Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Клячин, Описание множества целых решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 83–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:22:36

УДК 517.95

А. А. Клячин

Описание множества целых решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей

В настоящей работе при естественных предположениях доказывается теорема существования и единственности целого решения уравнения максимальных поверхностей с заданными вектором потока и геометрическим расположением особых точек в пространстве Минковского. Наряду с этим установлены некоторые асимптотические свойства таких решений.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть $\mathbb{R}_1^{n+1}$ —пространство-время Минковского, т.е. $(n+1)$ -мерное вещественное псевдоевклидово пространство с метрикой сигнатуры $(1, n)$. Пусть $\chi = (t, x) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Для произвольной пары векторов $\chi' = (t', x')$ и $\chi'' = (t'', x'')$ из $\mathbb{R}_1^{n+1}$ символом

$$\langle \chi', \chi'' \rangle = -t't'' + \sum_{i=1}^n x'_i x''_i$$

обозначим их скалярное произведение, а символом

$$|\chi|^2 = -t^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

—квадрат длины вектора $\chi \in \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Ненулевой вектор $\chi \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ называется *пространственно подобным*, *свето подобным* или *времени подобным* в зависимости от того, будет ли $|\chi|^2 > 0$, $|\chi|^2 = 0$ или $|\chi|^2 < 0$. Совокупность световых векторов с началом в точке $\chi_0 \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ образует световой конус. Символами $C^+(\chi_0)$ и $C^-(\chi_0)$ будем обозначать его верхнюю и нижнюю полости соответственно.

Гиперповерхность F в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ называется *пространственно подобной*, если любой ее касательный вектор пространственно подобен. Если F задана над областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ графиком функции $f(x) \in C^1(\Omega)$, то она является пространственно подобной тогда и только тогда, когда $|\nabla f| < 1$ в Ω .

Площадь графика локально липшицевой функции $t = f(x)$ с $|\nabla f| \leq 1$ есть величина

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 - |\nabla f|^2} dx.$$

Вариационная задача на максимум площади приводит к уравнению максимальных поверхностей

$$Q[f(x)] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Отметим, что график решения данного уравнения имеет нулевую среднюю кривизну в метрике пространства Минковского. Радиальносимметрические решения уравнения (1.1) описываются функциями

$$\Phi_n(c, |x|) = c \int_0^{|x|} (c^2 + \lambda^{2(n-1)})^{-1/2} d\lambda, \quad c = \text{const} \neq 0, \quad (1.2)$$

имеющими точку $x = 0$ в качестве изолированной особенности, в которой они недифференцируемы. Совокупность касательных лучей к графику $t = \Phi_c(|x|)$ в точке $x = 0$ совпадает с верхней $C^+(0)$ либо нижней $C^-(0)$ полостями светового конуса.

Среди работ, посвященных изучению целых решений уравнения максимальных поверхностей, следует отметить, в первую очередь, работы С. Ченга и С. Яу [1], Е. Калаби [2]. Ими было установлено, в частности, что графиком решения уравнения (1.1), определенного в $\mathbb{R}^n$, является гиперплоскость. Решения с одной изолированной особенностью изучались в статье К. Экера [3]. Им было показано, что решение уравнения максимальных поверхностей, определенных всюду за исключением одной точки, задается равенством (1.2) с точностью до лоренцева преобразования пространства $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Отметим, что поведение решений уравнения (1.1) в окрестности конечной особой точки и асимптотические свойства максимальных трубок и лент достаточно хорошо изучено в работах В. М. Миклюкова и В. А. Клячина [4]–[7].

Нами рассматриваются вопросы существования и единственности решений уравнения (1.1), имеющих в качестве особенности компактное множество. Отметим, что данная задача, главным образом, сводится к исследованию поведения таких решений на бесконечности. В силу эллиптичности уравнения (1.1) нами используются соответствующие методы и доказываются вспомогательные утверждения, справедливые для решений уравнения эллиптического типа. В частности, мы доказываем существование предела градиента на бесконечности для решений уравнения максимальных поверхностей, определенных вне компакта. Отметим, что аналогичные утверждения для уравнения минимальных и уравнения типа минимальных поверхностей были установлены в работах Л. Берса [8], Х. Дженкинса [9] и В. М. Миклюкова [10]. Более того, нами доказано, что вектор потока коллинеарен пределу единичной нормали на бесконечности. Данные факты существенно используются при доказательстве основного результата работы, заключающегося в том, что максимальная поверхность однозначно определяется вектором потока и геометрическим расположением особых точек.

Пользуясь случаем, автор благодарит В. М. Миклюкова за постановку задачи и полезные советы при подготовке работы, а так же В. А. Клячина за прочтение рукописи.

Введем следующие обозначения:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad S_r(x_0) = \partial B_r(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0, \\ B_r = B_r(0), \quad S_r = S_r(0).$$

Рассмотрим решение $f(x)$ уравнения максимальных поверхностей в области $\mathbb{R}^n \setminus K$, где K — компактное множество с $\text{Int } K = \emptyset$. Положим

$$\mu_f(K, \Pi) = \int_{\Pi} \frac{\langle \nabla f, \nu \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}},$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к Π , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Отметим, что в силу (1.1) величина $\mu_f(K, \Pi)$ не зависит от выбора Π , поэтому в дальнейшем мы ее обозначаем через $\mu_f(K)$.

Пусть F — график $f(x)$ в $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Через ∇_F , Δ_F , div_F будем обозначать градиент, оператор Лапласа и дивергенцию на поверхности F соответственно. Тогда из уравнения (1.1) следует, что $\Delta_F h = 0$, где $h = \langle q, \chi \rangle$, q — фиксированный вектор $\mathbb{R}_1^{n+1}$ и $\chi \in F$. Пусть S_R — сфера, охватывающая компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Через S_R^F обозначим прообраз S_R при естественном проектировании графика F на $\mathbb{R}^n \setminus K$. Пусть ν — внешний единичный вектор нормали к S_R^F на F . Вектором потока Q_f максимальной поверхности F назовем вектор, определяемый равенством

$$\langle Q_f, q \rangle = \int_{S_R^F} \langle q, \nu \rangle \quad \forall q \in \mathbb{R}_1^{n+1}.$$

Отметим, что вектор Q_f не зависит от выбора S_R .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть f_1, f_2 — решения уравнения максимальных поверхностей, заданные в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Тогда если

$$f_1|_K = f_2|_K, \quad Q_{f_1} = Q_{f_2},$$

то $f_1 \equiv f_2$.

Данное утверждение, фактически, устанавливает, что максимальная поверхность определяется однозначно вектором потока и геометрическим расположением особого множества в $\mathbb{R}_1^n$. Следующая теорема дает существование максимальных поверхностей с заданными особенностями и вектором потока.

Пусть задана функция $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$. Будем предполагать, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in K, \quad x \neq y. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (1.3). Тогда для любого времени подобного вектора Q существует единственное решение $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus K) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ уравнения (1.1) такое, что

$$f|_K = \varphi, \quad Q_f = Q.$$

Отметим, что в ограниченных областях и неограниченных областях параболического типа теоремы существования и единственности были получены в работах А. А. Клячина и В. М. Миклюкова [11], [12].

Следующая теорема устанавливает существование предела градиента решения уравнения максимальных поверхностей.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт и $f(x)$ – решение уравнения максимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Тогда существует

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x) = \xi, \quad |\xi| < 1.$$

При доказательстве теоремы существования и единственности решений уравнения (1.1) мы используем следующее утверждение, описывающее асимптотическое поведение на бесконечности двумерных максимальных поверхностей. Случай большей размерности будет рассмотрен далее в теореме 2.3.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $f(x)$ – ограниченное снизу или сверху решение уравнения максимальных поверхностей, определенное в $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Тогда существует предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(f(x) - \int_0^{|x|} \frac{\lambda ds}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}} \right),$$

где $\lambda = \mu_f(K)/(2\pi)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Пусть в области Ω задана локально липшицева функция $f(x)$ такая, что $|\nabla f| \leq 1$ почти всюду в Ω . Будем говорить, что f максимизирует площадь в Ω , если для любой функции $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, $|\nabla g| \leq 1$, выполнено

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 - |\nabla f|^2} dx \geq \int_{\Omega} \sqrt{1 - |\nabla g|^2} dx.$$

Известны следующие свойства решений уравнения максимальных поверхностей (см. [1], [13], [14]).

СВОЙСТВО I. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – решение уравнения (1.1). Тогда существует вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| < 1$, такой, что $f(x) = f(0) + \langle \xi, x \rangle$.

СВОЙСТВО II. Пусть $f_m(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, – решения уравнения максимальных поверхностей и f_m равномерно сходятся к f при $m \rightarrow \infty$. Тогда f максимизирует площадь в Ω . Причем

- а) если существует последовательность точек $\{x_m\} \Subset \Omega$ такая, что $|\nabla f_m(x_m)| \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, то для любой ее предельной точки x_0 найдутся точки $x', y' \in \partial\Omega$ такие, что $x_0 \in \overline{x'y'}$ и $|f(x') - f(y')| = |x' - y'|$;
- б) если для любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ выполнено $\sup_{\Omega'} |\nabla f| < 1$, то f является C^∞ -гладким решением уравнения (1.1) в Ω .

СВОЙСТВО III. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, d_Ω – ее внутренняя метрика, Ω_d – пополнение области Ω по метрике d_Ω и $\Gamma(x, y) = \{z \in \Omega_d : d_\Omega(x, y) = d_\Omega(x, z) + d_\Omega(z, y)\}$. Пусть $\varphi: \partial\Omega_d \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) = 0, \quad f|_{\partial\Omega_d} = \varphi,$$

разрешима тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \partial\Omega_d$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d_\Omega(x, y)$$

и

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < d_\Omega(x, y),$$

если $\Gamma(x, y) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Теперь докажем вспомогательную лемму, которой мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 2.1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^n \setminus K$ уравнению (1.1) и $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ для всех $x_1, x_2 \in K$. Тогда найдется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| < 1$, такой, что функция $f(x) - \langle \xi, x \rangle$ ограничена либо сверху, либо снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность шаров B_m , $m = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$, таких, что $K \subset B_m$. Из свойства III следует, что существует решение $f_m: B_m \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) такое, что $f_m|_{S_m} = f|_{S_m}$ для любого m . Используя принцип сравнения для решений уравнения максимальных поверхностей, получаем, что либо максимум, либо минимум в B_m разности $f(x) - f_m(x)$ достигается на K . Пусть $x_m^+ \in K$ — точка, в которой достигается ее максимум, а $x_m^- \in K$ — минимум:

$$\begin{aligned} f(x) - f_m(x) &\leq f(x_m^+) - f_m(x_m^+) \quad \forall x \in K, \\ f(x) - f_m(x) &\geq f(x_m^-) - f_m(x_m^-) \quad \forall x \in K. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что последовательность $\{x_m^+\}$ бесконечна. Положим

$$g_m(x) = f_m(x) + f(x_m^+) - f_m(x_m^+).$$

Нетрудно проверить, что последовательность $g_m(x)$ образует равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций на каждом ограниченном множестве. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $g_{m'}$, которая равномерно сходится к некоторой функции $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на каждом ограниченном множестве. Покажем, что $g(x)$ — линейная функция, т.е. найдется вектор ξ , $|\xi| \leq 1$, такой, что $g(x) = g(0) - \langle x, \xi \rangle$. Действительно, предположим сначала, что для любой ограниченной области Ω выполнено $\sup_m \sup_\Omega |\nabla f_m| < 1$. Используя свойство II, получаем, что $g(x)$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ уравнению (1.1). Тогда из свойства I следует, что $g(x) = g(0) - \langle x, \xi \rangle$ для некоторого вектора ξ , $|\xi| < 1$.

Предположим теперь, что найдется область, для которой

$$\sup_m \sup_\Omega |\nabla f_m| = 1.$$

Тогда найдем (при необходимости переходя к подпоследовательности) последовательность точек $\{x_m\} \subset \Omega$ такую, что $|\nabla f_m(x_m)| \rightarrow 1$. Не ограничивая общности, можем считать, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0 \in \Omega$ (в противном случае мы можем перейти к подпоследовательности и рассмотреть область

$\Omega^* \supset \Omega$). Тогда из свойства II следует, что существуют $x', y' \in \partial\Omega$, для которых выполнено $g(x') - g(y') = |x' - y'|$. Ясно, что область Ω , содержащую точку x_0 , можно выбрать произвольным образом. Поэтому $g(x(s)) = g(x_0) + s$, где $x(s) = x_0 + s(x' - y')/|x' - y'|$ для всех s . Положим $\xi = (x' - y')/|x' - y'|$. Тогда из условия пространственной подобности вектора $\chi = (x - x(s), g(x) - g(x(s)))$ получаем неравенство

$$|x - x_0|^2 - (g(x) - g(x_0))^2 - 2s(\langle \xi, x - x_0 \rangle - g(x) + g(x_0)) > 0,$$

справедливое для любого $s \in \mathbb{R}$. Это возможно только в том случае, когда $g(x) = g(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle$.

Итак, $g_m(x)$ равномерно сходится к $g(0) + \langle \xi, x \rangle$ на каждом ограниченном множестве. Тогда из (2.1) имеем

$$f(x) \leq \langle \xi, x \rangle + g(0).$$

Осталось показать, что $|\xi| < 1$. Предположим противное: $|\xi| = 1$. Не ограничивая общности, можем считать (в силу компактности K), что последовательность $x_m^+ \rightarrow x_0 \in K$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$g(0) = -\langle \xi, x_0 \rangle + f(x_0).$$

Рассматривая точку $x_1 = x_0 - \xi$, имеем

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_1) &= \langle \xi, x_0 \rangle + g(0) - f(x_1) \geq \langle \xi, x_0 \rangle + g(0) - (\langle \xi, x_1 \rangle + g(0)) \\ &= \langle \xi, x_0 - x_1 \rangle = |\xi| = |x_0 - x_1|, \end{aligned}$$

что противоречит условию, наложенному на функцию $f(x)$. Следовательно, $|\xi| < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть F — график функции f и $L: \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ — лоренцево преобразование. Отметим, что лоренцево преобразование пространственно подобные графики переводит в пространственно подобную поверхность, являющуюся также графиком некоторой функции. Через f_L будем обозначать функцию, графиком которой является поверхность $L(F)$. Доказанное в лемме утверждение можно интерпретировать следующим образом. Если выполнены условия леммы 2.1, то существует лоренцево преобразование L такое, что решение f_L ограничено снизу или сверху.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f(x)$ — C^2 -функция, определенная в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Предположим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx < \infty.$$

Тогда найдется вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| < 1$, такой, что существует предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - \langle \theta, x \rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. 1) Данная теорема неверна для двумерного случая. Легко строится контрпример. Достаточно взять двумерный пространственно подобный катеноид

$$\Phi_2(\lambda, |x|) = \lambda \ln(|x| + \sqrt{|x|^2 + \lambda^2}), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

и на компактном множестве изменить его до C^2 -гладкой функции. Однако теорема 1.4 показывает, что решения уравнения максимальных поверхностей, определенные вне компакта, асимптотически приближаются с точностью до лоренцева преобразования к такому катеноиду.

2) Теорема очевидно верна для решений уравнения (1.1), заданных вне компакта K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Используя свойство III, найдем решение $f_R(x)$ уравнения максимальных поверхностей, определенное в шаре B_R с краевым условием $f_R(x) = f(x)$ при $x \in S_R$. Применяя формулу Гаусса–Остроградского, получаем равенства

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \frac{\langle \nabla f_R, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f_R|^2}} dx &= 0, \\ \int_{B_R} \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} dx &= - \int_{B_R} Q[f] h dx \end{aligned}$$

для любой функции $h \in C^1(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ с $h|_{S_R} = 0$. Положим $h = f - f_R$. Тогда, вычитая одно из этих равенств из другого и пользуясь тем, что (см. [11])

$$\frac{\langle \xi, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} - \frac{\langle \eta, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} \geq |\xi - \eta|^2, \quad (2.2)$$

получаем неравенство

$$\int_{B_R} |\nabla(f - f_R)|^2 dx \leq \int_{B_R} |Q[f]| |f - f_R| dx. \quad (2.3)$$

Поэтому из (2.3), используя неравенство Соболева

$$\left(\int_{\Omega} |w|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/(2n)} \leq c(n) \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right)^{1/2} \quad \forall w \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

получаем

$$\left(\int_{B_R} |f - f_R|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \leq c^2(n) \int_{B_R} |f - f_R| |Q[f]| dx. \quad (2.4)$$

Покажем, что семейство функций $g_R(x) = f(x) - f_R(x)$ равномерно по R ограничено. Пусть для определенности $M_R = \max_{B_R} g_R(x) = \max_{B_R} |g_R(x)|$ (в противном случае мы полагаем $g_R(x) = f_R(x) - f(x)$). Пусть

$$D_t = \{x \in B_R : g_R(x) > t\}.$$

Очевидно, что множество D_t открыто и компактно лежит в B_R для любого $t > 0$. Легко увидеть, что $D_{M_R/2} \supset B_{M_R/4}(x_0)$, где x_0 — точка, в которой $g_R(x_0) = M_R$. Действительно, пусть $x \in B_{M_R/4}(x_0)$. Тогда

$$M_R - g_R(x) = g_R(x_0) - g_R(x) < 2|x - x_0| \leq 2\frac{M_R}{4} = \frac{M_R}{2},$$

и поэтому $g_R(x) > \frac{1}{2}M_R$, т.е. $x \in D_{M_R/2}$.

Оценим снизу интеграл, стоящий в левой части неравенства (2.4), следующим образом

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_R} |f - f_R|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \\ & \geq \left(\int_{D_{M_R/2}} (g_R)^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \\ & \geq \left(\int_{B_{M_R/4}(x_0)} \left(\frac{M_R}{2} \right)^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \\ & = \left(\frac{M_R}{2} \right)^2 \left(\omega_n \left(\frac{M_R}{4} \right)^n \right)^{(n-2)/n} = \frac{M_R^n}{4^{n-1}} \omega_n^{(n-2)/n}. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (2.4)

$$\frac{M_R^n}{4^{n-1}} \omega_n^{(n-2)/n} \leq c^2(n) M_R \int_{B_R} |Q[f]| dx \leq M_R \int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx.$$

Следовательно,

$$M_R \leq 4 \left(\frac{c^2(n)}{\omega_n^{(n-2)/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx \right)^{1/(n-1)}. \quad (2.5)$$

Далее, так как семейство функций $f_R(x)$ равностепенно непрерывно и в силу (2.5) равномерно ограничено, то можно выделить некоторую последовательность $R_k \rightarrow \infty$ такую, что f_{R_k} сходятся равномерно на каждом компакте к некоторой липшицевой функции f_0 . В силу свойства II функция f_0 локально максимизирует площадь. Поэтому так же, как и при доказательстве леммы 2.1, получаем, что найдутся вектор θ , $|\theta| \leq 1$, и число b такие, что $f_0(x) = \langle x, \theta \rangle + b$. Покажем, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_0|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \leq c^2(n) M \int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx, \quad (2.6)$$

где $M = \sup_R M_R < +\infty$ в силу (2.5). Действительно, для $R_k > R$, используя (2.4), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} |f - f_0|^{2n/(n-2)} dx \\ & = \int_{B_R} |f - f_{R_k}|^{2n/(n-2)} dx + \int_{B_R} \left(|f - f_0|^{2n/(n-2)} - |f - f_{R_k}|^{2n/(n-2)} \right) dx \\ & \leq \int_{B_{R_k}} |f - f_{R_k}|^{2n/(n-2)} dx + \int_{B_R} \left(|f - f_0|^{2n/(n-2)} - |f - f_{R_k}|^{2n/(n-2)} \right) dx \\ & \leq \left(M c^2(n) \int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx \right)^{n/(n-2)} + \varepsilon(R, R_k), \end{aligned}$$

где величина $\varepsilon(R, R_k) \rightarrow 0$ при $R_k \rightarrow \infty$ и фиксированном R (так как $f_{R_k} \rightarrow f_0$ равномерно на B_R). Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, для любого $R > 0$ получаем

$$\left(\int_{B_R} |f - f_0|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \leq c^2(n) M \int_{\mathbb{R}^n} |Q[f]| dx.$$

Поэтому выполнено (2.6). Так как функция $|f(x) - f_0(x)|^{2n/(n-2)}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_0|^{2n/(n-2)} dx < \infty,$$

то $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x) - f_0| = 0$. Наконец, в силу доказанного и того, что $|\nabla f(x)| < 1$, имеем $|\theta| < 1$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть в области $\Omega \setminus K$, $K \subset \Omega$ — компакт, задана последовательность решений $f_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, уравнения (1.1), равномерно сходящаяся к некоторому решению $f(x)$ уравнения (1.1). Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{f_m}(K) = \mu_f(K).$$

Доказательство данной леммы полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения в работе [11].

ЛЕММА 2.6. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $f(x)$ — решение уравнения максимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n \setminus K$ такое, что для некоторого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| < 1$, выполнено $\sup_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x) - \langle x, \xi \rangle| < \infty$. Тогда

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B} |\nabla f| < 1$$

для любого шара B , содержащего множество K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. найдется последовательность точек $\{x_m\}$ такая, что $|x_m| \rightarrow \infty$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f(x_m)| = 1$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_m(x) = f(x + x_m) - f(x_m),$$

которые удовлетворяют уравнению (1.1) в $\mathbb{R}^n \setminus K_m$, где $K_m = \{x : x - x_m \in K\}$. Как и при доказательстве леммы 2.1, можем считать, что последовательность $\{f_m\}$ равномерно на каждом ограниченном множестве сходится к некоторой функции $g(x)$. Причем для нее, очевидно, выполняется неравенство

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus K} |g(x) - \langle x, \xi \rangle| < \infty. \quad (2.7)$$

С другой стороны, так как $\lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_m(0)| = 1$, то по свойству II найдется такая прямая $l \subset \mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, что для любых $x', y' \in l$ выполнено

$|g(x') - g(y')| = |x' - y'|$, что противоречит неравенству (2.7) для достаточно больших значений $|x' - y'|$. Теорема доказана.

Приведем необходимые нам факты из теории эллиптических дифференциальных уравнений (см., например, [15]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, в которой задан дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}).$$

Будем предполагать, что функции a_{ij} являются C^1 -гладкими в области Ω и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0,$$

причем

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = 0$$

тогда и только тогда, когда $\xi_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

ЛЕММА 2.7. Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ такие, что

$$Lu \leq Lv, \quad u|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}.$$

Тогда $u(x) \geq v(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Будем говорить, что оператор L равномерно эллиптивен в Ω , если существуют постоянные $\lambda, \Lambda > 0$ такие, что

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad (2.8)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$.

Далее нами будет использовано неравенство Харнака в следующей форме.

ЛЕММА 2.8 [15; теорема 8.20]. Пусть L — равномерно эллиптический оператор в Ω . Существует константа $C = C(n, \Lambda/\lambda)$ такая, что для любого неотрицательного решения u уравнения $Lu = 0$ и любого шара $B_{4R}(y) \subset \Omega$ выполнено

$$\sup_{B_R(y)} u(x) \leq C \inf_{B_R(y)} u(x).$$

Непосредственным следствием неравенства Харнака является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R$ и в Ω задан оператор L , удовлетворяющий (2.8). Тогда найдется постоянная $C_1 = C_1(n, \Lambda/\lambda)$ такая, что для любого неотрицательного решения $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $Lu = 0$ и любого $R' \geq 5R$ выполнено

$$\sup_{|x|=R'} u(x) \leq C_1 \inf_{|x|=R'} u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u \geq 0$ в Ω и для любого $y \in S_{R'}$ шар $B_{4R'/5}(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_R$, то из леммы 2.8 следует, что

$$u(x_1) \leq C u(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in B_{R'/5}(y).$$

Далее, очевидно, существует такое натуральное $N = N(n)$, что любую сферу $S_{R'}$ можно покрыть N шарами радиуса $R'/5$. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_N \in S_{R'}$ такие, что

$$\bigcup_{i=1}^N B_{R'/5}(y_i) \supset S_{R'}.$$

Следовательно, для любых $x_1, x_2 \in S_{R'}$ имеем

$$u(x_1) \leq C_1 u(x_2), \quad C_1 = C^N \left(n, \frac{\Lambda}{\lambda} \right).$$

Что и требовалось доказать.

Для равномерно эллиптических уравнений существование предела для ограниченных решений, заданных вне единичного шара, было доказано в работе Ю. Мозера [16].

ТЕОРЕМА 2.10 [16]. Пусть u – ограниченное решение уравнения $Lu = 0$ в $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R$ и L удовлетворяет (2.8). Тогда существует

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x).$$

Непосредственно из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$ и в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ задан эллиптический оператор L такой, что вне некоторого шара $B_R(0) \supset K$ выполнено (2.8). Пусть u – ограниченное снизу или сверху решение уравнения $Lu = 0$, непрерывное вплоть до K , причем

$$\int_{S_{R_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \nu_i = 0, \quad (2.9)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичная внешняя нормаль к S_{R_0} . Тогда существует предел $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)$. В частности, если $u|_K = 0$, то $u \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что u ограничено снизу. Отметим сначала, что в условии (2.9) можно брать любую $(n-1)$ -мерную поверхность, охватывающую компакт K , так как u удовлетворяет уравнению $Lu = 0$. Далее, предположим сначала, что u ограничено и сверху. Тогда из теоремы 2.10 следует, что существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = c$. Если $u|_K = 0$, то в силу принципа максимума (лемма 2.7) $c \neq 0$. Пусть $c > 0$. Тогда для $t < c$, достаточно близких к c , множества

$$E_t = \{x : u(x) = t\}$$

компактны и для почти всех t являются C^2 -гладкими поверхностями. Рассмотрим область $D_{t_1 t_2} = \{x : t_1 < u(x) < t_2\}$. Далее, для любой $\varphi \in C^1(D_{t_1 t_2})$ выполнено

$$\int_{D_{t_1 t_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \varphi_{x_i} = \int_{\partial D_{t_1 t_2}} \varphi \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \nu_i.$$

Тогда, положив $\varphi = u$, из (2.9) имеем

$$\int_{D_{t_1 t_2}} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_{D_{t_1 t_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} dx = (t_2 - t_1) \int_{E_{t_1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \nu_i = 0.$$

Следовательно, $u \equiv \text{const}$ в $D_{t_1 t_2}$. Получили противоречие.

Если предположить теперь, что u неограничено сверху, то, применяя следствие 2.9 для решения $u - \inf_{\Omega} u$, получим, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = +\infty$. Повторяя те же выкладки для множеств E_t при $t > \max_{x \in K} u(x)$, получаем $u \equiv \text{const}$, что противоречит неограниченности u .

Для двумерного случая нам понадобится следующий аналог принципа Фрагмена–Линделёфа, который доказан в работе В. М. Миклюкова [10].

ЛЕММА 2.12. Пусть $u(x)$ – решение равномерно эллиптического уравнения $Lu = 0$, заданное в $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Пусть при $|x| \rightarrow \infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\ln |x|} = 0.$$

Тогда существует

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x).$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.3

Покажем, что

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B} |\nabla f| < 1 \quad (3.1)$$

для любого шара B , содержащего множество K . При $n > 2$ это следует из теоремы 2.3 и леммы 2.6.

Пусть $n = 2$. Известно, что график F решения уравнения максимальных поверхностей, определенного вне некоторого компакта, имеет параболический конформный тип [17], [18]. Далее, известно также [13], что для некоторого $\alpha > 0$ функция $u = (1 - |\nabla f|^2)^{\alpha/2}$ удовлетворяет неравенству $\Delta_F u \leq 0$, где Δ_F – оператор Лапласа на F . Из всего сказанного следует, что выполняется обобщенный принцип минимума [17; теорема 2.2]

$$\min_{\partial B} u = \inf_{\mathbb{R}^2 \setminus B} u.$$

Ясно, что $\min_{\partial B} u > 0$, и поэтому $|\nabla f|$ отделен от 1 на бесконечности.

Далее, дифференцируя (1.1) по переменной x_l , получим

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{(1 - |\nabla f|^2)\delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}}{(1 - |\nabla f|^2)^{3/2}} f_{x_l x_j} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Отметим, что в силу неравенств (3.1) и

$$\frac{|\xi|^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{(1 - |\nabla f|^2)\delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}}{(1 - |\nabla f|^2)^{3/2}} \xi_i \xi_j \leq \frac{|\xi|^2}{(1 - |\nabla f|^2)^{3/2}},$$

для любого $l = 1, 2, \dots, n$ производная f_{x_l} удовлетворяет равномерно эллиптическому в $\mathbb{R}^n \setminus B$ уравнению (3.2). Теорема 2.10 дает, что существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_{x_l}(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Используя доказанную теорему и лемму 2.1, несложно показать, что для вектора $\xi = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x)$ разность $f(x) - \langle \xi, x \rangle$ ограничена снизу или сверху. Кроме того, существует преобразование Лоренца $L: \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ такое, что для решения f_L выполнено $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_L(x) = 0$.

§ 4. Доказательство теоремы 1.4

Пусть f_1, f_2 – решения уравнения максимальных поверхностей, заданные в области Ω . Рассмотрим разность $g = f_1 - f_2$. Тогда, как нетрудно заметить, функция g удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} g_{x_j}) = 0, \quad (4.1)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{(1 - |\nabla h^t|^2)\delta_{ij} + h_{x_i}^t h_{x_j}^t}{(1 - |\nabla h^t|^2)^{3/2}} dt$$

и $h^t = f_2 + t(f_1 - f_2)$. Отметим, что для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ выполнено

$$|\xi|^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - |\nabla h^t|^2}} \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{1 - |\nabla h^t|^2})^3}.$$

Пусть для определенности $f(x) \geq 0$. Тогда ясно, что $\nabla f \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ (теорема 1.3). Положим

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda : w_\lambda(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}\},$$

где

$$w_\lambda(x) = m_0 + \int_{R_0}^{|x|} \frac{\lambda ds}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}},$$

$m_0 = \min_{S_{R_0}} f(x)$ и R_0 выбрано так, что $K \subset B_{R_0}$. Понятно, что $f(x) - w_{\lambda_0} \geq 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$. Так как $\nabla f \rightarrow 0$ и $\nabla w_{\lambda_0} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то разность $f(x) - w_{\lambda_0}(x)$

удовлетворяет равномерно эллиптическому уравнению (4.1). Тогда из следствия 2.9 имеем

$$\sup_{S_R} (f - w_{\lambda_0}) \leq C_1 \inf_{S_R} (f - w_{\lambda_0}). \quad (4.2)$$

Покажем, что

$$m_R - m_0 - \int_{R_0}^R \frac{\lambda_0 ds}{\sqrt{\lambda_0^2 + s^2}} = o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty,$$

где $m_R = \inf_{S_R} f(x)$. Предположим противное. Тогда найдутся $\delta > 0$ и последовательность $R_k \rightarrow \infty$ такие, что

$$m_{R_k} - m_0 - \int_{R_0}^{R_k} \frac{\lambda_0 ds}{\sqrt{\lambda_0^2 + s^2}} > \delta \ln R_k. \quad (4.3)$$

Пусть $\lambda' > \lambda_0$. Рассмотрим разность

$$(w_{\lambda'} - w_{\lambda_0})|_{S_{R_k}} = \int_{R_0}^{R_k} \frac{\lambda' ds}{\sqrt{\lambda'^2 + s^2}} - \int_{R_0}^{R_k} \frac{\lambda_0 ds}{\sqrt{\lambda_0^2 + s^2}} \leq (\lambda' - \lambda_0) \ln \frac{R_k}{R_0}.$$

Следовательно, из (4.3) получаем

$$\begin{aligned} \inf_{S_{R_k}} (f - w_{\lambda'}) &= -(w_{\lambda'} - w_{\lambda_0})|_{S_{R_k}} + m_{R_k} - m_0 - \int_{R_0}^{R_k} \frac{\lambda_0 ds}{\sqrt{\lambda_0^2 + s^2}} \\ &> -(w_{\lambda'} - w_{\lambda_0})|_{S_{R_k}} + \delta \ln R_k \geq \delta \ln R_k - (\lambda' - \lambda_0) \ln \frac{R_k}{R_0}. \end{aligned}$$

Тогда при достаточно малой разнице $\lambda' - \lambda_0 > 0$ и достаточно большом R_k получим $\inf_{S_{R_k}} (f(x) - w_{\lambda'}(x)) > 0$ или $f(x) > w_{\lambda'}(x)$ при $x \in S_{R_k}$. Из того, что $f|_{S_{R_0}} \geq w_{\lambda'}|_{S_{R_0}} = m_0$, и принципа максимума получаем, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$ $f(x) \geq w_{\lambda'}$, что противоречит выбору λ_0 . Итак,

$$m_R - m_0 - \int_{R_0}^R \frac{\lambda_0 ds}{\sqrt{\lambda_0^2 + s^2}} = o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty.$$

Тогда из (4.2) получаем

$$f(x) - w_{\lambda_0} = o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Так как разность $f(x) - w_{\lambda_0}(x)$ удовлетворяет равномерно эллиптическому уравнению (4.1), то из (4.4) и леммы 2.12 вытекает, что существует нужный предел. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1.1

Прежде всего сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ – решения уравнения максимальных поверхностей, заданные вне компакта K . Если

$$f_1|_K = f_2|_K, \quad \mu_{f_1}(K) = \mu_{f_2}(K), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_2(x),$$

то $f_1 \equiv f_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь замечанием 3.1, можем считать, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_2(x) = 0.$$

Поэтому уравнение (4.1), которому удовлетворяет $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$, является равномерно эллиптическим. При этом $g(x) = 0$ для $x \in K$.

Пусть $n > 2$. Тогда из теоремы 2.3 следует, что разность $g(x)$ ограничена. Применяя следствие 2.11 для решения $g(x)$ уравнения (4.1), сразу же получаем результат. Действительно, если $K \subset B_R$, то

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} g_{x_j} \nu_i &= \int_{S_R} \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \frac{(1 - |\nabla h^t|^2) \delta_{ij} + h_{x_i}^t h_{x_j}^t}{(1 - |\nabla h^t|^2)^{3/2}} dt g_{x_j} \nu_i \\ &= \int_{S_R} \frac{\langle \nabla f_1, \nu \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f_1|^2}} - \int_{S_R} \frac{\langle \nabla f_2, \nu \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f_2|^2}} \\ &= \mu_{f_1}(K) - \mu_{f_2}(K) = 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n = 2$. Если функция $g(x) \geq 0$ вне некоторого круга B_R либо функция $g(x) \leq 0$ вне некоторого круга B_R , то результат получается из следствия 2.11. Предположим, что множество нулей функции g неограниченно. Из теоремы 1.4 получаем, что $\text{osc}\{g; S_R\} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Поэтому для некоторой последовательности $R_k \rightarrow \infty$ выполнено $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{S_{R_k}} |g(x)| = 0$. Так как функция g удовлетворяет уравнению (4.1), то из принципа максимума следует $g \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично можно показать, что параметр λ в формулировке теоремы 1.4 равен $\mu_f(K)/(2\pi)$. Действительно, из теоремы 1.4 следует, что $\text{osc}\{f; S_R\} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, колебание по окружностям S_R функции $f(x) - \Phi_2(\mu_f(K)/(2\pi), |x|)$ также стремится к нулю. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 5.1, получаем, что существует предел разности $f(x) - \Phi_2(\mu_f(K)/(2\pi), |x|)$ при $|x| \rightarrow 0$.

Для доказательства теоремы 1.1 покажем для начала, что вектор потока Q_f коллинеарен пределу единичной нормали.

Пусть $f(x)$ — решение уравнения максимальных поверхностей в области Ω и F — его график в $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

Пусть $\xi, \eta \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, причем $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Линейный оператор $A_{\xi, \eta}: \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ определим следующим образом. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$ — единичные векторы в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ такие, что система $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}, \xi, \eta$ ортогональна. Пусть $q \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ и $q = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \tau_i + \beta \xi + \gamma \eta$. Тогда положим $A_{\xi, \eta}(q) = \gamma \xi + \beta \eta$. Ясно, что $A_{\xi, \eta}(q)$ не зависит от выбора $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$. Очевидно следующее равенство:

$$|\eta|^2 \langle q, \xi \rangle = \langle A_{\xi, \eta}(q), \eta \rangle |\xi|^2 \quad \forall q \in \mathbb{R}_1^{n+1}. \quad (5.1)$$

Действительно,

$$\langle \eta, A_{\xi, \eta}(q) \rangle |\xi|^2 = |\xi|^2 \langle \eta, \gamma \xi + \beta \eta \rangle = \beta |\eta|^2 |\xi|^2 = |\eta|^2 \langle q, \xi \rangle.$$

Пусть S_R — сфера, охватывающая компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Через S_R^F обозначим прообраз S_R при естественном проектировании графика F на $\mathbb{R}^n \setminus K$. Пусть N — единичная нормаль к поверхности F и $q \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ такой, что $\langle Q_f, q \rangle = 0$. Тогда из определения вектора потока и равенства (5.1) имеем

$$\int_{S_R^F} \langle A_{\nu N}(q), N \rangle = \int_{S_R^F} \langle q, \nu \rangle |N|^2 = - \int_{S_R^F} \langle q, \nu \rangle = - \langle q, Q_f \rangle = 0. \quad (5.2)$$

Далее, пусть $g_R: B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ — решение уравнения (1.1) такое, что $g_R|_{S_R} = f|_{S_R}$ и G — его график в $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Пусть m — единичная нормаль к G , $\langle m, e_{n+1} \rangle < 0$ и μ — внешняя единичная нормаль к S_R^F на G . Тогда, используя (5.1) и теорему Стокса, получаем

$$\int_{S_R^F} \langle A_{\mu m}(q), m \rangle = - \int_{S_R^F} \langle q, \mu \rangle = - \int_{B_R^G} \Delta_G \langle q, \chi \rangle dG = 0, \quad (5.3)$$

где $B_R^G = \{(t, x) \in G : x \in B_R\}$. Нетрудно заметить, что $A_{\nu, N}(q) = A_{\mu, m}(q)$ (это следует из того, что $\langle A_{\xi \eta}(q), q \rangle = 0$). Поэтому из (5.2), (5.3) получаем

$$\int_{S_R^F} \langle A_{\nu N}(q), N \pm m \rangle = 0.$$

Следовательно, найдутся точки χ_+^R и $\chi_-^R \in S_R^F$ такие, что

$$\langle A_{\nu N}(q), N + m \rangle|_{\chi=\chi_+^R} = 0, \quad \langle A_{\nu N}(q), N - m \rangle|_{\chi=\chi_-^R} = 0.$$

Так как векторы $N - m$ и $m + N$ ортогональны, то из (5.1) имеем

$$\langle q, m - N \rangle|_{\chi=\chi_+^R} = 0, \quad \langle q, m + N \rangle|_{\chi=\chi_-^R} = 0.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\langle q, N(\chi_+^R) - N(\chi_-^R) \rangle = \langle q, m(\chi_-^R) + m(\chi_+^R) \rangle. \quad (5.4)$$

Левая часть (5.4) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, так как существует предел $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x)$ (или существует предел нормали N к графику F). Опираясь на замечание 3.1, можем считать, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x) = 0$. В этом случае решение ограничено при $n > 2$ и $f(x) = O(\ln |x|)$, $|x| \rightarrow \infty$ для $n = 2$. Покажем, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{S_R} |\nabla g_R(x)| = 0$. Получим необходимую нам оценку градиента. Ясно, что в силу принципа максимума семейство решений g_R равномерно ограничено. Положим $\delta_R = \max_{S_R} |\nabla f| < 1$. Функцию сравнения будем искать в виде

$w(x) = f(x) + u(d)$, где d – расстояние от точки x до сферы S_R . Тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n ((1 - |\nabla w|^2)\delta_{ij} + w_{x_i} w_{x_j}) w_{x_i x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n ((1 - |\nabla f|^2)\delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}) f_{x_i x_j} \\
&+ u' \left(2 \sum_{i,j=1}^n d_{x_i} f_{x_j} f_{x_i x_j} - 2\Delta f \sum_{i=1}^n d_{x_i} f_{x_i} + \frac{n-1}{R-d} (1 - |\nabla f|^2) \right. \\
&+ \frac{1}{R-d} |\nabla f|^2 - \frac{1}{R-d} \left(\sum_{i=1}^n d_{x_i} f_{x_i} \right)^2 \Big) \\
&+ u'^2 \left(-\frac{n-1}{R-d} \sum_{i=1}^n d_{x_i} f_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n d_{x_i} d_{x_j} f_{x_i x_j} - \Delta f \right) \\
&- u'^3 \frac{n-1}{R-d} + u'' \left(1 - |\nabla f|^2 + \left(\sum_{i=1}^n d_{x_i} f_{x_i} \right)^2 \right) \\
&= a_R u'' + b_R u'^3 + c_R u'^2 + d_R u', \tag{5.5}
\end{aligned}$$

где a_R, b_R, c_R, d_R – соответствующие выражения при u'', u'^3, u'^2, u' .

Будем рассматривать функцию $u(d)$ на отрезке $[0, \rho]$, где $0 < \rho < R$. Мы предполагаем, что $u(0) = 0$, $u'' < 0$ и $0 < u' \leq 1 - \delta_R$. Далее, отметим, что функция $f(x)$ в силу того, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x) = 0$, удовлетворяет равномерно эллиптическому уравнению

$$\sum_{i,j=1}^n ((1 - |\nabla f|^2)\delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}) f_{x_i x_j} = 0$$

в $B_R \setminus B_{R-\rho}$. Поэтому из общей теории линейных эллиптических уравнений следует, что при $|x| \rightarrow \infty$ все первые и вторые производные решения f стремятся равномерно к нулю на бесконечности. Таким образом, при фиксированном $\rho > 0$ выполнено

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{B_R \setminus B_{R-\rho}} b_R = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{B_R \setminus B_{R-\rho}} c_R = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{B_R \setminus B_{R-\rho}} d_R = 0.$$

Используя, что $u' < 1$, $a_R \geq 1 - \delta_R^2$, и обозначая

$$C_R = \max_{B_R \setminus B_{R-\rho}} \max\{b_R, c_R, d_R\},$$

из (5.5) имеем

$$\sum_{i,j=1}^n ((1 - |\nabla w|^2)\delta_{ij} + w_{x_i} w_{x_j}) w_{x_i x_j} \leq (1 - \delta_R^2) u'' + 3C_R u' \leq 0$$

для $u(d) = \lambda(1 - e^{-3\rho C_R d})$, где $\lambda = M_\rho / (1 - e^{-3\rho C_R})$ и $M_\rho = \max_{S_{R-\rho}} |f(x) - g_R(x)|$. Тогда очевидно, что

$$w|_{S_R} = f|_{S_R}, \quad w|_{S_{R-\rho}} \geq f|_{S_{R-\rho}}. \quad (5.6)$$

Неравенство $u' < 1 - \delta_R$, очевидно, выполняется, если

$$\frac{3C_R M_\rho}{1 - e^{-3\rho C_R}} < 1 - \delta_R.$$

Как уже мы отмечали, величина $M_\rho / \rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Для ограниченных решений нетрудно показать, что можно выбрать такое ρ , что $M_\rho / \rho < 1$. Тогда при больших R выполняется неравенство $u' < 1 - \delta_R$. Таким образом, мы построили верхний барьер w в $B_R \setminus B_{R-\rho}$ для решения g . Используя принцип сравнения, получаем оценку $g(x) - g(x_0) \leq w(x) - w(x_0)$ для любой точки $x_0 \in S_R$. Следовательно,

$$|\nabla g_R(x_0)| \leq \delta_R + u'(0) = \delta_R + \frac{M_\rho}{\rho} \frac{3\rho C_R}{1 - e^{-3\rho C_R}}.$$

Таким образом, $\limsup_{R \rightarrow \infty} |\nabla g_R(x_0)| \leq M_\rho / \rho$. А так как разности $f(x) - g_R(x)$ в совокупности ограничены, то $M_\rho / \rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Следовательно, получаем требуемое, т.е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{S_R} |\nabla g_R| = 0.$$

Итак, приходим к равенству $\lim_{R \rightarrow \infty} m(\chi_\pm^R) = e_{n+1}$. Следовательно, из (5.4) получаем

$$\langle q, e_{n+1} \rangle = 0 \quad \forall q \text{ таких, что } \langle q, Q_f \rangle = 0,$$

что возможно только в том случае, когда векторы e_{n+1} и Q_f коллинеарны. Итак, нами доказано, что вектор потока Q_f графика решения $f: \mathbb{R}^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения максимальных поверхностей всегда коллинеарен вектору $\xi + e_{n+1}$, где $\xi = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x)$.

Неограниченные решения $t = f(x)$ рассматриваемого вида, т.е. такие, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f(x) = 0$, возможны только при $n = 2$. В этом случае $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ и коллинеарность векторов ξ и Q_f доказывается аналогично, только нужно заменить сферы S_R на множества $\{x : f(x) = c\}$, $c = \text{const}$, а функции g_R — на постоянные c , устремив c к ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Положим $Q = Q_{f_1} = Q_{f_2}$. Найдем лоренцево преобразование, при котором вектор Q перейдет в вектор $-|Q|^2 e_{n+1}$. При этом из доказанного выше следует, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla f_2(x) = 0$. Покажем, что $\mu_{f_1}(K) = \langle Q, e_{n+1} \rangle$. Действительно, как несложно убедиться, вектор нормали ν к S_R^F на F имеет вид

$$\nu = \sqrt{\frac{1 - |\nabla f_1|^2}{1 - |\nabla f_1|^2 + \langle \nabla f_1, \nabla r \rangle^2}} \left(\frac{\langle \nabla f_1, \nabla r \rangle}{1 - |\nabla f_1|^2}, \nabla r + \frac{\nabla f_1 \langle \nabla f_1, \nabla r \rangle}{1 - |\nabla f_1|^2} \right),$$

а элемент площади на S_R^F равен

$$\sqrt{1 - |\nabla f_1|^2 + \langle \nabla f_1, \nabla r \rangle^2} dS_R,$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и dS_R — элемент площади на сфере S_R . Тогда

$$\langle Q, e_{n+1} \rangle = \int_{S_R^F} \langle \nu, e_{n+1} \rangle dS_R^F = \int_{S_R} \frac{\langle \nabla f_1, \nabla r \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f_1|^2}} dS_R = \mu_{f_1}(K).$$

То же самое верно и для f_2 . Итак, $\mu_{f_1}(K) = \langle Q, e_{n+1} \rangle = \mu_{f_2}(K)$. Применяя теорему 5.1, получаем требуемое.

§ 6. Доказательство теоремы 1.2

Так как при лоренцевых преобразованиях условие (1.3) сохраняется, то, подбирая такое лоренцево преобразование, при котором вектор Q перейдет в вектор вида $(0, \dots, 0, q)$, поставленная задача существования сводится к следующей задаче: доказать, что найдется решение $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus K) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ уравнения (1.1) такое, что

$$f|_K = \varphi, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla f(x)| = 0, \quad \mu_f(K) = q.$$

Пусть $n > 2$. Покажем, что для любого $c \in \mathbb{R}$ существует $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в $\mathbb{R}^n \setminus K$, такая, что

$$f|_K = \varphi, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = c.$$

Действительно, пусть f_R — решение в $B_R \setminus K$ уравнения (1.1), для которого выполнено $f_R|_K = \varphi$ и $f_R|_{S_R} = c$. Такое решение найдется при достаточно больших R (свойство III). Далее, положим

$$w^\pm(|x|) = f^\pm + \Phi_n(\lambda^\pm, |x|),$$

где $\lambda^\pm$ выбраны так, что $w^\pm(R) = c$ и $f^+ = \max_K \varphi(x)$, $f^- = \min_K \varphi(x)$. Тогда в силу принципа сравнения получаем неравенства

$$w^- \leq f_R \leq w^+ \quad \text{в } B_R \setminus K. \quad (6.1)$$

Очевидно, что при $R \rightarrow \infty$ постоянные $\lambda^\pm$ стремятся к некоторым конечным значениям $\lambda_*^\pm$. При этом

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f^\pm + \Phi_n(\lambda_*^\pm, |x|)) = c. \quad (6.2)$$

С другой стороны, можно найти такую последовательность $R_k \rightarrow \infty$, что f_{R_k} равномерно сходятся к некоторой функции f на каждом компактном множестве. В силу ограниченности последовательности $\{f_{R_k}\}$ и свойства II функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Ясно, что $f|_K = \varphi$. При этом из неравенств (6.1) и равенства (6.2) следует, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = c$.

Пусть $n = 2$.

Зафиксируем произвольное λ . Рассмотрим, как и выше, такое решение f_R уравнения (1.1), определенное в $B_R \setminus K$, что $f_R|_{S_R} = \Phi_2(\lambda, R)$ и $f_R|_K = \varphi$. Положим

$$w^\pm(|x|) = f^\pm + \Phi_2(\lambda^\pm, |x|),$$

где $\lambda^\pm$ выбраны так, что $w^\pm(R) = \Phi_2(\lambda, R)$. Применяя те же рассуждения, что и выше, мы приходим к тому, что найдется такое решение f уравнения (1.1), определенное в $\mathbb{R}^n \setminus K$, что $f|_K = \varphi$ и существует

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - \Phi_2(\lambda, |x|)).$$

Таким образом, мы показали, что для любого числа c найдется решение f_c уравнения максимальных поверхностей, для которого $f_c|_K = \varphi$ и

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} f_c(x) &= c, \quad n > 2, \\ \exists \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f_c(x) - \Phi_2(c, |x|)), \quad n &= 2. \end{aligned}$$

Определим функцию $\mu(c)$ равенством $\mu(c) = \mu_{f_c}(K)$. Из теорем 1.3 и 5.1 следует, что при $c_1 \neq c_2$ выполнено $\mu(c_1) \neq \mu(c_2)$. Лемма 2.5 дает непрерывность этой, а значит, и обратной к ней функции. Тогда область значений функции $\mu(c)$ есть некоторый непустой интервал I . При $n = 2$, как было отмечено в §5, $\mu(c) = 2\pi c$, т.е. $I = \mathbb{R}$. Покажем, что и при $n > 2$ это справедливо. Рассмотрим решение f_c в $\mathbb{R}^n \setminus K$ уравнения (1.1) такое, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_c(x) = c, \quad f_c|_K = \varphi.$$

Будем предполагать, что $c > f^+$. Обозначим через x_0 точку множества K , в которой φ достигает значения f^+ . Рассмотрим такое t , что $f^+ < t < c$. Положим

$$E_t = \{x : f_c(x) = t\}, \quad D_t = \{x : f_c(x) < t\}.$$

Обозначим через $g_t(x)$ решение в $D_t \setminus \{x_0\}$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$g_t|_{E_t} = t, \quad g_t(x_0) = f^+.$$

Ясно, что $g_t(x) \geq f^+$ при $x \in K$. Тогда, применяя принцип сравнения, получаем

$$f_c(x) < g_t(x) < t, \quad x \in D_t \setminus K. \quad (6.3)$$

Из полученного неравенства, в частности, следует, что

$$|\nabla f_c(x)| \geq |\nabla g_t(x)| \quad \forall x \in E_t.$$

Тогда если ν — вектор внешней единичной нормали к E_t , то

$$\begin{aligned} \mu_{f_c}(K) &= \int_{E_t} \frac{\langle \nabla f_c, \nu \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f_c|^2}} = \int_{E_t} \frac{|\nabla f_c|}{\sqrt{1 - |\nabla f_c|^2}} \\ &\geq \int_{E_t} \frac{|\nabla g_t|}{\sqrt{1 - |\nabla g_t|^2}} \geq \int_{E_t} \frac{\langle \nabla g_t, \nu \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla g_t|^2}} = \mu_{g_t}(K). \end{aligned} \quad (6.4)$$

С другой стороны, можно выделить последовательность $t_k \rightarrow c$ такую, что последовательность g_{t_k} равномерно на каждом компакте сходится к некоторой функции g . Так как g (при $n > 2$) ограничена, то из свойства II следует, что g удовлетворяет уравнению (1.1) при $x \neq x_0$. При этом из неравенства (6.3) находим, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = c$. Таким образом, из теоремы 1.1 получаем

$$g(x) = \Phi_n(\lambda, |x - x_0|) + f^+,$$

где λ выбрано из условия $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_n(\lambda, |x - x_0|) = c$. Нетрудно подсчитать, что $\mu_g(K) = \sigma_{n-1}\lambda$, где $\sigma_{n-1} - (n-1)$ -мерная площадь единичной сферы S_1 . Поэтому из леммы 2.5 приходим к равенству $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{g_{t_k}} = \sigma_{n-1}\lambda$. Тогда из неравенства (6.4) получаем оценку

$$\mu_{f_c}(K) \geq \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}\Psi_n(c - f^+),$$

где $\lambda = \Psi_n(c)$ — функция, обратная к функции $c = \Phi(\lambda, +\infty)$. Аналогично получаем неравенство

$$\mu_{f_c}(K) \leq \sigma_{n-1}\Psi_n(c - f^-)$$

для $c < f^-$. Из полученных неравенств имеем соотношения

$$\mu(c) = \lim_{c \rightarrow \pm\infty} \mu_{f_c}(K) = \pm\infty.$$

Следовательно, $I = \mathbb{R}$. Таким образом, теорема доказана.

Список литературы

1. Cheng S. Y., Yau S. T. Maximal spacelike surfaces in Minkowski space // Ann. of Math. (2). 1976. V. 104. P. 407–419.
2. Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations // Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 15. P. 223–230.
3. Ecker K. Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity // Manuscripta Math. 1986. V. 56. № 4. P. 375–397.
4. Клячин В. А., Миклюков В. М. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 206–217.
5. Клячин В. А. Об асимптотических свойствах максимальных трубок и лент в окрестности изолированной особенности в пространстве Минковского // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 1. С. 76–89.
6. Клячин В. А., Миклюков В. М. Геометрическое строение трубок и лент нулевой средней кривизны в пространстве Минковского // Научные школы ВолГУ. Геометрический анализ. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 1999. С. 204–244.
7. Миклюков В. М. Максимальные трубки и ленты в пространстве Минковского // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 12. С. 45–76.
8. Bers L. Nonlinear elliptic equation without nonlinear entire solutions // J. Ration. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 767–787.
9. Jenkins H. On quasilinear elliptic equations which arise from variational problems // J. Ration. Mech. Anal. 1956. V. 10. P. 705–728.
10. Миклюков В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 2. С. 263–289.
11. Клячин В. А., Миклюков В. М. Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 9. С. 103–124.

12. *Клячин А. А.* Разрешимость задачи Дирихле для уравнения максимальных поверхностей с особенностями в неограниченных областях // Докл. РАН. 1995. Т. 342. С. 161–164.
13. *Barthnik R., Simon L.* Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature // Comm. Math. Phys. 1982. V. 87. № 1. P. 131–152.
14. *Клячин А. А., Миклюков В. М.* Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении при ограничениях на градиент // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 49–64.
15. *Гилберг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
16. *Moser J.* On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 577–591.
17. *Миклюков В. М.* Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 111–158.
18. *Кондрашов А. Н.* Об одном признаке параболичности римановой метрики на плоскости // Вестник ВолГУ. Сер. 1. Матем., физика. 1999. № 4. С. 13–19.

Волгоградский государственный университет
E-mail: klchna@zmail.ru

Поступила в редакцию
25.12.2002