Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Куликов, Вик. С. Куликов, О полных вырождениях поверхностей с обыкновенными особенностями в $\mathbb{P}^3$, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 1, 129–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:37:23

УДК 512.7

В. С. Куликов, Вик. С. Куликов

О полных вырождениях поверхностей с обыкновенными особенностями в $\mathbb{P}^3$

В работе исследуется проблема существования вырождений поверхностей в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками в конфигурации плоскостей, находящихся в общем положении.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: поверхности с обыкновенными особыми точками, полные вырождения.

Введение

В настоящей работе мы исследуем вырождения алгебраических поверхностей в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками. Для начала рассмотрим классический прототип этой ситуации, а именно, вырождения плоских алгебраических кривых. Как известно, любую неособую проективную кривую можно спроектировать в $\mathbb{P}^2$ на нодальную кривую C – кривую с простейшими двойными особыми точками – нодами (особенностями типа A_1). Согласно теореме Севери (см. [1]–[3]) любую плоскую нодальную кривую степени m можно вырождать в конфигурацию m прямых общего положения $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^m L_i \subset \mathbb{P}^2$. Такое вырождение определяет в множестве S двойных точек кривой $\mathcal{L}$ подмножество точек S_0 , которые являются предельными точками двойных точек кривой C . Обратно, если выбрать любое подмножество $S_0 \subset S$, то существует вырождение нодальных кривых (быть может, приводимых), имеющее в качестве предельных двойных точек данное множество S_0 (см. [3]), или, иначе, существует сглаживание двойных точек $S \setminus S_0$ кривой $\mathcal{L}$ (сохраняющее двойные точки из S_0).

В размерности 2 аналогом нодальных кривых являются поверхности в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками. Только такие особенности появляются при общей проекции неособой поверхности $X \subset \mathbb{P}^r$ в $\mathbb{P}^3$ (см., например, [4]). Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени m с обыкновенными особыми точками. Это означает, что: множество ее особых точек $\text{Sing } Y$ – это двойная кривая D ; сама кривая D неособа, за исключением конечного множества тройных точек T ; на поверхности Y общая точка $y \in D$ является нодальной (ее локальное уравнение $xy = 0$); точки $y \in T$ являются тройными точками поверхности Y (локально $xyz = 0$); на Y имеется конечное множество пинчей – особых точек, в которых Y имеет локальное уравнение $x^2 = y^2 z$.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1987.2008.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00095).

© В. С. Куликов, Вик. С. Куликов, 2010

Максимально вырожденная (приводимая) поверхность степени m с обыкновенными особенностями – это конфигурация m плоскостей

$$\mathcal{P} = P_1 \cup \dots \cup P_m \subset \mathbb{P}^3$$

в общем положении. В этом случае двойная кривая $\text{Sing } \mathcal{P} = \mathcal{L}$ состоит из $\binom{m}{2}$ прямых $L_{i,j} = P_i \cap P_j$,

$$\mathcal{L} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} L_{i,j},$$

на которой имеется $\binom{m}{3}$ тройных точек:

$$\mathcal{T} = \bigcup T_{i,j,k}, \quad T_{i,j,k} = P_i \cap P_j \cap P_k, \quad 1 \leq i < j < k \leq m.$$

Вырождением поверхностей (или, вообще, *многообразий*) данного типа называется нулевой слой одномерного семейства поверхностей, общий слой которого есть поверхность данного типа (обычно неособая). Мы будем рассматривать семейства, все слои которого есть поверхности в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особенностями. Вырождение – это поверхность, у которой появляется “больше” особенностей. Более точно, *вырождением* поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особенностями называется плоское семейство вложенных поверхностей $Y_u \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особенностями, параметризованное точками $u \in U$ неособой кривой (или даже диском $U \subset \mathbb{C}$), такое, что:

- (i) в общей точке $u \in U$ слои Y_u имеют особенности такого же типа, как и $Y = Y_{u_1}$, а слой Y_{u_0} в точке $u_0 = 0$ называется *вырожденным*;
- (ii) имеется плоское семейство $D_u \subset Y_u$, где D_u – двойная кривая поверхности Y_u при $u \neq u_0$, а кривая $\mathcal{D} = D_{u_0} \subset \text{Sing } Y_{u_0}$ называется *предельной двойной кривой*;
- (iii) имеется плоское семейство T_u , $u \in U$, где $T_u \subset D_u$ – множество тройных точек поверхности Y_u при $u \neq u_0$, а слой $T_{u_0} = \mathcal{T}_3$ есть множество тройных точек кривой $\mathcal{D}$.

Вырождение называется *полным*, если вырожденный слой $Y_{u_0} = \mathcal{P}$ есть конфигурация плоскостей общего положения.

Полное вырождение определяет предельную двойную кривую $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$. Наоборот, если выделена конфигурация прямых $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ и имеется полное вырождение (не обязательно неприводимых) поверхностей $Y_u \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особенностями такое, что $D_{u_0} = \mathcal{D}$, то мы будем говорить, что конфигурация плоскостей $\mathcal{P}$ *сглаживается вне $\mathcal{D}$* .

Как и в случае кривых, возникают два вопроса. Для каждой ли поверхности с обыкновенными особыми точками в $\mathbb{P}^3$ существует полное вырождение? Для любой ли конфигурации прямых $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ конфигурация плоскостей $\mathcal{P}$ сглаживается вне $\mathcal{D}$?

Проблема вырождаемости гладких поверхностей $X \subset \mathbb{P}^N$ в конфигурации плоскостей исследовалась ранее, но в несколько иной постановке – аналоге проблемы Цейтена для кривых (вырождаемые поверхности – поверхности Заппы или так называемые запчатки; обзор полученных результатов по поверхностям Заппы можно найти в [5]; см. также [6]).

Несмотря на то, что во многих случаях поверхности с обыкновенными особыми точками можно полностью выродить (см. § 3 и § 6), в статье будет показано, что в общем случае ответы на сформулированные выше вопросы отрицательные. Причина, по которой нельзя полностью выродить произвольную поверхность с обыкновенными особыми точками, может состоять как в том, что нельзя выродить двойную кривую поверхности в конфигурацию прямых $\mathcal{D}$ (см. § 5), так и в том, что не существует соответствующей предельной пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, хотя в то же время двойную кривую поверхности можно выродить в конфигурацию прямых (см. п. 8.5). Также будет показано, что существуют пары $(\mathcal{P}_m, \mathcal{D})$, которые нельзя сгладить вне фиксированной конфигурации прямых $\mathcal{D}$, причем в одних случаях такие пары нельзя сгладить ни при каком $m = \deg \mathcal{P}_m$ (см. п. 7.2), а в других случаях такие пары можно сгладить только при достаточно больших m (см. п. 7.1).

§ 1. Выражение числовых характеристик поверхности в терминах вырождения

Имеется два классических способа изучения неособой поверхности $X \subset \mathbb{P}^r$: рассматривается общая проекция в $\mathbb{P}^3$ и на $\mathbb{P}^2$ соответственно. Мы рассматриваем чуть более общую ситуацию. Мы начинаем с поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками, а нормализация $\mathbf{n}: X \rightarrow Y$ поверхности Y и ее композиция с общей проекцией поверхности Y на $\mathbb{P}^2$ определяют общее накрытие $X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Определение полного вырождения позволяет выразить числовые характеристики поверхности Y в терминах ее вырождения. Инварианты поверхности X выражаются как через числовые характеристики поверхности Y , так и через числовые характеристики общего накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Это дает выражение числовых характеристик накрытия в терминах вырождения.

1.1. Числовые характеристики поверхности с обыкновенными особенностями. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – неприводимая поверхность с обыкновенными особыми точками, $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ – двойная кривая, $g_i = g(D_i)$ – геометрический род, $d_i = \deg D_i$ – степень неприводимой компоненты D_i , T – множество тройных точек, Ω – множество пинчей. Основные числовые характеристики вложения $Y \subset \mathbb{P}^3$ следующие:

$m = \deg Y$ – степень поверхности;

k – число неприводимых компонент двойной кривой;

$\bar{g} = \sum_{i=1}^k g_i$ – геометрический род двойной кривой;

$\bar{d} = \sum_{i=1}^k d_i$ – степень двойной кривой;

$t = \#(T)$ – число тройных точек;

$\omega = \#(\Omega)$ – число пинчей.

Набор числовых данных

$$\text{type}(Y) = (m, \bar{d}, k, \bar{g}, t)$$

мы будем называть *типом поверхности* Y .

Пусть $\mathbf{n}: X \rightarrow Y$ – нормализация поверхности Y . Поверхность X неособа. Ее инварианты выражаются через числовые характеристики поверхности Y (см. [8]):

индекс самопересечения канонического класса есть

$$K_X^2 = m(m-4)^2 - (5m-24)\bar{d} + 4(\bar{g}-k) + 9t; \quad (1)$$

топологическая эйлерова характеристика $e(X) = c_2(X)$ есть

$$e(X) = m^2(m-4) + 6m - (7m-24)\bar{d} + 8(\bar{g}-k) + 15t. \quad (2)$$

Применяя формулу Нётера, отсюда можно получить, что эйлерова характеристика

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{6}m(m^2 - 6m + 11) - (m-4)\bar{d} + (\bar{g}-k) + 2t. \quad (3)$$

Число пинчей равно (см. [8])

$$\omega = 2\bar{d}(m-4) - 6t - 4(\bar{g}-k). \quad (4)$$

Как известно (см. [7]), арифметический род приведенной кривой C

$$p_a(C) = g + \delta - r + 1, \quad (5)$$

где g – геометрический род, δ – сумма δ -инвариантов особенностей, r – число неприводимых компонент. Для двойной кривой D , которая имеет лишь тройные особые точки ($\delta = 3$), эта формула дает

$$p_a(D) = \bar{g} + 3t - k + 1. \quad (6)$$

1.2. Числовые данные для описания кривой $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^3$ – конфигурация m плоскостей общего положения, $\mathcal{L} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} L_{i,j}$ – ее двойная кривая. Пусть кривая $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ есть объединение $\bar{d}$ прямых $L_{i,j}$, а $\mathcal{R}$ – объединение d оставшихся прямых (кривые $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$ мы называем также *конфигурациями прямых*),

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}, \quad \deg \mathcal{D} = \bar{d}, \quad \deg \mathcal{R} = d, \quad d + \bar{d} = \binom{m}{2}. \quad (7)$$

Тройные точки кривой $\mathcal{L}$ по отношению к разложению $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}$ разбиваются на четыре типа:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 \sqcup \mathcal{T}_2 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_0,$$

где $\mathcal{T}_3$ состоит из тех точек, которые являются тройными точками кривой $\mathcal{D}$; $\mathcal{T}_2$ состоит из тех точек, которые являются двойными точками кривой $\mathcal{D}$; $\mathcal{T}_1$ состоит из тех точек, которые неособы на $\mathcal{D}$ (и являются двойными точками кривой $\mathcal{R}$); $\mathcal{T}_0$ состоит из тех точек, которые не лежат на $\mathcal{D}$ (и являются тройными точками кривой $\mathcal{R}$). Обозначим τ_3 , τ_2 , τ_1 и τ_0 числа точек в соответствующих множествах. Имеем

$$\tau = \tau_3 + \tau_2 + \tau_1 + \tau_0 = \binom{m}{3}. \quad (8)$$

Из формулы (5) для арифметического рода получаем

$$p_a(\mathcal{D}) = \tau_2 + 3\tau_3 - \bar{d} + 1 \quad (9)$$

(для двойных точек инвариант $\delta = 1$, а для тройных точек $\delta = 3$).

Между числами τ_i имеются следующие соотношения. На каждой прямой $L_{i,j} = P_i \cap P_j$ лежат $m - 2$ тройных точек – точек пересечения с плоскостями P_k , $k \neq i, j$. Просуммируем числа тройных точек кривой $\mathcal{L}$, лежащие на $\bar{d}$ прямых $L_{i,j} \subset \mathcal{D}$. С одной стороны, получим $(m - 2)\bar{d}$. С другой стороны, получим $3\tau_3 + 2\tau_2 + \tau_1$, так как тройные точки $\mathcal{D}$ считаются три раза, двойные – два, а неособые – один. Получаем

$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = (m - 2)\bar{d}. \quad (10)$$

Аналогичный подсчет для кривой $\mathcal{R}$ дает

$$\tau_2 + 2\tau_1 + 3\tau_0 = (m - 2)d. \quad (11)$$

Набор данных $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = (m, \bar{d}, k, \tau_2, \tau_3)$ мы будем называть *типом пары* $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$. Здесь k – это число связных компонент кривой $\mathcal{D} \setminus \mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_3$ – множество тройных точек кривой $\mathcal{D}$.

Отметим, что $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ не определяет пару $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ однозначно с точностью до гомеоморфизма: для некоторых типов могут существовать не гомеоморфные пары данного типа.

1.3. Граф конфигурации прямых. Как известно, алгебраическому многообразию (и, в частности, дивизору с нормальными пересечениями) можно сопоставить полиэдр по правилу: вершины полиэдра соответствуют его неприводимым компонентам; две вершины соединяются ребром, если эти компоненты пересекаются; на три вершины натягивается треугольник, если соответствующие компоненты имеют непустое пересечение, и т.д. В частности, конфигурации $\mathcal{P}$ из m плоскостей общего положения в $\mathbb{P}^3$ сопоставляется полиэдр, который является двумерным остовом $(m - 1)$ -мерного симплекса в $\mathbb{R}^{m-1}$ (или стандартного $(m - 1)$ -симплекса в $\mathbb{R}^m$). Обозначим через $\Gamma(\mathcal{L})$ граф, который является одномерным остовом этого полиэдра.

Любой конфигурации прямых $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ сопоставим граф $\Gamma(\mathcal{D})$ – *граф кривой* $\mathcal{D}$, который является подграфом в $\Gamma(\mathcal{L})$, состоящим из объединения ребер, соответствующих прямым $L_{i,j} \subset \mathcal{D}$. Если $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ – некоторая конфигурация прямых, то $\mathcal{R}$ будет обозначать дополнительную к $\mathcal{D}$ конфигурацию прямых в $\mathcal{L}$.

Назовем граф Γ *реализуемым*, если он удовлетворяет следующим условиям: он не содержит изолированных вершин, не содержит простых петель (т.е. ребер с совпадающими началом и концом) и любые две его вершины соединены не более чем одним ребром. Очевидно, граф Γ является графом некоторого множества $\mathcal{D}$ двойных прямых конфигурации плоскостей $\mathcal{P}$, находящихся в общем положении, тогда и только тогда, когда Γ является реализуемым графом и число его вершин не превосходит $\deg \mathcal{P}$.

Граф $\Gamma(\mathcal{D})$ кодирует числовые характеристики кривой $\mathcal{D}$. Число ребер графа $\Gamma(\mathcal{D})$ равно числу $\bar{d}$ прямых, составляющих кривую $\mathcal{D}$. Число τ_3 тройных точек $\mathcal{D}$, очевидно, равно числу треугольников графа $\Gamma(\mathcal{D})$ (треугольник в графе – это три вершины и три соединяющих их ребра).

Обозначим через $v(P)$ валентность вершины P графа $\Gamma(\mathcal{D})$, т.е. число ребер, выходящих из P .

ЛЕММА 1. Число двойных точек кривой $\mathcal{D}$ равно

$$\tau_2 = \sum_{P \in \Gamma(\mathcal{D})} \frac{1}{2} v(P)(v(P) - 1) - 3\tau_3. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вершине P валентности $v(P)$ соответствует плоскость, на которой лежат $v(P)$ прямых. Эти прямые пересекаются в $\frac{1}{2}v(P)(v(P) - 1)$ двойных точках. Сумма чисел этих двойных точек и есть число двойных точек кривой $\mathcal{D}$, если $\mathcal{D}$ не имеет тройных точек. Если же $\mathcal{D}$ имеет тройные точки, то каждая тройная точка $T_{i,j,k} = P_i \cap P_j \cap P_k$, являясь двойной точкой на каждой из трех плоскостей P_i, P_j, P_k , дает вклад, равный 3, в первое слагаемое формулы (12). При подсчете τ_2 этот вклад должен быть удален, т.е. нужно вычесть $3\tau_3$.

Лемма 1 доказана.

Полнением графа $\Gamma(\mathcal{R})$ (относительно $\mathcal{L}$) называется граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$, состоящий из всех вершин графа $\Gamma(\mathcal{L})$ и всех ребер графа $\Gamma(\mathcal{R})$. Граф $\Gamma(\mathcal{R})$ называется *полным*, если $\Gamma(\mathcal{R}) = \bar{\Gamma}(\mathcal{R})$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ – предельная двойная кривая для полного вырождения поверхности Y с обыкновенными особыми точками в $\mathbb{P}^3$.

ЛЕММА 2. Число неприводимых компонент поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками равно числу связных компонент графа $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$. В частности, поверхность Y неприводима, если граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ связан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{P}^2$ – плоскость в общем положении по отношению к вырожденному слою $Y_{u_0} = \mathcal{P}$ (и к близким слоям) полного вырождения Y_u поверхностей с обыкновенными особенностями. Рассмотрим ограничение семейства Y_u на плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$. Получаем вырождение семейства нодальных кривых $C_u = Y_u \cap \mathbb{P}^2$ в конфигурацию m прямых $L = C_{u_0}$. Конфигурация L состоит из m прямых $L_i = P_i \cap \mathbb{P}^2$, которые пересекаются в $\binom{m}{2}$ точках $\bar{L}_{i,j} = L_{i,j} \cap \mathbb{P}^2$. Конфигурации прямых L сопоставляется граф $\Gamma(L)$ – двойственный граф кривой L . Очевидно, что $\Gamma(L) = \Gamma(\mathcal{L})$. Семейство двойных точек $D_u \cap \mathbb{P}^2$ кривых C_u определяет набор предельных двойных точек $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cap \mathbb{P}^2$. Пусть $\tilde{\mathcal{R}}$ – набор дополнительных двойных точек к $\tilde{\mathcal{D}}$ конфигурации L (сглаживаемых двойных точек кривой L). Сопоставим $\tilde{\mathcal{R}}$ граф $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}})$: вершины графа соответствуют прямым L_i и две вершины соединены ребром, если соответствующие прямые L_i пересекаются в точке, принадлежащей $\tilde{\mathcal{R}}$. Очевидно, что графы $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ и $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}})$ изоморфны. Кроме того, из теоремы Бертини следует, что число неприводимых компонент поверхности Y_u совпадает с числом неприводимых компонент кривой C_u . С другой стороны, хорошо известно, что число неприводимых компонент кривой C_u совпадает с числом связных компонент графа $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}})$.

Лемма 2 доказана.

В согласии с леммой 2 мы будем называть пару $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ *неприводимой*, если граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ связан.

Для типов графов $\Gamma(\mathcal{D})$ (или самих конфигураций прямых $\mathcal{D}$) в случае связного графа мы будем использовать обозначение

$$\Gamma_{v_1, v_2, \dots}^{\bar{d}, \tau_3},$$

Рис. 1

где $v_1, v_2, \dots$ – это числа вершин валентностей 1, 2 и т.д., $\bar{d}$ – степень $\mathcal{D}$, т.е. число ребер графа, τ_3 – число тройных точек $\mathcal{D}$, т.е. число треугольников в $\Gamma(\mathcal{D})$. Если же граф $\Gamma(\mathcal{D})$ несвязен, то мы будем использовать аналогичный способ обозначения для компонент связности и отделять данные каждой компоненты скобками, а если несколько компонент имеют одинаковые данные, то будет использоваться мультипликативный способ записи. Например, если $\mathcal{D}$ состоит из трех связных компонент, две из которых – это цепочки, состоящие из двух прямых, а третья состоит из четырех прямых, три из которых пересекаются в тройной точке, а четвертая прямая пересекается с двумя из первых трех прямых, то граф $\Gamma(\mathcal{D})$ имеет тип $\Gamma_{(2,1)^2(1,2,1)}^{(2,0)^2(4,1)}$ (рис. 1).

1.4. Числовые характеристики предельной двойной кривой $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$.

Связь между числовыми характеристиками двойных кривых $\mathcal{D}$ и D для полного вырождения Y_u , $u \in U$, дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для предельной двойной кривой $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ полного вырождения поверхностей Y_u , $u \in U$, с обыкновенными особыми точками имеют место следующие равенства:

$$\bar{d} = \deg D; \quad (13)$$

$$\tau_3 = t; \quad (14)$$

$$\tau_2 = \bar{d} + \bar{g} - k; \quad (15)$$

$$\omega = 2\tau_1; \quad (16)$$

$$k = \# C(\mathcal{D} \setminus \mathcal{T}_3), \quad (17)$$

где $\# C(\mathcal{D} \setminus \mathcal{T}_3)$ – число компонент связности кривой $\mathcal{D} \setminus \mathcal{T}_3$.

Таким образом, если $Y = Y_{u_1}$ – неприводимая поверхность, то тип поверхности $\text{type}(Y)$ и тип предельной пары $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ однозначно восстанавливаются один по другому.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (13) следует из того, что в плоском семействе D_u степень $\deg D_u$ постоянна. Аналогично, формула (14) следует из постоянства семейства T_u . Формула (15) следует из постоянства арифметического рода $p_a(D_u)$ в плоском семействе D_u и формул (6) и (9). Для доказательства формулы (16) подставим в формулу (4) выражение для $\bar{g} - k$ из формулы (15). Имеем

$$\omega = 2\bar{d}(m - 4) - 6\tau_3 + 4(\bar{g} - \tau_2) = 2\bar{d}(m - 2) - 4\tau_2 - 6\tau_3,$$

и из формулы (10) получаем, что $\omega = 2\tau_1$.

Формула (17) следует из того, что семейство кривых $D_u \setminus T_u$ является плоским, и поэтому число связных компонент в слоях такого семейства постоянно.

Предложение 1 доказано.

Число k неприводимых компонент двойной кривой $D \subset Y$ (формула (17)) может быть получено в терминах графа $\Gamma(\mathcal{D})$ предельной двойной кривой $\mathcal{D}$ следующим образом. Назовем *путем* в $\Gamma(\mathcal{D})$ последовательность, состоящую из его ребер, в которой начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего. Путь называется *запрещенным*, если два его последовательных ребра являются сторонами треугольника в $\Gamma(\mathcal{D})$. Назовем два ребра графа $\Gamma(\mathcal{D})$ *эквивалентными*, если они являются ребрами какого-нибудь запрещенного пути, и продолжим это отношение до отношения эквивалентности на множестве ребер графа $\Gamma(\mathcal{D})$. Непосредственно проверяется справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Число k неприводимых компонент кривой D равно числу классов эквивалентности ребер графа $\Gamma(\mathcal{D})$.*

Формулы (14) и (15) позволяют выразить инварианты поверхности X через числовые характеристики пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$:

$$K_X^2 = m(m-4)^2 - (5m-20)\bar{d} + 4\tau_2 + 9\tau_3, \quad (18)$$

$$e(X) = m^2(m-4) + 6m - (7m-16)\bar{d} + 8\tau_2 + 15\tau_3, \quad (19)$$

или, с учетом (10),

$$K_X^2 = m(m-4)^2 + 10\bar{d} - 5\tau_1 - 6\tau_2 - 6\tau_3, \quad (20)$$

$$e(X) = m^2(m-4) + 6m + 2\bar{d} - 7\tau_1 - 6\tau_2 - 6\tau_3. \quad (21)$$

Из формулы Нётера и равенства (8) следует, что

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \bar{d} + \tau_0 - \frac{m(m-3)}{2}. \quad (22)$$

§ 2. Общие проекции на плоскость

2.1. Дискриминант проекции. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность (не обязательно неприводимая) степени m с обыкновенными особыми точками, и пусть $\text{pr}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – линейная проекция с центром в точке $o \notin Y$. Выберем координаты в $\mathbb{P}^3$ так, что $o = (0:0:0:1)$. Тогда проекция задается формулой

$$\text{pr}: (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2,$$

а уравнение поверхности Y имеет вид

$$h(x_4) = x_4^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x_1, x_2, x_3)x_4^j = 0.$$

Дискриминант $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ многочлена $h(x_4)$ как многочлена от x_4 является однородным многочленом от переменных x_1, x_2, x_3 степени $m(m-1)$ и определяет в $\mathbb{P}^2$ *дискриминантный дивизор* Δ проекции $p = \text{pr}|_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть проекция $\text{pr}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ такова, что:

- (i) композиция $f = \text{pr} \circ \mathbf{n}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ не разветвлена над общими точками компонент кривой $\bar{D} = \text{pr}(D)$, где $\mathbf{n}: X \rightarrow Y$ – нормализация;
- (ii) индекс ветвления морфизма f в общих точках компонент кривой ветвления $R \subset X$ равен 2;
- (iii) ограничение морфизма f на кривую $R \subset X$ имеет степень 1.

Тогда многочлен $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ раскладывается на множители:

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = \beta(x_1, x_2, x_3) \cdot \rho(x_1, x_2, x_3)^2,$$

где многочлены $\beta(x_1, x_2, x_3)$ и $\rho(x_1, x_2, x_3)$ не имеют кратных множителей, $\beta(x_1, x_2, x_3) = 0$ является уравнением кривой ветвления $f(R) = B \subset \mathbb{P}^2$ морфизма f , а $\rho(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение кривой $\bar{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность Y покрывается тремя картами $U_i: x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, $U_i = \mathbb{C}^3$. В каждой из этих карт проекция pr имеет вид $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Например, в карте $U_3: x_3 \neq 0$, нужно взять $x_1/x_3 = x$, $x_2/x_3 = y$, $x_4/x_3 = z$. В этой карте уравнение поверхности Y имеет вид

$$h(z) = z^m + \sum_{j=0}^{m-1} \bar{a}_j(x, y) z^j = 0,$$

а уравнение дискриминантного дивизора есть $\Delta(x, y, 1) = 0$.

Рассмотрим точку $q \in \mathbb{P}^2$, и пусть, например, точка q лежит в карте $\mathbb{C}^2 = \{x_3 \neq 0\}$. Если q не принадлежит конечному множеству точек (особых точек кривой B , а также образов пинчей и тройных точек поверхности Y), то найдутся аналитическая окрестность $V \subset \mathbb{C}^2$ этой точки и такие аналитические координаты u, v в ней, что в этих координатах многочлен $h(z)$ раскладывается на m множителей вида $z - \alpha_j(u, v)$, если $q \notin B$, либо на $m-2$ множителей такого же вида и $(z - g(u, v))^2 - u$, если $q \in B$, где $\alpha_j(u, v)$, $g(u, v)$ – некоторые аналитические функции и $u = 0$ – локальное уравнение кривой B . Кроме того, как известно, дискриминант многочлена $h(z) = \prod_{j=1}^m (z - \alpha_j)$ равен $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$. Отсюда следует, что дискриминант $\Delta(x, y, 1)$ обращается в нуль только в точках кривых B и $\bar{D} = \text{pr}(D)$. Более того, так как Y имеет только обыкновенные особенности, то из условий, наложенных на проекцию pr , следует, что уравнения неприводимых компонент кривой $\bar{D}$ входят в $\Delta(x, y, 1)$ с кратностью 2, а уравнения неприводимых компонент кривой B – с кратностью 1.

Предложение 2 доказано.

В частности, если $Y = \mathcal{P}$ – конфигурация плоскостей в общем положении, то дискриминантный дивизор ограничения проекции pr на $\mathcal{P}$

$$\Delta = 2 \text{pr}(\mathcal{L}) = 2\bar{\mathcal{L}}.$$

Более того, если проекция pr удовлетворяет условиям предложения 2 для каждой поверхности Y_u , $u \in U$, полного вырождения поверхностей с обыкновенными особыми точками, то мы получаем три плоских семейства кривых: $\bar{D}_u = \text{pr}(D_u)$, B_u и $\Delta_u = B_u + 2\bar{D}_u$, в которых $\bar{D}_{u_0} = \text{pr}(\mathcal{D}) = \bar{\mathcal{D}}$ и $B_{u_0} = 2 \text{pr}(\mathcal{R}) = 2\bar{\mathcal{R}}$.

2.2. Общие накрытия плоскости и общие проекции поверхности с обыкновенными особенностями. Пусть X – неособая алгебраическая поверхность, не обязательно неприводимая. Напомним (см. [9]), что конечное накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ называется *общим*, если оно устроено так же, как общая проекция проективной поверхности на плоскость, т.е. обладает свойствами:

- (i) кривая ветвления внизу $B \subset \mathbb{P}^2$ является каспидальной, т.е. имеет особенностями лишь обыкновенные ноуды и каспы;
- (ii) $f^*(B) = 2R + C$, где кривая ветвления вверх R неособа, а кривая C приведена;
- (iii) $f|_R: R \rightarrow B$ есть нормализация кривой B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – неособая неприводимая проективная поверхность. Тогда кривая ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени $m \geq 2$ неприводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение очевидно, если $\deg f = 2$.

Пусть $\deg f \geq 3$. Общее накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленное в кривой B , определяет эпиморфизм $\mu: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \rightarrow \mathcal{S}_m$ в симметрическую группу $\mathcal{S}_m$ (и определяется им), при котором образ $\mu(\gamma)$ каждой геометрической образующей $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ (т.е. каждого простого обхода вокруг кривой B) есть транспозиция в $\mathcal{S}_m$ (см., например, [9]). Если B распадается в объединение двух кривых B_1 и B_2 , то B_1 и B_2 пересекаются трансверсально в неособых точках, поскольку B имеет в качестве особенностей только простые ноуды и каспы. Поэтому (см., например, [10]) элементы группы Γ_1 , порожденной простыми обходами вокруг B_1 , коммутируют с элементами группы Γ_2 , порожденной простыми обходами вокруг B_2 . С другой стороны, легко видеть, что элементы двух нетривиальных подгрупп $\mu(\Gamma_1) \subset \mathcal{S}_m$ и $\mu(\Gamma_2) \subset \mathcal{S}_m$, порожденных транспозициями, не могут порождать всю симметрическую группу $\mathcal{S}_m$, если элементы группы $\mu(\Gamma_1)$ коммутируют с элементами группы $\mu(\Gamma_2)$.

Предложение 3 доказано.

В качестве следствия из предложения 3 мы получаем, что число неприводимых компонент кривой ветвления B общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ равно числу неприводимых компонент X_i поверхности X , для которых $\deg f|_{X_i} \geq 2$.

Основными числовыми характеристиками общего накрытия f проективной плоскости неприводимой поверхностью являются:

$m = \deg f$ – степень накрытия;

$g = g(B)$ – геометрический род кривой ветвления;

$2d = \deg B$ – степень кривой ветвления;

n – число ноудов на B ;

c – число каспов.

Инварианты поверхности X выражаются через числовые характеристики общего накрытия по формулам (см. [9])

$$K_X^2 = 9m - 9d + g - 1, \quad (23)$$

$$e(X) = 3m + 2(g - 1) - c. \quad (24)$$

Пусть теперь $Y \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность с обыкновенными особыми точками, а $\mathbf{n}: X \rightarrow Y$ – нормализация. Проекция $\mathrm{gr}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ называется *общей относительно* Y , если она общая для двойной кривой $D \subset Y$ (и, в частности, $\mathrm{gr}(D)$ имеет лишь t тройных точек и некоторое число ноудов) и композиция $f = p \circ \mathbf{n}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, где $p = \mathrm{gr}|_Y$, есть общее накрытие плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Y_u , $u \in U$, $\dim U = 1$, – полное вырождение поверхностей степени m с обыкновенными особенностями. Тогда для почти всех общих проекций $\mathrm{gr}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ конфигурации плоскостей $\mathcal{P} = Y_{u_0}$ проекции gr являются общими проекциями поверхностей Y_u для всех $u \in U$, за исключением, быть может, конечного числа значений u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению полного вырождения семейство Y_u , $u \in U$, – это слои ограничения на $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^3 \times U$ проекции на второй сомножитель.

Из определения общей проекции, примененного к конфигурации плоскостей, следует, что можно найти конечное покрытие $\bigcup U_i = \mathbb{P}^2$ маленькими шарами U_i с центрами в точках p_i и открытую окрестность V поверхности $\mathcal{P}$ такие, что число связных компонент пересечения $\mathrm{gr}^{-1}(U_i) \cap V$ соответственно равно: m , если $p_i \notin \overline{\mathcal{L}} = \mathrm{gr}(\mathcal{L})$; $m - 1$, если p_i есть неособая точка $\overline{\mathcal{L}}$; $m - 2$, если p_i есть особая точка $\overline{\mathcal{L}}$. Для u , достаточно близких к u_0 , поверхности Y_u принадлежат V , и поэтому для таких u ограничение проекции gr на Y_u удовлетворяет условиям предложения 2. Из плоскости семейства кривых ветвления B_u следует, что для почти всех $u \in U$ кривые B_u приведены. Согласно [11] ограничение общей проекции на Y_{u_1} (при фиксированном u_1) является общим накрытием плоскости, в частности, кривая B_{u_1} является каспидальной кривой. Следовательно, если проекция является одновременно общей для $\mathcal{P}$ и Y_{u_1} , то из плоскости семейства B_u вытекает, что для почти всех u кривые B_u имеют особенности не “хуже”, чем особенности кривой B_{u_1} , т.е. для почти всех $u \in U$ кривые B_u также являются каспидальными кривыми, а ограничение проекции gr на Y_u является общим накрытием плоскости.

Предложение 4 доказано.

2.3. Числовые данные для описания проекции на плоскость кривой $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$. Пусть $\mathrm{gr}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая проекция конфигурации m плоскостей $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^3$ на плоскость. Тогда кривая

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathrm{gr}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}^2$$

имеет τ тройных точек и

$$\nu = \frac{1}{2} \binom{m}{2} \binom{m-2}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{8} \quad (25)$$

двойных точек – точек пересечения прямых $\mathrm{gr}(L_{i,j})$ и $\mathrm{gr}(L_{k,l})$, которые являются проекциями скрещивающихся прямых $L_{i,j}$ и $L_{k,l}$ конфигурации прямых $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^3$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}$ – разбиение $\binom{m}{2}$ прямых из $\mathcal{L}$ на две части, содержащие $\bar{d}$ и d прямых соответственно. Обозначим $\overline{\mathcal{D}} = \mathrm{gr}(\mathcal{D})$ и $\overline{\mathcal{R}} = \mathrm{gr}(\mathcal{R})$. Тогда

ν двойных точек кривой $\overline{\mathcal{L}}$ разбиваются на три множества: ν_2 точек, которые являются двойными на $\overline{\mathcal{D}}$; ν_1 точек, которые являются простыми на $\overline{\mathcal{D}}$ (являются точками пересечения $\overline{\mathcal{D}}$ и $\overline{\mathcal{R}}$); ν_0 точек, которые не лежат на $\overline{\mathcal{D}}$ (являются двойными точками кривой $\overline{\mathcal{R}}$). Таким образом,

$$\nu = \nu_2 + \nu_1 + \nu_0. \quad (26)$$

На кривой $\overline{\mathcal{D}}$, которая является конфигурацией $\bar{d}$ прямых, имеется τ_3 тройных точек и $\tau_2 + \nu_2$ двойных, τ_2 из которых были на $\mathcal{D}$, а ν_2 – это число точек пересечений образов скрещивающихся прямых при проекции кривой $\mathcal{D}$. Применяя формулу (5) для арифметического рода кривой $\overline{\mathcal{D}}$, получаем

$$\frac{1}{2}(\bar{d} - 1)(\bar{d} - 2) = (\tau_2 + \nu_2) + 3\tau_3 - \bar{d} + 1,$$

т.е. $\frac{1}{2}\bar{d}(\bar{d} - 1) = \nu_2 + \tau_2 + 3\tau_3$, откуда

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\bar{d}(\bar{d} - 1) - \tau_2 - 3\tau_3. \quad (27)$$

Аналогичная формула для кривой $\overline{\mathcal{R}}$ степени d с τ_0 тройными точками и $\tau_1 + \nu_0$ двойными точками дает

$$\nu_0 = \frac{1}{2}d(d - 1) - \tau_1 - 3\tau_0. \quad (28)$$

2.4. Выражение числовых характеристик накрытия в терминах вырождения. Мы выразили инварианты K_X^2 и $e(X)$ неприводимой поверхности X через числовые характеристики вырождения поверхности Y . С другой стороны, K_X^2 и $e(X)$ выражаются через числовые характеристики накрытия (см. (23) и (24)). Следовательно, мы можем выразить числовые характеристики накрытия через числовые характеристики вырождения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если Y_u , $u \in U$, – полное вырождение неприводимой поверхности Y , то числовые характеристики общей проекции $p: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ выражаются через числовые характеристики вырождения по формулам

$$\deg B = 2d, \quad (29)$$

$$g - 1 = 6\tau_0 + \tau_1 - d, \quad (30)$$

$$c = 6\tau_0 + 3\tau_1, \quad (31)$$

$$n = 4\nu_0. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем (29), т.е. что d в обозначении степени $\deg B$ в п. 2.2 – это есть $d = \deg \mathcal{R}$ из формулы (7). Пусть L – общая прямая в $\mathbb{P}^2$, а $\bar{L} = p^{-1}(L)$ – соответствующее гиперплоское сечение Y . Тогда $\bar{L}$ – плоская неприводимая кривая степени m с $\bar{d} = \deg D$ ноудами. Поэтому геометрический род есть $g(\bar{L}) = (m - 1)(m - 2)/2 - \bar{d}$. С другой стороны, $p: \bar{L} \rightarrow L$ есть накрытие степени m , разветвленное в $\deg B = (B, L)$ точках. Поэтому по формуле Гурвица имеем $2g(\bar{L}) - 2 = -2m + \deg B$. Отсюда следует, что

$$\deg B = (m - 1)(m - 2) - 2\bar{d} - 2 + 2m = m(m - 1) - 2\bar{d} = 2d.$$

Выведем формулу (30). Из формулы (23) имеем $g - 1 = K_X^2 - 9m + 9d$ и в силу (18)

$$g - 1 = m(m - 4)^2 + 10\bar{d} - 5\tau_1 - 6\tau_2 - 6\tau_3 - 9m + 9d.$$

Подставляя $\bar{d} = (m - 1)(m - 2)/2 - d$ из (7) и $\tau_2 + \tau_3 = \tau - \tau_1 - \tau_0$ из (8), получаем формулу (30):

$$\begin{aligned} g - 1 &= m(m - 4)^2 + 5m(m - 1) - 10d - 5\tau_1 - m(m - 1)(m - 2) \\ &\quad + 6\tau_1 + 6\tau_0 - 9m + 9d = 6\tau_0 + \tau_1 - d. \end{aligned}$$

Для вычисления c воспользуемся формулой (24): $c = -e(X) + 3m + 2(g - 1)$. Подставляя выражения для $e(X)$ из (21) и $g - 1$ из (30), получаем

$$\begin{aligned} c &= -m^2(m - 4) - 6m - 2\bar{d} + 7\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3 + 3m + 12\tau_0 + 2\tau_1 - 2d \\ &= -m^2(m - 4) - 3m - 2(\bar{d} + d) + 6(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + 6\tau_0 + 3\tau_1. \end{aligned}$$

Применяя формулы (7) и (8), получаем формулу (31).

Для вычисления n воспользуемся формулой для рода плоской кривой

$$\frac{\deg B(\deg B - 3)}{2} = g - 1 + c + n.$$

Отсюда в силу формул (29), (30) и (31) получаем

$$d(2d - 3) = 6\tau_0 + \tau_1 - d + 6\tau_0 + 3\tau_1 + n = 12\tau_0 + 4\tau_1 + n - d,$$

т.е. $n - (d - 1) - 12\tau_0 - 4\tau_1 = 4\nu_0$ в силу формулы (28).

Предложение 5 доказано.

2.5. Вырождения кубических поверхностей. Геометрический смысл формул для c и n . Пусть $p: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая проекция поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$, $\deg Y = 3$.

Как известно (см. [8]), неприводимые поверхности степени $m = 3$ с обыкновенными особыми точками – это либо неособые кубики, либо кубики, двойная кривая которых есть прямая.

Если Y – неособая кубика, то, как известно, кривая ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ – это кривая степени 6 с шестью каспами (которые к тому же лежат на конике).

Если двойная кривая D – это прямая ($\bar{d} = 1$), то на поверхности Y имеется два пинча, $\omega = 2$, а дискриминантная кривая B есть рациональная кватрика ($2d = 4$) с тремя каспами ($c = 3$).

Если же поверхность Y приводима, то либо $Y = P \cup Q$ – объединение плоскости и квадратики, либо Y есть объединение трех плоскостей.

Рассмотрим теперь полное вырождение кубики Y в конфигурацию трех плоскостей $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ с двойной кривой $\mathcal{L} = L_{1,2} \cup L_{2,3} \cup L_{3,1}$. Конфигурация $\mathcal{P}$ имеет одну тройную точку $s = L_{1,2} \cap L_{2,3} \cap L_{3,1}$. Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$ – соответственно предельная двойная кривая и предельная кривая ветвления. Поверхность Y получается из $\mathcal{P}$ сглаживанием кривой $\mathcal{R}$ (сглаживанием вне $\mathcal{D}$). Мы имеем четыре возможности:

1) общий слой Y – неособая кубика, и тогда $\mathcal{L} = \mathcal{R}$, $\mathcal{D} = \emptyset$, т.е. двойная кривая $\mathcal{L}$ полностью сглаживается; при этом из тройной точки $\bar{s} = p(\mathcal{T}_0) \in \bar{\mathcal{R}}$ на кривой ветвления B появляется шесть каспов (и ни одного ноуда);

2) общий слой Y – неприводимая кубика с двойной кривой D , которая является прямой; в этом случае можем считать, что $\mathcal{D} = L_{1,2}$, а $\mathcal{R} = L_{2,3} \cup L_{3,1}$, т.е. две прямые в $\mathcal{L}$ сглаживаются, а одна остается двойной; точка $s \in \mathcal{T}_1$; при этом из точки s при регенерации на поверхности Y появляются два пинча, а точка $\bar{s}$ дает на кривой B три каспа;

3) общий слой $Y = P \cup Q$; тогда $\mathcal{R} = L_{1,2}$, $\mathcal{D} = L_{2,3} \cup L_{3,1}$; точка $s \in \mathcal{T}_2$; кривые $2\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ сглаживаются в плоские коники, одна из которых становится кривой ветвления R , а другая – двойной кривой D ; кривая B – это коника в $\mathbb{P}^2$;

4) общий слой Y есть объединение трех плоскостей, $\mathcal{L} = \mathcal{D}$, $\mathcal{R} = \emptyset$ и $s \in \mathcal{T}_3$; двойная кривая $\mathcal{L}$ вообще не сглаживается.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ – полное вырождение поверхности Y степени m с обыкновенными особыми точками, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$ – соответственно предельные двойная кривая и кривая ветвления. Если $s \in \mathcal{T}$ – тройная точка на $\mathcal{P}$, то (локально) в окрестности точки s регенерация (т.е. сглаживание вне $\mathcal{D}$) происходит так же, как в случае регенерации кубической поверхности, и это следующим образом объясняет полученные ранее формулы.

Формула (31) объясняется тем, что при регенерации в случае $s \in \mathcal{T}_0$ на кривой B появляется шесть каспов, а в случае $s \in \mathcal{T}_1$ появляется три каспа.

Формула (16) объясняется тем, что пинчи (по два) появляются только из точек $s \in \mathcal{T}_1$.

Наконец, формула (32) объясняется так. Пусть q – одна из ν_0 двойных точек кривой $\bar{\mathcal{R}}$, $q = \bar{L}_{i,j} \cap \bar{L}_{k,l}$, где $L_{i,j}$ и $L_{k,l}$ – пара скрещивающихся прямых. В окрестности прямой $L_{i,j}$ (локально) поверхность $\mathcal{P}$ задается уравнением $z^2 - x^2 = 0$ и при сглаживании поверхность Y_u задается уравнением $z^2 - x^2 = \varepsilon$. При проекции на плоскость $\mathbb{P}^2$ мы получаем две ветви кривой ветвления B_u , близкие (“параллельные”) к прямой $\bar{L}_{i,j}$. Аналогично, для кривой $L_{k,l}$ мы получаем две ветви кривой B_u , близкие к прямой $\bar{L}_{k,l}$. Эти две пары ветвей пересекаются в четырех точках. Таким образом, каждая из ν_0 пар скрещивающихся прямых кривой $\mathcal{R}$ дает при регенерации четыре ноуда на кривой B , и мы получаем формулу $n = 4\nu_0$.

§ 3. Полная вырождаемость поверхностей четвертой степени

Исследуем полные вырождения поверхностей степени $m = 4$. Если поверхность Y приводима, то очевидно, что полное вырождение компонент Y дает полное вырождение Y . Поэтому можно считать, что поверхность Y неприводима, поскольку случай $m = 2$ тривиален, а случай $m = 3$ описан в п. 2.5.

3.1. Вырождения неприводимых кватрик с обыкновенными особенностями. Полное описание неприводимых кватрик $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками можно найти в [8]. Всего имеется шесть типов таких поверхностей в зависимости от того, какова двойная кривая $D \subset Y$:

- 1) Y – неособая кватрика, $D = \emptyset$;
- 2) D – прямая;

- 3) D – плоская коника;
- 4) D – пара скрещивающихся прямых;
- 5) D – объединение трех прямых, пересекающихся в одной точке;
- 6) D – неособая пространственная кубика.

Покажем, что в каждом из этих случаев имеется полное вырождение поверхности Y . Пусть $F(x) = 0$ – уравнение поверхности Y , а $H_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, 4$, – уравнения четырех плоскостей $P_1, \dots, P_4$ общего положения в $\mathbb{P}^3$.

В случаях 1), 2), 4) и 5) мы можем получить искомые полные вырождения Y_u , $u \in \mathbb{C}$, в виде

$$u \cdot F(x) + (1 - u)H_1(x)H_2(x)H_3(x)H_4(x) = 0,$$

где в случае 1) линейные функции $H_1(x), \dots, H_4(x)$ произвольные и такие, что плоскости $P_1, \dots, P_4$ находятся в общем положении; в случае 2) $H_1(x) = H_2(x) = 0$ – уравнения прямой D ; в случае 4) $H_1(x) = H_2(x) = 0$ и $H_3(x) = H_4(x) = 0$ – уравнения скрещивающихся прямых, составляющих D ; в случае 5) $H_1(x)H_2(x)H_3(x) = 0$ – уравнение объединения трех плоскостей, для которых двойная кривая есть объединение трех прямых, составляющих двойную кривую D . Во всех случаях двойная кривая $\mathcal{L}$ конфигурации $\mathcal{P}$ четырех плоскостей $P_1, \dots, P_4$ содержит двойную кривую $D_u \subset Y_u$ и предельная двойная кривая $\mathcal{D}$ совпадает с D .

Случай 3) является частным случаем, когда двойная кривая D является полным пересечением. Этот случай будет рассмотрен в § 6.

Рассмотрим случай 6). Как известно, все неособые пространственные кривые третьей степени проективно эквивалентны. В подходящих аффинных координатах такая кривая D имеет параметризацию $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Она не является полным пересечением, а задается тремя уравнениями $y = x^2$, $xy = z$, $y^2 = xz$. В однородных координатах $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (x : y : z : 1)$ в $\mathbb{P}^3$ кривая D является пересечением трех квадрик

$$x_2x_4 = x_1^2, \quad x_1x_2 = x_3x_4, \quad x_2^2 = x_1x_3.$$

Рассмотрим семейство кривых D_u : $x = t$, $y = ut^2$, $z = u^3t^3$. Кривые D_u задаются тремя уравнениями $y = ux^2$, $u^2xy = z$, $uy^2 = xz$, или, в однородных координатах,

$$x_2x_4 - ux_1^2 = 0, \quad x_3x_4 - u^2x_1x_2 = 0, \quad x_1x_3 - ux_2^2 = 0.$$

Семейство D_u определяет вырождение кривой D (при $u = 1$) в кривую $\mathcal{D}$ (при $u = 0$), которая задается уравнениями $x_2x_4 = 0$, $x_3x_4 = 0$, $x_1x_3 = 0$. Если P_i – это плоскость, заданная уравнением $x_i = 0$, $L_{i,j} = P_i \cap P_j$, то $\mathcal{D}$ – это цепочка прямых $L_{1,4} \cup L_{4,3} \cup L_{3,2}$.

Семейство поверхностей Y_u задается уравнением

$$u(x_2x_4 - ux_1^2)(x_3x_4 - u^2x_1x_2) + u(x_3x_4 - u^2x_1x_2)(x_1x_3 - ux_2^2) + (x_2x_4 - ux_1^2)(x_1x_3 - ux_2^2) = 0,$$

двойные кривые D_u которых при $u \neq 0$ – это неособые пространственные кубики D_u , а при $u = 0$ поверхность Y вырождается в конфигурацию плоскостей Y_0 : $x_1x_2x_3x_4 = 0$, и предельная двойная кривая – это $\mathcal{D}$.

3.2. Описание возможных конфигураций предельных двойных кривых. В случае $m = 4$ граф $\Gamma(\mathcal{L})$ есть объединение всех ребер тетраэдра. Согласно лемме 2 кривая $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ может быть предельной двойной кривой вырождения неприводимой кватрики с обыкновенными особенностями, если граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ связан. Граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ получается из $\Gamma(\mathcal{L})$ удалением ребер, соответствующих прямым $L_{i,j} \subset \mathcal{D}$. Очевидно, что граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ остается связным только в следующих случаях:

- 1) из $\Gamma(\mathcal{L})$ ничего не удаляется;
- 2) из $\Gamma(\mathcal{L})$ удалено одно ребро;
- 3) удалены два смежных ребра;
- 4) удалены два скрещивающихся ребра;
- 5) удалены три ребра, выходящих из одной вершины;
- 6) удалена цепочка из трех ребер.

Удаление четырех ребер уже приводит к изолированной вершине, т.е. к не-связности $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$.

Таким образом, с точностью до нумерации плоскостей $P_1, \dots, P_4$ получаем, что $\mathcal{D}$ относится к одному из случаев:

- 1) $\mathcal{D} = \emptyset$;
- 2) $\mathcal{D} = L_{1,2}$;
- 3) $\mathcal{D} = L_{1,2} \cup L_{1,3}$;
- 4) $\mathcal{D} = L_{1,2} \cup L_{3,4}$;
- 5) $\mathcal{D} = L_{1,2} \cup L_{1,3} \cup L_{2,3}$;
- 6) $\mathcal{D} = L_{1,2} \cup L_{2,3} \cup L_{3,4}$.

В п. 3.1 мы видели, что все такие $\mathcal{D}$ реализуются как предельные двойные кривые. Следовательно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любой поверхности с обыкновенными особенностями степени 4 в $\mathbb{P}^3$ существует полное вырождение.*

Если $\mathcal{P}$ – конфигурация четырех плоскостей общего положения в $\mathbb{P}^3$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ – произвольная конфигурация прямых, то существует полное вырождение поверхностей с обыкновенными особенностями четвертой степени, для которого $\mathcal{D}$ является предельной двойной кривой.

§ 4. Существование конфигураций прямых, не являющихся предельными

В предыдущем параграфе было показано, что в случае поверхностей с обыкновенными особенностями степени $\deg Y = m \leq 4$ дело обстоит так же хорошо, как и в случае плоских кривых. Ответы на оба вопроса, поставленных во введении, положительные. Однако если $m \geq 5$, то дела обстоят уже не так хорошо. В этом параграфе мы покажем, что имеется по крайней мере семь конфигураций двойных прямых $\mathcal{D}$ в конфигурации плоскостей $\mathcal{P}$, $\deg \mathcal{P} = 5$, для которых $\mathcal{P}$ не может быть сглажена вне $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 2. *Конфигурации прямых $\mathcal{D}$, графы которых изображены на рис. 2, не являются предельными для полных вырождений поверхностей с обыкновенными особенностями степени 5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что конфигурации прямых, графы которых изображены на рис. 2, являются предельными двойными кривыми полных вырождений поверхностей Y степени $\deg Y = m = 5$ с обыкновенными особенностями.

Во всех случаях граф $\bar{\Gamma}(\mathcal{R})$ связан и в силу леммы 2 поверхность Y , для которой $\mathcal{D}$ – предельная двойная кривая, неприводима.

Рис. 2

Мы можем найти числовые характеристики кривых $\mathcal{D}$. В нашем случае $m = 5$, поэтому $d + \bar{d} = \binom{5}{2}$, $\tau = \binom{5}{3}$. Число τ_3 равно числу треугольников в $\Gamma(\mathcal{D})$. Для вычисления τ_2 воспользуемся формулой (12); τ_1 и τ_0 находятся их формул (10), (11) и (8):

$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = 3\bar{d}, \quad \tau_2 + 2\tau_1 + 3\tau_0 = 3d, \quad \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau.$$

По формулам (30)–(32) мы можем найти числовые характеристики двойной кривой $D \subset Y$ и кривой ветвления B : числа $\bar{g}$, t , k находим из предложения 1, а числа g , s , n находим из предложения 5 по формулам (30)–(32) и (28).

Рассмотрим каждую из конфигураций прямых $\mathcal{D}$, графы которых изображены на рис. 2, и покажем, что во всех этих случаях получается противоречие со сделанным предположением о том, что эти конфигурации являются предельными.

Для конфигурации прямых типа $\Gamma_{3,0,1}^{3,0}$ имеем $\bar{d} = 3$, $\tau_3 = 0$ и $\tau_2 = 3$. В силу предложения 1 двойная кривая $D \subset Y$ есть неособая неприводимая кривая степени $\bar{d} = 3$ и рода $\bar{g} = 1$. Следовательно, D – плоская кубика. Пусть D лежит в плоскости P . Тогда для любой прямой $L \subset P$ индекс пересечения $(L, Y)_{\mathbb{P}^2} \geq 6$, а так как $\deg Y = 5$, то $L \subset Y$. Таким образом, $P \subset Y$, и поверхность Y является приводимой. Противоречие. Такие же аргументы применимы для конфигураций прямых следующих двух типов.

Для конфигурации прямых типа $\Gamma_{(2)(2,1)}^{(1,0)(2,0)}$ имеем $\bar{d} = 3$, $\tau_3 = 0$ и $\tau_2 = 1$. В силу предложения 1 имеем $k = 2$, $\bar{g} = 0$, и двойная кривая $D \subset Y$ есть несвязное объединение прямой L_1 и плоской коники Q . Пусть Q лежит в плоскости P и

точка $A = L_1 \cap P$. Как и в предыдущем случае, мы видим, что любая прямая $L \subset P$, проходящая через точку A , лежит на поверхности Y и, следовательно, $P \subset Y$. Опять получаем противоречие с неприводимостью поверхности Y .

Для конфигурации прямых типа $\Gamma_{1,2,1}^{4,1}$ имеем $\bar{d} = 4$, $\tau_3 = 1$ и $\tau_2 = 2$. В силу предложения 1 имеем $k = 2$, $\bar{g} = 0$, $t = 1$. Поэтому $D = L \cup C$ состоит из двух неприводимых компонент, где L – прямая, а C – кривая степени 3 с одним ноудом. Следовательно, кривая C лежит в некоторой плоскости P . Как и в предыдущих случаях, получаем, что $P \subset Y$, и это дает противоречие с неприводимостью Y .

Конфигурация прямых типа $\Gamma_{3,1,1}^{4,0}$ будет рассмотрена в теореме 5, где будет показано, что кривая $\mathcal{D}$ не может быть предельной двойной кривой для полных вырождений поверхностей Y произвольной степени m , а не только $m = 5$.

Для конфигурации прямых типа $\Gamma_{1,3,1}^{5,1}$ имеем $\bar{d} = 5$, $\tau_3 = 1$ и $\tau_2 = 3$, $\tau_1 = 6$. По формулам (18) и (19) находим $K_X^2 = 1$ и $e(X) = -1$. Из классификации алгебраических поверхностей известно, что если $K_X^2 > 0$, то и $e(X) > 0$. Поэтому таких поверхностей не существует.

Конфигурация прямых типа $\Gamma_{0,0,4}^{6,4}$ является частным случаем (при $m = 5$) конфигураций, которые будут рассмотрены ниже в предложении 9.

Для конфигурации прямых типа $\Gamma_{1,1,3}^{6,2}$ имеем $\bar{d} = 6$, $d = 4$, $\tau_3 = 2$, $\tau_2 = 4$, $\tau_1 = 4$, $\tau_0 = 0$. Кривая ветвления B общей проекции поверхности Y на плоскость является каспидальной и имеет следующие числовые характеристики: $\deg B = 8$, $g = 1$, $c = 12$, $n = 8$. Покажем, что кривая $\hat{B}$, двойственная к B , также является каспидальной. По формуле Плюккера находим $\deg \hat{B} = 4$. Поскольку $g(\hat{B}) = 1$, а кривая степени 4 имеет арифметический род $p_a(\hat{B}) = 3$, то $\hat{B}$ имеет либо две особые точки с $\delta = 1$, либо одну особую точку с $\delta = 2$. Число Милнора μ связано с δ формулой $\mu = 2\delta - r + 1$, где r – число ветвей. Особенности с $\delta = 1$ – это особенности либо типа A_1 (ноуды), либо типа A_2 (каспы), поэтому в первом случае кривая $\hat{B}$ каспидальная. Второй случай невозможен, так как особенность, двойственная к A_3 , – это A_3 , а двойственная к A_4 – это E_8 : $x^3 + y^5 = 0$. Но кривая, двойственная к $\hat{B}$, – это кривая B , которая имеет лишь ноуды и каспы. Итак, кривая $\hat{B}$ является каспидальной. В этом случае из формул Плюккера следует, что $3 \deg B - c = 3 \deg \hat{B} - \hat{c}$, где $\hat{c}$ – число каспов на $\hat{B}$. Поэтому $\hat{c} = 0$; следовательно, кривая $\hat{B}$ является нодальной и число ноудов на $\hat{B}$ равно $\hat{n} = 2$. Для такой кривой $\hat{B}$ существует общее накрытие плоскости степени $4 = \deg \hat{B}$, разветвленное в кривой B (см. [9]). С другой стороны, общая проекция поверхности с обыкновенными особенностями в $\mathbb{P}^3$ на $\mathbb{P}^2$ является общим накрытием, в данном случае степени 5, и, как показано в [13], общие накрытия, являющиеся общими проекциями, однозначно определяются своими кривыми ветвления всегда, за исключением случая поверхностей степени 4 с особенностями, состоящими из трех прямых, пересекающихся в одной точке.¹ Получаем противоречие с единственностью накрытия.

Теорема 2 доказана.

¹ В [13] это утверждение было сформулировано только для поверхностей, полученных в результате общих линейных проекций в $\mathbb{P}^3$ гладких поверхностей, вложенных в некоторое $\mathbb{P}^N$. Но доказательство этого утверждения в [13] использует только предположение о том, что поверхность в $\mathbb{P}^3$ является поверхностью с обыкновенными особыми точками.

§ 5. Существование поверхностей, не обладающих полными вырождениями

В этом параграфе мы покажем, что существуют поверхности в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками, которые не могут быть вырождены в конфигурации плоскостей общего положения.

5.1. Проблема Цейтена. Проблема существования полного вырождения поверхности с обыкновенными особыми точками тесно связана с проблемой вырождения ее двойной кривой D в конфигурацию прямых. В случае, когда D – гладкая кривая, это знаменитая проблема Цейтена. В [12] было получено отрицательное решение проблемы Цейтена, т.е. было доказано существование гладких проективных кривых $D \subset \mathbb{P}^3$, которые не могут быть вырождены в конфигурации прямых с двойными точками. Одна из таких кривых имеет степень 30 и род 113; назовем ее *кривой Хартсхорна*.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками, которые не могут быть вырождены в конфигурации плоскостей, находящихся в общем положении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – кривая Хартсхорна. Согласно предложению 6, которое будет доказано в следующем пункте, существует поверхность $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особенностями, двойная кривая которой – кривая D . Согласно [12] кривая D не может быть вырождена в конфигурацию прямых с двойными точками, следовательно, Y не может быть вырождена в конфигурацию плоскостей, находящихся в общем положении.

Теорема 3 доказана.

5.2. Существование поверхности с обыкновенными особыми точками, двойная кривая которой – произвольная гладкая кривая. Пусть D – гладкая (не обязательно неприводимая) кривая в $\mathbb{P}^3$. Тогда для любой точки $x \in D$ существуют открытое по Зарискому в $\mathbb{P}^3$ множество U_x и две рациональные функции $f_{x,1}$ и $f_{x,2}$, регулярные в U_x и такие, что $f_{x,1}$ и $f_{x,2}$ являются локальными параметрами в U_x и кривая $D \cap U_x$ определяется уравнениями $f_{x,1} = f_{x,2} = 0$. Пусть $f_{x,j} = F_{x,j}/G_{x,j}$, где $F_{x,j}$ и $G_{x,j}$ – взаимно простые однородные многочлены степени $M_{x,j}$. Так как кривая D компактна, то мы можем выбрать конечное покрытие кривой D открытыми множествами $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ такими, что многочлены $F_{x_i,j}$, $1 \leq i \leq k$, $j = 1, 2$, порождают однородный идеал кривой D . Положим

$$M(D) = 2 \max_{1 \leq i \leq k} \left(\max_{j=1,2} M_{x_i,j} \right) + 1. \quad (33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для любой проективной гладкой кривой $D \subset \mathbb{P}^3$ и для любого натурального числа $t \geq M = M(D)$, где число $M(D)$ определено формулой (33), существует проективная поверхность Y степени t в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками такая, что $D = \text{Sing } Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – моноидальное преобразование с центром в D , $E = \sigma^{-1}(D)$ – его исключительный дивизор и $\tilde{P} = \sigma^*(P)$ – полный прообраз плоскости $P \subset \mathbb{P}^3$.

Поверхности $Y_{i,j} = \{F_{x_{i,j}} = 0\} \subset \mathbb{P}^3$, $\deg Y_{i,j} = \deg F_{x_{i,j}} = M_{x_{i,j}}$, $j = 1, 2$, пересекаются трансверсально вдоль D в U_{x_i} . Очевидно, для любой плоскости P в $\mathbb{P}^3$ дивизоры

$$Y_{i,1} + Y_{i,2} + (m - M_{x_{i,1}} - M_{x_{i,2}})\tilde{P}$$

являются нулями сечений пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m\tilde{P} - 2E)$ при $m \geq M$. Отсюда получаем, что линейная система $|m\sigma^*(P) - 2E|$ непуста, не имеет неподвижных компонент и базисных точек и для любых точек $x, y \in \mathbb{P}^3$ найдется дивизор из этой системы такой, что он не проходит через точку y и является гладкой приведенной поверхностью в точке x . Согласно теореме Бертини общий элемент X линейной системы $|m\sigma^*(P) - 2E|$ является гладкой поверхностью, и легко видеть, что ее образ $Y = \sigma(X)$ является поверхностью в $\mathbb{P}^3$ степени m с обыкновенными особенностями вдоль D .

Предложение 6 доказано.

§ 6. Полная вырождаемость поверхностей с двойными кривыми – полными пересечениями

Как было показано в предыдущем параграфе, в общем случае ответ на вопрос о существовании полного вырождения отрицателен даже в случае, когда двойная кривая поверхности является неособой. В этом параграфе мы покажем, что ответ на вопрос о полной вырождаемости положительный в случае, когда двойная кривая D является полным пересечением.

6.1. Уравнения поверхностей с двойными кривыми – полными пересечениями. Следующее предложение дает описание уравнений поверхностей, двойные кривые которых являются полными пересечениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть неприводимая поверхность $Y \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками, $\deg Y = m$, заданная уравнением $F(x) = 0$, имеет неособую двойную кривую $D = Y_1 \cap Y_2$, которая является полным пересечением поверхностей Y_1 и Y_2 степеней m_1 и m_2 соответственно. Тогда многочлен F можно записать в виде

$$F = AF_1^2 + BF_1F_2 + CF_2^2, \quad (34)$$

где $F_1(x) = 0$ и $F_2(x) = 0$ – соответственно уравнения поверхностей Y_1 и Y_2 , а A , B и C – некоторые однородные многочлены.

Обратно, если F записан в виде (34) и $m \geq 2m_1 + 1$ (пусть $m_1 \geq m_2$), а многочлены A , B и C достаточно общие, то поверхность Y имеет лишь обыкновенные особенности и ее двойная кривая является неособым полным пересечением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку кривая D есть полное пересечение, то однородный идеал $I(D)$ порождается двумя образующими: $I(D) = (F_1, F_2)$. Запишем F в виде $F = K_1F_1 + K_2F_2$. Из трансверсальности пересечения поверхностей $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ вдоль D следует, что дифференциалы dF_1 и dF_2 линейно независимы в каждой точке из D . Кроме того, дифференциал dF равен нулю в каждой точке из D , так как D является двойной кривой поверхности Y .

В каждой точке из D имеем $dF = K_1 dF_1 + K_2 dF_2$, и из линейной независимости дифференциалов dF_1 и dF_2 в этих точках следует, что K_1 и K_2 принадлежат идеалу $I(D)$, т.е. $K_1 = S_1 F_1 + S_2 F_2$ и $K_2 = S_3 F_1 + S_4 F_2$, где S_i – это некоторые однородные многочлены. Подставляя эти выражения для K_1 и K_2 в выражение для F , получаем искомым вид многочлена F . Вторая часть предложения следует из предложения 6 и оценки (33).

Предложение 7 доказано.

6.2. Конструкция вырождения. В этом пункте будет доказана

ТЕОРЕМА 4. *Поверхности с обыкновенными особыми точками, двойные кривые которых являются неособыми полными пересечениями, полностью вырождаемы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть двойная кривая D поверхности Y задается уравнениями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\deg F_1 = m_1$, $\deg F_2 = m_2$. Тогда согласно предложению 7 поверхность Y задается уравнением вида

$$AF_1^2 + BF_1 F_2 + CF_2^2 = 0.$$

Рассмотрим деформацию этого уравнения, убивающую первое и третье слагаемые и превращающую второе слагаемое в произведение линейных форм. А именно, рассмотрим семейство поверхностей Y_u , $u \in \mathbb{C}$, заданное уравнением

$$(uB + (1-u)\bar{B})(uF_1 + (1-u)\bar{F}_1)(uF_2 + (1-u)\bar{F}_2) + uA(uF_1 + (1-u)\bar{F}_1)^2 + uC(F_2 + (1-u)\bar{F}_2)^2 = 0, \quad (35)$$

где $\bar{F}_1 = H_1 \cdots H_{m_1}$, $\bar{F}_2 = H_{m_1+1} \cdots H_{m_1+m_2}$, $\bar{B} = H_{m_1+m_2+1} \cdots H_m$ – произведения линейных форм таких, что нули этих форм (плоскости $P_1, \dots, P_m$) находятся в общем положении.

Рис. 3

Легко видеть, что при $u = 1$ поверхность Y_u совпадает с поверхностью Y . Очевидно также, что при значениях u , близких к 1, кривые D_u , заданные уравнениями

$$uF_1 + (1-u)\bar{F}_1 = uF_2 + (1-u)\bar{F}_2 = 0,$$

являются гладкими кривыми, и эти кривые являются двойными кривыми поверхностей Y_u с обыкновенными особыми точками. При $u = 0$ вырожденный слой задается уравнением $H_1 \cdots H_m = 0$, а предельная двойная кривая D_0 задается уравнениями

$$H_1 \cdots H_{m_1} = H_{m_1+1} \cdots H_{m_1+m_2} = 0. \quad (36)$$

В частности, при $m_1 = m_2 = 2$ граф предельной конфигурации прямых $\mathcal{D} = D_0$ изображен на рис. 3.

Теорема 4 доказана.

§ 7. Потенциально предельные и абсолютно непредельные конфигурации прямых

До сих пор мы рассматривали полные вырождения поверхностей с обыкновенными особыми точками фиксированной степени m . Конфигурации прямых $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}_m$, где $\mathcal{L}_m$ – двойная кривая конфигурации m плоскостей общего положения, которые можно получить в вырожденном слое, мы теперь будем называть m -предельными. В § 4 было показано существование конфигураций прямых $\mathcal{D}$, не являющихся 5-предельными. Мы хотим исследовать для кривой $\mathcal{D}$ вопрос об m -предельности в зависимости от m .

Если для некоторого m_0 кривая $\mathcal{D}$ не является m_0 -предельной, а для достаточно больших m при вложении $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}_m$ кривая $\mathcal{D}$ является m -предельной, то мы будем называть $\mathcal{D}$ *потенциально предельной*. Если при любом вложении $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}_m$ кривая $\mathcal{D}$ не является m -предельной, то такую конфигурацию прямых $\mathcal{D}$ назовем *абсолютно непредельной*.

7.1. Примеры потенциально предельных конфигураций прямых.

Покажем, что конфигурация прямых $\mathcal{D}$ типа $\Gamma_{3,0,1}^{3,0}$ является потенциально предельной. В теореме 2 было доказано, что $\Gamma_{3,0,1}^{3,0}$ не является 5-предельной. Покажем, что $\Gamma_{3,0,1}^{3,0}$ является m -предельной при $m \geq 7$. Конфигурация прямых $\mathcal{D}$ состоит из трех прямых $L_1 \cup L_2 \cup L_3$, которые лежат в плоскости P и высекаются тремя плоскостями, заданными уравнениями $H_1 = 0$, $H_2 = 0$ и $H_3 = 0$. Такая конфигурация $\mathcal{D}$ является предельной для поверхностей Y , у которых двойная кривая D есть полное пересечение неособой кубики и плоскости. Действительно, пусть $F_1(x) = 0$ есть уравнение неособой кубики Y_1 , а $F_2(x) = 0$ есть уравнение плоскости $Y_2 = P$. Рассмотрим поверхность $F(x) = 0$, где F определяется формулой (34), и рассмотрим семейство поверхностей $Y_u(x) = 0$, заданное уравнением (35). Из формулы (36) следует, что предельная двойная кривая $\mathcal{D}$ задается уравнениями $H_1 H_2 H_3 = F_2 = 0$ и имеет тип $\Gamma_{3,0,1}^{3,0}$.

Аналогично можно показать, что конфигурация прямых типа $\Gamma_{(2)(2,1)}^{(1,0)(2,0)}$ также является потенциально предельной.

7.2. Пример абсолютно непредельной конфигурации прямых. Пример абсолютно непредельной конфигурации прямых дает следующая теорема. Отметим, что упомянутая в ней конфигурация прямых является вырождением неособой пространственной кривой степени 4 и рода 1.

ТЕОРЕМА 5. Конфигурация прямых $\mathcal{D}$ типа $\Gamma_{3,1,1}^{4,0}$ (см. рис. 2) является абсолютно непредельной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}$ является m -предельной для некоторого m , т.е. $\mathcal{D}$ является предельной двойной кривой полного вырождения поверхностей Y_u , $u \in U$, которое задается уравнением $F_u(x) = 0$. Имеем $\bar{d} = 4$, $\tau_3 = 0$ и $\tau_2 = 4$. В силу предложения 1 двойная кривая $D \subset Y$ есть неособая неприводимая кривая в $\mathbb{P}^3$ степени $\bar{d} = 4$ и рода $\bar{g} = 1$. Как известно, такие кривые D являются полными пересечениями двух квадрик, а тогда многочлен F , задающий поверхность Y , можно записать в виде (34):

$$F = AQ_1^2 + BQ_1Q_2 + CQ_2^2, \quad (37)$$

где $Q_1(x) = 0$, $Q_2(x) = 0$ – уравнения этих квадрик, а A , B и C – однородные многочлены степени $m - 4$.

Покажем, что семейство поверхностей $F_u(x) = 0$, $u \in U$, может быть задано в виде

$$F_u = A_u Q_{1,u}^2 + B_u Q_{1,u} Q_{2,u} + C_u Q_{2,u}^2 \quad (38)$$

(быть может, после замены базы). Для этого рассмотрим универсальное семейство поверхностей, задающихся многочленами вида (37). База этого семейства $\mathcal{F}$ есть открытое подмножество в пространстве коэффициентов форм Q_1 , Q_2 , A , B , C . Обозначим $\mathcal{H}_{m,4,1}$ пространство, параметризующее поверхности степени m , у которых двойная кривая есть неособая кривая степени 4 и рода 1. Очевидно, имеем рациональное доминантное отображение $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_{m,4,1}$. Семейство поверхностей $F_u(x) = 0$ определяет отображение $U \rightarrow \mathcal{H}_{m,4,1}$. Можем считать, что кривая $U \subset \mathcal{H}_{m,4,1}$. Если кривая $\tilde{U} \subset \mathcal{F}$ отображается на кривую U , то мы получаем семейство поверхностей (38), параметризованное точками из $\tilde{U}$.

Конфигурация прямых $\mathcal{D}$ типа $\Gamma_{3,1,1}^{4,0}$ состоит из трех прямых, лежащих в одной плоскости, а четвертая прямая не принадлежит этой плоскости и пересекается с одной из этих прямых. Такие кривые являются вырождениями пространственных эллиптических кривых степени 4 (см. [14]). Однако если кривая $\mathcal{D}$ является предельной двойной кривой для семейства (38), то двойные кривые D_u задаются семейством идеалов $J_u = (Q_{1,u}, Q_{2,u})$. Согласно [14], чтобы вырожденная кривая совпадала с $\mathcal{D}$, необходимо, чтобы при $u = u_0$ квадратичные формы Q_{1,u_0} и Q_{2,u_0} разлагались в произведения линейных форм, причем один из множителей был бы общим: $Q_{1,u_0} = HH_1$, $Q_{2,u_0} = HH_2$. Но тогда из уравнения (38) следует, что вырожденная поверхность Y_{u_0} содержит кратную плоскость $H = 0$, что противоречит определению полного вырождения поверхностей с обыкновенными особыми точками.

Теорема 5 доказана.

§ 8. Виртуальная вырождаемость

Если для поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ степени m с обыкновенными особыми точками существует полное вырождение в смысле определения, данного во введении, то для краткости мы будем называть поверхность Y *полностью вырождаемой*. В § 5 были приведены примеры поверхностей, которые не являются полностью вырождаемыми.

8.1. Необходимые условия для полной вырождаемости. Ослабим понятие вырождаемости поверхности. Напомним, что в п. 1.1 и п. 1.2 мы определили тип неприводимой поверхности $Y \subset \mathbb{P}^3$ степени m с обыкновенными особыми точками и тип пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ как наборы числовых данных:

$$\text{type}(Y) = (m, \bar{d}, k, \bar{g}, t), \quad \text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = (m, \bar{d}, k, \tau_2, \tau_3).$$

В силу предложения 1, если поверхность Y полностью вырождаема, то типы $\text{type}(Y)$ и $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ определяются друг по другу. Назовем наборы чисел $(m, \bar{d}, k, \bar{g}, t)$ и $(m, \bar{d}, k, \tau_2, \tau_3)$ *соответствующими друг другу*, если $\tau_3 = t$,

а τ_2 и $\bar{g}$ связаны формулой (15), $\tau_2 = \bar{d} + \bar{g} - k$; и назовем неприводимую поверхность Y виртуально вырождаемой, если существует неприводимая пара $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, тип которой соответствует типу поверхности Y . Так что поверхность Y может не вырождаться по тривиальной причине: не существует пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ соответствующего типа.

Аналогично, назовем пару $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ виртуально сглаживаемой вне $\mathcal{D}$ (или назовем конфигурацию прямых $\mathcal{D}$ виртуально m -предельной конфигурацией), если существует неприводимая поверхность Y степени m , которая имеет тип, соответствующий типу пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$. Таким образом, термин “виртуальный” говорит о выполнении необходимых численных условий для существования полного вырождения.

Доказательство предложения 5 по существу не использует факт полного вырождения поверхности Y , а использует только вытекающую из него связь между типом поверхности Y и типом предельной пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, задаваемую формулами (14): $t = \tau_3$, и (15): $\bar{g} = \tau_2 - \bar{d} + k$. Поэтому в случае виртуальных вырождений имеет место аналог предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть тип $(m, \bar{d}, k, \bar{g}, t)$ поверхности Y соответствует типу $(m, \bar{d}, k, \tau_2, \tau_3)$ пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$. Тогда для числовых характеристик общей проекции $p: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ имеют место те же формулы (29)–(32), что и в предложении 5.

8.2. Примеры виртуально m -предельных конфигураций, не являющихся m -предельными. Рассмотрим неприводимую пару $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ – конфигурация типа $\Gamma_{3,1,1}^{4,0}$ из теоремы 5. Эта пара имеет тип $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = (m, 4, 1, 4, 0)$. В теореме 5 доказано, что кривая $\mathcal{D}$ не является предельной ни при каком m . Однако конфигурация $\mathcal{D}$ является виртуально m -предельной при $m \geq 5$. Действительно, типу пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ соответствует набор $(m, 4, 1, 1, 0)$. Поверхности Y такого типа $\text{type}(Y) = (m, 4, 1, 1, 0)$, т.е. поверхности степени m , у которых двойная кривая D есть эллиптическая кривая степени 4, существуют. Поскольку D является полным пересечением двух квадрик, Q_1 и Q_2 , мы можем взять поверхность Y , заданную уравнением $F = 0$, где многочлен F определен формулой (37). Такие поверхности вырождаются, однако предельная двойная кривая $\mathcal{D}$ имеет граф не типа $\Gamma_{3,1,1}^{4,0}$, а граф, изображенный на рис. 3.

8.3. Примеры виртуально непредельных конфигураций прямых. Рассмотрим конфигурацию m плоскостей общего положения $\mathcal{P} = \mathcal{P}_m$ в $\mathbb{P}^3$. Пусть $\mathcal{P}_{m-1} \subset \mathcal{P}_m$ – конфигурация каких-то $m - 1$ из этих плоскостей, а $\mathcal{D} = \mathcal{L}_{m-1}$ – двойная кривая поверхности $\mathcal{P}_{m-1}$. Тогда

$$\bar{d} = \binom{m-1}{2}, \quad \tau_0 = \tau_2 = 0, \quad \tau_1 = \binom{m-1}{2}, \quad \tau_3 = \binom{m-1}{3}$$

и пара $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ имеет тип

$$\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \left(m, \binom{m-1}{2}, \binom{m-1}{2}, 0, \binom{m-1}{3} \right). \quad (39)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ – неприводимая пара типа (39) и $m \geq 5$, то $\mathcal{D}$ не является виртуально предельной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{D}$ является виртуально предельной. Тогда существует поверхность Y , тип которой

$$\text{type}(Y) = \left(m, \binom{m-1}{2}, \binom{m-1}{2}, 0, \binom{m-1}{3} \right)$$

соответствует типу пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$.

Рассмотрим общую проекцию поверхности Y на плоскость. Тогда согласно предложению 8 кривая ветвления B общей проекции поверхности Y на плоскость имеет следующие инварианты:

$$\deg B = 2d = 2(m-1), \quad g-1 = \binom{m-1}{2} - m + 1, \quad c = 3 \binom{m-1}{2}, \quad n = 0.$$

Но тогда степень двойственной кривой $\check{B}$ к кривой ветвления B

$$\begin{aligned} \deg \check{B} &= \deg B(\deg B - 1) - 3c \\ &= 2(m-1)(2m-3) - 9 \binom{m-1}{2} = \left(3 - \frac{1}{2}m \right) (m-1) \leq 2 \end{aligned}$$

при $m \geq 5$, что невозможно.

Предложение 9 доказано.

8.4. Примеры поверхностей, вырождаемых только виртуально.

Рассмотрим невырождаемую полностью поверхность Y из § 5. Двойная кривая D поверхности Y – это кривая Хартсхорна. Кривая D неособа, имеет степень $\bar{d} = 30$ и род $\bar{g} = 113$. Тогда $\text{type}(Y) = (m, 30, 1, 113, 0)$ и, следовательно, $\tau_2 = \bar{d} + \bar{g} - k = 142$ и соответствующий типу поверхности Y набор – это $(m, 30, 1, 142, 0)$. Покажем, что поверхность Y виртуально вырождаема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. При $m \geq 31$ существуют неприводимые пары типа $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = (m, 30, 1, 142, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф $\Gamma(\mathcal{D})$, изображенный на рис. 4.

Рис. 4

У него имеется 31 вершина, две из которых (v_{12} и v_{17}) имеют валентность 12, три вершины (v_{13} , v_{14} , v_{15}) – валентность 3, остальные вершины одновалентны. По формуле (12) находим $\tau_2 = 142$. Поэтому $\Gamma(\mathcal{D})$ действительно имеет указанный тип. Легко видеть, что пара $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ неприводима, т.е. граф кривой $\mathcal{R} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{D}$ связан.

Предложение 10 доказано.

8.5. Примеры виртуально невырождаемых поверхностей. Примеры таких поверхностей, существование которых будет доказано ниже, имеют в качестве своей двойной кривой кривую D в $\mathbb{P}^3$, имеющую единственную пространственную тройную точку в качестве своих особых точек и состоящую из трех компонент: двух прямых L_1 и L_2 и коники Q . Такая кривая D лежит на объединении двух плоскостей P_1 и P_2 , так что $L_1 \cup L_2 \subset P_1$, $Q \subset P_2$, $s = L_1 \cap L_2 \cap Q \in P_1 \cap P_2 = L$, $L_i \neq L$ при $i = 1, 2$ и Q пересекается трансверсально с прямой L .

Покажем, что любая поверхность Y с обыкновенными особыми точками, двойная кривая которой – это описанная выше кривая D , не может быть виртуально полностью вырождена. Действительно, такая поверхность Y имеет тип $\text{type}(Y) = (m, 4, 3, 0, 1)$. Если бы поверхность Y была виртуально полностью вырождаема, то существовала бы неприводимая пара $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, тип которой $\text{type}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = (m, 4, 3, 1, 1)$; т.е. должна была бы существовать конфигурация из четырех двойных прямых $\mathcal{Q}$ конфигурации плоскостей $\mathcal{P}$ со следующими инвариантами: $\tau_2 = \tau_3 = 1$ и, кроме того, конфигурация $\mathcal{Q}$ при удалении тройной точки должна была бы распадаться на три ($k = 3$) связные компоненты.

Отметим, что кривая D может быть вырождена в четыре прямые, имеющие одну тройную и одну двойную точку (для этого надо вырождать конику в пару прямых, лежащих в плоскости P_2 , так, чтобы одна из этих прямых проходила через точку s , а другая не проходила).

Тем не менее легко видеть, что такой конфигурации двойных прямых конфигурации плоскостей $\mathcal{P} = \bigcup P_i$, находящихся в общем положении, не существует. Действительно, три прямые, пересекающиеся в тройной точке, должны быть попарными пересечениями трех плоскостей, скажем, P_1 , P_2 и P_3 . Из условий $k = 3$ и $\tau_2 = 1$ вытекает, что четвертая прямая должна пересекаться с одной (и только одной) из этих прямых (без ограничения общности можем считать, что она пересекается с $L_{1,2}$). Но это означает, что она совпадает с пересечением четвертой плоскости P_4 , входящей в конфигурацию $\mathcal{P}$, и одной из двух плоскостей P_1 или P_2 , и тогда эта прямая должна пересекаться также либо с прямой $L_{1,3}$, либо с $L_{2,3}$, что невозможно, так как $\tau_2 = 1$.

Докажем существование поверхности Y , $\deg Y \geq 8$, с обыкновенными особыми точками, двойной кривой которой является кривая D . Для этого раздуем в $\mathbb{P}^3$ точку s , а затем последовательно раздуем собственные прообразы кривых L_1 , L_2 и Q . Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – композиция этих моноидальных преобразований, $E, E_1, E_2, E_3 \subset \tilde{\mathbb{P}}^3$ – собственные прообразы исключительных дивизоров каждого из этих раздутий, и пусть $\tilde{P} = \sigma^*(P)$ – полный прообраз плоскости $P \subset \mathbb{P}^3$.

Покажем, что общий элемент $\tilde{X}$, принадлежащий линейной системе $|m\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$, является неособой поверхностью при $m \geq 8$. Для этого выберем систему однородных координат в $\mathbb{P}^3$ следующим образом (напомним, что системы однородных координат в $\mathbb{P}^3$ однозначно определяются выбором упорядоченной четверки плоскостей, находящихся в общем положении). В качестве первых двух координатных плоскостей возьмем плоскости P_1 и P_2 . В качестве P_3 возьмем произвольную плоскость $P_3 \neq P_2$, проходящую

через точку s и касающуюся коники Q в этой точке. В качестве P_4 возьмем произвольную плоскость, находящуюся в общем положении с плоскостями P_1 , P_2 и P_3 и касающуюся коники Q в некоторой точке $s_1 \in Q$, $s_1 \neq s$. В выбранной таким образом системе координат прямые L_i , $i = 1, 2$, задаются уравнениями

$$z_1 = (c_1 z_2 + z_3) = 0, \quad c_1 \neq c_2,$$

а кривая Q задается уравнениями

$$z_2 = (z_3 z_4 - c_3 z_1^2) = 0, \quad c_3 \neq 0.$$

Тройная точка s кривой D имеет координаты $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Обозначим через F_i следующие однородные многочлены:

$$F_1 = z_1, \quad F_2 = z_3 z_4 + c_1 z_2 z_4 - c_3 z_1^2, \quad F_3 = z_3 z_4 + c_2 z_2 z_4 - c_3 z_1^2, \quad F_4 = z_4,$$

и рассмотрим линейную систему поверхностей $\bar{S}_{a_1, a_2, a_3} \subset \mathbb{P}^3$, заданную однородным уравнением

$$F_1 F_2 F_3 F_4^3 + a_1 F_1^2 F_2^2 F_4^2 + a_2 F_1^2 F_3^2 F_4^2 + a_3 F_2^2 F_3^2 = 0.$$

Обозначим также через $x_i = z_i/z_4$ неоднородные координаты в карте $V_4 = \mathbb{P}^3 \setminus P_4 \simeq \mathbb{C}^3$, и пусть

$$S_{a_1, a_2, a_3} = \bar{S}_{a_1, a_2, a_3} \cap V_4.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (i) Для почти всех точек (a_1, a_2, a_3) собственные прообразы $\sigma^{-1}(S_{a_1, a_2, a_3}) \subset \sigma^{-1}(V_4)$ являются неособыми поверхностями.

(ii) Для почти всех точек (a_1, a_2, a_3) пересечения $\sigma^{-1}(S_{a_1, a_2, a_3}) \cap E_j$ при $j = 1, 2, 3$ являются неособыми 2-сечениями линейчатых поверхностей E_j и пересечения $\sigma^{-1}(s) \cap \sigma^{-1}(S_{a_1, a_2, a_3}) \cap E_j$ состоят из двух точек.

(iii) Базисное множество линейной системы $\sigma^{-1}(S_{a_1, a_2, a_3})$ состоит из трех рациональных кривых, лежащих на E ; их образы после стягивания дивизоров E_1 , E_2 и E_3 являются прямыми на исключительном дивизоре раздутия точки s , и для общей поверхности этой линейной системы ее образ после стягивания в некоторой аналитической окрестности образа $E' \simeq \mathbb{P}^2$ поверхности E распадается на три неприводимых гладких компоненты, каждая из которых пересекается с E' вдоль одной из трех прямых на $E' \simeq \mathbb{P}^2$ – образа базисного множества линейной системы, и эти пересечения трансверсальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В координатах x_1, x_2, x_3 линейная система поверхностей S_{a_1, a_2, a_3} задается уравнением

$$x_1(x_3 + c_1 x_2 - c_3 x_1^2)(x_3 + c_2 x_2 - c_3 x_1^2) + a_1 x_1^2(x_3 + c_1 x_2 - c_3 x_1^2)^2 + a_2 x_1^2(x_3 + c_2 x_2 - c_3 x_1^2)^2 + a_3(x_3 + c_1 x_2 - c_3 x_1^2)^2(x_3 + c_2 x_2 - c_3 x_1^2)^2 = 0.$$

Произведем замену координат в V_4 :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3 + c_1 x_2 - c_3 x_1^2, \quad y_3 = x_3 + c_2 x_2 - c_3 x_1^2.$$

В новой системе координат линейная система поверхностей S_{a_1, a_2, a_3} задается уравнением

$$y_1 y_2 y_3 + a_1 y_1^2 y_2^2 + a_2 y_1^2 y_3^2 + a_3 y_2^2 y_3^2 = 0,$$

т.е. для почти всех точек (a_1, a_2, a_3) поверхности $S_{a_1, a_2, a_3} \cap V_4$ являются аффинными частями образов поверхностей Веронезе при общей проекции в $\mathbb{P}^3$, для которых наше утверждение является хорошо известным.

Утверждение 1 доказано.

Чтобы показать, что общий элемент $\tilde{X}$, принадлежащий линейной системе $|m\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$, является неособой поверхностью при $m \geq 8$, заметим, что поверхности $\tilde{S}_{a_1, a_2, a_3} = \sigma^{-1}(\tilde{S}_{a_1, a_2, a_3})$ принадлежат линейной системе $|8\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$. Для любой точки $p \in \mathbb{P}^3$, $p \neq s$, после замены координатной плоскости P_4 на другую плоскость, не проходящую через точку p , из утверждения 1 следует, что базисное множество линейной системы $|m\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$ не пересекается с прообразом $\sigma^{-1}(p)$. Следовательно, при любом $m \geq 8$ линейная система $|m\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$ имеет одно и то же базисное множество, что и при $m = 8$, так как линейная система $|(m - 8)\tilde{P}|$ не имеет базисных точек. Наконец, из теоремы Бертини следует, что общий элемент $\tilde{X}$ линейной системы $|m\tilde{P} - 3E - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3|$ удовлетворяет тем же свойствам (i)–(iii) из утверждения 1, что и общий элемент системы $\sigma^{-1}(S_{a_1, a_2, a_3})$. Отсюда следует, что образ $Y = \sigma(\tilde{X})$ общего элемента $\tilde{X}$ является поверхностью с обыкновенными особыми точками, двойной кривой которой является кривая D .

§ 9. Заключительные замечания

В этом параграфе мы сформулируем некоторые из нерешенных вопросов, относящихся к проблеме существования полных вырождений поверхностей с обыкновенными особыми точками.

9.1. Абсолютная и относительная невозможность существования полных вырождений. Пусть X – гладкая проективная поверхность и $g: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – некоторое “погружение” (т.е. $Y = g(X)$ – поверхность с обыкновенными особыми точками и морфизм $g: X \rightarrow Y$ является нормализацией поверхности Y). В п. 5.1 и п. 8.5 были приведены примеры поверхностей Y , которые нельзя полностью вырождать. Причина того, что Y нельзя полностью вырождать, может происходить из-за того, что “погружение” g является “плохим”, а при каком-то другом “погружении” поверхности X ее образ все-таки можно полностью вырождать. Возможен второй вариант: ни при каком “погружении” поверхности X в $\mathbb{P}^3$ ее образ Y нельзя полностью вырождать (другими словами, причина невозможности полных вырождений кроется в топологии поверхности X). В первом случае мы скажем, что поверхность X является *условно полностью вырождаемой*, а во втором случае – *безусловно полностью невырождаемой*. Скажем также, что поверхность X *безусловно полностью вырождаема*, если для любого “погружения” g ее образ $g(X) = Y$ является полностью вырождаемой поверхностью.

ПРОБЛЕМА 1. (i) Существуют ли безусловно полностью невырождаемые поверхности X ?

(ii) Существуют ли безусловно полностью вырождаемые поверхности X ?

В случае отрицательного ответа на любой из этих вопросов нормализации X полностью невырождаемых и полностью вырождаемых поверхностей Y , приведенные в данной статье, дадут примеры условно полностью вырождаемых поверхностей.

9.2. Проблема примыкания. Обозначим через $\mathcal{H}_{\text{type}(Y)} \subset \mathbb{P}^{\binom{m+3}{3}-1}$ квазипроективное многообразие, параметризующее поверхности с обыкновенными особыми точками, имеющие тот же тип, что и поверхность Y , $\deg Y = m$. Пусть $\Pi_m \subset \mathbb{P}^{\binom{m+3}{3}-1}$ — многообразие, параметризующее конфигурации m плоскостей в $\mathbb{P}^3$, находящихся в общем положении, $\dim \Pi_m = 3m$. Из полной вырождаемости поверхности Y следует, что Π_m и замыкание многообразия $\mathcal{H}_{\text{type}(Y)}$ имеют непустое пересечение.

ПРОБЛЕМА 2. Пусть Y — полностью вырождаемая поверхность с обыкновенными особыми точками. Верно ли, что многообразие Π_m целиком лежит в замыкании многообразия $\mathcal{H}_{\text{type}(Y)}$?

Эта проблема является частью общей проблемы описания примыканий друг к другу стратов естественной стратификации (по типам двойных кривых) многообразия $\mathcal{H}_m$ поверхностей в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками.

9.3. Проблема однозначности полного вырождения. Скажем, что две пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D}_1)$ и $(\mathcal{P}, \mathcal{D}_2)$ деформационно эквивалентны, если эти пары являются слоями плоского семейства $\mathcal{D}_u \subset \mathcal{P}_u \subset \mathbb{P}^3$, $u \in U$, конфигураций плоскостей общего положения и содержащихся в них конфигураций двойных прямых. Очевидно, что пары $(\mathcal{P}_1, \mathcal{D}_1)$ и $(\mathcal{P}_2, \mathcal{D}_2)$ являются деформационно эквивалентными тогда и только тогда, когда $\deg \mathcal{P}_1 = \deg \mathcal{P}_2$ и графы $\Gamma(\mathcal{D}_1)$ и $\Gamma(\mathcal{D}_2)$ изоморфны.

Пусть Y является поверхностью с обыкновенными особыми точками. Скажем, что Y обладает *единственным полным вырождением*, если она полностью вырождаема и любые два ее полных вырождения деформационно эквивалентны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Любая поверхность Y с обыкновенными особыми точками, степень двойной кривой которой не превосходит 4, обладает не более чем единственным полным вырождением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все возможные реализуемые графы с числом ребер, не превосходящем 4, изображены на рис. 5. Под каждым графом выписан тип $\text{type}(Y) = (m, \bar{d}, k, \bar{g}, t)$ поверхности Y , в которую, быть может, возможно сгладить конфигурацию плоскостей $\mathcal{P}_m$, находящихся в общем положении, вне соответствующей конфигурации двойных прямых $\mathcal{D}$.

Из этого списка типов видно, что только в двух случаях (когда $\text{type}(Y) = (m, 4, 2, 0, 0)$ или когда $\text{type}(Y) = (m, 4, 1, 1, 0)$) поверхность Y может иметь более одного полного вырождения. Но в первом случае графы $\Gamma(\mathcal{D})$ имеют разные типы, $\Gamma_{(2,1)^2}^{(2,0)^2}$ и $\Gamma_{(2)(2,2)}^{(1,0)(3,0)}$, и если конфигурация плоскостей $\mathcal{P}$ сглаживается вне $\mathcal{D}$ с графом $\Gamma_{(2,1)^2}^{(2,0)^2}$, то двойная кривая D поверхности Y состоит из двух неприводимых компонент степени 2, а если сглаживание происходит

Рис. 5

вне $\mathcal{D}$ с графом $\Gamma_{(2)(2,2)}^{(1,0)(3,0)}$, то неприводимые компоненты кривой D имеют степени 1 и 3, т.е. в этих случаях сглаженные поверхности Y будут иметь разные (расширенные) типы. Во втором случае графы $\Gamma(\mathcal{D})$ имеют один и тот же тип $\Gamma_{(3,1,1)}^{(4,0)}$, однако для одной из соответствующих этому типу конфигураций двойных прямых (см. теорему 5) конфигурация плоскостей $\mathcal{P}$ не может быть сглажена вне этой конфигурации. Утверждение 2 доказано.

ПРОБЛЕМА 3. Любая ли поверхность Y с обыкновенными особыми точками обладает не более чем единственным полным вырождением?

9.4. Сглаживания в симплектическом случае. Выше было приведено много примеров пар $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, которые не могут быть сглажены вне $\mathcal{D}$. В одних случаях препятствия к сглаживанию были чисто топологические (например, степень кривой, двойственной к кривой ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ общей проекции сглаженной поверхности Y на плоскость, должна быть отрицательной), в других случаях препятствия, возможно, носили алгебро-геометрический характер (например, пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ с кривой $\mathcal{D}$, граф которой изображен на рис. 4).

Чтобы лучше понять природу этих препятствий, полезно обобщить проблему полного вырождения алгебраических поверхностей с обыкновенными особыми точками на случай симплектических многообразий. А именно, скажем что компактное четырехмерное вещественное подмногообразие M в $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ является *симплектическим многообразием с обыкновенными особыми точками*, если для каждой точки $p \in M$ найдется такая окрестность V этой точки, что:

- либо многообразие $V \cap M$ распадается на n гладких компонент ($n \leq 3$), являющихся симплектическими подмногообразиями в $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ относительно симплектической формы Фубини–Штуди, трансверсально пересекающихся вдоль гладких симплектических поверхностей (“двойных кривых” многообразия M ; в случае $n = 3$ точка p – это тройная точка многообразия M);
- либо $V \cap M$ является комплексно-аналитическим многообразием, которое задано в некоторых комплексно-аналитических в V координатах уравнением $x^2 - yz^2 = 0$ (и в этом случае точка p называется *пинчем многообразия M*).

Определение полного вырождения многообразий с обыкновенными особыми точками также может быть обобщено на случай симплектических многообразий.

ПРОБЛЕМА 4. Существуют ли пары $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ такие, что конфигурация плоскостей $\mathcal{P}$ не может быть сглажена вне $\mathcal{D}$ в алгебро-геометрической ситуации, но в то же время она может быть сглажена в симплектической ситуации?

Список литературы

- [1] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1921.
- [2] J. Harris, “On the Severi problem”, *Invent. Math.*, **84**:3 (1986), 445–461.
- [3] G.-M. Greuel, Ch. Lossen, E. Shustin, *Introduction to singularities and deformations*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [4] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math., **603**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
- [5] A. Calabri, C. Ciliberto, F. Flamini, R. Miranda, *On degenerations of surfaces*, [arXiv: math/0310009v2](https://arxiv.org/abs/math/0310009v2).
- [6] A. Calabri, C. Ciliberto, F. Flamini, R. Miranda, “On the geometric genus of reducible surfaces and degenerations of surface to unions of planes”, *The Fano conference* (Torino, Italy, 2002), Univ. Torino, Turin, 2004, 277–312.
- [7] R.-O. Buchweitz, G.-M. Greuel, “The Milnor number and deformations of complex curve singularities”, *Invent. Math.*, **58**:3 (1980), 241–281.

- [8] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [9] Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 83–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture”, *Izv. Math.*, **63**:6 (1999), 1139–1170.
- [10] Вик. С. Куликов, “О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраическим кривым $\mathbf{C}^2$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:2 (1992), 469–480; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On the structure of the fundamental group of the complement of algebraic curves in $\mathbf{C}^2$ ”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:2 (1993), 443–454.
- [11] С. Ciliberto, F. Flamini, *On the branch curve of a general projection of a surface to a plane*, [arXiv: math/0811.0467](https://arxiv.org/abs/math/0811.0467).
- [12] R. Hartshorne, “Families of curves in $\mathbf{P}^3$ and Zeuthen’s problem”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **130** (1997 №617).
- [13] Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 63–76; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture. II”, *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 901–913.
- [14] G. Gotzmann, *The irreducible components of $\text{Hilb}^{4n}(\mathbf{P}^3)$* , [arXiv: math/0811.3160](https://arxiv.org/abs/math/0811.3160).

В. С. Куликов (V. S. Kulikov)

Московский государственный университет печати

E-mail: vskulikov@mail.ru

Поступила в редакцию

22.01.2009

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru