots, a_n, \alpha]$

в $[a_0, \dots, a_{n \pm dl}, \alpha]$, где $[a_0, a_1, \dots] = [a_0, \dots, a_k, (b_1, \dots, b_l)]$ отвечает собственному направлению, причем, согласно замечанию 2 знаки различны для двух собственных направлений. Выбирая направление, соответствующее знаку $+$, имеем: $[a_0, \dots, a_k, \alpha] \mapsto [a_0, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, \alpha]$. Матрица $T^{a_0} R T^{a_1} \dots R T^{a_k} R$ (T и R определены в доказательстве леммы 4) сопрягает ее с матрицей, которая действует на $\mathbb{RP}^1$ так: $[\alpha] \mapsto [b_1, \dots, b_l, \alpha]$, т.е. с $\pm T^{b_1} R \dots T^{b_l} R$, а все элементы $T^{b_1} R \dots T^{b_l} R$ неотрицательны.

Далее, из условий $\det A = \pm 1$, $\det(A - E) = \pm 1$ (последнее отвечает наличию единственной неподвижной точки) находим, что для разных сочетаний знаков либо $\det A = 1$, $\text{tr } A = 3$, либо $\det A = -1$, $\text{tr } A = \pm 1$ (четвертый случай $\det A = \det(A - E) = 1$ отвечает комплексным собственным значениям A). Рассматривая удовлетворяющие этим условиям матрицы только с неотрицательными либо только с неположительными элементами, находим, что A сопряжена с одной из матриц

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этих трех матриц последовательность $\{\mathcal{K}_j\}$ одна и та же, причем все разбиения в ней эквивалентны: $\mathcal{K}_{j+1} = A_0 \mathcal{K}_j$. Остается явно проверить, что для какого-нибудь одного ее элемента $\text{Fix}(\hat{A}) \cap \text{int } \Pi = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $A = \pm C^d$ (C – образующая централизатора), то каждый класс относительно исходной эквивалентности распадается на $d|p(\text{Fix}(\hat{A}))|$ классов относительно более слабой эквивалентности

$$\mathcal{K}_1 \sim \mathcal{K}_2 \iff \mathcal{K}_2 = \hat{A}^n \mathcal{K}_1.$$

Действительно, рассмотрим разбиения, получающиеся произвольными сдвигами из разбиений $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{dS}$ из последовательности леммы 4. Применением некоторой степени $\hat{A}$ любое разбиение может быть приведено, и притом единственным образом, к одному из них. Следовательно, каждый класс слабой эквивалентности имеет единственного представителя среди разбиений, получающихся произвольными сдвигами из данных. В то же время, каждый класс исходной эквивалентности имеет среди них $d|p(\text{Fix}(\hat{A}))|$ представителей (именно, в тот же класс, что и $\mathcal{L} = \mathcal{K}_j + v$, $j = 1, \dots, S$, входят $C^k \mathcal{L} + u$, $k = 1, \dots, d$, $u \in \text{Fix}(\hat{A}) \bmod \mathbb{Z}^2$).

Список литературы

- [1] R. L. Adler, B. Weiss, “Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **57**:6 (1967), 1573–1576.
- [2] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [3] D. Ornstein, “Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic”, *Advances in Math.*, **4**:3 (1970), 337–352.

- [4] D. V. Anosov, A. V. Klimenko, G. Kolutsky, *On the hyperbolic automorphisms of the 2-torus and their Markov partitions*, preprint MPIM2008-54, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2008.
- [5] E. Rykken, “Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms of $\mathbb{T}^2$ ”, *Rocky Mountain J. Math.*, **28**:3 (1998), 1103–1124.
- [6] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, 4-е изд., УРСС, М., 2004; англ. пер. 3-го изд.: А. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publ., Mineola, NY, 1997.
- [7] О. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. Elementare Kettenbrüche*, Teubner, Stuttgart, 1954.

А. В. Клименко (A. V. Klimenko)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: klimenko05@mail.ru

Поступила в редакцию

20.01.2009 и 25.03.2009