Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, О задаче Дирихле для полианалитических функций, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 59–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 04:39:17

УДК 517.538.5+517.956.2

М. Я. Мазалов

О задаче Дирихле для полианалитических функций

Изучается связь между граничным поведением полианалитических функций и структурой границы. В частности, построена жорданова область с липшицевой границей, регулярная относительно задачи Дирихле в классе бианалитических функций.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: полианалитические функции, граничные свойства, конструкция Лузина–Привалова, однолистные функции, лакунарные ряды, теорема Рудина–Карлесона.

Введение. Формулировка результатов

Напомним (см., например, [1]), что *полианалитическими функциями порядка n* (кратко – *n -аналитическими*, при $n = 2$ – *бианалитическими*) называются решения уравнения $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0$ на открытых подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, где $\partial / \partial \bar{z}$ – оператор Коши–Римана. При этом каждая функция, n -аналитическая в некоторой области, однозначно представима в виде

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(z) \bar{z}^m, \quad (0.1)$$

где все f_m – функции, аналитические в той же области, называемые *аналитическими компонентами* f .

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – жорданова область со спрямляемой границей, Γ – граничная дуга, f – функция, n -аналитическая в области G и имеющая почти всюду на дуге Γ угловые граничные значения. Напомним, что граничная теорема единственности Лузина–Привалова [2; гл. 4, § 2] и теорема Голубева–Привалова [2; гл. 3, § 5] накладывают весьма жесткие условия на граничные значения аналитических функций. Рассмотрим ситуацию для n -аналитических функций при $n \geq 2$.

В случае аналитических дуг ситуация стандартна. Действительно, уравнение аналитической дуги Γ имеет вид $\bar{z} = A(z)$, где $A(z)$ – функция, аналитическая в некоторой окрестности Γ , называемая *функцией Шварца* [3]. При этом (см., например, [1; § 4]) угловые граничные значения функции f на Γ совпадают

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3877.2008.1).

в соответствующих точках с угловыми граничными значениями аналитической согласованной функции

$$f_{\Gamma}(z) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(z)(A(z))^m.$$

Ситуация становится более сложной, если Γ нигде не аналитична. Именно этот случай и будет основным в настоящей работе.

В § 1 строится бесконечно гладкая кривая, на которой для полианалитических функций любого порядка граничная теорема единственности Лузина–Привалова справедлива в такой же формулировке, как и для аналитических функций.

ПРИМЕР 1. Существует жорданова область D , ограниченная бесконечно гладкой кривой ∂D и обладающая следующим свойством. Пусть $D' \subset D$ – произвольная жорданова область такая, что ее граничная дуга Γ является частью ∂D , f – функция, полианалитическая в D' . Если f имеет на подмножестве Γ положительной длины угловые граничные значения, равные нулю, то $f \equiv 0$ в D' .

Заметим, что ∂D не может пересекаться ни с какой аналитической дугой на множестве положительной длины (в противном случае непостоянная бианалитическая функция $\bar{z} - A(z)$ равна нулю на этом множестве). Вместе с тем, существуют области с нигде не аналитической границей, в которых есть непостоянные бианалитические функции, равные нулю на границе [4].

В §§ 2–4 исследуется вопрос о разрешимости краевой задачи Дирихле для полианалитических функций, поставленный, в частности, в [5; § 4]. Пусть H – функция, аналитическая в круге K , задаваемом неравенством $|w| < 1$, и однолистно отображающая K на жорданову область G со спрямляемой границей ∂G , причем $|H'(w)| > c_0 > 0$ в K . Пусть $C(\partial G)$ – банахово пространство функций, непрерывных на ∂G , с равномерной нормой; $S_n = S_n(\partial G, G)$ – подпространство $C(\partial G)$, элементами которого являются граничные значения функций, n -аналитических в G и непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$; $S = \bigcup_n S_n$. В § 2 будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнено условие*

$$\iint_K |H''(w)| r dr d\varphi < \infty \quad (0.2)$$

(где $w = re^{i\varphi}$), то S имеет первую категорию в $C(\partial G)$.

Так как $C(\partial G)$ – полное метрическое пространство, то по теореме Бэра о категории (см., например, [6; гл. 2, п. 2.2]) имеем $S \neq C(\partial G)$. Заметим, что условие (0.2), в частности, выполняется, если ∂G – Дини-гладкая кривая (лемма 2.2); этот факт по существу вытекает из теоремы Варшавского (см. [7; теорема 10.2]). Имеет место и локальное утверждение, уточняющее теорему 1, – это теорема 2.

Теорему 1 интересно сопоставить с результатом Федоровского (см. [8; теорема 1], [5; § 2, п. 2.6]): для “большинства” областей G , в том числе и с аналитической границей (кроме весьма специальных областей, ограниченных неванлинновскими контурами) $S_2(\partial G, G)$ является всюду плотным подпространством $C(\partial G)$.

Возникает естественный вопрос: можно ли в теореме 1 отбросить условие (0.2)? Пример, построенный в §§ 3–4 и являющийся наиболее существенным результатом настоящей работы, показывает, что этого сделать нельзя.

ПРИМЕР 2. Существует жорданова область G с липшицевой границей такая, что $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$.

В § 3 с помощью лакунарных рядов строятся вспомогательные функции и основным результатом здесь является теорема 3. Построение примера завершается в § 4, где приводится геометрическая конструкция искомой области. В доказательстве существенно используются теорема Рудина–Карлесона об интерполяционных множествах пика для непрерывных аналитических функций (см. [9], [10]) и методы функционального анализа.

Автор выражает благодарность М. С. Мельникову, П. В. Парамонову и К. Ю. Федоровскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 1. Построение примера 1

Построим функцию H , аналитическую в круге K и однолистно отображающую K на требуемую область D .

Далее $B = B(a, r)$ – это открытый круг с центром в точке a и радиусом r ; λB – круг с тем же центром и радиусом λr . Пусть $\{B_j\} = \{B(a_j, r_j)\}$, $j = 1, 2, \dots$, – счетное семейство кругов таких, что $2B_j$ попарно внешние, расположены вне K и $r_j < 1/2$ для всех j . При этом выполнены следующие два условия:

- (1) условие Бляшке, т.е. $\sum_j (|a_j| - 1) < \infty$;
- (2) замыкание множества $\{a_j\}$ содержит единичную окружность ∂K .

Рассмотрим два стандартных следствия условия (1).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Зафиксируем произвольное ψ , $0 < \psi < \pi/2$, и для любой точки $e^{i\varphi}$ возьмем угол $V_\psi(e^{i\varphi})$, образованный лучами $z = e^{i\varphi} + te^{i(\varphi \pm \psi)}$, $t \geq 0$. Тогда для почти всех точек ∂K соответствующий угол $V_\psi(e^{i\varphi})$ пересекает не более чем конечное множество кругов B_j .*

Действительно, для каждого достаточно большого номера j возьмем криволинейный равнобедренный треугольник, образованный углом при вершине величины 2ψ , описанным вокруг B_j , и дугой, отсекаемой этим углом на ∂K , в качестве основания. Тогда в силу (1) сумма характеристических функций оснований таких треугольников почти всюду конечна на ∂K .

Пусть $K' = (|w| > 1) \setminus \bigcup_j B_j$. Следствие 1 позволяет рассматривать угловые граничные значения почти всюду на ∂K функций, заданных на K' .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть F – функция, аналитическая внутри K' . Если F имеет на подмножестве ∂K положительной длины угловые граничные значения, равные нулю, то $F \equiv 0$.

Доказательство следствия 2 получается повторением рассуждений из построения Лузина–Привалова [2; гл. 4, § 2, п. 2.4] или [11; гл. 3, § D] (так же, как и для мероморфных функций с полосами в B_j).

Определим функцию H следующим образом:

$$H(w) = w + \sum_{j,k} \frac{\varepsilon_{j,k}}{w - w_{j,k}}, \quad (1.1)$$

где для фиксированного j множество $\{w_{j,k}\}$ – счетное множество изолированных точек, расположенных в $(1/2)B_j$, $\sum_k |\varepsilon_{j,k}| < (r_j)^{j+2}$, $\varepsilon_{j,k} \neq 0$ при всех j и k .

ЛЕММА 1.1. Функция H обладает следующими свойствами:

- 1) H является аналитической всюду вне замыкания множества $\{w_{j,k}\}$ (в частности, аналитической в K);
- 2) сужение H на K' является непрерывной функцией, причем производные H любого порядка непрерывно продолжаются изнутри K на ∂K ;
- 3) на множестве K' верна оценка $|H(w) - H(1/\bar{w})| \leq 6(1 - |w|)$.
- 4) H однолистно отображает K на жорданову область;
- 5) H имеет на ∂K вне K почти всюду угловые граничные значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитичность H вне замыкания $\{w_{j,k}\}$ следует из сходимости ряда $\sum_{j,k} |\varepsilon_{j,k}|$, а свойство 2) – из следующих оценок на K' :

$$\sum_{j,k} \left| \left(\frac{\varepsilon_{j,k}}{w - w_{j,k}} \right)^{(m)} \right| < m! 2^{m+1} \sum_{j=1}^{\infty} (r_j)^{j+1-m} < \infty.$$

Аналогично, на множестве K' справедлива оценка

$$\left| H(w) - H\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) \right| \leq \left| w - \frac{1}{\bar{w}} \right| \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (r_j)^j \right) \leq 6(1 - |w|).$$

При $|w| < 1$ имеем место оценка

$$|H'(w) - 1| < \frac{4}{9} \sum_{j=1}^{\infty} (r_j)^j < \frac{4}{9},$$

откуда следует 4). Свойство 5) вытекает из 2) и следствия 1 условия 1). Лемма доказана.

Обозначим через D жорданову область с бесконечно гладкой границей, на которую в силу леммы 1.1 функция H отображает K , и покажем, что эта область – искомая. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что область D' – образ пересечения окрестности произвольной точки $e^{i\varphi}$ с K , а дуга Γ соответственно – образ пересечения этой окрестности с ∂K . Пусть D_1 – прообраз D' , а Γ_1 – прообраз Γ .

ЛЕММА 1.2. Пусть f – функция, n -аналитическая в D' . Если f принимает на подмножестве Γ положительной длины угловые граничные значения, равные нулю, то $f \equiv 0$ в D' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_0 \in \Gamma_1$, $z_0 = H(w_0)$, $f(z)$ – функция, n -аналитическая в D' и имеющая в точке z_0 угловое граничное значение, которое обозначим через $f(z_0)$. Тогда из аналогов неравенств Коши следует, что каждая из функций $(z - z_0)^m (\partial^m f / \partial \bar{z}^m)$, $m = 1, 2, \dots$, имеет в точке z_0 угловое граничное значение, равное нулю. (Действительно [1; § 1, п. 1.4, формула 16], если функция g n -аналитична в круге $B(a, \delta)$ и ее модуль ограничен в этом круге постоянной M , то в центре круга ζ имеют место неравенства

$$|\nabla^m g(\zeta)| \leq A(n, m) \frac{M}{\delta^m}, \quad (1.2)$$

и остается применить (1.2) к функции $g(z) = f(z) - f(z_0)$.

Запишем $f(z)$ в виде (0.1) и рассмотрим ее прообраз в D_1 ($w = H^{-1}(z)$):

$$F(w) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(H(w)) \overline{H(w)}^m. \quad (1.3)$$

Напомним, что из неравенства $|H'(w)| > c_0 > 0$ (которое здесь заведомо выполняется при $c_0 = 5/9$) в силу теоремы Кёбе об искажении (см., например, [12; гл. 2, § 4, теорема 2]) следует, что

$$\sup_{w \in K} \frac{\text{dist}(w, \partial K)}{\text{dist}(H(w), \partial D)} < \infty. \quad (1.4)$$

Отсюда заключаем, что для каждой формальной производной $\partial^m F / \partial \bar{H}^m$ (прообраза $\partial^m f / \partial \bar{z}^m$) при $m = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \left((w - w_0)^m \frac{\partial^m F}{\partial \bar{H}^m}(w) \right) = 0, \quad (1.5)$$

если w стремится к $w_0 = H^{-1}(z_0)$ по некасательному направлению.

Для $H(w)$ из (1.1) рассмотрим функцию $H_*(w) = \overline{H(1/\bar{w})}$:

$$H_*(w) = \frac{1}{w} + \sum_{j,k} \frac{\bar{\varepsilon}_{j,k}}{w^{-1} - \bar{w}_{j,k}}. \quad (1.6)$$

Свойства функции $H_*(w)$ с точностью до инверсии аналогичны свойствам $H(w)$, указанным в лемме 1.1. В частности, $H_*(w)$ аналитична всюду вне $w = 0$ и замыкания множества $\{1/\bar{w}_{j,k}\}$, непрерывна на множестве $K'' = (1/2 \leq |w| \leq 1) \setminus \bigcup_j B'_j$ (где B'_j – круги, полученные из B_j с помощью инверсии) и имеет почти всюду на ∂K изнутри K угловые граничные значения. Пусть $w \in K$, причем $w \neq 0$, $w \neq 1/\bar{w}_{j,k}$, а Φ – следующая функция:

$$\Phi(w) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(H(w)) (H_*(w))^m. \quad (1.7)$$

Применив формулу Тейлора для многочленов, из (1.3) получим

$$\Phi(w) = F(w) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} (H_*(w) - \overline{H(w)})^m \frac{\partial^m F}{\partial \overline{H}^m}(w).$$

Разность $H_*(w) - \overline{H(w)}$ оценивается на K'' так же, как и в утверждении 3) леммы 1.1 на K' оценивается разность $H(w) - H(1/\overline{w})$. Отсюда в силу (1.5) получим, что угловые граничные значения функций $F(w)$ и $\Phi(w)$ на ∂K (внутри K) в случае существования почти всюду совпадают.

Завершим доказательство леммы 1.2. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям этой леммы. Тогда функция $F(w)$ и, следовательно, $\Phi(w)$ имеет на подмножестве Γ_1 положительной длины угловые граничные значения, равные нулю. Применив инверсию и воспользовавшись следствием 2 условия (1) (условия Бляшке), получим, что $\Phi \equiv 0$.

Чтобы показать, что $f \equiv 0$, достаточно убедиться в том, что $f_{n-1} \equiv 0$, где f_{n-1} – старшая аналитическая компонента f . Пусть γ – контур, охватывающий только одну из точек $1/\overline{w}_{j,k}$ (все остальные точки расположены вне контура). Тогда в силу (1.6) и (1.7) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} \frac{\Phi(w)(w^{-1} - \overline{w}_{j,k})^{n-2}}{\varepsilon_{j,k}^{n-1}} dw = \oint_{\gamma} \frac{f_{n-1}(H(w))}{w^{-1} - \overline{w}_{j,k}} dw \\ &= -\frac{2\pi i}{\overline{w}_{j,k}^2} f_{n-1} \left(H \left(\frac{1}{\overline{w}_{j,k}} \right) \right). \end{aligned}$$

Так как в силу определения H и условия (2), наложенного на $\{a_j\}$, множество $\{1/\overline{w}_{j,k}\}$ имеет предельные точки внутри D_1 , то по внутренней теореме единственности аналитических функций получаем, что $f_{n-1} \equiv 0$. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Далее через $A, A_1, A_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, каждая из которых в разных соотношениях может принимать различные значения.

Пусть G – жорданова область со спрямляемой границей, $f(z)$ – функция, n -аналитическая в G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ (т.е. $f \in A_n(\overline{G})$), $F(w)$ – соответствующая $f(z)$ функция из (1.3) (т.е. $F \in \widehat{A}_n(\overline{K})$), H – функция, аналитическая в круге K и однолистно отображающая K на G , причем выполнено условие (0.2) и $|H'(w)| > c_0 > 0$ в K .

Пусть $M = \max_{|w| \leq 1} F(w)$. Теорема 1 немедленно вытекает из следующей оценки, доказываемой в лемме 2.1:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{|w|=1} F(w) w^N dw \right| \leq \alpha_N, \quad (2.1)$$

где $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_N = \alpha_N(M, n, H)$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = 0$ (существенно, что α_N не зависит от функции F).

Действительно, рассмотрим множество $S_{n,p}$ функций $F(e^{i\varphi})$, являющихся граничными значениями функций $F \in \widetilde{A}_n(\overline{K})$ таких, что $|F(w)| \leq p$ в K , где n и $p \in \mathbb{N}$ фиксированы. Пусть U – произвольный шар пространства $C(\partial K)$ с центром g радиуса ε , P – тригонометрический многочлен вида $\sum_{|k| \leq n_0} c_k e^{ik\varphi}$ такой, что $\|g - P\|_{L_\infty} < \varepsilon/3$. В силу (2.1) можно взять N таким, что $N > n_0$ и $\alpha_N = \alpha_N(p, n, H) < \varepsilon/6$. Тогда, как нетрудно проверить, шар с центром в точке $P + e^{-i(N+1)\varphi} \varepsilon/3$ радиуса $\varepsilon/12$ содержится в U и не содержит функций из $S_{n,p}$. Следовательно, множества $S_{n,p}$ нигде не плотны в пространстве $C(\partial K)$.

ЛЕММА 2.1. В формуле (2.1) при достаточно больших N можно взять

$$\alpha_N = A(M, n, H) \iint_K |H''(w)| r^{N-n+1} r dr d\varphi. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что функция $F(w)$ бесконечно дифференцируема в круге $|w| \leq R$, $R < 1$. Интегрируя по частям, получим следующее тождество ($k \in \mathbb{N}$):

$$\iint_{|w| \leq R} k(R^2 - r^2)^{k-1} F(w) w^N r dr d\varphi = \iint_{|w| \leq R} (R^2 - r^2)^k \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} w^{N-1} r dr d\varphi. \quad (2.3)$$

Из формулы Грина и (2.3) следует, что при $N \geq n - 1$ и $1 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} \int_{|w|=R} F(w) w^N dw &= 2i \iint_{|w| \leq R} \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} w^N r dr d\varphi \\ &= \frac{2i}{(m-1)!} \iint_{|w| \leq R} (R^2 - r^2)^{m-1} \frac{\partial^m F}{\partial \bar{w}^m} w^{N-m+1} r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сначала рассмотрим случай функций $F \in \widetilde{A}_2(\overline{K})$. Здесь в силу условия

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{H}^2} \equiv 0$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{|w|=R} F(w) w^N dw &= 2i \iint_{|w| \leq R} (R^2 - r^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}^2} w^{N-1} r dr d\varphi \\ &= 2i \iint_{|w| \leq R} (R^2 - r^2) \frac{\partial F}{\partial \bar{H}}(w) \overline{H''(w)} w^{N-1} r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Напомним, что в силу (1.2) имеем

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \right| \leq A(M) \operatorname{dist}(z, \partial G)^{-1}.$$

Отсюда, используя оценки $|H'(w)| > c_0 > 0$ и (1.4), получим

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \bar{H}}(re^{i\varphi}) \right| \leq A(M, H)(1 - r)^{-1}.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow 1$, получим (2.2).

При $n > 2$ рассуждаем аналогично. Именно, последовательно вычисляя

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}^2} = \frac{\partial F}{\partial \bar{H}} \overline{H''(w)} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{H}^2} \overline{H'(w)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{H}^2} \overline{H'(w)^2} \right], \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[\frac{\partial^{n-1} F}{\partial \bar{H}^{n-1}} \overline{H'(w)^{n-1}} \right]$$

и учитывая неравенства

$$\left| \frac{\partial^m F}{\partial \bar{H}^m} (re^{i\varphi}) \right| \leq A(M, n, H)(1-r)^{-m}$$

при $m < n$, а также то, что

$$\frac{\partial^n F}{\partial \bar{H}^n} \equiv 0,$$

получим (2.2).

Лемма доказана, и тем самым доказана теорема 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1; $\Gamma \subset \partial G$ – замкнутая дуга. Тогда множество функций, являющихся граничными значениями на Γ функций из $A_n(\bar{G})$, имеет первую категорию в пространстве $C(\Gamma)$.

Ограничимся указанием тех несложных изменений, которые нужно внести в доказательство теоремы 1, чтобы получить доказательство теоремы 2.

Действительно, нужно (в отличие от теоремы 1) рассмотреть функцию $F(w)$ не в круге, а в подходящем секторе Σ , ограниченном прямыми $\bar{w} = \zeta_1 w$, $\bar{w} = \zeta_2 w$ ($|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$) и дугой окружности $|w| = R$; применить (2.4) к вспомогательной функции $\Psi(w) = (\bar{w} - \zeta_1 w)^n (\bar{w} - \zeta_2 w)^n F(w)$, равной нулю на указанных прямых:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} \Psi(w) w^N dw &= 2i \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{w}} w^N r dr d\varphi \\ &= \frac{2i}{(m-1)!} \iint_{\Sigma} (R^2 - r^2)^{m-1} \frac{\partial^m \Psi}{\partial \bar{w}^m} w^{N-m+1} r dr d\varphi, \end{aligned}$$

что приводит к оценке, аналогичной (2.1) для соответствующей дуги ∂K , и, следовательно, позволяет доказать теорему 2.

Покажем, что условия теоремы 1 выполняются для любой жордановой области, ограниченной Дини-гладкой кривой. Напомним [7; § 10.1], что кривая называется *Дини-гладкой*, если ее угол наклона касательной $\beta(s)$ как функция длины дуги s удовлетворяет условию $|\beta(s_2) - \beta(s_1)| < \tilde{\omega}(|s_2 - s_1|)$, где для модуля непрерывности $\tilde{\omega}(\delta)$ выполнено условие Дини

$$\int_0^1 \frac{\tilde{\omega}(\delta)}{\delta} d\delta < \infty.$$

Напомним, что имеет место теорема Варшавского (см. [7; теорема 10.2]): если G – жорданова область с Дини-гладкой границей, то функция H' непрерывна в $\bar{K}$, причем $|H'(w)| > c_0 > 0$ в $\bar{K}$.

Указанная теорема по существу содержит следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Если G – жорданова область с Дини-гладкой границей ∂G , то выполнено условие (0.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu(t) = \arg H'(e^{it})$. Напомним, что по теореме Линделёфа (см. [7; теорема 10.1]) в силу гладкости ∂G функция $\arg H'(w)$ непрерывна в $\bar{K}$. По теореме Смирнова (см. [7; лемма 10.1]) и формуле (11) (см. [7; § 10.1]) модуль непрерывности $\omega(\delta)$ функции $\nu(t)$ допускает оценку $\omega(\delta) \leq \delta + \tilde{\omega}(A\sqrt{\delta})$ (где $A = A(H)$; напомним, что $\tilde{\omega}(\delta)$ – модуль непрерывности функции $\beta(s)$, удовлетворяющий условию Дини). Отсюда легко вывести, что $\omega(\delta)$ также удовлетворяет условию Дини.

Пусть $w = re^{i\varphi} \in K$, $\delta = 1 - r$. Из формулы Шварца следует, что

$$\log H'(w) = \log H'(0) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} \nu(t) dt.$$

Дифференцируя по w под знаком интеграла, имеем

$$|H''(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\bar{K}} |H'(w)| \left| \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}[\nu(t) - \nu(\varphi)]}{(e^{it} - w)^2} dt \right|.$$

Разбивая интеграл в правой части на сумму интегралов по дугам ∂K , длины которых соизмеримы с $2^j\delta$, $j = 1, 2, \dots$, получаем

$$|H''(w)| \leq A \left(\omega(\pi) + \delta^{-1} \sum_{j=0}^{[\log(1/\delta)]} \frac{\omega(2^j\delta)}{2^j} \right),$$

где $A = A(H)$.

Отсюда, интегрируя $|H''(w)|$ по кольцам $\{1 - 2^{j+1}\delta \leq |w| \leq 1 - 2^j\delta\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, находим, что

$$\iint_{|w| < 1-\delta} |H''(w)| r dr d\varphi \leq A\pi\omega(\pi) + A_1 \sum_{k=0}^{[\log(1/\delta)]} \sum_{j=k}^{[\log(1/\delta)]} \frac{\omega(2^j\delta)}{2^{j-k}}.$$

Двойная сумма в правой части неравенства не превосходит

$$2A_1 \sum_{k=0}^{[\log(1/\delta)]} \omega(2^k\delta)$$

и остается равномерно ограниченной при $\delta \rightarrow 0$, так как

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty.$$

Лемма доказана.

§ 3. Пример 2: построение вспомогательных функций

Будем использовать лакунарные ряды вида

$$h(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} w^{\alpha_k}, \quad (3.1)$$

где $\alpha_k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k+1}/\alpha_k \geq 2$, $\alpha_{k+1}/\alpha_k \nearrow \infty$ и $\beta_k \searrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Ясно, что в этом случае функция h непрерывна в $\overline{K}$. Сделаем ряд замечаний, поясняющих выбор β_k .

1) Нетрудно убедиться, что

$$\iint_K |h''(w)| r dr d\varphi \leq A \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$$

и ограниченность $h'(w)$ в K равносильна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$.

2) Функция $h'(w)$ тогда и только тогда имеет почти всюду на ∂K угловые граничные значения, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty$ (см., например, [2; § 10]).

3) Условие $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| = \infty$ несовместимо с однолистностью h (см. [7; § 5.4]).

Поэтому будем считать, что в (3.1) дополнительно выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty,$$

и возьмем $\beta_k = 1/k$. Сначала проведем построение в K , не требуя однолистности (в качестве результата получим теорему 3). В § 4 проведем дополнительное построение на подходящем подмножестве K .

Рассмотрим следующую функцию:

$$h_{k_0}(w) = w + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k\alpha_k} w^{\alpha_k}, \quad (3.2)$$

где $k_0 \in \mathbb{N}$ (за счет выбора k_0 L_2 -норму функции $h'_{k_0}(w) - 1$ на ∂K можно сделать как угодно малой). Последовательность $\{\alpha_k\}$ будем считать настолько разреженной, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} < \infty \quad (3.3)$$

(достаточно взять $\alpha_k = 2^{k^2}$).

Заметим, что за счет разреженности α_k интеграл

$$\iint_{|w| \leq r} |h''(w)| r dr d\varphi$$

может расходиться как угодно медленно при $r \nearrow 1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $h(w) = h_{k_0}(w)$ из (3.2) или $h(w) = h_{k_0}(w) - w$. Тогда для любого $N_0 \in \mathbb{Z}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют многочлены $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ такие, что имеют место следующие оценки:

- 1) $|F(w) - w^{-N_0}| < \varepsilon$ при $|w| = 1$, где $F(w) = \Phi_1(w)\overline{h(w)} - \Phi_2(w)$;
- 2) $|F(w)| < 1 + \varepsilon$ при $|w| \leq 1$;
- 3) $\max(|\Phi_1(w)|, |\Phi_2(w)|) < \varepsilon(1 - |w|)^{-1}$ при $|w| < 1$;
- 4) $|F(w)| < \varepsilon$ при $|w| < 1 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно установить оценки 1)–3) при $N_0 \in \mathbb{N}$. Оценка 4) и случай остальных N_0 легко получаются отсюда умножением $F(w)$ на w^k при подходящем $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим случай $h(w) = h_{k_0}(w)$ (случай $h_{k_0}(w) - w$ требует лишь тривиальных изменений).

Пусть $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \searrow 0$, – последовательность, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \log k = 0; \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} = \infty \quad (3.4)$$

(при $k > 2$ достаточно взять $\varepsilon_k = (\log k \log \log k)^{-1}$).

Возьмем для ε_k из (3.4) многочлен

$$\Phi_1(w) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_0}, \quad (3.5)$$

где $k_1 > k_0$ столь велико, что $\alpha_{k+1} - \alpha_k - N_0 > (1/2)\alpha_{k+1}$ при $k \geq k_1$, и для подходящего k_2 имеем $|1 - \sum_{k=k_1}^{k_2} (\varepsilon_k/k)| < \varepsilon/2$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(w)\overline{h(w)} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_0} \left(\overline{w} + \sum_{m=k_0}^{\infty} \frac{1}{m\alpha_m} \overline{w}^{\alpha_m} \right).$$

Разобьем произведение на сумму следующих трех слагаемых.

1) $m = k$:

$$F_1(w) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\varepsilon_k}{k} w^{\alpha_k - N_0} \overline{w}^{\alpha_k}.$$

Ясно, что $|F_1(w) - w^{-N_0}| < \varepsilon/2$ при $|w| = 1$ и $|F_1(w)| < 1 + \varepsilon/2$ при $|w| \leq 1$.

2) $m > k$:

$$F_2(w) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_0} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m\alpha_m} \overline{w}^{\alpha_m}.$$

Из (3.3) следует, что, увеличивая k_1 , можно сделать $|F_2(w)|$ при $|w| \leq 1$ как угодно малым.

3) $m < k$:

$$F_3(w) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_0} \left(\overline{w} + \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{1}{m\alpha_m} \overline{w}^{\alpha_m} \right).$$

Рассмотрим многочлен

$$\Phi_2(w) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_0} \left(w^{-1} + \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{1}{m \alpha_m} w^{-\alpha_m} \right) \quad (3.6)$$

(так как $\alpha_{k+1} - \alpha_k - N_0 > (1/2)\alpha_{k+1}$, степени w положительны). В силу выбора Φ_2 при $|w| = 1$ имеет место равенство $F_3(w) = \Phi_2(w)$ и, следовательно, оценка 1) установлена. Оценим $|F_3(w) - \Phi_2(w)|$ при $|w| < 1$. Учитывая неравенство $1 - (w\bar{w})^{\alpha_m} \leq \alpha_m(1 - w\bar{w})$, получим

$$\begin{aligned} |F_3(w) - \Phi_2(w)| &\leq (1 - w\bar{w}) \sum_{k=k_1}^{k_2} \varepsilon_k \alpha_k |w|^{\alpha_k/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m} \right) \\ &\leq A \max_{k \in [k_1, k_2]} (\varepsilon_k \log k) (1 - |w|) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |w|^{\alpha_k/2}. \end{aligned}$$

Так как имеет место условие 1) из (3.4), то для того чтобы завершить доказательство оценки 2) и доказать оценку 3) (см. (3.5)), надо показать, что при $r < 1$

$$(1 - r) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^{\alpha_k/2} < A. \quad (3.7)$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай $r \geq 1/2$. Пусть

$$N(r) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\rceil.$$

Тогда

$$(1 - r) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^{\alpha_k/2} \leq A_1 (1 - r) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k r^{2^k} \leq A_1 \sum_{k=1}^{N(r)} 2^{k-N(r)} + A_2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k e^{-2^k} < A.$$

Лемма доказана.

Для построения примера 2 используется следующее утверждение, обобщающее лемму 3.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть f – произвольная непрерывная функция на ∂K , $M = \max |f(w)|$ на ∂K . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции h из леммы 3.1 существует функция $F = \Phi_1 \bar{h} - \Phi_2$ (где $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ – многочлены) такая, что:

- 1) $|F(w) - f(w)| \leq \varepsilon M$ при $|w| = 1$;
- 2) $|F(w)| \leq (1 + \varepsilon)M$ при $|w| \leq 1$;
- 3) $\max(|\Phi_1(w)|, |\Phi_2(w)|) \leq \varepsilon M(1 - |w|)^{-1}$ при $|w| < 1$;
- 4) $|F(w)| \leq \varepsilon M$ при $|w| < 1 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что $M \geq 1$. Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим многочлен следующего вида:

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^N c_m \Phi_{1,m}, \quad \text{где} \quad \Phi_{1,m}(w) = \sum_{k=k_{1,m}}^{k_{2,m}} \varepsilon_k \alpha_k w^{\alpha_k - N_m},$$

$\Phi_{1,m}$ – многочлены из (3.5), причем $k_{1,m+1} > k_{2,m}$, $N_m \in \mathbb{Z}$. Как следует из (3.7), в K имеет место оценка:

$$|\Phi_1(w)| \leq A(1 - |w|)^{-1} \max_m |c_m| \varepsilon_{k_{1,1}}. \quad (3.8)$$

В силу леммы 3.1 для $m = 1, \dots, N$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют числа ε'_m и ε''_m такие, что $\varepsilon''_m < \varepsilon'_m < \varepsilon$ и $\varepsilon'_{m+1} < \varepsilon''_m$, и многочлены $\Phi_{2,m}(w)$ из (3.6) такие, что для функций $F_m = \Phi_{1,m}\bar{h} - \Phi_{2,m}$ будут выполнены неравенства $|c_m F_m(w)| < \varepsilon/2^{m+1}$ при $|w| < 1 - \varepsilon'_m$ и $|c_m| |F_m(re^{i\varphi}) - e^{-iN_m\varphi}| < \varepsilon/2^{m+1}$ при $|w| > 1 - \varepsilon''_m$.

Тогда для функции $F = \sum_{m=1}^N c_m F_m$ получим, что $|F(e^{i\varphi}) - P(e^{i\varphi})| < \varepsilon$, где $P(e^{i\varphi}) = \sum_{m=1}^N c_m e^{-iN_m\varphi}$, а при $|w| < 1$:

$$|F(w)| < \max_{s=1, \dots, N; \varphi \in [0, 2\pi)} \left| \sum_{m=1}^s c_m e^{-iN_m\varphi} \right| + \max_m |c_m| + \varepsilon.$$

Заметим, что числа N_m не обязательно различны, поэтому, изменяя c_m , можно записать тригонометрический многочлен P в виде $\sum_{m=1}^N c_m e^{-iN_m\varphi}$ разными способами. В частности, можно взять m достаточно большим и так выбрать c_m , “измельчая” коэффициенты Фурье P , что будет выполнена оценка

$$|F(w)| < \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} |P(e^{i\varphi})| + \varepsilon.$$

Равномерно приближая исходную функцию f тригонометрическими многочленами, получим оценки 1) и 2). Оценки 3) и 4) следуют из (3.8), если $k_{1,1}$ достаточно велико. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции f , непрерывной на ∂K , существует функция $F_f = \Phi_1\bar{h} - \Phi_2$ (Φ_1 и Φ_2 – аналитичны в K), непрерывная при $|w| \leq 1$ и такая, что $F_f = f$ на ∂K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \max |f(w)|$ на ∂K . Определим следующие последовательности функций $\{f_{(n)}\}$ и $\{F_{(n)} = \Phi_{1,(n)}\bar{h} - \Phi_{2,(n)}\}$.

Пусть

$$f_{(0)} = f, \quad f_{(n)}(e^{i\varphi}) = f_{(n-1)}(e^{i\varphi}) - F_{(n)}(e^{i\varphi}),$$

где $F_{(n)}$ – функция из леммы 3.2, построенная по $f_{(n-1)}$ с $\varepsilon_{(n)} = 1/2^n$. Следовательно, всюду на ∂K

$$\left| f(e^{i\varphi}) - \sum_{m=1}^n F_{(m)}(e^{i\varphi}) \right| = |f_{(n-1)}(e^{i\varphi}) - F_{(n)}(e^{i\varphi})| = |f_n(e^{i\varphi})| \leq \frac{M}{2^n}. \quad (3.9)$$

Так как $|f_{(n-1)}(e^{i\varphi})| \leq M/2^{n-1}$, то в силу условий 2), 3) леммы 3.2 можем считать, что $|F_{(n)}(w)| \leq M/2^{n-2}$ при $|w| \leq 1$ и $\max(|\Phi_{1,(n)}(w)|, |\Phi_{2,(n)}(w)|) \leq (M/2^{n-1})(1 - |w|)^{-1}$ при $|w| < 1$, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1,(n)}(w)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2,(n)}(w)$ сходятся в K абсолютно и равномерно.

Пусть

$$F_f = \sum_{n=1}^{\infty} F_{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1,(n)}\bar{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2,(n)} = \Phi_1\bar{h} - \Phi_2.$$

В силу (3.9) $F_f(e^{i\varphi}) \equiv f(e^{i\varphi})$. Теорема доказана.

Построение примера 2 на этом, конечно, не завершено. Проблема состоит в том, что функция h из леммы 3.1 не может быть однолистной в K , так как условия, указанные в замечаниях 1) и 3) перед леммой 3.1, несовместны.

§ 4. Пример 2: конструкция области G

Пусть G – жорданова область со спрямляемой границей ∂G . Прежде всего в леммах 4.1 и 4.2 получим условия, равносильные условию $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$ и удобные для проверки, затем вернемся к построению примера. Заметим, что теорема 3 (как следствие леммы 3.2) является частным случаем следующего утверждения функционального анализа (см., например, [6; лемма 4.13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть U и V – открытые единичные шары в банаховых пространствах X и Y , T – ограниченный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$. Если для некоторого $\lambda > 0$ образ шара λU плотен в V , то он содержит V .

Применим указанное утверждение в следующей ситуации: $X = A_2(\overline{G})$ (полнота X следует из того, что в силу (1.2) сходимость бианалитических функций в $C(\overline{G})$ влечет равномерную сходимость их аналитических компонент в G), $Y = C(\partial G)$, T – оператор сужения на ∂G функции, непрерывной на $\overline{G}$. Таким образом, для установления равенства $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$ достаточно убедиться в том, что существует $\lambda > 0$, при котором множество $T(\lambda U)$ плотно в единичном шаре из $C(\partial G)$. В противном случае, так как множество $\overline{T(\lambda U)}$ замкнуто и выпукло, по теореме об отделимости выпуклых множеств существует линейный непрерывный функционал пространства $C(\partial G)$, отделяющий $\overline{T(\lambda U)}$ от некоторой функции $f \in C(\partial G)$, $\|f\|_{L_\infty} \leq 1$. Поэтому для установления равенства $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$ достаточно показать, что таких функционала и функции f не существует и, таким образом, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. Условие $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$ равносильно следующему.

Существует $\lambda > 0$, при котором для любых функции $f \in C(\partial G)$ такой, что $\|f\|_{L_\infty}(\partial G) \leq 1$, конечной комплексной борелевской меры μ на ∂G с полной вариацией $\|\mu\|(\partial G) = 1$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $F = F(f, \mu, \varepsilon) \in A_2(\overline{G})$ такая, что $|F(z)| < \lambda$ в G и имеет место оценка

$$\left| \int_{\partial G} (f(z) - F(z)) d\mu_z \right| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В лемме 4.1 существенно, что функции F равномерно ограничены в G . В противном случае получим более слабое утверждение – плотность $S_2(\partial G, G)$ в $C(\partial G)$. Этот факт имеет место тогда и только тогда, когда ∂G не является неванлинновским контуром [8; теорема 1]; простейший пример контура, не являющегося неванлинновским, – эллипс, отличный от окружности.

С помощью теоремы Рудина–Карлесона [9], [10] и леммы 4.1 получим следующее утверждение, которое будем использовать для построения примера 2.

ЛЕММА 4.2. Условие $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$ равносильно следующему.

Существует возрастающая последовательность $\{E_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, замкнутых подмножеств ∂G таких, что длина множества $\Omega = \partial G \setminus \bigcup_n E_n$ равна нулю, и при этом для любых функции $f \in C(\partial G)$ такой, что $\|f\|_{L_\infty}(\partial G) \leq 1$, множества E_n и $\varepsilon > 0$ существует функция $\tilde{F} = \tilde{F}(f, E_n, \varepsilon) \in A_2(\bar{G})$ такая, что $|\tilde{F}(z)| \leq 2$ в G и $|f(z) - \tilde{F}(z)| < \varepsilon$ на E_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в условиях леммы 4.2 выполнена оценка (4.1). Пусть μ – мера из леммы 4.1, $\|\mu\|(\partial G) = 1$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем Ω' – замкнутое подмножество Ω такое, что $\|\mu\|(\Omega \setminus \Omega') < \varepsilon/16$. Зафиксируем номер n такой, что $\|\mu\|(\Omega_n \setminus \Omega') < \varepsilon/8$. Пусть $\tilde{F} \in A_2(\bar{G})$ – функция такая, что $|\tilde{F}(z)| \leq 2$ в G и $|f(z) - \tilde{F}(z)| < \varepsilon/8$ на E_n .

Рассмотрим функцию $r = f - \tilde{F}$. Это непрерывная функция на ∂G и $|r(z)| \leq 3$ в $\bar{G}$. Напомним, что Ω' – замкнутое множество длины нуль. По теореме Рудина–Карлесона [9], [10] существуют функции Ψ_r и Ψ_1 , аналитические в G и непрерывные в $\bar{G}$, такие, что на Ω' имеют место равенства $\Psi_r(z) \equiv r(z)$ и $\Psi_1(z) \equiv 1$, а на множестве $\bar{G} \setminus \Omega'$ выполняются неравенства $|\Psi_r(z)| < 3$ и $|\Psi_1(z)| < 1$ соответственно. В частности, для любого $N \in \mathbb{N}$ на Ω' имеем $\Psi_r(z)(\Psi_1(z))^N \equiv r(z)$.

Рассмотрим бианалитическую в G и непрерывную в $\bar{G}$ функцию $F = \tilde{F} + (\Psi_1)^N \Psi_r$. Так как на Ω' имеет место равенство $f(z) = F(z)$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial G} (f(z) - F(z)) d\mu_z \right| &= \left| \int_{\partial G \setminus \Omega'} (f(z) - F(z)) d\mu_z \right| \\ &\leq \int_{E_n} |f(z) - \tilde{F}(z)| d|\mu_z| + \int_{\Omega_n \setminus \Omega'} |f(z) - F(z)| d|\mu_z| \\ &\quad + \int_{E_n} |\Psi_r(z)(\Psi_1(z))^N| d|\mu_z| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{6\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon, \end{aligned}$$

если N достаточно велико. Оценка (4.1) установлена. Лемма доказана.

Таким образом, пример 2 сводится к построению области G , граница которой содержит последовательность замкнутых множеств $\{E_n\}$, удовлетворяющих условиям леммы 4.2.

Сначала укажем общую схему конструкции и введем основные обозначения. Область G строится как образ некоторой области $D \subset K$ при отображении соответствующей аналитической и однолистной в D функцией H , причем для D и H выполнены условия следующей леммы, а $\delta > 0$ при построении можно сделать как угодно малым.

ЛЕММА 4.3. Пусть D – жорданова область с липшицевой границей ∂D , H – функция, аналитическая в D , причем функция H' непрерывна в $\bar{D}$. Если для $\delta < 1/2$ в D выполняется неравенство $|H'(w) - 1| < \delta$, а для произвольных граничных точек w_1 и w_2 длина кратчайшего пути внутри D , соединяющего w_1 и w_2 , не превосходит $2|w_2 - w_1|$, то функция H однолистно отображает D на жорданову область со спрямляемой границей.

Действительно,

$$|H(w_2) - H(w_1)| = \left| \int_{w_1}^{w_2} H'(w) dw \right| \geq |w_2 - w_1| - 2\delta |w_2 - w_1| > 0,$$

поэтому H взаимно однозначно отображает ∂D на замкнутую жорданову спрямляемую кривую и, следовательно (см., например, [13; гл. 5, § 1]), H однолистка в D . Если еще уменьшить δ , образ ∂D будет липшицевой кривой.

Чтобы добиться выполнения условий леммы 4.2, будем строить область D так, чтобы существовала возрастающая последовательность $\{E'_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, замкнутых подмножеств ∂D (длина множества $\partial D \setminus (\bigcup_n E'_n)$ равна нулю), обладающая следующим свойством.

Для любых функции f , непрерывной на ∂D такой, что $\|f\|_{L_\infty}(\partial G) \leq 1$, множества E'_n и $\varepsilon > 0$ существует функция $F = \Phi_1 \bar{H} - \Phi_2$ (где Φ_1 и Φ_2 аналитичны в D , а H удовлетворяет условиям леммы 4.3) такая, что $|F(w)| \leq 2$ в D и $|f(w) - F(w)| < \varepsilon$ на E'_n .

Тогда, очевидно, в качестве искомой области G можно взять образ D при отображении функцией H , а в качестве множеств E_n леммы 4.2 – образы E'_n .

Область D строится как ядро убывающей последовательности вложенных жордановых областей $K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset D$. Выполнение условий, налагаемых на область D леммой 4.3, будет достигнуто в силу того, что все области K_n будут звездными относительно $w = 0$, и их границы в полярных координатах можно будет задать липшицевыми функциями $\rho_n(\varphi)$, где

$$\rho_0(\varphi) \equiv 1, \quad \frac{9}{10} < \rho_n(\varphi) \leq 1, \quad |\rho'_{n-1}(\varphi) - \rho'_n(\varphi)| < \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим строение границ областей K_n подробнее. Граница каждой области K_n при $n \geq 1$ состоит из замкнутого множества E'_n и семейства интервалов, дополнительных к E'_n , длина открытого множества $\partial K_n \setminus E'_n$ меньше $(1/2)^n$. Каждый дополнительный интервал либо прямолинеен, либо является объединением двух прямолинейных полуинтервалов с общей точкой. При этом выполнены условия $E'_{n-1} \subset E'_n$, а именно, $E'_n = E'_{n-1} \cup \Delta E'_n$, где $\Delta E'_n$ – замкнутое множество, не пересекающее E'_{n-1} (причем $E'_0 = \emptyset$ и $E'_1 = \Delta E'_1$). Таким образом, ∂D содержит возрастающую последовательность замкнутых множеств E'_n , и длина множества $\partial D \setminus (\bigcup_n E'_n)$ равна нулю.

Рассмотрим строение множеств $\Delta E'_n$. Каждое из них имеет вид $\Delta E'_n = \bigcup_{s=1}^{N_n} \Delta E'_{n,s}$ (замкнутые множества $\Delta E'_{n,s}$ попарно не пересекаются).

Множества $\Delta E'_{n,s}$ имеют специальное строение, для описания которого понадобятся круги $B_{n,s}$ и жордановы области с дважды гладкой границей $\widetilde{B}_{n,s} \subset B_{n,s}$ (в случае $n = 1$ возьмем $N_1 = 1$, под $B_{1,1} = \widetilde{B}_{1,1}$ будем понимать “несобственный” круг – внешность $\bar{K}$, $\Delta E'_{1,1} \subset \partial K$). При этом выполнены следующие условия.

1) Некоторая окрестность замыкания области $\widetilde{B}_{n,s}$ не пересекает круг B_{n_1,s_1} , если $(n, s) \neq (n_1, s_1)$ (сами круги $B_{n,s}$ могут попарно пересекаться).

2) Все $B_{n,s}$ расположены вне $\bar{K}_n$ (и, следовательно, вне $\bar{K}_m$ при $m > n$ и вне $\bar{D}$).

3) При $n \leq m$ имеют место равенства

$$\Delta E'_{n,s} = \partial B_{n,s} \cap \overline{K_m} = \widetilde{\partial B_{n,s}} \cap \overline{K_m}.$$

4) Как вытекает из 2) и 3), множество

$$\partial K_n \setminus E'_n = \partial K_n \setminus \left(\bigcup_{m=1}^n \bigcup_{s=1}^{N_m} \Delta E'_{m,s} \right)$$

расположено во внешности $\bigcup_{m=1}^n \bigcup_{s=1}^{N_m} \overline{B_{m,s}}$.

Функция H будет построена в виде суммы $H = h_{1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{N_n} h_{n,s}$, где каждая функция $h_{n,s}$ удовлетворяет следующим условиям.

1) Функция $h_{n,s}$ непрерывна вне $\widetilde{B_{n,s}}$ и аналитична вне замыкания $\widetilde{B_{n,s}}$ (и, следовательно, аналитична вне $\overline{B_{n,s}}$), причем $h_{n,s}(\infty) = 0$, $n > 1$. Так как области $\widetilde{B_{n,s}}$ расположены вне $\overline{K_n}$, то функция $h_{n,s}$ аналитична в K_n и, следовательно, в K_m при $m > n$ и в D ; в силу строения множества $\partial K_n \setminus E'_n$ (условие 4)) функция $h_{m,s}$ при $m \leq n$ аналитична в окрестности каждой точки множества $\partial K_n \setminus E'_n$.

2) Функция $h_{n,s}$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{K_n}$, при этом $|1 - h'_{1,1}(w)| < \delta_1$ в $\overline{K_1}$, а при $n > 1$ выполнены оценки $|h'_{n,s}(w)| < \delta_n/N_n$ в $\overline{K_n}$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \delta$, а $\delta_n > 0$ и $\delta < 1/2$ – фиксированные до построения произвольно малые положительные постоянные. Следовательно, те же оценки производных имеют место и в $\overline{K_m}$, $m > n$, и в $\overline{D}$.

Рассмотрим конструкцию в деталях. Пусть сначала $n = 1$.

Функция $h_{1,1}$ и область K_1 строятся так: $h_{1,1} = h_{k_0}$ из (3.2) при достаточно большом k_0 (значение k_0 зафиксируем несколько позже), а K_1 получается из K с помощью конструкции Лузина–Привалова (см. [2; гл. 4, § 2, п. 2.4], [11; гл. 3, § D]). Действительно, хотя функция h'_{k_0} и не ограничена в K , но L_2 -норма функции $h'_{k_0} - 1$ на ∂K может быть сделана как угодно малой вместе с $\sum_{k=k_0}^{\infty} 1/k^2$, то же касается и L_2 -нормы, соответствующей некасательной максимальной функции (см., например, [14; гл. 1, § 5]). Поэтому для достаточно большого $k_0 = k_0(\delta_1)$ существует область K_1 , полученная выбрасыванием из K счетного семейства попарно не пересекающихся равнобедренных треугольников с основаниями на ∂K , такая, что функция h'_{k_0} будет непрерывна в $\overline{K_1}$, причем в $\overline{K_1}$ будет выполнена оценка $|h'_{k_0}(w) - 1| < \delta_1$. При этом угол при основании каждого выброшенного треугольника и сумма периметров всех треугольников будут меньше $1/20$ (соответствующие оценки на этом и следующих шагах гарантируют липшицевость ∂D и равенство нулю длины множества $\partial D \setminus (\bigcup_n E'_n)$). В качестве $\Delta E'_1$ возьмем $\partial K_1 \cap \partial K$; нетрудно убедиться, что $\Delta E'_1$ и $h_{1,1}$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, налагаемым на $\Delta E'_{n,s}$ и $h_{n,s}$.

Рассмотрим переход от K_n к K_{n+1} , который существенно сложнее, чем построение K_1 . Сначала строится “промежуточная” область $\widetilde{K_{n+1}} \subset K_n$ ($\widetilde{K_1} = K$ при $n = 1$). Затем строятся функции $h_{n+1,s}$ и вспомогательные функции $h_{k,s}^{k_1,s_1}$, $(k,s) \neq (k_1,s_1)$, $k \leq n+1$, $k_1 \leq n+1$ (те из них, которые не были построены на

предыдущих шагах), и с помощью конструкции Лузина–Привалова строится область $K_{n+1} \subset \overline{K_{n+1}}$.

Предварительно поясним, с какой целью вводятся вспомогательные функции и какой вид они имеют. Напомним, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют многочлены $\Phi_{1,(1,1)}(w)$ и $\Phi_{2,(1,1)}(w)$ такие, что функция $\Phi_{1,(1,1)}\overline{h_{1,1}} - \Phi_{2,(1,1)}$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Это позволяет равномерно приближать на $\Delta E'_1$ произвольную непрерывную функцию f функциями вида $\Phi_{1,(1,1)}\overline{h_{1,1}} - \Phi_{2,(1,1)}$ с оценками 1)–4) леммы 3.2. Однако этого недостаточно, так как нужно приближать f функциями вида $\Phi_1\overline{H} - \Phi_2$, где $H = h_{1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{N_n} h_{n,s}$, причем функции $\Phi_{1,(1,1)}\overline{h_{n,s}}$ при $n > 1$ вблизи ∂K могут расти как угодно быстро. Чтобы скомпенсировать этот рост, вместе с $h_{n,s}$ строим вспомогательные функции $h_{n,s}^{n_1,s_1}$, где $(n, s) \neq (n_1, s_1)$, каждая из этих функций аналитична вне компактного подмножества круга B_{n_1,s_1} (напомним, что круг B_{n_1,s_1} расположен вне $\overline{K_{n_1}}$ и окрестность замыкания $B_{n,s}$ не пересекает круг B_{n_1,s_1} , если $(n, s) \neq (n_1, s_1)$; добиться выполнения этих условий, приведенных выше, – одна из задач при построении K_{n+1}).

Функции $h_{n,s}^{n_1,s_1}$ строятся с помощью инверсий относительно окружностей $\partial B_{n_1,s_1}$. Так, при $n > 1$ возьмем $h_{n,s}^{1,1}(w) = \overline{h_{n,s}(1/\overline{w})}$. Очевидно, что на окружности ∂K имеет место равенство $\overline{h_{n,s}(w)} = h_{n,s}^{1,1}(w)$. Аналогично, пусть $B = B_{n_1,s_1}$ – круг с центром w_0 радиуса r . Тогда возьмем

$$h_{n,s}^{n_1,s_1}(w) = \overline{h_{n,s}\left(w_0 + \frac{r^2}{w - w_0}\right)} \quad (4.2)$$

(и на $\partial B_{n_1,s_1}$ получим равенство $h_{n,s}^{n_1,s_1}(w) = \overline{h_{n,s}(w)}$). Основная задача при построении вспомогательных функций – добиться выполнения оценок (4.7), уточняющих указанные равенства.

Вернемся к построению области K_{n+1} .

Пусть область K_n , $n \geq 1$, построена, l_n – длина открытого подмножества ∂K_n , дополнительного к E'_n , $l_n < (1/2)^n$. Напомним, что каждый дополнительный интервал для E'_n либо прямолинеен, либо является объединением двух прямолинейных полуинтервалов с общей точкой. Возьмем конечное число отрезков $e_{n+1,s}$, лежащих на $\partial K_n \setminus E'_n$, так, чтобы все отрезки имели равную длину, отрезки $1.01e_{n+1,s}$ попарно не пересекались и не пересекали E'_n , при этом сумма длин всех $e_{n+1,s}$ была больше $0.9l_n$. Для каждого из отрезков $e_{n+1,s}$ проведем окружность с центром $w_{n+1,s}$ вне $\overline{K_n}$, проходящую через концы отрезка (радиусы окружностей для всех $e_{n+1,s}$ равны; обозначим их через r_{n+1}), соответствующие круги обозначим через $B_{n+1,s}$.

Будем считать отрезки и круги настолько малыми, что выполняются следующие условия.

1) Величина угла внутри K_n между окружностью $\partial B_{n+1,s}$ и отрезком $e_{n+1,s}$ меньше $(1/20)^{n+1}$;

2) Круги $2B_{n+1,s}$ не пересекают $\overline{B_{m,s}}$, $m \leq n$ (в частности, не пересекают ∂K). Это можно сделать в силу строения $\partial K_n \setminus E'_n$ (условие 4)).

3) На $2B_{n+1,s}$ имеют место оценки $|1 - h'_{1,1}(w)| < 2\delta_1$ и $|h'_{m,s}(w)| < 2\delta_m/N_m$ при $2 \leq m \leq n$ (с несколько большими постоянными, чем в $\widetilde{K_n}$). Это можно сделать, так как функции $h_{m,s}$, $m \leq n$, аналитичны в окрестности каждой точки множества $\partial K_n \setminus E'_n$ (условие 1), которому удовлетворяют функции $h_{m,s}$.

Таким образом, существует конечное число отрезков $e_{n+1,s}$, удовлетворяющих указанным условиям. Это число обозначим через N_{n+1} . Зафиксируем “промежуточную” область $\widetilde{K_{n+1}} = K_n \setminus \bigcup_{s=1}^{N_{n+1}} \overline{B_{n+1,s}}$.

Построим области $B_{n+1,s}$, функции $h_{n+1,s}$, множества $\Delta E'_{n+1,s}$ и область K_{n+1} .

Заметим, что круги $B_{n+1,s}$ могут попарно пересекаться, но в силу построения попарно не пересекаются некоторые окрестности сегментов $B_{n+1,s} \cap K_n$, каждый из которых ограничен отрезком $e_{n+1,s}$ и дугой окружности $\Gamma_{n+1,s} = \partial B_{n+1,s} \cap \partial \widetilde{K_{n+1}}$. Поэтому возьмем жордановы области $\widetilde{B_{n+1,s}} \subset B_{n+1,s}$ с дважды гладкой границей такие, что $\partial \widetilde{B_{n+1,s}} \cap \partial \widetilde{K_{n+1}} = \Gamma_{n+1,s}$, при этом для каждого s некоторая окрестность $U_{n+1,s}$ замыкания области $\widetilde{B_{n+1,s}}$ не пересекается с кругом B_{n+1,s_1} , если $s \neq s_1$.

Пусть $\chi_{n+1,s}$ – аналитическая функция, однолистно отображающая внешность $\widetilde{B_{n+1,s}}$ на K (считаем, что $\chi_{n+1,s}(\infty) = 0$). В силу достаточной гладкости $\partial \widetilde{B_{n+1,s}}$ функция $\chi_{n+1,s}$ непрерывно дифференцируема вне $\widetilde{B_{n+1,s}}$ и $0 < |\chi'_{n+1,s}(w)| < \infty$ на произвольном ограниченном подмножестве дополнения к $\widetilde{B_{n+1,s}}$.

Пусть $h(w) = h_{k_0}(w) - w$ – функция из леммы 3.2 при произвольном k_0 . Напомним, что

$$h(w) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k\alpha_k} w^{\alpha_k}, \quad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \geq 2,$$

нужное значение k_0 зафиксируем несколько позже.

Возьмем $h_{n+1,s}(w) = h(\chi_{n+1,s}(w))$. Воспользовавшись леммой 3.2 и свойствами функции $\chi_{n+1,s}$, получим, что для любой функции f , непрерывной на $\partial \widetilde{B_{n+1,s}}$, такой, что $\|f\|_{L_\infty} \leq 1$, и для любого $\varepsilon_{n+1,s} > 0$ существуют функции $\Phi_{1,(n+1,s)} = \Phi_1(\chi_{n+1,s})$ и $\Phi_{2,(n+1,s)} = \Phi_2(\chi_{n+1,s})$ (где Φ_1 и Φ_2 – многочлены из леммы 3.2), аналитические вне замыкания $\widetilde{B_{n+1,s}}$ и равные нулю на бесконечности, такие, что для соответствующей функции

$$F_{n+1,s} = \Phi_{1,(n+1,s)} \overline{h_{n+1,s}} - \Phi_{2,(n+1,s)}$$

имеют место оценки, аналогичные оценкам 1)–4) леммы 3.2. Именно, при $m = n + 1$

$$|F_{m,s}(w) - f(w)| < \varepsilon_{m,s} \quad \text{при } w \in \partial \widetilde{B_{m,s}}, \quad (4.3)$$

$$|F_{m,s}(w)| < 1 + \varepsilon_{m,s} \quad \text{вне } \widetilde{B_{m,s}}, \quad (4.4)$$

$$\max(|\Phi_{1,(m,s)}(w)|, |\Phi_{2,(m,s)}(w)|) < \varepsilon_{m,s} \max(1, (\text{dist}(w, \widetilde{B_{m,s}}))^{-1}) \quad (4.5)$$

(это выполняется в силу леммы 3.2 и теоремы Кёбе об искажении),

$$|F_{m,s}(w)| < \varepsilon_{m,s} \quad \text{при } \text{dist}(w, \widetilde{B_{m,s}}) > \varepsilon_{m,s}. \quad (4.6)$$

Уточним выбор k_0 . Применим для всех s на дугах $\Gamma_{n+1,s}$ (относительно области $\widetilde{K_{n+1}}$) конструкцию Лузина–Привалова так же, как и при построении K_1 из K . Возьмем k_0 достаточно большим таким, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) отношение суммы периметров всех выброшенных равнобедренных треугольников к сумме длин всех отрезков $e_{n+1,s}$ было меньше $(1/20)^{n+1}$;
- 2) угол при основании каждого выброшенного треугольника был меньше $(1/20)^{n+1}$;
- 3) в замыкании области K_{n+1} , полученной из $\widetilde{K_{n+1}}$ выбрасыванием всех указанных треугольников, выполнялись оценки $|h'_{n+1,s}(w)| < \delta_{n+1}/N_{n+1}$;
- 4) при $n_1 \leq n+1$ и $(n+1, s) \neq (n_1, s_1)$ для $w \notin (\widetilde{B_{n+1,s}} \cup B_{n_1,s_1})$ и $h_{n+1,s}^{n_1,s_1}$ из (4.2) имели место оценки

$$|\overline{h_{n+1,s}(w)} - h_{n+1,s}^{n_1,s_1}(w)| \leq \text{dist}(w, \partial B_{n_1,s_1}) \frac{\delta_{n+1}}{N_{n+1}}$$

(добиться выполнения указанных оценок можно, так как в силу построения область $\widetilde{B_{n+1,s}}$ “хорошо отделена” от B_{n_1,s_1}).

Построение области K_{n+1} завершено, при этом $\Delta E'_{n+1,s} = \Gamma_{n+1,s} \cap \partial K_{n+1}$.

Рассмотрим теперь $|\overline{h_{n_1,s_1}(w)} - h_{n_1,s_1}^{n+1,s}(w)|$ при $n_1 < n+1$. Напомним, что в силу (4.2)

$$h_{n_1,s_1}^{n+1,s}(w) = \overline{h_{n_1,s_1}(w^*)},$$

где $w^* = w_{n+1,s} + (r_{n+1})^2 / (\overline{w - w_{n+1,s}})$ – точка, полученная из w инверсией относительно окружности $\partial B_{n+1,s}$, $w^* \in B_{n+1,s}$.

Также напомним, что в $\widetilde{K_{n+1}}$ и в $2B_{n+1,s}$ имеют место оценки $|h'_{1,1}(w)| < 1 + 2\delta_1$ и $|h'_{n_1,s_1}(w)| < 2\delta_{n_1}/N_{n_1}$, если $1 < n_1 < n+1$; круг $2B_{n+1,s}$ не пересекает окружностей $\partial B_{n_1,s_1}$, но пересекает K_{n+1} .

Пусть $w \in \widetilde{K_{n+1}}$. Воспользовавшись указанными оценками производных на пути, соединяющем w и w^* (поскольку для K_{n+1} , как и для D , выполнены условия леммы 4.3, то длину этого пути можно взять не большей $A|w - w^*|$), и применив теорему Лагранжа, в итоге получим следующие оценки для вспомогательных функций $h_{m_1,s_1}^{m,s}$ при $w \in \overline{D}$:

$$\begin{aligned} |\overline{h_{1,1}(w)} - h_{1,1}^{m,s}(w)| &\leq A(1 + \delta_1)(\text{dist}(w, \widetilde{B_{m,s}})); \\ |\overline{h_{m_1,s_1}(w)} - h_{m_1,s_1}^{m,s}(w)| &\leq A(\text{dist}(w, \widetilde{B_{m,s}})) \frac{\delta_{m_1}}{N_{m_1}}, \quad m_1 > 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Покажем, что область D и функция H – требуемые.

Возьмем для произвольного $n \in \mathbb{N}$ множество

$$E'_n = \bigcup_{m=1}^n \bigcup_{s=1}^{N_m} \Delta E'_{m,s}.$$

Пусть даны произвольные функция $f \in C(\partial D)$ такая, что $\|f\|_{L_\infty}(\partial D) \leq 1$, и $\varepsilon = \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \varepsilon_{m,s}$ (все $\varepsilon_{m,s} > 0$).

Напомним, что существуют пары функций $\Phi_{1,(m,s)}(w)$ и $\Phi_{2,(m,s)}(w)$, $1 \leq m \leq n$, и функции $h_{m_1,s_1}^{m,s}(w)$, $m_1 = 1, 2, \dots$, $(m_1, s_1) \neq (m, s)$ (все указанные функции аналитичны в D и непрерывны в $\bar{D}$), такие, что для $\Phi_{1,(m,s)}$ и $\Phi_{2,(m,s)}$ выполнены оценки (4.3)–(4.6), а для $h_{m_1,s_1}^{m,s}$ выполнена оценка (4.7).

Рассмотрим функцию $F = \Phi_1 \bar{H} - \Phi_2$, где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \Phi_{1,(m,s)}, & H &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{N_{m_1}} h_{m_1,s_1}, \\ \Phi_2 &= \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \Phi_{2,(m,s)} + \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \sum_{(m_1,s_1) \neq (m,s)} \Phi_{1,(m,s)} h_{m_1,s_1}^{m,s}.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}F(w) &= \Phi_1(w) \overline{H(w)} - \Phi_2(w) = \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} (\Phi_{1,(m,s)}(w) \overline{h_{m,s}(w)} - \Phi_{2,(m,s)}(w)) \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \Phi_{1,(m,s)}(w) \sum_{(m_1,s_1) \neq (m,s)} (\overline{h_{m_1,s_1}(w)} - h_{m_1,s_1}^{m,s}(w)).\end{aligned}$$

В силу (4.5) и (4.7) будет выполнена следующая оценка в $\bar{D}$:

$$\begin{aligned}\left| F(w) - \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} (\Phi_{1,(m,s)}(w) \overline{h_{m,s}(w)} - \Phi_{2,(m,s)}(w)) \right| \\ < A \sum_{m=1}^n \sum_{s=1}^{N_m} \varepsilon_{m,s} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \right) < 2A\varepsilon.\end{aligned}$$

Так как $\Delta E'_{m,s} \subset \widetilde{\partial B_{m,s}}$ и области $\widetilde{B_{m,s}}$, $m \leq n$, отделены друг от друга, то можем считать, что в (4.6) неравенство $|F_{m,s}(w)| < \varepsilon_{m,s}$ выполнено вне столь малой окрестности $\widetilde{B_{m,s}}$, что указанные окрестности при всех $m \leq n$ и соответствующих s попарно не пересекаются. Отсюда в силу (4.3)–(4.4) получим $|F(w) - f(w)| < 4A\varepsilon$ на E'_j и при достаточно малом ε соответственно $|F(w)| < 2$ в $\bar{D}$. Этого достаточно (после однолистного отображения области D функцией H) для выполнения условий леммы 4.2. Тем самым построение примера 2 завершено.

Список литературы

- [1] М. Б. Балк, “Полианалитические функции и их обобщения”, *Комплексный анализ. Одна переменная – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **85**, ВИНТИ, М., 1991, 187–246; англ. пер.: М. В. Balk, “Polyanalytic functions and their generalizations”, *Complex analysis I*, Encyclopaedia Math. Sci., **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 195–253.
- [2] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

- [3] Ph. J. Davis, *The Schwarz function and its applications*, The Mathematical Association of America, Washington, 1974.
- [4] М. Я. Мазалов, “Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе”, *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 629–632; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “An example of a nonconstant bianalytic function vanishing everywhere on a nowhere analytic boundary”, *Math. Notes*, **62**:4 (1997), 524–526.
- [5] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98; англ. пер.: J. J. Carmona, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskii, “On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1469–1492.
- [6] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [7] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [8] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “Uniform n -analytic polynomial approximations of functions on rectifiable contours in $\mathbb{C}$ ”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 435–439.
- [9] W. Rudin, “Boundary values of continuous analytic functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**:5 (1956), 808–811.
- [10] L. Carleson, “Representations of continuous functions”, *Math. Z.*, **66**:1 (1956), 447–451.
- [11] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: P. Koosis, *Introduction to H^p spaces with an appendix on Wolff’s proof of the corona theorem*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **40**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.
- [12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [13] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций, т. 2. Дальнейшее построение теории*, 2-е изд., Наука, М., 1968.
- [14] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.

М. Я. Мазалов (M. Ya. Mazalov)

Военная академия войсковой противовоздушной обороны
Вооруженных Сил Российской Федерации им. Маршала
Советского Союза А. М. Василевского, г. Смоленск
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступила в редакцию

03.02.2009