Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Д. Реповш, О продолжении действий групп,
Матем. сб., 2010, том 201, номер 2, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:33:30

УДК 515.122.4+515.124.62

С. М. Агеев, Д. Реповш

О продолжении действий групп

Получены решения проблем плотного и замкнутого продолжения действий компактных групп преобразований. Разработанный в работе метод применен к задачам продолжения эквивариантных отображений и построения эквивариантных компактификаций.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: продолжение действия, эквивариантный абсолютный экстензор, эквивариантная компактификация.

§ 1. Введение

Пусть компактная группа G действует на пространстве $\mathbb{X}$. Диаграмму $\mathcal{D}$ вида $\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xhookrightarrow{i} Y$ назовем *допустимой*, если $p: \mathbb{X} \rightarrow X$ – орбитная проекция, а i – топологическое вложение пространства орбит X в наследственно паракомпактное пространство Y . Будем говорить, что

1) задача о продолжении действия разрешима для допустимой диаграммы $\mathcal{D}$, если существует эквивариантное вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ в G -пространство $\mathbb{Y}$ (называемое *решением* задачи о продолжении действия для данной диаграммы), накрывающее i , т.е. вложение $\tilde{j}: X \hookrightarrow p(\mathbb{Y})$ пространств орбит, индуцируемое j , в точности совпадает с i (в частности, $p(\mathbb{Y}) = Y$);

2) задача о продолжении действия (сокращенно ЗПД) разрешима, если существует решение ЗПД для любой допустимой диаграммы $\mathcal{D}$, т.е. диаграмма $\mathcal{D}$ дополняется до коммутативной квадратной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xhookrightarrow{i} & Y \end{array}$$

3) ЗПД разрешима в классе $\mathcal{C}$, если для любой допустимой диаграммы $\mathcal{D}$, в которой $\mathbb{X}$, X и Y принадлежат $\mathcal{C}$, существует решение ЗПД, у которой $\mathbb{Y} \in \mathcal{C}$.

Отметим, что задача о продолжении действия является частью более общей задачи продолжения полных прообразов (см. [1], [2]). Задача о продолжении действия групп естественным образом делится на две – замкнутую ЗПД и плотную ЗПД в зависимости от типа вложения i . С другой стороны, ясно, что разрешимость замкнутой и плотной ЗПД влечет разрешимость ЗПД в общем случае.

Впервые замкнутая задача о продолжении действия групп была поставлена Е. Щепиным в связи с установленным им следующим фактом.

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь, работа второго автора выполнена при поддержке Slovenian Research Agency (гранты №№ P1-0292-0101, J1-9643-0101, J1-2057-0101).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – компактная группа. Если замкнутая задача о продолжении действия групп разрешима в классе метрических G -пространств, то

- (1) пространство орбит любого метрического G -A[N]E-пространства $\mathbb{E}$ является A[N]E-пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} E$ – произвольное частичное отображение с $Z \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – класс всех метрических G -пространств. Обозначим через $\mathbb{A}$ послойное произведение $A_\varphi \times_p \mathbb{E}$. Поскольку $\mathbb{A} \times Z \in \mathcal{M}$, то по условию вложение $A \hookrightarrow Z$ накрывается некоторым замкнутым G -вложением $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{Z} \in \mathcal{M}$. Построенное частичное G -отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi'} \mathbb{E} \in G\text{-A[N]E}$, где φ' параллельно φ , можно G -продолжить на $\mathbb{Z}$ (на некоторую G -окрестность). Переходя к пространствам орбит, получаем искомое продолжение φ .

Как было показано в [3], сохранение эквивариантных экстензорных свойств орбитным функтором влечет разрешимость замкнутой ЗПД, в результате чего эта задача получает двойственное выражение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – компактная группа. Тогда выполнимость условия (1) влечет разрешимость замкнутой ЗПД в классе метрических G -пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 18 существует изовариантное G -отображение $f: X \rightarrow T_G \in G\text{-AE}$. Так как в силу (1) выполнено $T_G = T_G/G \in \text{AE}$, то частичное отображение $Y \hookrightarrow X \xrightarrow{\tilde{\alpha}} T_G$ имеет продолжение $\hat{\alpha}$. Несложно проверить, что послойное произведение $Y_{\hat{\alpha}} \times_p T_G$ есть искомое метрическое G -пространство $\mathbb{Y}$.

Так как справедливость свойства (1) была установлена в [3], [4] для произвольных компактных групп (в [5] – для компактных метризуемых групп¹), то к настоящему времени замкнутая ЗПД решена в классе метрических пространств с действием произвольной компактной группы.

Плотная задача о продолжении действия групп естественно возникает при изучении эквивариантных компактификаций и была впервые поставлена Л. Замбахидзе и Ю. М. Смирновым. Оказывается, что она тесно связана с существованием на G -пространстве разнообразных инвариантных метрик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – компактная группа. Плотная задача о продолжении действия групп разрешима в классе сепарабельных метрических G -пространств в том и только том случае, когда

- (2) для любого сепарабельного метрического G -пространства X и любой метрики d на пространстве орбит X существует такая инвариантная метрика ρ на X , что $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ (здесь $\tilde{\rho}([x], [x']) = \min\{\rho(g \cdot x, g \cdot x') \mid g \in G\}$ – индуцированная метрика на X , а $\mathcal{F}_d, \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}, \dots$ – множества всех фундаментальных последовательностей на пространстве X относительно соответствующих метрик).

¹Отметим более ранний подход Яворовского [6] для конечных группы $G < S_n$, который применим также для компактных групп Ли [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим метрический компакт K , содержащий пополнение $c_d X$ пространства X по метрике d . Ясно, что $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{F}_\delta$, где δ – метрика на компакте K .

Поскольку плотная задача о продолжении действия групп разрешима, то вложение $X \hookrightarrow K$ накрывается некоторым G -вложением $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{K}$ в G -компакт $\mathbb{K}$. Рассмотрим существующую на $\mathbb{K}$ инвариантную метрику σ . Ясно, что $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_\delta \supset \mathcal{F}_d$, а инвариантная метрика $\rho(x, x') = \sigma(x, x') + d(p(x), p(x'))$ на пространстве $\mathbb{X}$ совместима с его топологией. Проверим, что $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$, где $\tilde{\rho} = \tilde{\sigma} + d$. Так как $d \leq \tilde{\rho}$, то $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \subset \mathcal{F}_d$. Обратное вложение $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ легко следует из уже установленного вложения $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{F}_\sigma$.

Докажем обратное утверждение. Пусть d' – метрика на Y , а d – ее ограничение на плотное подпространство X . По условию существует такая инвариантная метрика ρ на $\mathbb{X}$, что $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$. Рассмотрим G -пополнение $c_\rho \mathbb{X}$ по метрике ρ , являющееся сепарабельным метрическим G -пространством. Несложно проверяется, что $c_{\tilde{\rho}} X$ естественно гомеоморфно $(c_\rho \mathbb{X})/G$. Так как $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$, то Y естественно лежит в $c_{\tilde{\rho}} X = (c_\rho \mathbb{X})/G$. В качестве искомого решения $s: \mathbb{X} \hookrightarrow Y$ плотной ЗПД следует взять прообраз Y при орбитной проекции $p: c_\rho \mathbb{X} \rightarrow c_\rho \mathbb{X}/G$.

К настоящему времени плотная ЗПД решена в классе метрических пространств с действием произвольной нульмерной компактной группы [8], [9]. Главной целью настоящей статьи является прямое доказательство следующих результатов, дающих положительный ответ в плотной и замкнутой ЗПД при максимально широких предположениях.

ТЕОРЕМА 1. *Задача о продолжении действия компактных групп разрешима для всех допустимых диаграмм.*

Отметим, что для неметризуемой группы G и метризуемых пространств $\mathbb{X}$ и Y эквивариантное вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow Y$, служащее решением ЗПД, может быть неметризуемым. Следующий результат исправляет этот дефект.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – компактная группа. Пусть диаграмма $\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xhookrightarrow{i} Y$ такова, что все орбиты $\mathbb{X}$ являются метризуемыми, а также либо*

(3) *Y есть кружковое пространство, а вложение i замкнуто;*

либо

(4) $Y \in \mathcal{M}$.

Тогда существуют метрическое G -пространство $\mathbb{Z}$ и эквивариантное вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow Y$ в G -пространство $Y \subset Y \times \mathbb{Z}$, которое является решением задачи о продолжении действия для данной диаграммы.

Из теоремы 2, (3), в частности, следует прямое доказательство разрешимости замкнутой ЗПД как в классе метризуемых G -пространств, так и в классе кружковых G -пространств (поскольку класс кружковых пространств замкнут относительно счетного произведения). Из теоремы 2, (4) легко извлечь следующие факты об эквивариантных компактификациях для компактных действующих групп:

- (5) если $\mathbb{X}$ – метрическое сепарабельное G -пространство с $\dim X = k$, то существует такая эквивариантная компактификация $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$, что $\mathbb{Y}$ – метрический компакт с $\dim Y = k$;
- (6) если $\mathbb{X}$ – метрическое G -пространство с $\dim X = k$, то существует эквивариантное пополнение $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ с $\dim Y = k$.

Отметим, что задача о продолжении действия групп в некоторых простых ситуациях перестает быть разрешимой. Пусть $\mathbb{X} = (\text{Con } \mathbb{Z}_2)^{\omega_1}$ взято с естественным действием простейшей нетривиальной группы $G = \mathbb{Z}_2$, а $i: X \hookrightarrow I^{\omega_1}$ – произвольное вложение в тихоновский куб несчетного веса ω_1 . Тогда для диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{i} I^{\omega_1}$ ЗПД не разрешима.

Теорема 1 и метод, используемый при ее доказательстве, допускают разнообразные модификации. Введем на множестве $\mathcal{S}$ всех решений замкнутой ЗПД для допустимой диаграммы $\mathcal{D} = (\mathbb{X} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{i} Y)$ следующий частичный порядок: будем считать, что s_1 мажорирует s_2 (кратко $s_1 \geq s_2$), где $\{s_i: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}_i\} \subset \mathcal{S}$, если существует G -отображение $h: \mathbb{Y}_1 \rightarrow \mathbb{Y}_2$, замыкающее соответствующую диаграмму до коммутативной $h \circ s_1 = s_2$, такое, что $h|_{\mathbb{X}} = \text{Id}_{\mathbb{X}}$ и $\tilde{h} = \text{Id}_Y$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – компактная группа. Тогда для любого конечного множества решений $\{s_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ замкнутой ЗПД существует такое решение $s \in \mathcal{S}$, что $s \geq s_i$, $i \leq n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – компактная группа. Тогда для любой допустимой диаграммы $\mathcal{D}$ существует такое решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ ЗПД, что $\text{type } \mathbb{Y} \geq \text{type } \mathbb{X}$. Если же G – группа Ли, то это решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ может быть выбрано так, что $\text{type } \mathbb{Y} = \text{type } \mathbb{X} \cup \{(G)\}$.

Доказательства теорем 3 и 4 опущены из-за ограничений на объем статьи. В свою очередь, теоремы 1, 3 и 4 влекут ряд результатов эквивариантной теории экстензоров (которые, как можно показать, эквивалентны соответствующим фактам о продолжении действия).

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – компактная группа. Если кружесвое G -пространство $\mathbb{X}$ есть эквивариантный абсолютный экстензор для класса кружесовых пространств, то его пространство орбит X есть абсолютный экстензор для класса кружесовых пространств.

В работе [7] было отмечено, что теорема Уайтхеда–Борсука–Ханнера для кружесовых пространств [10] также влечет теорему 5. Поэтому имеется определенная надежда, что пробел в теореме Уайтхеда–Борсука–Ханнера [10], о котором нам сообщил Р. Коти, может быть восполнен.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – компактная группа. Если метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ есть эквивариантный абсолютный ретракт, то для любого конечного числа G -продолжений $h_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ частичного G -отображения $\mathcal{M} \ni \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{X}$ существует такое G -продолжение $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ G -отображения f , что $(G_{h(z)}) \geq (G_{h_i(z)})$ для всех $z \in \mathbb{Z}$ и всех i .

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – компактная группа, $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}$ и $\mathcal{C} \subset \text{Orb } G$. Тогда

- (7) пространство $\mathbb{X}^{\mathcal{C}} \subset \mathbb{X}$ есть G -ANE,
- (8) пространство $\mathbb{X}^{\mathcal{C}}/G \subset X$ есть ANE.

Ранее теорему 7, (7) для компактной группы Ли и одноэлементного семейства $\mathcal{C}$ орбитных типов доказал Мураяма [11]; теорема 7, (8) для группы $G = S^1$ и $\mathbb{X} = \exp G$ доказана Торунчиком–Вестом [12]. Доказательства теорем 3–7 будут изложены в последующих публикациях.

В завершение приведем результат, показывающий роль множества экстензорных орбит в теории G -экстензоров. Будем говорить, что вложение $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{X}$ является эквивариантно гомотопически плотным, если существует такая G -гомотопия $F: \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, что $F_0 = \text{Id}$ и $F_t(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$ для любого $t > 0$.

ТЕОРЕМА 8 (об эквивариантной гомотопической плотности). *Пусть метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ есть G -ANE. Тогда подпространство $\mathbb{X}_{\mathcal{E}}$ всех экстензорных точек является эквивариантно гомотопически плотным в $\mathbb{X}$.*

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 9. *Пусть метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ есть G -ANE. Тогда любое G -подпространство $\mathbb{Y}$, $\mathbb{X}_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, есть G -ANE.*

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются наследственно паракомпактными (непрерывными), а действующие группы – компактными.

Мы будем использовать для $B \subset A$ стандартные обозначения: для замыкания – $\text{Cl}_A B$, для внутренности – $\text{Int}_A B$. Для ограничения отображения f на подмножество $A \subset X$ принято обозначение $f|_A$. Если ясно, о каком множестве A идет речь, то во всех этих обозначениях символ A опускается. Если не возникает двусмысленности, мы будем опускать определения некоторых понятий, возникающих естественным образом.

Действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ называется такой гомоморфизм $T: G \rightarrow \text{Aut } \mathbb{X}$ группы G в группу $\text{Aut } \mathbb{X}$ всех автогомеоморфизмов $\mathbb{X}$, что отображение $G \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, $(g, x) \mapsto T(g)(x) \doteq g \cdot x$, непрерывно (здесь и далее знак $\doteq$ используется для введения новых объектов, стоящих слева от него). Пространство $\mathbb{X}$ вместе с фиксированным действием G называется *G -пространством*.

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ следующее подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x* . *Орбитой точки $x \in \mathbb{X}$* называется $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset \mathbb{X}$. Множество всех орбит обозначается через $X \doteq \mathbb{X}/G$, а естественное отображение $\pi: \mathbb{X} \rightarrow X$, $\pi(x) = G(x)$, называется *орбитной проекцией*. *Пространством орбит $\mathbb{X}$* называется множество всех орбит X , наделенное факторной топологией относительно π (другие сведения о G -пространствах содержатся, например, в [13]).

Отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ двух G -пространств называется *эквивариантным* или *G -отображением*, если $f(g \cdot x) \doteq g \cdot f(x)$, $g \in G$, $x \in \mathbb{X}$. G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ индуцирует отображение $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ пространств орбит по формуле

$\tilde{f}(G(x)) = G(f(x))$. Эквиморфизмом называется эквивариантный гомеоморфизм. Эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если $G_x = G_{f(x)}$, $x \in \mathbb{X}$.

ТЕОРЕМА 10 (критерий эквиморфности; см. [14]). *Изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, индуцирующее гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$ пространств орбит, является эквиморфизмом.*

Заметим, что G -пространства и G -отображения образуют категорию, которую мы обозначим через $G\text{-TOP}$ или EQUIV , если ясно, о какой группе G идет речь. Если “* * *” есть известное понятие из неэквивариантной топологии, то “ G -* * *” или “ $\text{Equiv-}*$ * *” обозначает соответствующий эквивариантный аналог.

Подмножество $A \subset \mathbb{X}$ называется *инвариантным* или *G -подмножеством*, если $G \cdot A = A$. Для любой замкнутой подгруппы $H < G$ (см. сноску²) введем следующие множества: $\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\}$ (называемое *множеством H -неподвижных точек*) и $\mathbb{X}_H = \{x \in \mathbb{X} \mid G_x = H\}$. Ясно, что $\mathbb{X}^{(H)} \equiv \bigcup \{\mathbb{X}_K \mid \text{существует } K' < G \text{ такая, что } K' \supseteq H \text{ и } K' \text{ сопряжена с } K\}$ совпадает с $G \cdot \mathbb{X}^H$, а $\mathbb{X}_{(H)} \equiv \bigcup \{\mathbb{X}_K \mid K < G \text{ и } K \text{ сопряжена с } H\}$ – с $G \cdot \mathbb{X}_H$.

Множество всех классов сопряженности замкнутых подгрупп G обозначим через $\text{Orb}(G)$ и назовем его *множеством орбитных типов*. Введем на нем частичный порядок: $(K) \leq (H) \iff K \subset g^{-1} \cdot H \cdot g$ для некоторого $g \in G$. Обозначим семейство $\{(G_x) \mid x \in \mathbb{X}\} \subset \text{Orb}(G)$ орбитных типов $\mathbb{X}$ через $\text{type } \mathbb{X}$. Если $\mathcal{C} \subset \text{Orb}(G)$, то $\mathbb{X}^{\mathcal{C}} \equiv \{x \mid (G_x) \geq (H) \text{ для некоторого } (H) \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{X}$.

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G -отображений, частично заданных на G -пространствах, принадлежащих классу $\mathcal{K}$ – одному из растущей цепочки: класс метрических G -пространств входит в класс кружевных G -пространств³, который, в свою очередь, входит в класс наследственно паракомпактных G -пространств⁴. G -пространство $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным окрестностным экстензором для класса $\mathcal{K}$* , $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}(\mathcal{K})$, если каждое G -отображение $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$, определенное на замкнутом G -подмножестве $\mathbb{A}$ G -пространства $\mathbb{Z} \in \mathcal{K}$ и называемом *частичным G -отображением*, может быть G -продолжено на некоторую G -окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$, $\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, $\hat{\varphi}|_{\mathbb{A}} = \varphi$. Если всегда возможно G -продолжить φ на $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным экстензором для класса $\mathcal{K}$* , $\mathbb{X} \in G\text{-AE}(\mathcal{K})$. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие абсолютных (окрестностных) экстензоров для класса $\mathcal{K}$ – $\text{A}[N]\text{E}(\mathcal{K})$. Поскольку главным образом интерес представляют эквивариантные абсолютные (окрестностные) экстензоры для класса метрических G -пространств, то

²В дальнейшем так будет обозначаться замкнутая подгруппа; обозначение для нормальной замкнутой подгруппы – $H \triangleleft G$.

³Пространство X является кружевным, если существует такое семейство $\{f_U: X \rightarrow [0, 1] \mid U \subset X \text{ есть открытое подмножество}\}$ непрерывных функций, что $f_U^{-1}(0, 1] = U$ и $f_U \leq f_V$ в том и только том случае, когда $U \subset V$. Любой CW-комплекс является кружевным пространством.

⁴Пространство называется *наследственным паракомпактом*, если любое его подпространство является паракомпактом (что эквивалентно паракомпактности любого открытого подпространства).

для них будем использовать краткую запись – $G\text{-A[N]E}$. Примерами $G\text{-AE}$ -пространств являются банаховы G -пространства [15], линейные нормированные G -пространства для компактных групп Ли G [11]. Важным является вопрос о принадлежности однородного пространства G/H классу $G\text{-ANE}$. Справедливо следующее утверждение: $G/H \in G\text{-ANE}$ в том и только том случае, когда G/H является конечномерным локально связным пространством. В частности, если G – компактная группа Ли, то $G/H \in G\text{-ANE}$, что, по существу, эквивалентно теореме о срезе.

Следующая конструкция эквивариантного абсолютного экстензора для произвольных компактных групп G восходит к [16]. Напомним, что на пространстве $\mathbb{X} = C(G, Y)$ всех непрерывных отображений, наделенном компактно-открытой топологией, действует группа G по формуле $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1} \cdot h)$, где $f \in C(G, Y)$ и $g, h \in G$. Если Y метризуемо, то $\mathbb{X}$ тоже метризуемо.

ТЕОРЕМА 11. *Если метрическое пространство Y есть AE -пространство для класса $\mathcal{P}$ паракомпактных пространств, то $C(G, Y)$ есть $G\text{-AE}$ -пространство для класса $\mathcal{P}$.*

В силу результатов работы [17] любое банахово пространство B является AE -пространством для класса паракомпактных пространств. В силу теоремы 11 $C(G, B)$ есть AE -пространство для класса $\mathcal{P}$.

Метрическое G -пространство $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным окрестностным ретрактом*, $\mathbb{X} \in G\text{-ANR}$, если для любого замкнутого G -вложения $\mathbb{X}$ в метрическое G -пространство $\mathbb{Z}$ существует окрестностная G -ретракция $r: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, $r \circ r = r$. Если всегда возможно выбрать G -ретракцию r , определенную на $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *эквивариантным абсолютным ретрактом*, $\mathbb{X} \in G\text{-AR}$.

ТЕОРЕМА 12 (об аппроксимативном G -продолжении отображения). *Пусть компактное G -подпространство $\mathbb{X}$ евклидова G -пространства $\mathbb{R}^n$ есть $G\text{-ANE}$. Тогда для любого покрытия $\omega \in \text{cov } \mathbb{X}$ и для любого G -отображения $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ (не обязательно замкнутого) G -подмножества $\mathbb{A}$ наследственно паракомпактного G -пространства $\mathbb{Z}$ существует такое G -отображение $\psi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, заданное на открытом G -множестве $\mathbb{U}$, содержащем $\mathbb{A}$, что $\text{dist}(\varphi, \psi|_{\mathbb{A}}) \prec \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}$, то существует эквивариантная ретракция $r': \mathbb{V}' \rightarrow \mathbb{X}$, определенная на G -окрестности $\mathbb{V}'$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{V}' \subset \mathbb{R}^n$. Ясно, что существуют G -окрестность $\mathbb{V}$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{V}'$, и такое $\varepsilon > 0$, что $N(\mathbb{X}; \varepsilon) \subset \mathbb{V}$, а также $\{r(N(x; \varepsilon)) \mid x \in \mathbb{V}\} \prec \omega$, где $r = r'|_{\mathbb{V}}$.

ЛЕММА 1. *Для любого отображения $\psi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенного на подмножестве A наследственно паракомпактного пространства Z , существует такое отображение $\chi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное на открытом подмножестве $\mathcal{U}$, содержащем A , что $\text{dist}(\chi|_A, \psi) < \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из наследственной паракомпактности пространства Z легко следует существование локально конечного покрытия $\omega = \{W_\alpha\} \in \text{cov } \mathcal{U}$ некоторой окрестности $\mathcal{U}$ множества A такой, что $\text{diam } \psi(W_\alpha \cap A) < \varepsilon/3$. Фиксируем точки $r_\alpha \in \psi(W_\alpha \cap A)$ и разбиение единицы $\{\lambda_\alpha: W_\alpha \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \Delta}$,

подчиненное покрытие ω . Тогда искомое отображение χ задается формулой $\chi(z) = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha(z) \cdot r_\alpha \in \mathbb{R}^n$.

В силу леммы 1 существует такое отображение $\chi: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное на G -окрестности $\mathbb{W}$, $\mathbb{A} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$, что $\text{dist}(\chi|_{\mathbb{A}}, \varphi) < \varepsilon$ (см. сноску⁵). Отображение χ , вообще говоря, не является эквивариантным, однако непрерывное отображение $\theta: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$\theta(z) = \int_G g^{-1} \cdot \chi(g \cdot z) d\mu,$$

где μ – мера Хаара на G , уже является эквивариантным. Поскольку $\varphi(g \cdot z) = g \cdot \varphi(z)$, $z \in \mathbb{A}$, и $\text{dist}(\chi|_{\mathbb{A}}, \varphi) < \varepsilon$, то $\text{dist}(\varphi, \theta|_{\mathbb{A}}) < \varepsilon$. Следовательно, $\theta(\mathbb{A}) \subset N(\mathbb{X}; \varepsilon) \subset \mathbb{V}$.

Ясно, что $\mathbb{U} \Leftarrow \theta^{-1}(\mathbb{V})$ содержит $\mathbb{A}$, а $r \circ \theta$ есть искомое G -отображение $\psi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$.

Доказательство следующей метатеоремы Пале [18] основано на стабилизации убывающей последовательности компактных групп Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{P}(H)$ – свойство, которое зависит от компактной группы Ли H . Предположим, что $\mathcal{P}(H)$ верно для тривиальной группы $H = \{e\}$ и $\mathcal{P}(H)$ верно, если $\mathcal{P}(K)$ верно для любой собственной подгруппы $K < H$. Тогда $\mathcal{P}(H)$ верно для всех компактных групп Ли H .

Послойным произведением пространств C и B относительно отображений $g: C \rightarrow A$ и $f: B \rightarrow A$ называется подмножество $\{(c, b) \mid g(c) = f(b)\} \subset C \times B$, которое обозначается через $C_g \times_f B$. Проектирования $D = C_g \times_f B$ на сомножители C и B определяют отображения $\check{f}: D \rightarrow C$ и $\check{g}: D \rightarrow B$. Назовем $\check{f}$ отображением, параллельным f , а $\check{g}$ – отображением, параллельным g . Кратко это запишем так: $\check{f} \parallel f$ и $\check{g} \parallel g$. Отметим, что отображение $f \circ \check{g} = g \circ \check{f}: D \rightarrow A$ является произведением отображений g и f в категории TOP_A пространств над данным пространством A . Наиболее важный пример послойного произведения в теории топологических групп преобразований доставляют изовариантные отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ – изовариантное отображение, и пусть $\tilde{h}: Y \rightarrow X$ – отображение пространств орбит, порожденное h . Тогда $\mathbb{Y}$ есть послойное произведение $Y_{\tilde{h}} \times_{\pi_X} \mathbb{X}$, причем h и $\tilde{h}$, а также орбитные проекции π_Y и π_X являются параллельными.

Обозначим через $\mathcal{D}$ квадратную коммутативную диаграмму в категории EQUIV , в которой $\mathbb{A}$ замкнуто в $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array}$$

Будет говорить, что

⁵ В силу замкнутости орбитной проекции $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow Z$ между $\mathbb{A}$ и произвольной окрестностью $\mathcal{U}$ можно вставить инвариантную окрестность $\mathbb{W}$, $\mathbb{A} \subset \mathbb{W} \subset \mathcal{U}$.

- 1) G -отображение φ есть частичное поднятие G -отображения ψ относительно f ;
- 2) задача продолжения частичного поднятия для $\mathscr{D}$ разрешима глобально (локально), если существует G -отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ – окрестность $\mathbb{A}$), продолжающее φ , и такое, что $f \circ \hat{\varphi} = \psi$ ($f \circ \hat{\varphi} = \psi|_{\mathbb{U}}$);
- 3) $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ [$\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$] есть глобальное (локальное) поднятие G -отображения ψ .

Если $\mathbb{Z} = \mathbb{Y}$, то задача глобального продолжения частичного поднятия для $\mathscr{D}$ трансформируется в задачу глобального продолжения частичного сечения отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Морфизм $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ категории EQUIV называется *эквивариантно мягким* (локально эквивариантно мягким), если для любой квадратной коммутативной диаграммы $\mathscr{D}$ категории EQUIV задача продолжения частичного поднятия разрешима глобально (локально).

В завершение этого параграфа укажем достаточный признак порождаемости топологии своими подпространствами. Пусть топологическое пространство (D, τ_d) представлено в виде объединения $A \cup B$ своих подпространств. Рассмотрим на D слабую топологию τ_w , порожденную A и B : $U \in \tau_w$ в том и только том случае, когда $A \cap U \subset A$ и $B \cap U \subset B$ открыты. Будем говорить, что подпространства A и B порождают топологию D , если слабая топология τ_w совпадает с τ_D . Легко проверить, что подпространства A и B порождают топологию пространства D в тех случаях, когда A и B либо одновременно замкнуты, либо одновременно открыты.

Будем говорить, что A' и $B' \subset D$ отделены друг от друга, если $B \cap \text{Cl}_D A' = A' \cap \text{Cl}_D B' = \emptyset$. В силу [19; теорема 2.1.7] отделенность A' и $B' \subset D$ друг от друга равносильна тому, что $A' \subset \text{Int}_D(D \setminus B')$ и $B' \subset \text{Int}_D(D \setminus A')$. По всей видимости, следующее достаточное условие порождаемости топологии D своими подпространствами известно в кругу топологов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $A \setminus B$ и $B \setminus A$ отделены друг от друга, то подпространства A и B порождают топологию D .

Обратное верно для метрического пространства D . Пусть $a \in A \setminus B$ и последовательность $\{x_n\} \subset B \setminus A$ сходится к a . Тогда $D \setminus \{x_n\}$ открыто в каждом подпространстве, но не является открытым в D .

Предложение 6 будет использоваться нами в следующей ситуации.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $D = Y \cup Q \cup U$, причем Q и U являются открытыми подпространствами D . Тогда $Y \cup Q$ и $U \cup U^*$ порождают топологию D , где $U^* = \text{Cl}_D(U) \cap Y$ есть множество точек прикосновения U , лежащих в Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U \subset D$ открыто, то $(U \cup U^*) \setminus (Y \cup Q) \subset U$. Поэтому достаточно показать, что $E = (Y \cup Q) \setminus (U \cup U^*)$ содержится в $\text{Int}_D(Y \cup Q)$. Как несложно проверить, $Y \setminus (U \cup U^*) = Y \setminus \text{Cl}_D U$. Поэтому $E = (Y \setminus \text{Cl}_D U) \cup (Q \setminus (U \cup U^*)) \subset (D \setminus \text{Cl}_D U) \cup Q$. Таким образом, E содержится в открытом множестве $(D \setminus \text{Cl}_D U) \cup Q$, которое, очевидно, лежит в $Y \cup Q$.

§ 3. P -орбитные проекции

Пусть $P \triangleleft G$, $G/P = H$, а $\pi: G \rightarrow H$, $\pi(g) = g \cdot P$ – естественный эпиморфизм. Рассмотрим на G -пространстве $\mathbb{X}$ отношение эквивалентности $x \sim x' \iff x' \in P \cdot x$. Тогда факторпространство $\mathbb{X}/P$ по этому отношению совпадает с $\{P \cdot x \mid x \in \mathbb{X}\}$. Ясно, что $\mathbb{Y} = \mathbb{X}/P$ есть H -пространство: $(g \cdot P) \cdot (P \cdot x) = P \cdot (g \cdot x)$. Если $y = P \cdot x$, то стабилизатор H_y совпадает с $G_x \cdot P$. Назовем P -орбитной проекцией факторотображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/P$. Если $P = G$, то f совпадает с орбитной проекцией $p: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/G$. Поскольку композиция P -орбитной проекции f с орбитной проекцией H -пространства $\mathbb{Y}$ есть совершенное отображение, то сама она является тоже совершенной сюръекцией и удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $f(gx) = \pi(g) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{X}$, $g \in G$;
- (2) $\pi(G_x) = H_{f(x)}$, $x \in \mathbb{X}$;
- (3) равенство $f(x) = f(x')$ влечет принадлежность x и x' одной G -орбите.

Покажем, что эти свойства полностью характеризуют P -орбитную проекцию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\pi: G \rightarrow H$ – эпиморфизм компактных групп, $P = \text{Ker } \pi$. Совершенная сюръекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ из G -пространства $\mathbb{X}$ на H -пространство $\mathbb{Y}$ является P -орбитной проекцией в том и только том случае, когда выполнены (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим P -орбитную проекцию $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/P = \mathbb{Z}$. Определим отображение $\theta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ формулой $\theta(P \cdot x) = f(x)$. Из (1) следует корректность определения θ и его эквивариантность. Из совершенности сюръекции f следует, что θ – совершенная сюръекция, и поэтому отображение $\tilde{\theta}$ пространств орбит тоже совершенная сюръекция.

Пусть $z = P \cdot x$ и $z' = P \cdot x'$. Если $\theta(z) = \theta(z')$, то $f(x) = f(x')$. Из (3) следует, что x и x' лежат на одной G -орбите. Следовательно, z и z' лежат на одной G/P -орбите. Таким образом, $\tilde{\theta}$ есть гомеоморфизм.

Отображение θ сохраняет орбитные типы точек, так как, с одной стороны, $H_{\theta(z)} = H_{f(x)}$, а с другой – $H_z = G_x \cdot P = \pi(G_x)$. В силу (2) имеем $H_{\theta(z)} = H_z$. Таким образом, θ является изовариантным отображением, индуцирующим на пространствах орбит гомеоморфизм. В силу критерия эквиморфности (см. теорему 10) отображение θ есть эквиморфизм.

В компактной группе G рассмотрим ряд Ли $\{P_\alpha \triangleleft G\}$ нормальных подгрупп, индексированных ординалами $\alpha < \omega$ (см. [20]). Это означает, что

- (5) $P_1 = G$, $P_\beta < P_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$, $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ есть компактная группа Ли для всех $\alpha < \omega$, $P_\alpha = \bigcap \{P'_{\alpha'} \mid \alpha' < \alpha\}$ для любого предельного ординала α , а также $\bigcap \{P_\alpha \mid \alpha < \omega\} = \{e\}$.

В этом случае G есть предел $\varprojlim \{G/P_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ обратной системы факторгрупп $\{G/P_\alpha\}$ и естественных эпиморфизмов $\varphi_\alpha^\beta: G/P_\beta \rightarrow G/P_\alpha$, $\alpha < \beta$. Известный результат [21; гл. 2, § 6, теорема 11] может быть обобщен следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть $f_\alpha^\beta: \mathbb{X}_\beta \rightarrow \mathbb{X}_\alpha$, $\alpha < \beta$, – естественная проекция из $\mathbb{X}_\beta = \mathbb{X}/P_\beta$ в $\mathbb{X}_\alpha = \mathbb{X}/P_\alpha$. Тогда f_α^β является P_α/P_β -орбитной проекцией, а отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \varprojlim \{\mathbb{X}_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, заданное формулой $f(x) = \{P_\alpha \cdot x\}$, является эквиморфизмом.

Для доказательства этой леммы надо применить непосредственно критерий эквиморфности (теорему 10).

Обратное утверждение также справедливо.

ЛЕММА 3. Пусть $\{P_\alpha \triangleleft G\}$ – ряд Ли, $P_\alpha^\beta, \alpha < \beta$ – ядро гомоморфизма φ_α^β , а $g_\alpha^\beta: \mathbb{Z}_\beta \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha$ – P_α^β -орбитная проекция, причем $g_\alpha^\beta \circ g_\beta^\gamma = g_\alpha^\gamma$ для всех $\alpha < \beta < \gamma$. Тогда $\mathbb{Z} = \varprojlim \{\mathbb{Z}_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ есть G -пространство и $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}/P_\alpha$.

§ 4. Экстензорные подгруппы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Замкнутая подгруппа $H < G$ компактной группы G называется $\mathcal{P}$ -подгруппой, если однородное пространство G/H конечномерно и локально связно.

Л. С. Понтрягин в [20] доказал, что $H < G$ является $\mathcal{P}$ -подгруппой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих свойств:

- (1) существует нормальная подгруппа $P \triangleleft G$ такая, что $P < H$ и G/P – компактная группа Ли;
- (2) G/H – топологическое многообразие.

Следовательно, G/H метризуемо для любой $\mathcal{P}$ -подгруппы $H < G$. Как известно [20], в любой компактной группе существуют как угодно малые нормальные $\mathcal{P}$ -подгруппы. Поэтому справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть G – компактная группа, $\mathbb{X}$ – G -пространство. Тогда

- (3) для любой окрестности $\mathcal{O}(H) \subset G$ подгруппы $H < G$ существует такая $\mathcal{P}$ -подгруппа $H' < G$, что $H \subset H' \subset \mathcal{O}(H)$;
- (4) для любой окрестности $\mathcal{O}(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ существует такая нормальная $\mathcal{P}$ -подгруппа $P \triangleleft G$, что P -орбитная проекция $p: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/P \cong \mathbb{Y}$ имеет малый прообраз точки $y \in \mathbb{Y}$, $p^{-1}(y) \subset \mathcal{O}(x)$. Более того, существует такая окрестность $\mathcal{W} \subset \mathbb{X}/P$ точки y , что $p^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{O}(x)$.

Из (3) несложно вывести, что

- (5) G/H метризуемо тогда и только тогда, когда $H < G$ есть пересечение счетного числа $\mathcal{P}$ -подгрупп.

Если $H < G$ является $\mathcal{P}$ -подгруппой, то из (1) и теоремы о срезе [13] легко следует, что G/H есть G -ANR. Доказательство обратного утверждения основано на существовании метрического G -пространства, у которого одна нигде не плотная орбита эквиморфна G/H , а стабилизаторы всех оставшихся точек являются $\mathcal{P}$ -подгруппами. Таким образом,

- (6) $H < G$ является $\mathcal{P}$ -подгруппой тогда и только тогда, когда G/H есть метрическое G -ANE.

Эта эквивалентность, выражающая основное свойство $\mathcal{P}$ -подгрупп, оправдывает альтернативное их название – *экстензорные подгруппы*. Обратим внимание также на результат работы [22], из которого следует, что

- (7) $H < G$ является $\mathcal{P}$ -подгруппой тогда и только тогда, когда G/H является локально стягиваемым.

Перечислим основные свойства экстензорных подгрупп. Можно показать, что подгруппа $H < G$ является экстензорной в том и только том случае, когда группа G допускает такое ортогональное действие на $\mathbb{R}^n$, что G/H эквиморфно орбите некоторой точки. Ясно, что любая подгруппа $H < G$ в компактной группе Ли, а также любая открыто-замкнутая подгруппа $H < G$ являются экстензорными подгруппами.

Из (1) легко следует, что свойство быть экстензорной подгруппой наследуется при переходе к большей подгруппе. Как известно, группы Ли среди компактных групп выделяются отсутствием малых подгрупп [20]. Отсюда следует, что для $P_i < G$, $i = 1, 2$, факторгруппа $G/(P_1 \cap P_2)$ есть группа Ли в том и только том случае, когда G/P_i являются группами Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Операция пересечения конечного числа подгрупп сохраняет свойство быть экстензорной подгруппой.*

Это предложение не может быть улучшено: если экстензорная подгруппа $H < G$ есть пересечение семейства экстензорных подгрупп $\{H_\alpha < G\}$, то H является пересечением конечного числа подгрупп H_{α_i} .

Так как замкнутая подгруппа компактной группы Ли вновь является компактной группой Ли [20], то отсюда легко следует, что

- (8) если $H < G$ – экстензорная подгруппа и $K < G$, то $H \cap K < K$ – экстензорная подгруппа.

Доказательство следующего факта следует из определения $\mathcal{P}$ -подгруппы и теоремы Гуревича о понижении размерности при замкнутых отображениях [23].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть $K < L < G$ и $K < L$ – экстензорная подгруппа. Тогда $K < G$ – экстензорная подгруппа в том и только том случае, когда $L < G$ – экстензорная подгруппа.*

Если G не является компактной группой Ли, то в силу (7) $G \notin \text{ANE}$. Рассмотрим любое свободное G -пространство $\mathbb{X} \in \text{ANE}$ (такое существует). Легко видеть, что любое его инвариантное открытое множество не гомеоморфно произведению $G \times U$ и, следовательно, в этом случае теорема о срезе не верна [24]. Однако если ослабить требования на срезы, то можно утверждать следующее.

ТЕОРЕМА 14 (об аппроксимативном срезе G -пространства [25], [26]). *Пусть компактная группа G действует на G -пространстве $\mathbb{X}$. Тогда для любой окрестности $\mathcal{O}(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ существуют окрестность $\mathcal{V} = \mathcal{V}(e)$ единицы $e \in G$, экстензорная подгруппа $K < G$, $G_x < K$, и инвариантная окрестность $\mathbb{U} = \mathbb{U}(x)$, допускающая отображение среза $\alpha: \mathbb{U} \rightarrow G/K$, для которого $x \in \alpha^{-1}(\mathcal{V} \cdot [K]) \subset \mathcal{O}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нормальная $\mathcal{P}$ -подгруппа $P \triangleleft G$ и окрестность $\mathcal{W}$ точки $y = P \cdot x$ взяты из предложения 8, (4). Так как $\mathbb{Y} = \mathbb{X}/P$ естественным образом наделяется действием компактной группы Ли $G' = G/P$, а $G'_y = G_x \cdot [P] < G'$, то в силу теоремы о срезах для компактной группы Ли существуют окрестность $\mathcal{V}(e)$ и такое отображение среза $\alpha: \mathbb{V} \rightarrow G'/G'_y \cong G/(G_x \cdot P)$ некоторой G' -окрестности $\mathbb{V}$ орбиты $G'(y)$, что $\alpha^{-1}(\mathcal{V}(e) \cdot [G'_y]) \subset \mathcal{W}$. Легко проверить, что $K \rightleftharpoons G_x \cdot P < G$ – экстензорная подгруппа, а композиция $\alpha \circ p: p^{-1}(\mathbb{V}) \rightarrow G/K \in G\text{-ANE}$ – искомое отображение среза.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Орбитный тип (H) называется *экстензорным*, если $H < G$ – экстензорная подгруппа. Обозначим через $\mathbb{X}_{\mathcal{E}}$ совокупность всех экстензорных точек $\mathbb{X}$, т.е. таких точек $x \in \mathbb{X}$, для которых $G_x < G$ – экстензорная подгруппа.

Будем говорить, что G -подпространство $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ является G -плотным, если $\mathbb{Y}^H \subset \mathbb{X}^H$ плотно для любой подгруппы $H < G$. В работе [25] с помощью теоремы 14 об аппроксимативном срезе было установлено, что

- (9) $\mathbb{X}_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{X}$ является G -плотным тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ есть $G\text{-ANE}$ для класса метрических G -пространств с нульмерным пространством орбит, $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}(0)$;
- (10) линейное нормированное G -пространство $\mathbb{L}$ есть $G\text{-AE}$ в том и только том случае, когда $\mathbb{L}_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{L}$ является G -плотным (эквивариантная теорема Дугунджи).

Имеется пример линейного нормированного G -пространства $\mathbb{L} \notin G\text{-AE}$, у которого $\mathbb{L}_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{L}$ является плотным (но не G -плотным).

Следующий результат, известный в случае компактной группы Ли G (см. [14; пример 7.6.4.]), несложно перенести на более общий случай.

ТЕОРЕМА 15. Пусть подгруппы H и K компактной группы G таковы, что $H < K$ – экстензорная подгруппа. Тогда естественная проекция $p: G/K \rightarrow G/H$ является локально эквивариантно мягкой.

§ 5. Трубочатая структура орбитных проекций

Рассмотрим эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$ компактных групп с ядром P , являющимся группой Ли. Пусть $K < G$ – экстензорная подгруппа и $\pi(K) \rightleftharpoons L < H$. Так как $K < \pi^{-1}(L) < G$, то из предложения 10 следует, что

- (1) $K < \pi^{-1}L$ и $\pi^{-1}(L) < G$ являются экстензорными подгруппами,

а поэтому

- (2) $G/K \in G\text{-ANE}$ и $G/\pi^{-1}(L) \cong H/L \in H\text{-ANE}$.

Пусть $\kappa: G/K \rightarrow H/L$ – композиция естественного эпиморфизма $\alpha: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}L$, порожденного вложением $K < \pi^{-1}L$, и изоморфизма $\beta: G/\pi^{-1}L \rightarrow H/L$. В силу (1) и теоремы 15

- (3) отображения $\alpha: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}L$ и $\kappa = \beta \circ \alpha: G/K \rightarrow H/L$ являются локально эквивариантно мягкими.

Так как $\kappa(g \cdot [K]) = \pi(g) \cdot [L]$ и $\pi(K) = L$, то

- (4) $\kappa(g \cdot [K]) = [L]$ в том и только том случае, когда $g \in P \cdot K$.

Будем говорить, что на P -орбитной проекции $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ задана κ -трубчатая структура, порожденная отображениями срезов $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K \in G\text{-ANE}$ и $\psi: \mathbb{Y} \rightarrow H/L \in H\text{-ANE}$, если они замыкают приведенную ниже диаграмму $\mathcal{A}$ до коммутативной: $\kappa \circ \varphi = \psi \circ f$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\varphi} & G/K \\ f \downarrow & & \downarrow \kappa \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{\psi} & H/L \end{array}$$

Назовем κ -трубчатую структуру на f *нетривиальной*, если κ не является биекцией. Это равносильно тому, что K есть либо собственная подгруппа $\pi^{-1}L$, либо $P \setminus K \neq \emptyset$.

Ясно, что $\mathbb{X} = G \times_K \mathbb{S}$ и $\mathbb{Y} = H \times_L \mathbb{T}$, где $\mathbb{S} = \varphi^{-1}([K])$ – K -пространство, а $\mathbb{T} = \psi^{-1}([L])$ – L -пространство. Из коммутативности $\kappa \circ \varphi = \psi \circ f$ следует, что $f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{T}$.

Пусть $y \in \mathbb{T}$, $x \in f^{-1}(y)$ и $\varphi(x) = g \cdot K$. Тогда $[L] = \psi(y) = \psi(f(x)) = \kappa(\varphi(x)) = \kappa(g \cdot K)$. В силу (4) имеем $g \in P \cdot K$. Теперь легко проверить, что $x' \doteq g^{-1} \cdot x \in \mathbb{S}$ и $f(x') = y$. Тем самым доказан следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Имеет место равенство $f(\mathbb{S}) = \mathbb{T}$, а отображение $f|$ является совершенным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Пусть $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ – P -орбитная проекция. Если $x \notin \mathbb{X}^P$, то ограничение f на орбиту $G(x)$ имеет нетривиальную трубчатую структуру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P \setminus G_x \neq \emptyset$, то в силу 8, (3) существует такая экстензорная подгруппа $K < G$, что $P \setminus K \neq \emptyset$ и $G_x < K$. Ясно, что $G_{f(x)}$ совпадает с $G_x \cdot P$. Следующие вложения подгрупп $G_x < K < K \cdot P$ и $G_x < G_{f(x)} < K \cdot P$ естественным образом порождают G -отображения $\varphi: G(x) \rightarrow G/K$, $\psi: G(f(x)) \rightarrow G/(K \cdot P)$ и $\kappa: G/K \rightarrow G/(K \cdot P)$, которые и задают на P -орбитной проекции $f|: G(x) \rightarrow G(f(x))$ нетривиальную трубчатую структуру.

Приводимые ниже леммы 4 и 5 показывают, что если P -орбитная проекция f имеет нетривиальную трубчатую структуру, то f порождается Q -орбитной проекцией с более простой группой Q . Они же проясняют происхождение термина “трубчатая структура на отображении”.

ЛЕММА 4. *Если трубчатая структура на f , заданная эпиморфизмом κ , является нетривиальной, то $f(\mathbb{S}) = \mathbb{T}$ и отображение $f|: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ является Q -орбитной проекцией, где Q – ядро эпиморфизма $\pi' = \pi|: K \rightarrow L$, являющееся собственной подгруппой P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметив, что $f|: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ является совершенной сюръекцией, проверим для нее выполнение свойств (1)–(3) предложения 7: свойство (1) и часть свойства (3) выполнены очевидным образом. Свойство (2) выполнено, так как для $s \in \mathbb{S}$ имеем $K_s = G_s$ и $L_{f(s)} = H_{f(s)}$.

Так как $K \not\leq \pi^{-1}L$, то P не лежит в K . Но $Q = \text{Кег } \pi'$ совпадает с $K \cap P$ и поэтому является собственной подгруппой P . Таким образом, $Q < P$, но $Q \neq P$.

Теперь рассмотрим обратную ситуацию: имеется эпиморфизм $\pi': K \rightarrow L$ компактных групп и отображение $f': \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ из K -пространства $\mathbb{S}$ в L -пространство $\mathbb{T}$, являющееся Q -орбитной проекцией для $Q = \text{Ker } \pi'$. Пусть $K < G$ и $L < H$ – экстензорные подгруппы, и пусть эпиморфизм π' продолжается до эпиморфизма $\pi: G \rightarrow H$ компактных групп. Через $\kappa: G/K \rightarrow H/L$ обозначим композицию естественных эпиморфизмов $\alpha: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}L$ и $\beta: G/\pi^{-1}L \rightarrow H/L$. Тогда формулой $f([g, s]_K) = [\pi(g), f'(s)]_L$ корректно определено отображение $f = \pi \times f': G \times_K \mathbb{S} \rightarrow H \times_L \mathbb{T}$. Непосредственно проверяется, что если f' совершенно, то и f тоже совершенно.

ЛЕММА 5. *Отображение $f: G \times_K \mathbb{S} \rightarrow H \times_L \mathbb{T}$ является P -орбитной проекцией для $P = \text{Ker } \pi$. При этом естественные отображения срезов $\varphi: G \times_K \mathbb{S} \rightarrow G/K$, $\psi: H \times_L \mathbb{T} \rightarrow H/L$, а также эпиморфизм $\kappa: G/K \rightarrow H/L$ задают трубчатую структуру на P -орбитной проекции f , т.е. замыкают соответствующую диаграмму до коммутативной: $\kappa \circ \varphi = \psi \circ f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = [g, s]_K$ и $x' = [g', s']_K \in G \times_K \mathbb{S}$. Если $f(x) = f(x')$, то $\pi(g') = \pi(g) \cdot l^{-1}$ и $f'(s') = l \cdot f'(s)$ для $l \in L$.

Так как π' – эпиморфизм, то $l = \pi(k)$, $k \in K$, и, следовательно, $f'(s') = \pi(k) \cdot f'(s) = f'(k \cdot s)$. Поскольку f' является Q -орбитной проекцией, то s' и $k \cdot s$ лежат на одной K -орбите. Отсюда легко вывести, что x' и x лежат на одной G -орбите.

Все остальные характеристические свойства для P -орбитной проекции из предложения 7 проверяются непосредственно и мы оставляем это читателю.

§ 6. Теорема о срезе G -отображения

Важную роль в проведении индуктивных рассуждений играют утверждения о продолжении и расширении трубчатой структуры отображения, при доказательстве которых существенно используется эквивариантная мягкость G -отображений однородных пространств (см. теорему 15).

ТЕОРЕМА 16 (о продолжении трубчатой структуры отображения). *Пусть имеется коммутативная диаграмма $\mathcal{B}$,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} = \text{Cl } \mathbb{X} & \xrightarrow{j} & \mathbb{W} \\ f \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ \mathbb{Y} = \text{Cl } \mathbb{Y} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \end{array}$$

в которой $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ и $\hat{f}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Z}$ – P -орбитные проекции. Если f имеет κ -трубчатую структуру, порожденную отображениями срезов $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K$ и $\psi: \mathbb{Y} \rightarrow H/L$, то существуют такие инвариантные окрестности $\mathbb{B}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{Z}$ и $\mathbb{A} \rightleftharpoons \hat{f}^{-1}(\mathbb{B})$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{W}$, что P -орбитная проекция $\hat{f}|: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ также имеет κ -трубчатую структуру, порожденную отображениями срезов $\hat{\varphi}: \mathbb{A} \rightarrow G/K$ и $\hat{\psi}: \mathbb{B} \rightarrow H/L$, которые являются G -продолжениями φ и ψ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть диаграмма $\mathcal{A}$ порождает κ -трубчатую структуру f . Так как $K < G$ – экстензорная подгруппа, то, как было отмечено ранее,

существует такое ортогональное действие группы G на $\mathbb{R}^N$, что G/K является орбитой в $\mathbb{R}^N$ (отметим также, что $\mathbb{R}^N \in G\text{-AE}$; см. [13]). Таким образом, можно считать, что

- (1) G/K является орбитой в $H/L \times \mathbb{R}^N$; при этом κ совпадает с ограничением проекции $\text{pr}_1: H/L \times \mathbb{R}^N \rightarrow H/L$ на G/K .

Так как в силу (3) из предыдущего параграфа отображение $\kappa: G/K \rightarrow H/L$ является локально эквивариантно мягким, то существует послойная эквивариантная ретракция $r: \mathbb{V} \rightarrow G/K$ некоторой инвариантной окрестности $\mathbb{V} \subset H/L \times \mathbb{R}^N$ орбиты G/K , т.е. $\text{pr}_1 \circ r = \text{pr}_1$ (см. также теорему 15). Так как $H/L \in H\text{-ANE}$, то существует H -отображение $\tilde{\psi}: \mathbb{B}' \rightarrow H/L$, заданное на инвариантной окрестности $\mathbb{B}'$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{B}' \subset \mathbb{Z}$, такое, что $\tilde{\psi} = \text{ext } \psi$.

Представим отображение $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K \hookrightarrow H/L \times \mathbb{R}^N$ в диагональном виде (φ_1, φ_2) . Так как $\mathbb{R}^N \in G\text{-AE}$, то существует G -отображение $\chi: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^N$, продолжающее $\varphi_2: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Пусть $\mathbb{A}' \doteq \tilde{f}^{-1}(\mathbb{B}')$. Рассмотрим G -отображение $\sigma: \mathbb{A}' \rightarrow H/L \times \mathbb{R}^N$, заданное формулой $\sigma = (\tilde{\psi} \circ \tilde{f}) \times \chi$. Ясно, что $\mathbb{A} \doteq \sigma^{-1}(\mathbb{V})$ и $\mathbb{B} \doteq \tilde{f}(\mathbb{A})$ являются инвариантными окрестностями $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ соответственно. Непосредственно проверяем, используя послойность ретракции σ , что $\hat{\varphi} \doteq r \circ \sigma: \mathbb{A} \rightarrow G/K$ и $\hat{\psi} \doteq \tilde{\psi}|_{\mathbb{B}}$ порождают κ -трубчатую структуру $\hat{f}|_{\mathbb{A}}$, т.е. $\kappa \circ \hat{\varphi} = \hat{f}|_{\mathbb{A}} \circ \hat{\psi}$.

Рассмотрим ситуацию, когда в теореме 16 вложения j и i не обязательно замкнуты. В этом случае заключение теоремы остается верным, если не требовать согласования имеющейся и построенной трубчатых структур.

ТЕОРЕМА 17 (о расширении трубчатой структуры отображения). *Пусть имеется коммутативная диаграмма $\mathcal{B}$,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{j} & \mathbb{W} \\ f \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \end{array}$$

в которой $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ и $\hat{f}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Z}$ — P -орбитные проекции для компактной группы Ли P . Если f имеет нетривиальную трубчатую структуру, то существуют такие инвариантные окрестности $\mathbb{B}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{Z}$ и $\mathbb{A} \doteq \hat{f}^{-1}(\mathbb{B})$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{W}$, что P -орбитная проекция $\hat{f}|: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ также имеет нетривиальную трубчатую структуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, в основном, аналогично доказательству теоремы 16 о продолжении трубчатой структуры отображения, если в соответствующих местах использовать теорему 12 об аппроксимативном G -продолжении отображений. Рассмотрим коммутативную диаграмму $\mathcal{A}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\varphi} & G/K \\ f \downarrow & & \downarrow \kappa \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{\psi} & H/L \end{array}$$

порождающую нетривиальную трубчатую структуру f . Будем считать выполненным условие (1). Фиксируем послойную (относительно pr_1) эквивариантную ретракцию $r: \mathbb{V} \rightarrow G/K$ некоторой инвариантной окрестности $\mathbb{V} \subset H/L \times \mathbb{R}^N$ орбиты G/K , т.е. $\text{pr}_1 \circ r = \text{pr}_1$. Так как $H/L \in H\text{-ANE}$, то в силу

теоремы 12 существует H -отображение $\tilde{\psi}: \mathbb{B}' \rightarrow H/L$, заданное на инвариантной окрестности $\mathbb{B}'$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{B}' \subset \mathbb{Z}$, такое, что ψ и $\tilde{\psi}|_{\mathbb{Y}}$ как угодно близки.

Представим отображение $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K \hookrightarrow H/L \times \mathbb{R}^N$ в диагональном виде (φ_1, φ_2) . Так как $\mathbb{R}^N \in G\text{-AE}$, то в силу теоремы 12 существует G -отображение $\chi: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}^N$, заданное на инвариантной окрестности $\mathbb{A}'$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{A}' \subset \mathbb{W}$, такое, что φ_2 и $\chi|_{\mathbb{X}}$ как угодно близки. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{A}' = \hat{f}^{-1}(\mathbb{B}')$.

Рассмотрим теперь G -отображение $\sigma: \mathbb{A}' \rightarrow H/L \times \mathbb{R}^N$, заданное формулой $\sigma = (\tilde{\psi} \circ \hat{f}) \times \chi$. Если построенные выше аппроксимирующие отображения $\tilde{\psi}$ и χ были достаточно близки к ψ и φ_2 соответственно, то образ $\sigma(\mathbb{A}')$ лежит в $\mathbb{V}$. Ясно, что $\mathbb{A} \hat{=} \sigma^{-1}(\mathbb{V})$ и $\mathbb{B} \hat{=} \hat{f}(\mathbb{A})$ являются инвариантными окрестностями $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ соответственно. Утверждается, что $\tilde{\varphi} \hat{=} r \circ \sigma: \mathbb{A} \rightarrow G/K$ и $\tilde{\psi}|_{\mathbb{B}}$ задают нетривиальную трубчатую структуру $\hat{f}|_{\mathbb{A}}$, т.е. $\kappa \circ \tilde{\varphi} = \hat{f}|_{\mathbb{A}} \circ \tilde{\psi}|_{\mathbb{B}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть P -орбитная проекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ для компактной группы Ли P имеет нетривиальную трубчатую структуру, а $\mathbb{Y}$ содержится в $\mathbb{Z}$. Тогда существует коммутативная диаграмма $\mathcal{A}$, порождающая нетривиальную трубчатую структуру f , в которой ψ имеет H -продолжение на некоторую инвариантную окрестность $\mathbb{Y}$.

Для доказательства следствия 1 следует повторить рассуждения из теоремы 17, игнорируя ссылки на G -отображение $\chi: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}^N$. А именно, рассмотрим G -отображение $\sigma_1: \mathbb{X} \rightarrow H/L \times \mathbb{R}^N$, заданное формулой $\sigma_1 = (\tilde{\psi} \circ f) \times \varphi_2$. Если построенное аппроксимирующее отображение ψ было достаточно близко к исходному ψ , то образ $\sigma_1(\mathbb{X})$ лежит в $\mathbb{V}$. Утверждается, что $\varphi_1 \hat{=} r \circ \sigma_1: \mathbb{X} \rightarrow G/K$ и $\psi_1 \hat{=} \psi|_{\mathbb{X}}$ задают нетривиальную трубчатую структуру f , т.е. $\kappa \circ \varphi_1 = \hat{f} \circ \psi_1$.

§ 7. Теорема об эквивариантной гомотопической плотности

Доказательство теоремы 8 отложим до конца параграфа, поскольку для него необходимы некоторые вспомогательные факты. Для компактной группы G обозначим через $\mathbb{T}$ дискретное объединение всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$. Ясно, что метрический конус $\text{Con } \mathbb{T}$ над $\mathbb{T}$ имеет экстензорный орбитный тип, а его пространство орбит есть конус над дискретом.

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\mathbb{X}$ – метрическое G -подпространство G -пространства $\mathbb{Y}$ с метрическим пространством орбит Y . Тогда для любого убывающего семейства $\{\mathbb{V}_n \subset \mathbb{Y}\}_{n=1}^{\infty}$ инвариантных окрестностей $\mathbb{X}$ существует такое G -отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{T}_G$, где $\mathbb{T}_G = (\text{Con } \mathbb{T})^{\omega}$, что

- (а) ограничение f на $\mathbb{X}$ есть изовариантное отображение;
- (б) справедливо включение $f(\mathbb{Y} \setminus \bigcap \{\mathbb{V}_n \mid n \geq 1\}) \subset (\mathbb{T}_G)_{\mathcal{E}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что X, Y не содержат изолированных точек. В противном случае следует перейти от $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ к $\mathbb{X} \times G^{\omega}$ и $\mathbb{Y} \times G^{\omega}$.

Так как $Y = \mathbb{Y}/G$ метризуемо, то существует такое семейство $\mathcal{B} = \{W_{\mu}\}_{\mu \in M}$ открытых подмножеств Y , пересекающихся с X , что

- (1) $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_n = \{W_\mu\}_{\mu \in M_n \subset M}$ – дискретное семейство, $\coprod_{n=1}^{\infty} M_n = M$;
- (2) тело семейства $\mathcal{B}_n$ содержится в $\mathbb{V}_n$ для любого n ;
- (3) ограничение $\mathcal{B}|_X$ образует базис топологии X .

Через $\mathbb{W}_\mu$ обозначим $\pi^{-1}W_\mu$, где $\pi: \mathbb{Y} \rightarrow Y$ – орбитная проекция. Так как срез $\mathbb{W}_\mu$ существуют всегда (например, тривиальные), то число

$$i(\mu) = \inf \{ \text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi^{-1}(g \cdot [H])) \mid \varphi: \mathbb{W}_\mu \rightarrow G/H \text{ – отображение среза, } g \in G \} \geq 0$$

корректно определено (здесь диаметр берется относительно инвариантной метрики ρ , существующей на $\mathbb{Y}$; см. [18]). В силу сделанного выше предположения $i(\mu) > 0$. Из инвариантности σ следует, что $\mathbb{X} \cap \varphi^{-1}(g \cdot [H]) = \mathbb{X} \cap g \cdot \varphi^{-1}([H])$ и $\mathbb{X} \cap \varphi^{-1}([H])$ имеют равные диаметры. Поэтому в определении $i(\mu)$ достаточно брать $g = e$. Особо выделим то отображение среза $\varphi_\mu: \mathbb{W}_\mu \rightarrow G/H_\mu$, $\mu \in M_n$, для которого $\text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi_\mu^{-1}([H_\mu])) < j(\mu) = 2i(\mu)$. Легко видеть, что он обладает следующим важным свойством.

ЛЕММА 6. *Если $\mu \in M_n$, то $\text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi_\mu^{-1}([H_\mu])) < 2 \text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi^{-1}([H]))$ для любого другого отображения среза $\varphi: \mathbb{W}_\mu \rightarrow G/H$.*

Рассмотрим G -отображение $\psi_\mu = \text{Con } \varphi_\mu: \mathbb{Y} \rightarrow \text{Con } G/H_\mu$, совпадающее с (φ_μ, ξ_μ) на $\mathbb{W}_\mu$ и с вершиной конуса $\{*\}$ на дополнении к $\mathbb{W}_\mu$ (здесь $\xi_\mu: \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1]$ – постоянная на орбитах функция, для которой $\xi_\mu^{-1}(0) = \mathbb{Y} \setminus \mathbb{W}_\mu$). Ясно, что $\psi_\mu^{-1}(G/H_\mu \times (0, 1]) = \mathbb{W}_\mu$ и $G_{\psi_\mu(y)} = G_{\psi_\mu(y)}$, $y \in \mathbb{W}_\mu$.

Так как $\mathcal{B}_n$ – дискретное семейство, то легко видеть, что формулами $\psi_n|_{\mathbb{W}_\mu} = \psi_\mu$ для $\mu \in M_n$ и $\psi_n|_{\mathbb{Y} \setminus \bigcup \{\mathbb{W}_\mu \mid \mu \in M_n\}} = \{*\}$ корректно определено непрерывное G -отображение $\psi_n: \mathbb{Y} \rightarrow \text{Con } \mathbb{T}$. Ясно, что $\psi_n^{-1}(*) = \mathbb{Y} \setminus \bigcup \{\mathbb{W}_\mu \mid \mu \in M_n\}$. Покажем, что диагональное произведение $\eta = \Delta \psi_n: \mathbb{Y} \rightarrow (\text{Con } \mathbb{T})^\omega = \mathbb{T}_G$ представляет собой искомое G -отображение.

По теореме 14 об аппроксимативном срезе для любых $x \in \mathbb{X}$ и $\alpha > 0$ существует G -отображение $r: \mathbb{U}(x) \rightarrow G/H \in G\text{-ANE}$ некоторой окрестности $\mathbb{U}(x) \subset \mathbb{Y}$, для которого $r^{-1}([H])$ имеет диаметр меньше $\alpha/2$. Так как в силу (3) ограничение $\mathcal{B}|_X$ есть базис X , то существует такой индекс $\mu \in M_n$, что $x \in \mathbb{W}_\mu \subset \mathbb{U}(x)$. Из неравенства $\text{diam}(r^{-1}([H])) < \alpha/2$ следует, что $i(\mu) < \alpha/2$, а поэтому в силу леммы 6 имеем

$$(c) \text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi_\mu^{-1}([H_\mu])) < i(\mu) < \alpha.$$

Итак, $\text{diam}(\mathbb{X} \cap \varphi_\mu^{-1}(g \cdot [H_\mu])) < \alpha$, $g \in G$. Из сказанного выше следует существование последовательности отображений срезов $\{\varphi_{\mu_i}: \mathbb{W}_{\mu_i} \rightarrow G/H_{\mu_i}\}_{i \geq 1, \mu_i \in M_{n_i}}$, для которой $x \in \varphi_{\mu_i}^{-1}(a_i) \subset \mathbb{W}_{\mu_i}$, где $a_i = \varphi_{\mu_i}(x)$, $i \geq 1$, а также то, что

$$(d) \{\text{diam } \varphi_{\mu_i}^{-1}(a_i)\} \rightarrow 0.$$

Так как $G_{a_i} = G_{\varphi_{\mu_i}(x)} = G_{\psi_{\mu_i}(x)} \supset G_{\eta(x)} \supset G_x$, то $G_x \subset \bigcap \{G_{a_i} \mid i \geq 1\}$. Для доказательства того, что x и $\eta(x)$ имеют равные стабилизаторы, достаточно установить обратное включение $\bigcap \{G_{a_i} \mid i \geq 1\} \subset G_x$. Если $g \in \bigcap \{G_{a_i} \mid i \geq 1\}$, то $g \cdot x \in \varphi_{\mu_i}^{-1}(a_i)$, $i \geq 1$, и, следовательно, в силу (d) x и $g \cdot x$ совпадают. Поэтому $g \in G_x$.

Наконец, проверим свойство (b). Если $y \notin \mathbb{V}_n$, то $y \notin \mathbb{V}_{n+m}$. Из (2) следует, что все координаты $\eta(y)$, за исключением первых n , совпадают с вершиной

конуса. Поэтому $G_{\eta(y)}$ – пересечение конечного числа экстензорных подгрупп, т.е. $G_{\eta(y)}$ – экстензорная подгруппа (предложение 9).

Теорема 18 влечет следующие важные результаты о структуре решений ЗПД, позволяющие, в свою очередь, с помощью теоремы 1 вывести теорему 2, (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $s': \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}'$ – решение ЗПД для допустимой диаграммы $\mathcal{D}$. Тогда

- (4) если $\mathbb{X}$ – замкнутое подмножество метрического пространства $\mathbb{Y}'$, то существует такое решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ ЗПД для $\mathcal{D}$, что $s' \geq s$ и $\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}$;
- (5) если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ метризуемы, то существует такое решение $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y} \in \mathcal{M}$ ЗПД для $\mathcal{D}$, что $s' \geq s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 18 существует такое G -отображение $f: \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{T}_G$, что $f|_{\mathbb{X}}$ – изовариантное отображение, причем в случае (4) имеем $f(\mathbb{Y}' \setminus \mathbb{X}) \subset (\mathbb{T}_G)_{\mathcal{E}}$. Рассмотрим послойное произведение $\mathbb{Y} \rightrightarrows Y_f \times_p \mathbb{T}_G \in \mathcal{M}$, где $p: \mathbb{T}_G \rightarrow \mathbb{T}_G/G$ – орбитная проекция.

Так как $f|_{\mathbb{X}}$ является изовариантным отображением, то $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$. Легко проверить, что $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ накрывает $X \hookrightarrow Y$, естественное G -отображение $h: \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{Y}$, $h(y') = (p(y'), f(y'))$, замыкает диаграмму до коммутативной: $h \circ s' = s$, а также $\tilde{h} = \text{Id}_Y$. Ясно, что в случае (4) имеем $\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}$.

Пусть $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{X}$ – частичное G -отображение. Применяя предложение 13 к решению $s: \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ замкнутой ЗПД для диаграммы $\mathbb{A} \xrightarrow{p} A \hookrightarrow Z$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{X} \in G\text{-AE}$ существует такое G -продолжение $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, что $\hat{f}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}) \subset \mathbb{X}_{\mathcal{E}}$. Аналогичный результат имеет место для $G\text{-ANE}$ -пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8 основано на применении предложения 14 к частичному G -отображению $\mathbb{X} \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{X} \times \{0\} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{X} \in G\text{-AE}$. Аналогично разбирается случай $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}$.

§ 8. Задача о продолжении P -орбитных проекций

Дадим трактовку задачи о продолжении действия с более общих позиций. Пусть $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ – P -орбитная проекция для ядра P эпиморфизма $\pi: G \rightarrow H$ компактных групп, а $i: \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ – произвольное замкнутое H -вложение $\mathbb{Y}$ в H -пространство $\mathbb{Z}$, в котором любое открытое инвариантное подмножество является паракомпактным. Получающуюся диаграмму $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ назовем H -допустимой. Ясно, что индуцированная диаграмма $\mathbb{X} \xrightarrow{p_V \circ f} Y \xrightarrow{\tilde{i}} Z$ является допустимой в прежнем смысле. Будем говорить, что

- (1) обобщенная задача о продолжении действия (ОЗПД) разрешима для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, если существуют такие G -вложение $j: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{W}$ в G -пространство $\mathbb{W}$ и P -орбитная проекция $\hat{f}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Z}$, что $\hat{f} \circ j = i \circ f$;

- (2) обобщенная задача о продолжении действия разрешима локально для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, если разрешима ОЗПД для некоторой H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{R}$, где $\mathbb{Y} \subset \text{Int } \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$;
- (3) обобщенная задача о продолжении действия разрешима для P -орбитных проекций, если ОЗПД разрешима для любой H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$.

Как будет показано далее, наш главный результат – теорема 1, сводится к следующей ключевой теореме о разрешимости обобщенной задачи о продолжении действия групп.

ТЕОРЕМА 19. *Обобщенная задача о продолжении действия групп разрешима для P -орбитных проекций, если ядро P является компактной группой Ли.*

Отметим, что теоремы 1 и 19 совпадают, когда $G = P$ – компактная группа Ли. Сначала разберем наиболее простые случаи теоремы 19; ее полное доказательство будет дано в следующем параграфе.

ЛЕММА 7. *Обобщенная задача о продолжении действия групп для любой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, в которой f – P -орбитная проекция, а i является открытым H -вложением, разрешима.*

Отсюда, очевидно, следует, что

- (4) если для некоторой H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ обобщенная задача о продолжении действия разрешима локально, то для этой диаграммы ОЗПД разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить G -пространство $\mathbb{W}$ так, чтобы $\mathbb{W} \setminus \mathbb{X} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y}$. Для этого положим $\mathbb{W} = \mathbb{X} \sqcup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y})$. Базу топологии в $\mathbb{W}$ образуют открытые множества из $\mathbb{X}$, а также множества вида $\tilde{O} = f^{-1}(O \cap \mathbb{Y}) \sqcup (O \setminus \mathbb{Y})$, где $O \subset \mathbb{Z}$ – произвольное открытое множество. Действие группы G на $\mathbb{W}$ совпадает с действием G на $\mathbb{X}$, а на $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y}$ задается формулой $g \cdot y = \pi(g) \cdot y$, $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y}$. Легко проверяется непрерывность действия, а также то, что отображение $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Z}$, совпадающее с f на $\mathbb{X}$ и с Id на $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y}$, является P -орбитной проекцией и продолжает f .

Пусть $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ – H -допустимая диаграмма. Заметим, что $\mathbb{A} = f^{-1}(f(\mathbb{A}))$ для всех $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$, а также $G_x = P \cdot G_x = \pi^{-1}(\pi(G_x))$, если $P < G_x$. Отсюда и из совершенности f следует, что

- (5) $f|_{\mathbb{X}^P}: \mathbb{X}^P \rightarrow f(\mathbb{X}^P)$ является эквиморфизмом замкнутых подмножеств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$.

Ясно, что для $\mathbb{X}' = \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^P$, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \text{Cl}_{\mathbb{Z}}(f(\mathbb{X}^P))$ и $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y} \cap \mathbb{Z}' = \mathbb{Y} \setminus f(\mathbb{X}^P)$ справедливо следующее:

- (6) $(\mathbb{X}')^P = \emptyset$, отображение $f|_{\mathbb{X}'}: \mathbb{X}' \rightarrow \mathbb{Y}'$ является P -орбитной проекцией.

Утверждение леммы 8 позволяет свести изучение обобщенной задачи о продолжении действия к случаю, когда отсутствуют P -неподвижные точки в $\mathbb{X}$.

ЛЕММА 8. *Если обобщенная задача о продолжении действия групп для всех H -допустимых диаграмм с пустыми множествами P -неподвижных точек*

разрешима, то разрешима ОЗПД для всех H -допустимых диаграмм $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ с $\mathbb{X}^P \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{Z}'$ – наследственно паракомпактное пространство, то диаграмма $\mathbb{X}' \xrightarrow{f'} \mathbb{Y}' \xrightarrow{i'} \mathbb{Z}'$ является допустимой. Так как $(\mathbb{X}')^P = \emptyset$, то по условию леммы для этой диаграммы ОЗПД разрешима. Поэтому существуют G -вложение $j': \mathbb{X}' \hookrightarrow \mathbb{W}'$ в G -пространство $\mathbb{W}'$ и P -орбитная проекция $\hat{f}: \mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{Z}'$ такие, что $\hat{f} \circ j' = i' \circ f|$. Применим лемму 7 к естественному H -вложению $i'': \mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z}$, являющемуся открытым: ОЗПД для диаграммы $\mathbb{W}' \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{Z}' \xrightarrow{i''} \mathbb{Z}$ разрешима. Следовательно, ОЗПД и для исходной диаграммы разрешима.

Теперь остановимся на редукции теоремы 1 к теореме 19.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Из справедливости теоремы 19 следует справедливость теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{P_\alpha \triangleleft G\}$ – ряд Ли, $\mathbb{X}_\alpha \rightleftharpoons \mathbb{X}/P_\alpha$ (см. обозначения из леммы 2). Так как $P_1 = G$, а $\mathbb{X}_1 = X$, то вложение $i: X \hookrightarrow Y$ можно рассматривать как G/P_1 -вложение $i_1: \mathbb{X}_1 \hookrightarrow \mathbb{Y}_1$, где $\mathbb{Y}_1 \rightleftharpoons Y$ рассмотрим как G/P_1 -пространство. Проводя рассуждения с помощью трансфинитной индукции и многократно используя теорему 19 (так как $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ – компактная группа Ли), можно построить такие G/P_α -вложения $i_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{Y}_\alpha$ в G/P_α -пространство $\mathbb{Y}_\alpha$ и $P_\alpha^{\alpha+1}$ -орбитные проекции $\hat{f}_\alpha^{\alpha+1}: \mathbb{Y}_{\alpha+1} \rightarrow \mathbb{Y}_\alpha$, что $\hat{f}_{\alpha+1} \circ i_{\alpha+1} = i_\alpha \circ f_\alpha$ для всех $\alpha < \omega$. Тогда искомое G -пространство $\mathbb{Y}$ есть $\varprojlim \{\mathbb{Y}_\alpha, \hat{f}_\alpha^{\alpha+1}\}$, в котором естественным образом лежит $\mathbb{X} = \varprojlim \{\mathbb{X}_\alpha, f_\alpha\}$.

В заключение этого параграфа приведем результат, касающийся склейки решений ОЗПД, который далее будет играть важную роль в осуществлении трансфинитной индукции в заключительной части статьи.

ТЕОРЕМА 20. Пусть H -подпространства $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2 \subset \mathbb{T}$ порождают топологию H -пространства $\mathbb{T}$, $f_1: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ и $f_2: \mathbb{W}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$ суть P -орбитные проекции. Предположим, что существует такой G -гомеоморфизм $h: (f_1)^{-1}(\mathbb{T}_0) \rightarrow (f_2)^{-1}(\mathbb{T}_0)$, где $\mathbb{T}_0 \rightleftharpoons \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, что $f_2 \circ h = f_1$. Тогда существует решение $s: \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}$ ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{W}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{T}_1 \hookrightarrow \mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что отношение эквивалентности $\approx$ на дискретном объединении $\mathbb{W}_1 \sqcup \mathbb{W}_2$, нетривиальными классами которого являются пары $\{t_1, t_2 \mid t_2 = h(t_1), t_1 \in (f_1)^{-1}(\mathbb{T}_0)\}$, инвариантно относительно действия G ; фактортопология на факторпространстве $\mathbb{W} \rightleftharpoons (\mathbb{W}_1 \sqcup \mathbb{W}_2)/\approx$ совпадает со слабой топологией, порожденной $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, естественно лежащими в $\mathbb{W}$.

Так как отображение, задающее действие G на $\mathbb{W}_2$, совершенно, то для любого компакта $K \subset G$ и любой окрестности $\mathcal{U}$, $K \cdot F \subset \mathcal{U}$, где $F \subset \mathbb{W}_2$, существует такая окрестность $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{U}$, что $K \cdot \mathcal{O}(F) \subset \mathcal{U}$. Отсюда легко следует, что формулами $(g, [t_1]) \mapsto [g \cdot t_1]$ для $t_1 \in \mathbb{W}_1$ и $(g, [t_2]) \mapsto [g \cdot t_2]$ для $t_2 \in \mathbb{W}_2$ корректно задается непрерывное действие G на $\mathbb{W}$. Приведенный ниже результат, который можно установить непосредственной проверкой, завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 9. *Пространство орбит $\mathbb{W}/P$ совпадает с пространством $\mathbb{T}$ со слабой топологией, порожденной $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2 \subset \mathbb{T}$.*

§ 9. Доказательство теоремы 19

Рассуждения проведем индукцией по компактной группе Ли P с использованием метатеоремы Пале (см. предложение 4). Если $|P| = 1$, то эпиморфизм π есть изоморфизм, так что изучаемая ситуация тривиальна. Предположим теперь, что для любой собственной подгруппы $Q < P$ для любой Q -орбитной проекции ОЗПД разрешима, и покажем, что она разрешима для любой P -орбитной проекции $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. В силу леммы 8 достаточно рассмотреть G -пространство $\mathbb{X}$ без P -неподвижных точек, $\mathbb{X}^P = \emptyset$.

Разберем сначала случай, когда P -орбитная проекция f имеет нетривиальную трубчатую структуру.

ЛЕММА 10. *Пусть f имеет нетривиальную трубчатую структуру. Тогда ОЗПД разрешима для любой H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображения среза $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K$ и $\psi: \mathbb{Y} \rightarrow H/L$ из коммутативной диаграммы $\mathcal{A}$, которые порождают нетривиальную трубчатую структуру f . В силу следствия 1 можно считать, что ψ имеет H -продолжение $\hat{\psi}: \mathbb{U} \rightarrow H/L$ на некоторую инвариантную окрестность $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$.

В силу леммы 4 отображение $f|: \mathbb{S} = \varphi^{-1}[K] \rightarrow \mathbb{T} = \psi^{-1}[L]$ является Q -орбитной проекцией для собственной компактной подгруппы $Q < P$. По индуктивному предположению ОЗПД разрешима для Q -орбитных проекций и, следовательно, ОЗПД разрешима для диаграммы $\mathbb{S} \xrightarrow{f} \mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{T}' \xleftarrow{\hat{\psi}^{-1}[L]}$, которая L -допустима, поскольку $\mathbb{T}'$ – наследственно паракомпактное пространство. Поэтому существуют K -вложение $j': \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{S}'$ в K -пространство $\mathbb{S}'$ и Q -орбитная проекция $f': \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{T}'$ такие, что $f' \circ j' = i \circ f|$.

Далее, в силу леммы 5 отображение $\hat{f} = \pi \times f': G \times_K \mathbb{S}' \rightarrow H \times_L \mathbb{T}' = \mathbb{U}$ является P -орбитной проекцией и, как легко заметить, $\hat{f}$ разрешает ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{U}$. Завершает доказательство леммы применение леммы 7 для диаграммы $G \times_K \mathbb{S}' \xrightarrow{\hat{f}} H \times_L \mathbb{T}' = \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ с открытым вложением $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

Наконец, мы приступаем к доказательству оставшегося (и самого сложного) случая теоремы 19, когда заданы P -орбитная проекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ с $\mathbb{X}^P = \emptyset$ и H -вложение $\mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 11. *Существуют окрестность $\mathbb{E}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{Z}$, и ее локально конечное H -покрытие $\sigma \in \text{cov } \mathbb{E}$, состоящее из таких открытых подмножеств $\{\mathbb{F}_\gamma \subset \mathbb{E}\}_{\gamma \in \Gamma}$, что для любого $\gamma \in \Gamma$, $\mathbb{F}_\gamma \cap \mathbb{Y} \neq \emptyset$, а также*

- (1) *отображение $g_\gamma \Leftarrow f|: \mathbb{V}_\gamma \Leftarrow f^{-1}(\mathbb{F}_\gamma^*) \rightarrow \mathbb{F}_\gamma^*$ имеет нетривиальную трубчатую структуру, где $\mathbb{F}_\gamma^*$ – множество точек прикосновения $\mathbb{F}_\gamma$, лежащих в $\mathbb{Y}$, т.е. $\mathbb{F}_\gamma^* = \text{Cl}_{\mathbb{E}}(\mathbb{F}_\gamma) \cap \mathbb{Y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{X}^P = \emptyset$, то в силу предложения 12 для любого $x \in \mathbb{X}$ ограничение f на орбиту $G(x)$ имеет нетривиальную трубчатую структуру. Отсюда в силу теоремы 16 о продолжении среза следует, что существует такое локально конечное открытое H -покрытие $\omega = \{U_\alpha\} \in \text{cov } \mathbb{Y}$, что

- (1) каждая P -орбитная проекция $f|: f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ имеет нетривиальную трубчатую структуру.

Пусть ν – семейство открытых H -множеств $\mathbb{Z}$, ограничение которого на $\mathbb{Y}$ совпадает с ω . Поскольку $\mathbb{Z}$ принадлежит классу наследственно паракомпактных пространств, то тело $\cup \nu$ семейства ν является паракомпактом. Поэтому существует локально конечное открытое H -покрытие σ' тела $\cup \nu$, замыкание которого вписано в ν . Ясно, что $\sigma \Rightarrow \{\mathbb{F} \in \sigma' \mid \mathbb{F} \cap \mathbb{Y} \neq \emptyset\}$ и $\mathbb{E} \Rightarrow \cup \sigma$ являются искомыми.

Предположим, что ОЗПД для диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{E}$, которая, очевидно, является H -допустимой, разрешима. Тогда в силу леммы 7 и открытости $\mathbb{E} \subset \mathbb{Z}$ будет разрешима ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$, что мы и делаем далее.

Последующие рассуждения проведем с помощью новой индукции – трансфинитной, для чего вполне упорядочим множество Γ , индексирующее элементы семейства $\{\mathbb{F}_\gamma\}$. Без ограничения общности можно считать, что в Γ имеется максимальный элемент ω , не являющийся предельным ординалом. Положим для предельного ординала γ , $\mathbb{Q}_\gamma = \bigcup \{\mathbb{F}_{\gamma'} \mid \gamma' < \gamma\}$; для ординала γ , не являющегося предельным, полагаем $\mathbb{Q}_\gamma = \bigcup \{\mathbb{F}_{\gamma'} \mid \gamma' \leq \gamma\}$. Очевидно, что $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}_\omega$ – тело локально конечной растущей системы открытых подмножеств $\{\mathbb{Q}_\gamma\}$, причем $\mathbb{Q}_{\gamma'} \cup \mathbb{F}_\gamma = \mathbb{Q}_\gamma$ для $\gamma = \gamma' + 1$. Отметим такое важное следствие локальной конечности покрытия $\sigma = \{\mathbb{F}_\gamma\}$:

- (3) если γ – предельный ординал, то семейство $\{\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \mid \gamma' < \gamma\}$ порождает топологию $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_\gamma$, т.е. $U \subset \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_\gamma$ открыто в том и только том случае, когда $(\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}) \cap U$ открыто в $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$ для всех $\gamma' < \gamma$.

С помощью трансфинитной индукции построим для всех $\gamma \in \Gamma$ такое решение $j_\gamma: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{W}_\gamma \xrightarrow{\hat{f}_\gamma} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_\gamma$ ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i_\gamma} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_\gamma$ (см. сноску⁶), что

- (4) $\mathbb{W}_{\gamma_1} \subset \mathbb{W}_{\gamma_2}$ и $\hat{f}_{\gamma_2}|_{\mathbb{W}_{\gamma_1}} = \hat{f}_{\gamma_1}$ для всех $\gamma_1 < \gamma_2$, т.е. $\hat{f}_{\gamma_2}$ является решением

ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{W}_{\gamma_1} \xrightarrow{\hat{f}_{\gamma_1}} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma_1} \hookrightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma_2}$.

Так как $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_\omega = \mathbb{Z}$, то предложенный план гарантирует разрешимость ОЗПД для диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, что ведет к завершению доказательства теоремы 19.

С помощью леммы 10 легко устанавливается база индуктивного рассуждения.

ЛЕММА 12. ОЗПД для диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{i_{\gamma_0}} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma_0}$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 10 и 11 ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathcal{D}_1 = \{\mathbb{V}_{\gamma_0} \xrightarrow{g_{\gamma_0}} \mathbb{F}_{\gamma_0}^* \hookrightarrow \mathbb{F}_{\gamma_0}^* \cup \mathbb{F}_{\gamma_0}\}$ разрешима. Поскольку ОЗПД для

⁶То есть $\hat{f}_\gamma \circ j_\gamma = i| \circ f$, где $\hat{f}_\gamma$ – P -орбитная проекция.

H -допустимой диаграммы $\mathbb{V}_{\gamma_0} \xrightarrow{g_{\gamma_0}} \mathbb{F}_{\gamma_0}^* \cap \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ очевидным образом разрешима, а H -подпространства $\mathbb{F}_{\gamma_0}^* \cup \mathbb{F}_{\gamma_0}$ и $\mathbb{Y}$ порождают топологию H -пространства $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma_0} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{F}_{\gamma_0}$, то ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{F}_{\gamma_0}$ в силу теоремы 20 разрешима.

Индуктивный шаг основан на следующей лемме.

ЛЕММА 13. Для любого $\gamma' \in \Gamma, \gamma' < \omega$, ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{W}_{\gamma'} \xrightarrow{\hat{f}_{\gamma'}} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \hookrightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$, где $\gamma = \gamma' + 1 \in \Gamma$, разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7 достаточно показать, что ОЗПД для данной диаграммы разрешима локально, т.е. существует такая окрестность $\mathbb{T}$, $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \subset \mathbb{T} \subset \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$, что H -допустимая диаграмма $\mathbb{W}_{\gamma'} \xrightarrow{\hat{f}_{\gamma'}} \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \hookrightarrow \mathbb{T}$ разрешима. Прежде всего обратим внимание на нетривиальность трубчатой структуры у P -орбитной проекции $g_{\gamma}: \mathbb{V}_{\gamma} \rightarrow \mathbb{F}_{\gamma}^*$. Теорема 16 влечет

- (5) существование такой инвариантной окрестности $\mathbb{S}, \mathbb{F}_{\gamma}^* \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$, что P -орбитная проекция $h = \hat{f}_{\gamma'}|: (\hat{f}_{\gamma'})^{-1}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{S}$ также имеет нетривиальную трубчатую структуру.

Обозначим для краткости $(\mathbb{F}_{\gamma} \cup \mathbb{F}_{\gamma}^*) \cap \mathbb{S}$ через $\mathbb{A}$. Рассмотрим H -допустимую диаграмму $h^{-1}(\mathbb{A}) \xrightarrow{h|} \mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathbb{T}_2 \rightleftharpoons (\mathbb{F}_{\gamma} \cup \mathbb{F}_{\gamma}^*) \cap \hat{\mathbb{S}}$, где $\hat{\mathbb{S}} \subset \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \cup \mathbb{F}_{\gamma}$ – такая окрестность $\mathbb{F}_{\gamma}^*$, что $\hat{\mathbb{S}} \cap (\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}) = \mathbb{S}$. Так как в силу (5) отображение $h|: h^{-1}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{A}$ имеет нетривиальную трубчатую структуру, то лемма 10 влечет для рассмотренной H -допустимой диаграммы разрешимость ОЗПД, т.е. существуют такие G -вложение $j: h^{-1}(\mathbb{A}) \hookrightarrow \mathbb{W}_2$ в G -пространство $\mathbb{W}_2$ и P -орбитная проекция $f_2: \mathbb{W}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$, что $f_2 \circ j = i \circ h|$.

Легко проверяется, что $\mathbb{F}_{\gamma}^* = \mathbb{F}_{\gamma}^* \cap \hat{\mathbb{S}} = (\mathbb{F}_{\gamma} \cap \hat{\mathbb{S}})^*$. Поэтому $\mathbb{T}_2 = (\mathbb{F}_{\gamma} \cup \mathbb{F}_{\gamma}^*) \cap \hat{\mathbb{S}}$ имеет вид $\mathbb{U} \cup \mathbb{U}^*$, где $\mathbb{U} = \mathbb{F}_{\gamma} \cap \hat{\mathbb{S}}$ открыто в $\mathbb{T} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'} \cup \mathbb{U}$. Кроме того, $\mathbb{T}$ является окрестностью $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$ в $\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma}$, поскольку $(\mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma}) \setminus \mathbb{T} = \mathbb{F}_{\gamma} \setminus (\hat{\mathbb{S}} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'})$. Из теоремы 13 о порождаемости топологии следует, что H -подпространства $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$ и $\mathbb{T}_2$ порождают топологию H -пространства $\mathbb{T}$.

Ясно, что $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ совпадает с $\mathbb{S}$. Поскольку H -орбитные проекции f_2 и $f_1 = \hat{f}_{\gamma'}: \mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_{\gamma'} \rightarrow \mathbb{T}_1$ тождественны на $(\hat{f}_{\gamma'})^{-1}(\mathbb{S})$, то применима теорема 20: существует решение $s: \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}$ ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{W}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{T}_1 \hookrightarrow \mathbb{T}$.

Пусть теперь $\gamma \in \Gamma$ – предельный ординал. Рассмотрим растущую систему G -подпространств $\{\mathbb{W}_{\gamma'} \subset \mathbb{W}_{\gamma''}\}_{\gamma' \leq \gamma'' < \gamma}$ и систему согласованных P -орбитных проекций $\{\hat{f}_{\gamma'}: \mathbb{W}_{\gamma'} \rightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}\}_{\gamma' < \gamma}$. Далее положим $\mathbb{W}_{\gamma}$ равным $\bigcup \{\mathbb{W}_{\gamma'} \mid \gamma' < \gamma\}$, а $\hat{f}_{\gamma}: \mathbb{W}_{\gamma} \rightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma}$ – равным $\hat{f}_{\gamma'}$ на $\mathbb{W}_{\gamma'}$ для всех $\gamma' < \gamma$. В силу условия (3) о порождаемости топологии отображение $\hat{f}_{\gamma}: \mathbb{W}_{\gamma} \rightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma}$ является непрерывным. Легко проверяется, что $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\gamma}$ и $\hat{f}_{\gamma}$ разрешают ОЗПД для H -допустимой диаграммы $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{Y} \cup \mathbb{Q}_{\gamma'}$ таким образом, что $\mathbb{W}_{\gamma'} \subset \mathbb{W}_{\gamma}$ и $\hat{f}_{\gamma'} = \hat{f}_{\gamma}|_{\mathbb{W}_{\gamma'}}$ для всех $\gamma' < \gamma$.

§ 10. Доказательство теоремы 2, (3)

В силу теоремы 1 существует решение $s': \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}'$, накрывающее $X \hookrightarrow Y$. Так как Y паракомпактно, а $p: \mathbb{Y}' \rightarrow Y$ совершенно, то $\mathbb{Y}'$ тоже паракомпактно.

Так как $\mathbb{X}$ является кружевным, то существует уплотнение $\mathbb{X}$ на метрическое пространство (см. [27]). Поэтому существует такое непрерывное отображение $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow B$ в банахово пространство B , что

(1) его ограничение на любую орбиту есть вложение.

Рассмотрим отображение $\psi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \equiv C(G, B)$, заданное формулой $\psi(x)(g) = \varphi(g^{-1}x)$, $g \in G, x \in \mathbb{X}$, и являющееся в силу (1) изовариантным отображением. Так как в силу теоремы 11 $\mathbb{Z} = C(G, B)$ есть G -ANE для класса паракомпактных пространств, а $\mathbb{Y}'$ паракомпактно, то существует G -отображение $\hat{\psi}: \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{Z}$, являющееся продолжением ψ .

Рассмотрим послойное произведение $\mathbb{Y} \equiv Y_\theta \times_\pi \mathbb{Z} \subset Y \times \mathbb{Z}$, где $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow Z$ – орбитная проекция, а $\theta: Y \rightarrow Z$ – отображение орбит, индуцированное $\hat{\psi}$. Как подмножество произведения двух кружевных пространств, G -пространство $\mathbb{Y}$ является кружевным. Так как ψ является изовариантным отображением, то G -пространство $\mathbb{X}$ естественно содержится в G -пространстве $\mathbb{Y}$, $s: \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$, при этом s накрывает $X \hookrightarrow Y$. Наконец, для естественного G -отображения $h: \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{Y}$, $h(y') = (p(y'), \hat{\psi}(y'))$, справедливо $h \circ s' = s$ и $\tilde{h} = \text{Id}_Y$.

Авторы признательны В. Л. Тимоховичу за ряд полезных консультаций по общей топологии.

Список литературы

- [1] S. M. Ageev, D. Repovš, E. V. Ščepin, “The extension problem for complete UV^n -preimages”, *Tsukuba J. Math.*, **23**:1 (1999), 97–111.
- [2] В. В. Федорчук, “Продолжения расслоений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1985, № 1, 60–62; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “Extension of fiberings”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1985, № 40, 92–95.
- [3] С. М. Агеев, “Экстензорные свойства пространств орбит и задача продолжения действия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 1, 11–16; англ. пер.: S. M. Ageev, “Extensor properties of orbit spaces and the problem of continuation of an action”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:1994, 9–12.
- [4] S. M. Ageev, “Задача о продолжении действия и экстензорные свойства пространств орбит”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 6, 80.
- [5] С. А. Антонян, “Ретракционные свойства пространства орбит”, *Матем. сб.*, **137(179)**:3(11) (1988), 300–318; англ. пер.: S. A. Antonyan, “Retraction properties of an orbit space”, *Math. USSR-Sb.*, **65**:2 (1990), 305–321.
- [6] J. W. Jaworowski, “Symmetric products of ANR’s associated with a permutation group”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **20** (1972), 649–651.
- [7] С. М. Агеев, Д. Реповш, “Метод Яворовского в задаче о сохранении экстензорных свойств орбитным функтором”, *Матем. заметки*, **71**:3 (2002), 470–473; англ. пер.: S. M. Ageev, D. Repovš, “The Jaworowski method in the problem of the preservation of extensor properties by the orbit functor”, *Math. Notes*, **71**:3–4 (2002), 428–431.
- [8] С. М. Агеев, “О продолжении действия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1992, № 5, 20–23; англ. пер.: S. M. Ageev, “On extending the action”, *Math. Notes*, **47**:5 (1992), 17–19.

- [9] С. М. Агеев, “Об одной задаче Замбахидзе–Смирнова”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 3–11; англ. пер.: S. M. Ageev, “On a problem of Zambakhidze–Smirnov”, *Math. Notes*, **58**:1 (1995), 679–684.
- [10] R. Cauty, “Une généralisation du théorème de Borsuk–Whitehead–Hanner aux espaces stratifiables”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **275**:4 (1972), 271–274.
- [11] M. Murayama, “On G -ANR’s and their G -homotopy types”, *Osaka J. Math.*, **20**:3 (1983), 479–512.
- [12] H. Toruńczyk, J. E. West, “The fine structure of S^1/S^1 ; a Q -manifold hyperspace localization of the integers”, *Proceedings of the International Conference on Geometric Topology* (Warsaw, 1978), PWN, Warsaw, 1980, 439–449.
- [13] Г. Е. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, **46**, Academic Press, New York–London, 1972.
- [14] Т. том Дик, *Преобразования групп и теория представлений*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, Lecture Notes in Math., **766**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [15] T. Matumoto, “Equivariant K -theory and Fredholm operators”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.*, **18** (1971), 109–125.
- [16] Ch. N. Maxwell, “Homomorphisms of topological transformation groups into function spaces”, *Duke Math. J.*, **33**:3 (1966), 567–574.
- [17] C. H. Dowker, “On a theorem of Hanner”, *Ark. Mat.*, **2**:4 (1952), 307–313.
- [18] R. S. Palais, “The classification of G -spaces”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1960, № 36.
- [19] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [20] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 4-е изд., Наука, М., 1984; англ. пер. 2-го изд.: L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1966.
- [21] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [22] J. Szenthe, “On the topological characterization of transitive Lie group actions”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36**:3–4 (1974), 323–344.
- [23] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, М., 1973.
- [24] Г. Виллалобос, “Обращение теоремы о существовании срезов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **55**:1 (2000), 19–22; англ. пер.: G. Villalobos, “Inversion of the theorem on the existence of slices”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **55**:1 (2000), 26–29.
- [25] С. М. Агеев, “Эквивариантная теорема Дугунджи”, *УМН*, **45**:5 (1990), 179–180; англ. пер.: “The equivariant theorem of Dugundji”, *Russian Math. Surveys*, **45**:5 (1990), 219–220.
- [26] H. Abels, “A universal proper G -space”, *Math. Z.*, **159**:2 (1978), 143–158.
- [27] C. J. R. Borges, “On stratifiable spaces”, *Pacif. J. Math.*, **17**:1 (1966), 1–16.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)

Механико-математический факультет
Беларусского государственного университета,
г. Минск, Беларусь
E-mail: ageev_sergei@yahoo.com

Поступила в редакцию

24.01.2009 и 04.10.2009

Д. Реповш (D. Repovš)

Faculty of mathematics and physics
University of Ljubljana, Slovene
E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si