Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, К линейной теории функционально-дифференциальных уравнений: теоремы существования и проблема точечной полноты решений, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 3, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:25:45

УДК 517.911

Л. А. Бекларян

К линейной теории функционально-дифференциальных уравнений: теоремы существования и проблема точечной полноты решений

Рассматриваются краевая и начально-краевая задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Определена подходящая шкала функциональных пространств, в терминах которой сформулированы теоремы существования решения в виде аналогов теорем Нётера. В случае начально-краевой задачи установлен нетривиальный факт о необходимости расширения пространства классических решений сопряженного уравнения вплоть до импульсных решений. Получен критерий точечной полноты решений. Представленные результаты основаны на формализме, разработанном автором для таких уравнений.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, шкала функциональных пространств, импульсные решения, аналог теоремы Нётера, точечная полнота решений.

§ 1. Введение

Известно, что функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) точечного типа не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод исследования ФДУ точечного типа, основанный на их групповых особенностях (см. [1]), позволил получить неулучшаемые условия, которые определяют способы регулярного расширения класса ОДУ в классе ФДУ точечного типа в смысле сохранения таких свойств решений ОДУ, как существование и единственность в заданном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений, n -параметричность пространства решений, “гладкость” решения, свойство “грубости” уравнения и т.д. В рамках такого подхода решения ФДУ точечного типа ищутся в однопараметрическом семействе банаховых пространств функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\} \quad (1.1)$$

и с нормой

$$\|x(\cdot)\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \mu \in (0, +\infty).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00324-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3038.2008.1).

Отмеченные неулучшаемые условия формулируются в терминах правой части ФДУ в виде константы Липшица и параметра μ (см. [1; гл. 1, § 3]). Вместе с тем очень важны исследования ФДУ точечного типа и в случае нарушения отмеченных выше неулучшаемых условий. В этой связи одной из центральных задач является вопрос существования решения, который будет изучен для основной начально-краевой задачи

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^s A_j x(t + n_j) + \psi(t), \quad t \in B_R, \quad (1.2)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad (1.3)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

где A_j – матрица размерности $n \times n$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, s$; $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^* \in (0, +\infty)$; B_R – либо интервал $[t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, либо полупрямая $[t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, либо прямая $\mathbb{R}$. Не нарушая общности, можно считать, что $n_1 < \dots < n_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, определенная на всей прямой $\mathbb{R}$, называется *решением ФДУ (1.2) точечного типа*, если для почти всех $t \in B_{\mathbb{R}}$ удовлетворяет этому уравнению.

Подавляющее число работ посвящены изучению уравнений запаздывающего типа ($n_j \leq 0$, $j = 1, \dots, s$) с начально-краевым условием, в котором $\bar{t} = t_0$. Для такой начально-краевой задачи решение всегда существует и единственно. Вопрос состоит в изучении интегральных представлений такого решения, чему посвящено большое число работ, из которых мы упомянем работу [2]. В отличие от уравнений запаздывающего (опережающего) типа с начальным моментом $\bar{t} = t_0$ ($\bar{t} = t_1$) как краевая задача (1.2), (1.3), так и основная начально-краевая задача (1.2)–(1.4) могут не иметь решения. Дело в том, что для уравнения запаздывающего (опережающего) типа с начальным моментом $\bar{t} = t_0$ ($\bar{t} = t_1$) начально-краевые условия являются ограничениями локального типа. Во всех остальных случаях начально-краевые условия являются ограничениями нелокального типа, что и является препятствием для существования решения.

В [3] рассматривалась основная начально-краевая задача (1.2)–(1.4), в которой ФДУ (1.2) скалярное и задано на всей прямой $\mathbb{R}$. Очевидно, что такая задача переходит в задачу Коши. Для такой задачи Коши в терминах правой части уравнения были сформулированы достаточные условия как существования, так и единственности решения. Пользуясь линейностью уравнения, удалось сформулировать условия, менее стеснительные, чем полученные в [1] для общих нелинейных уравнений. Для этого приходится изучать спектр оператора обобщенного сдвига, индуцированного исходной краевой задачей. Успех связан с тем, что условие скалярности ФДУ, а также совпадение области определения ФДУ со всей прямой позволяют при изучении спектра применить теорему об отображении спектра.

В случае линейных систем другим подходом для доказательства существования решения является установление аналога теоремы Нётера. Подобный результат формулируется в терминах решений сопряженного уравнения, для чего

требуется определить сопряженное уравнение и описать все пространство решений. Если для формулировки результатов в терминах исходного ФДУ (см. [1]) наиболее естественной является шкала пространств (1.1), то здесь нам придется определить иную шкалу пространств, более приспособленную к задачам линейной теории. Как и в [1], теорема существования будет формулироваться с использованием характеристик однопараметрической шкалы пространств (параметр μ). Как уже отмечалось выше, в теоремах Нётера и их аналогах центральными понятиями являются сопряженное уравнение и описание пространства его решений. При этом для начально-краевой задачи обнаруживается нетривиальный факт – необходимость расширения пространства классических решений сопряженного уравнения вплоть до импульсных решений. Мы говорим об аналогах теоремы Нётера, ибо, в отличие от теоремы Нётера, как размерность пространства решений рассматриваемой однородной краевой задачи с однородными краевыми условиями, так и размерность пространства решений сопряженного уравнения могут быть бесконечномерными, хотя для ФДУ точечного типа, определенного на конечном интервале, эти подпространства конечномерны.

Отметим, что как прямые методы описания пространства решений исходного линейного ФДУ точечного типа, так и описание пространства решений соответствующего сопряженного уравнения связаны со свойствами хорошо известных операторов взвешенного сдвига. Изучению таких операторов и порожденных ими алгебр посвящено много публикаций. Среди них наиболее близкими к изучаемой в статье задаче и наиболее полными являются работы [4], [5], в которых существенным является исследование связей спектральной теории операторов взвешенного сдвига и непрерывных полугрупп таких операторов с теорией бесконечномерных линейных расширений динамических систем.

Упрощающее условие о непрерывности функций $\psi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ носит чисто технический характер, хотя мы могли бы рассматривать функции $\psi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ из класса существенно ограниченных функций. Как для краевой задачи (1.2), (1.3) (далее называемой *краевой задачей* $\mathcal{A}$), так и для основной начально-краевой задачи (1.2)–(1.4) (далее называемой *основной начально-краевой задачей* $\mathcal{B}$) будут получены теоремы существования решения в виде аналогов теоремы Нётера. Весьма важно, что при изучении краевой задачи $\mathcal{A}$, как и в случае ОДУ, для сопряженного уравнения следует рассматривать решения из пространства абсолютно непрерывных функций. Однако при изучении основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ для сопряженного уравнения приходится рассматривать решения из пространства кусочно абсолютно непрерывных функций (так называемых импульсных решений) со скачками в начальной точке $\bar{t}$.

§ 2. Формулировка основных результатов

По уравнению (1.2) определим уравнение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = - \sum_{j=1}^s A'_j \tilde{x}(t - n_j) \chi_{B_R}(t - n_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

называемое *сопряженным уравнением* ($\chi_{B_R}(\cdot)$ – характеристическая функция множества B_R , а A'_j – транспонированная матрица).

Как отмечалось в § 1, пространства решений сопряженного уравнения для краевой задачи $\mathcal{A}$ и основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ различны и будут определены ниже. Для этого рассмотрим векторное пространство

$$K^n = \overline{\prod_{i \in \mathbb{Z}} R_i^n}, \quad R_i^n = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z},$$

со стандартной топологией полного прямого произведения и элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $x_i = (x^1, \dots, x^n)'$, $i \in \mathbb{Z}$.

В пространстве K^n определим однопараметрическое семейство гильбертовых подпространств $K_{2\mu}^n$, $\mu \in (0, +\infty)$:

$$K_{2\mu}^n = \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^n; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\},$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} \right]^{1/2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $\varkappa: [0, 1] \mapsto K_{2\mu}^n$, $\mu \in (0, +\infty)$, называется *сильно абсолютно непрерывной вектор-функцией*, если оно почти всюду дифференцируемо по Фреше, производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$ (см. [1; гл. 1, § 1, определение 1.3]).

Определим пространства функций, необходимые для задания решений как исследуемой краевой задачи $\mathcal{A}$ и соответствующего сопряженного уравнения (2.1), так и основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$. Для каждого $\mu \in (0, +\infty)$ определим семейства пространств функций

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R}) = \{ & x(\cdot) : \varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n), \varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \\ & x_i(t) = x(t + i), \quad t \in [0, 1], \quad i \in \mathbb{Z} \text{ и вектор-функция } \varkappa(\cdot) \\ & \text{является сильно абсолютно непрерывной} \} \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{L}_{\mu}^n L_{\infty}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \text{ измеримая, } \sup_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mu} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

В частности, из условия $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ следует, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция и удовлетворяет условиям

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n L_{\infty}(\mathbb{R}).$$

С другой стороны, любая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая условиям

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n L_{\infty}(\mathbb{R}), \quad \bar{\mu} \in (\mu, +\infty),$$

принадлежит пространству $\mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ (см. [1; гл. 2, лемма 2.4 и предложение 2.3]).

Определим пространства функций, необходимые для задания решений сопряженного уравнения (2.1) при изучении основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$: для любых $\mu \in (0, +\infty)$ и $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_r \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R}) = \{ & x(\cdot) : \varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}), \varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}; \\ & x_i(t) = x(t + \{r\} + i), \quad t \in [0, 1], \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{[r] - 1, [r]\}; \\ & x_i(t) = x(t + \{r\} + i), \quad t \in (0, 1), \quad i \in \{[r] - 1, [r]\}; \\ & x_{[r]-1}(0) = x(r - 1), \quad x_{[r]-1}(1) = x(r - 0), \\ & x_{[r]}(0) = x(r + 0), \quad x_{[r]}(1) = x(r + 1) \text{ и вектор-функция } \varkappa(\cdot) \\ & \text{является сильно абсолютно непрерывной}\}, \end{aligned}$$

где $[r]$, $\{r\}$ – целая и дробная части числа r соответственно.

В частности, из условия $x(\cdot) \in \mathbb{P}_r \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ следует, что $x(\cdot)$ – кусочно абсолютно непрерывная функция со скачком в точке r и

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(\mathbb{R}), \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(\mathbb{R}).$$

С другой стороны, любая кусочно абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ со скачком в точке r , удовлетворяющая условиям

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n L_\infty(\mathbb{R}), \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n L_\infty(\mathbb{R}), \quad \bar{\mu} \in (\mu, +\infty),$$

принадлежит пространству $\mathbb{P}_r \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ (см. [1; гл. 2, лемма 2.4 и предложение 2.3]).

При изучении краевой задачи $\mathcal{A}$ нам понадобятся решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), являющиеся абсолютно непрерывными функциями и удовлетворяющие дополнительному условию: $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при заданном $\mu \in (0, 1]$.

При изучении основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ нам понадобятся решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), являющиеся кусочно абсолютно непрерывными функциями со скачком в точке $\bar{t}$ и удовлетворяющие дополнительному условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при заданном $\mu \in (0, 1]$.

Для функций $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^* \in (0, +\infty)$, определим новую функцию

$$f(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{если } t \in B_R, \\ \varphi(t), & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus B_R. \end{cases} \quad (2.2)$$

Очевидно, что функция $f(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\mu^*}^n L_\infty(\mathbb{R})$.

Сформулируем основные результаты настоящей работы в виде теорем существования решения как для краевой задачи $\mathcal{A}$ (теорема 1), так и для основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (теорема 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1).$$

Для существования решения $x(\cdot)$ краевой задачи $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt = 0$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1).

В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, а также для скалярного случая с областью определения $B_R = \mathbb{R}$ теорема 1 допускает уточнение (теоремы 4, 5).

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы

$$\begin{aligned} \psi(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), & \varphi(\cdot) &\in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \\ \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, & \bar{t} &\in \mathbb{R}, & \mu &\in (0, \mu^*) \cap (0, 1). \end{aligned}$$

Для существования решения $x(\cdot)$ основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{\mathbb{R}^n} dt + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{t} + 0) - \tilde{x}(\bar{t} - 0)])_{\mathbb{R}^n} = 0$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1).

В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, теорема 2 также допускает уточнение.

Если отклонений аргумента нет, т.е. $n_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, s$, то уравнение (1.2) представляет собой ОДУ. В этом случае начиная с некоторого достаточно малого μ решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1) тождественно равны нулю. Поэтому наличие нетривиального импульсного решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ характерно исключительно для ФДУ точечного типа. Как следует из теоремы 2, линейная теория ФДУ точечного типа приводит к необходимости изучения пространства импульсных решений сопряженного уравнения. В теории ОДУ похожую задачу (изучение импульсных решений исходного уравнения) порождают сильно нелинейные уравнения с решениями, уходящими в бесконечность за конечное время.

Хорошо известно, что для ОДУ в каждый момент времени $\bar{t} \in \mathbb{R}$ решение точно полно, т.е. через каждую точку фазового пространства $\mathbb{R}^n$ проходит решение. Для ФДУ точечного типа условие точечной полноты может нарушаться. Утверждение о степени нарушения условия точечной полноты решений при заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ основывается на теореме 2. Для формулировки подобного утверждения необходимо определить некоторые понятия.

Рассмотрим основную начально-краевую задачу (1.2)–(1.4) в случае однородного уравнения ($\psi(\cdot) \equiv 0$) и однородного краевого условия ($\varphi(\cdot) \equiv 0$)

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^s A_j x(t + n_j), \quad t \in B_R, \quad (2.3)$$

$$\dot{x}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad (2.4)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

При фиксированных $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, 1]$ в $\mathbb{R}^n$ определим линейные подпространства

$$\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu) = \{ \bar{x} : \bar{x} = x(\bar{t}), \text{ где } x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R}) - \text{решение} \\ \text{однородной краевой задачи (2.3)–(2.4)} \},$$

$$\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) = \{ z : z = \tilde{x}(\bar{t} + 0) - \tilde{x}(\bar{t} - 0), \text{ где } \tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R}) - \\ \text{импульсное решение сопряженного уравнения (2.1)} \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. При заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ решения краевой задачи $\mathcal{A}$ называются μ -точечно полными, если для любого $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ начально-краевая задача $\mathcal{B}$ имеет решение $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$.

Приведем критерий о степени точечной полноты решений при каждом заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого фиксированного $\bar{t} \in \mathbb{R}$ функции

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu), \quad \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$$

переменной $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ являются монотонными кусочно постоянными функциями, непрерывными слева. Первая из них монотонно убывающая, а вторая монотонно возрастающая. Подпространства $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ взаимно ортогональны и выполняется равенство

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu) + \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) = n.$$

Заметим, что $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$, $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ по параметру $\bar{t}$ также могут оказаться разрывными.

Сформулируем одно очевидное замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ найдется максимальное $\mu_{\bar{t}} \in (0, 1)$ такое, что на интервале $(0, \mu_{\bar{t}})$ функции $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ постоянны.

СЛЕДСТВИЕ 1. При заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ решения краевой задачи $\mathcal{A}$ являются μ -точечно полными ($\mu \in (0, 1)$) тогда и только тогда, когда для краевой задачи $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно решение $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ и выполняется условие $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) \equiv 0$.

В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, теорема 3 также допускает уточнение (теорема 8).

§ 3. Теорема существования решения для краевой задачи $\mathcal{A}$

Вначале мы докажем сформулированные результаты для множества B_R с целочисленными концами. Далее с помощью замены времени типа квазирастяжения исходная краевая задача $\mathcal{A}$ сводится к краевой задаче с целочисленными концами интервала B_R . Следует отметить, что вновь полученное уравнение оказывается неавтономным, но однородный член его правой части оказывается инвариантным относительно специальных сдвигов времени, что и позволяет провести доказательство по аналогии с целочисленным случаем.

3.1. Случай целочисленных концов интервала B_R . Пусть $\mathcal{B}$ – σ -алгебра всех подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $\bar{B}$ будем обозначать дополнение к $B \in \mathcal{B}$ в $\mathbb{Z}$, т.е. $\bar{B} = \mathbb{Z} \setminus B$. Для всякого $B \in \mathcal{B}$ определим множество

$$B_R = \bigcup_{i \in B} [i, i+1].$$

Каждому множеству $B \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие непрерывный проектор P_B , действующий в пространстве K^n по следующему правилу:

$$\forall \kappa, i, \quad \kappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (P_B \kappa)_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \in B, \\ 0, & \text{если } i \notin B. \end{cases}$$

Кроме того, в пространстве K^n определим оператор сдвига T :

$$\forall \kappa, i, \quad \kappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (T\kappa)_i = x_{i+1}.$$

Также определим линейный ограниченный оператор $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$, соответствующий уравнению (1.2) и заданный бесконечномерной блочной матрицей с блочными элементами

$$a_{pl} = \sum_{j=1}^s \delta_{p+n_j}^l A_j, \quad p, l \in \mathbb{Z},$$

где δ_p^l – символ Кронекера, $l, p \in \mathbb{Z}$. Наряду с оператором $\mathbb{A}$ определим диагональные бесконечномерные блочные матрицы (операторы) $\mathbb{A}_j \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$, $j = 1, \dots, s$, с блочными элементами

$$a_{pl}^j = \delta_p^l A_j, \quad p, l \in \mathbb{Z}.$$

Для операторов $\mathbb{A}, \mathbb{A}_j \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$, $j = 1, \dots, s$, и оператора сдвига T справедливы правила перестановочности

$$\mathbb{A}T = T\mathbb{A}, \quad \mathbb{A}_jT = T\mathbb{A}_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

а также представление

$$\mathbb{A} = \sum_{j=1}^s \mathbb{A}_j T^{n_j}.$$

Такие операторы относятся к классу тёплицевых операторов. Ограничения операторов $\mathbb{A}, \mathbb{A}_j$, $j = 1, \dots, s$, и T, P_B на подпространство $K_{2\mu}^n$ (действующих из $K_{2\mu}^n$ в себя) будем обозначать через $\mathbb{A}_{2\mu}, \mathbb{A}_{j2\mu}$, $j = 1, \dots, s$, и $T_{2\mu}, P_{B2\mu}$ соответственно. Там, где это не будет вызывать недоразумения, индексы 2μ будем опускать.

Наряду с основной линейной начально-краевой задачей $\mathcal{B}$ в фазовом пространстве $K_{2\mu}^n$ для $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$ будем рассматривать соответствующую ей бесконечномерную начально-краевую задачу

$$\dot{\kappa}(t) = P_B \mathbb{A}_{2\mu} \kappa(t) + P_B F(t) + P_{\bar{B}} v(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

$$\kappa(1) = T_{2\mu} \kappa(0), \quad (3.2)$$

$$(\kappa(0))_{\bar{i}} = \bar{x} \quad (3.3)$$

с заданными: начальным значением $\bar{x} \in \mathbb{R}$ и начальным моментом $\bar{i} = \bar{t}$; вектор-функциями $F(t) = \{F_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $F_i(t) = \psi(t+i)$ и $v(t) = \{v_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $v_i(t) = \varphi(t+i)$; множеством $B \subseteq \mathbb{Z}$ таким, что соответствующий ему интервал B_R – это интервал B_R из уравнения (1.2). Несложно видеть, что $F(\cdot), v(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$, где

$$D_{2\mu}^{(0)} = \{\kappa(\cdot) : \kappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n), \kappa(1) = T_{2\mu}\kappa(0)\}. \quad (3.4)$$

Далее краевую задачу (3.1), (3.2) будем называть *краевой задачей* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, а начально-краевую задачу (3.1)–(3.3) будем называть *начально-краевой задачей* $\hat{\mathcal{B}}_\mu$. В работе [1] установлено соответствие между семействами решений начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ и пространством решений бесконечномерной начально-краевой задачи $\hat{\mathcal{B}}_\mu$, но оно не вполне удобно для применения в линейной теории. Поэтому будет установлено новое соответствие между решениями этих задач.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $F(\cdot), v(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$, $\mu \in (0, +\infty)$. Сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\kappa(t)$, $t \in [0, 1]$, со значениями в пространстве $K_{2\mu}^n$ называется *решением обыкновенного дифференциального уравнения* (3.1), если для почти всех $t \in [0, 1]$ она удовлетворяет этому уравнению.

Решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\kappa(t) = \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu} t) \kappa(0) + \int_0^t \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu} [t - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)] d\xi. \quad (3.5)$$

Справедливо следующее простое предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $F(\cdot), v(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$, $\mu \in (0, +\infty)$. Вектор-функция $\kappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$ является решением бесконечномерного дифференциального уравнения (3.1) с краевым условием (3.2) тогда и только тогда, когда она определяется по формуле (3.5) и $\kappa(0)$ удовлетворяет уравнению

$$[E - T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})] \kappa(0) = \int_0^1 T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu} [1 - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)] d\xi. \quad (3.6)$$

Доказательство может быть получено непосредственной проверкой.

Теперь установим связь между решениями основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$) и бесконечномерной начально-краевой задачи $\hat{\mathcal{B}}_\mu$ (краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_\mu$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1], \quad t_0, t_1, \bar{t} \in \mathbb{Z}.$$

Если $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ – решение основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$), то вектор-функция $\kappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i(t) = x(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной краевой задачи $\hat{\mathcal{B}}_\mu$ (краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_\mu$) с начальным моментом $\bar{i} = \bar{t}$.

Если вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_\mu$ (краевой задачи $\mathcal{A}_\mu$), то функция $x(t) = x_{[\bar{t}]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), является решением основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$) с начальным моментом $\bar{t} = \bar{i}$ и $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i(t) = x(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K_{2\mu}^n$. В силу утверждения, полученного в [1; гл. 2, лемма 2.4], производная функции $\varkappa(\cdot)$ имеет представление

$$\dot{\varkappa}(t) = \{\dot{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Из уравнений (1.2), (1.3) следует, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ будет удовлетворять уравнению (3.1), а из определения самой $\varkappa(\cdot)$ следует краевое условие (3.2) и начальное условие (3.3).

Обратное. Из определения функции $x(\cdot)$ и краевого условия (3.2) следует, что эта функция является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнениям (1.2), (1.3). Так как вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ со значениями в пространстве $K_{2\mu}^n$ является решением дифференциального уравнения (3.1), то она является сильно абсолютно непрерывной, и поэтому $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$. Начальное условие (1.4) непосредственно следует из начального условия (3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть интервал определения уравнения конечный, т.е. $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда для решения $x(\cdot)$ основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$) условие $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ справедливо при любом $\mu \in (0, 1]$ и, соответственно, $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$.

В случае полупрямой $B_R = [m_0, +\infty)$ из сопряженного уравнения (2.1) и условия $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1)$, следует краевое условие

$$\tilde{x}(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, t_0 - r_0], \quad r_0 = \max_{1 \leq j \leq s} \max(0, -n_j), \quad (3.7)$$

а в случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$ из того же сопряженного уравнения (2.1) и условия $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1]$, следует краевое условие

$$\tilde{x}(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, t_0 - r_0] \cup [t_1 + r_1, +\infty), \quad r_1 = \max_{1 \leq j \leq s} \max(0, n_j). \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$ для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющего краевому условию (3.8), вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при любом $\mu \in (0, 1]$.

Определим оператор

$$\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} = \sum_{j=1}^s T_{2\mu-1}^{-n_j} \mathbb{A}'_{j\mu-1}, \quad (3.9)$$

действующий из пространства $K_{2\mu-1}^n$ в себя, где $'$ означает транспонирование, а операторы $T_{2\mu-1}$ и $\mathbb{A}'_{j\mu-1}$ являются ограничениями на пространство $K_{2\mu-1}^n$ операторов T и $\mathbb{A}'_j$ соответственно. Как и раньше, там, где это не будет вызывать недоразумений, нижние индексы будут опускаться.

Наряду с сопряженным уравнением (2.1) в фазовом пространстве $K_{2\mu-1}^n$ рассмотрим бесконечномерное сопряженное уравнение

$$\dot{\tilde{\mathcal{X}}}(t) = -\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B \tilde{\mathcal{X}}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.10)$$

с краевым условием

$$\tilde{\mathcal{X}}(1) = T_{2\mu-1} \tilde{\mathcal{X}}(0). \quad (3.11)$$

Установим связь между их решениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mu \in (0, 1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$. Если решение $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1) удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, то вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной краевой задачи (3.10), (3.11).

Если вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной краевой задачи (3.10), (3.11), то функция $\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), является решением сопряженного уравнения (2.1) и удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1]$, вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K_{2\mu-1}^n$. В силу утверждения, полученного в [1; гл. 2, лемма 2.4], для производной $\dot{\tilde{\mathcal{X}}}(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\tilde{\mathcal{X}}}(t) = \{\dot{\tilde{x}}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Тогда из уравнения (2.1) следует, что вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot)$ будет удовлетворять бесконечномерному уравнению (3.10), а из определения самой $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot)$ следует краевое условие (3.11).

Обратное. Из определения функции $\tilde{x}(\cdot)$ и краевого условия (3.11) следует, что эта функция является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет сопряженному уравнению (2.1). Так как вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot)$ со значениями в пространстве $K_{2\mu-1}^n$ является решением бесконечномерного дифференциального уравнения (3.10), то она является сильно абсолютно непрерывной, и поэтому $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$.

Определим линейные операторы

$$\Delta_{2\mu}: D_{2\mu}^{(0)} \times D_{2\mu}^{(0)} \longrightarrow K_{2\mu}^n, \quad Q_{2\mu}: K_{2\mu}^n \longrightarrow K_{2\mu}^n, \quad \mu \in (0, 1],$$

действующие по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \Delta_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot)) &= T_{2\mu}^{-1} \int_0^1 \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu} [1 - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)] d\xi, \\ Q_{2\mu} &= [E - T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]. \end{aligned}$$

Сформулируем аналог теоремы Нётера для бесконечномерной краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

ЛЕММА 1. Пусть $F(\cdot), v(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$ и $\mu \in (0, 1]$. Для того чтобы бесконечномерная краевая задача $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имела решение, необходимо, чтобы вектор $\Delta_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot))$ был ортогонален всем решениям уравнения $Q_{2\mu}^* \mathcal{X} = 0$. Если оператор $Q_{2\mu}$ является нормально разрешимым, т.е. $\text{Im } Q_{2\mu} = \overline{\text{Im } Q_{2\mu}^*}$, то это условие является и достаточным.

Доказательство непосредственно следует из уравнения (3.6) и того факта, что $(\text{Im } Q_{2\mu})^\perp = \text{Ker } Q_{2\mu}^*$ (см. [6; § 21, теорема 1]).

В связи с леммой 1 интересен вопрос о том, как устроен образ линейного оператора $\Delta_{2\mu}$.

ЛЕММА 2. *Для любого $\mu \in (0, 1]$ образ линейного оператора $\Delta_{2\mu}$ всюду плотен в $K_{2\mu}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\bar{t} \in (0, 1)$ и $\varkappa \in K_{2\mu}^n$. Для любого достаточно большого натурального числа k положим

$$F_k(t) \equiv v_k(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \left[0, \bar{t} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right], \\ \left[t - \bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right] k^2 \varkappa, & \text{если } t \in \left[\bar{t} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, \bar{t} - \frac{1}{k}\right], \\ \varkappa, & \text{если } t \in \left[\bar{t} - \frac{1}{k}, \bar{t} + \frac{1}{k}\right], \\ \left[\bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - t\right] k^2 \varkappa, & \text{если } t \in \left[\bar{t} + \frac{1}{k}, \bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right], \\ 0, & \text{если } t \in \left[\bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{2\mu}(F_k(\cdot), v_k(\cdot)) &= T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}-1/k-1/k^2}^{\bar{t}-1/k} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) \left[\xi - \bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right] k^2 \varkappa d\xi \\ &+ T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}-1/k}^{\bar{t}+1/k} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) \varkappa d\xi \\ &+ T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}+1/k}^{\bar{t}+1/k+1/k^2} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) \left[\bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \xi\right] k^2 \varkappa d\xi. \end{aligned}$$

Покажем, что $\frac{k}{2} \cdot \Delta_{2\mu}(F_k(\cdot), v_k(\cdot)) \longrightarrow T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\bar{t}]) \varkappa$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{k}{2} \cdot \Delta_{2\mu}(F_k(\cdot), v_k(\cdot)) - T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\bar{t}]) \varkappa \right\|_{2\mu} \\ &\leq \frac{k}{2} \left\| T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}-1/k-1/k^2}^{\bar{t}-1/k} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) \left[\xi - \bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right] k^2 \varkappa d\xi \right\|_{2\mu} \\ &\quad + \frac{k}{2} \left\| T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}-1/k}^{\bar{t}+1/k} [\exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) - \exp(P_B A_{2\mu}[1-\bar{t}])] \varkappa d\xi \right\|_{2\mu} \\ &\quad + \frac{k}{2} \left\| T_{2\mu}^{-1} \int_{\bar{t}+1/k}^{\bar{t}+1/k+1/k^2} \exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) \left[\bar{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \xi\right] k^2 \varkappa d\xi \right\|_{2\mu} \\ &\leq \frac{1}{k} \|T_{2\mu}^{-1}\| \exp(\|P_B A_{2\mu}\|) \|\varkappa\|_{2\mu} \\ &\quad + \|T_{2\mu}^{-1}\| \|\varkappa\|_{2\mu} \sup_{\bar{t}-1/k \leq \xi \leq \bar{t}+1/k} \|\exp(P_B A_{2\mu}[1-\xi]) - \exp(P_B A_{2\mu}[1-\bar{t}])\|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю за счет сомножителя $1/k$. Второе слагаемое стремится к нулю, так как последний сомножитель при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Мы показали, что всякий вектор из образа оператора $T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B A_{2\mu}[1 - \bar{t}])$ аппроксимируется векторами из образа оператора $\Delta_{2\mu}$. В силу того, что оператор $T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B A_{2\mu}[1 - \bar{t}])$ обратимый, замыкание образа линейного оператора $\Delta_{2\mu}$ будет совпадать со всем пространством $K_{2\mu}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из лемм 1 и 2 следует, что в случае нетривиальности ядра сопряженного оператора $Q_{2\mu}^*$, $\mu \in (0, 1]$, найдутся $F(\cdot), v(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$, при которых краевая задача $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ не имеет решения.

ЛЕММА 3. Пусть $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$, функция $f(\cdot)$ определена по формуле (2.2), а функция $\tilde{x}(\cdot)$ удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$. Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt \quad (3.12)$$

абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $f(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n L_\infty(\mathbb{R})$. Так как функция $\tilde{x}(\cdot)$ удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, то отсюда, в частности, будет следовать, что $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu-1}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. В таком случае

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(f(t), \tilde{x}(t))_{R^n}| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_{R^n} \|\tilde{x}(t)\|_{R^n} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{|t|} \|(\mu^*)^{|t|} f(t)\|_{R^n} \|\mu^{-|t|} \tilde{x}(t)\|_{R^n} dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(\mu^*)^{|t|} f(t)\|_{R^n} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu^{-|t|} \tilde{x}(t)\|_{R^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{|t|} dt \\ &\leq \|f(\cdot)\|_{\mu^*}^{(0)} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{\mu-1}^{(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{|t|} dt. \end{aligned}$$

Так как $\mu/\mu^* < 1$, то интеграл (3.12) абсолютно сходится.

Теперь мы можем установить предложение о существовании решения краевой задачи $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1], \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}.$$

Для существования решения краевой задачи $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt = 0 \quad (3.13)$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$. Если оператор $Q_{2\mu}$ является нормально разрешимым, т.е. $\text{Im } Q_{2\mu} = \overline{\text{Im } Q_{2\mu}^*}$, то это условие является и достаточным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 существование решения $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ для краевой задачи $\mathcal{A}$ с функциями $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ эквивалентно существованию решения для краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_{\mu}$. В силу леммы 1 краевая задача $\hat{\mathcal{A}}_{\mu}$ имеет решение для тех $\psi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$, для которых

$$\langle \Delta_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot)), \varkappa \rangle_{2\mu} = 0 \quad (3.14)$$

на всех решениях уравнения

$$Q_{2\mu}^* \varkappa = 0. \quad (3.15)$$

Так как наряду с оператором сдвига, действующим в пространстве $K_{2\mu}^n$, мы будем рассматривать и сопряженный к нему оператор, то нам следует писать оператор сдвига T с индексами, т.е. $T_{2\mu}$. Преобразуем левую часть равенства (3.14):

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot)), \varkappa \rangle_{2\mu} &= \left\langle T_{2\mu}^{-1} \int_0^1 \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu}[1 - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)] d\xi, \varkappa \right\rangle_{2\mu} \\ &= \left\langle \int_0^1 \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu}[1 - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)] d\xi, (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \right\rangle_{2\mu} \\ &= \int_0^1 \langle \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu}[1 - \xi]) [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \rangle_{2\mu} d\xi \\ &= \int_0^1 \langle [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B [1 - \xi]) (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \rangle_{2\mu} d\xi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Определим линейный оператор

$$\Phi_{2\mu}: K_{2\mu}^n \longrightarrow K_{21}^n, \quad \mu \in (0, +\infty),$$

по следующему правилу: для любого $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ положим

$$\Phi_{2\mu}(\varkappa) = \{\mu^{|i|} x_i\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Простая проверка показывает, что $\Phi_{2\mu}^* = \Phi_{2\mu}^{-1}$. Преобразуем последнее выражение из (3.16):

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi), \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B [1 - \xi]) (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \rangle_{2\mu} d\xi \\ &= \int_0^1 \langle [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B [1 - \xi]) \\ &\quad \times \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \rangle_{2\mu} d\xi \\ &= \int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B [1 - \xi]) \\ &\quad \times \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa \rangle_{2\mu-1} d\xi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Распишем уравнение (3.15) для сопряженного оператора $Q_{2\mu}^*$:

$$[E - \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B)(T_{2\mu}^*)^{-1}] \varkappa = 0. \quad (3.18)$$

Тождественными преобразованиями оно приводится к виду

$$[T_{2\mu}^* \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} - \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B) \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1}] \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa = 0.$$

К обеим частям слева применяем обратимый оператор $\Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1}$:

$$[\Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} T_{2\mu}^* \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} - \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B) \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1}] \times \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa = 0. \quad (3.19)$$

Введем обозначение $\widehat{\varkappa} = \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} (T_{2\mu}^*)^{-1} \varkappa$.

Простая проверка показывает, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} T_{2\mu}^* \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} &= T_{2\mu-1}^{-1}, \\ \Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \mathbb{A}_{2\mu}^* \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} &= \widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1}. \end{aligned}$$

Так как для любого $\mu \in (0, +\infty)$ справедливо правило перестановочности

$$\Phi_{2\mu}^* P_B = P_B \Phi_{2\mu}^*,$$

то

$$\Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \mathbb{A}_{2\mu}^* P_B \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} = \widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B,$$

откуда следует равенство

$$\Phi_{2\mu-1}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B) \Phi_{2\mu}^* (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} = \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B).$$

Учитывая выражение (3.17) и уравнение (3.19), условие ортогональности (3.14) и сопряженное уравнение (3.15) можно привести к соответствующим видам

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B [1 - \xi]) \widehat{\varkappa} \rangle_{2\mu-1} d\xi &= 0, \\ [T_{2\mu-1}^{-1} - \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)] \widehat{\varkappa} &= 0. \end{aligned}$$

В полученных уравнениях проведем тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \\ \exp(-\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B \xi) \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B) \widehat{\varkappa} \rangle_{2\mu-1} d\xi &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$[\exp(-\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B) - T_{2\mu-1}] \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B) \widehat{\varkappa} = 0. \quad (3.21)$$

Вводя обозначение $\widetilde{\varkappa}(0) = \exp(\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B) \widehat{\varkappa}$, получим

$$\int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1}^*)^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \exp(-\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B \xi) \widetilde{\varkappa}(0) \rangle_{2\mu-1} d\xi = 0, \quad (3.22)$$

$$[T_{2\mu-1} - \exp(-\widetilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)] \widetilde{\varkappa}(0) = 0. \quad (3.23)$$

Изучим равенство (3.23). Для этого в фазовом пространстве $K_{2\mu-1}^n$ рассмотрим бесконечномерное дифференциальное уравнение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\tilde{A}_{2\mu-1} P_B \tilde{x}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.24)$$

с начальным условием в нулевой точке, равным $\tilde{x}(0)$. Очевидно, что решение уравнения (3.24) с начальным условием $\tilde{x}(0)$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \exp(-\tilde{A}_{2\mu-1} P_B t) \tilde{x}(0). \quad (3.25)$$

Тогда равенство (3.23) эквивалентно условию

$$\tilde{x}(1) = T_{2\mu-1} \tilde{x}(0). \quad (3.26)$$

Таким образом, вектор-функция $\tilde{x}(\cdot)$ является решением краевой задачи (3.24)–(3.26). Но краевая задача (3.24), (3.26) совпадает с краевой задачей (3.10), (3.11). По вектор-функции $\tilde{x}(\cdot) = \{\tilde{x}_i(\cdot)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ построим функцию $\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ – целая часть). По предложению 3 функция $\tilde{x}(\cdot)$ является решением сопряженного уравнения (2.1) и удовлетворяет условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$.

Изучим условие ортогональности (3.22), которое в силу представления (3.25) можно записать в виде

$$\int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1})^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \tilde{x}(\xi) \rangle_{2\mu-1} d\xi = 0. \quad (3.27)$$

Учитывая определения операторов $\Phi_{2\mu-1}$, $\Phi_{2\mu}$, векторов $F(\cdot)$, $v(\cdot)$ и функции $\tilde{x}(\cdot)$ (см. предложение 3), условие ортогональности (3.27) перепишем в виде

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (f(i + \xi), \tilde{x}(i + \xi))_{R^n} \right] d\xi = 0. \quad (3.28)$$

В силу леммы 3 в формуле (3.28) знаки интегрирования и суммирования перестановочны. После такой перестановки мы и получим равенство, эквивалентное (3.13).

Остается только заметить, что проведенная процедура построения решений сопряженного уравнения (2.1) по решениям уравнения (3.15) обратима. В силу этого условие ортогональности (3.14) и соответствующее ему условие (3.13) эквивалентны.

Пусть оператор $Q_{2\mu}$ при заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$ является нормально разрешимым. Если для заданных функций $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ условие (3.13) выполняется для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, то, проделав все процедуры предыдущего абзаца в обратном порядке, мы придем к равенствам (3.14). В силу леммы 1 и нормальной разрешимости оператора $Q_{2\mu}$ при таких функциях $\psi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ краевая задача $\mathcal{A}_{\mu}$ имеет решение. По предложению 2 это эквивалентно существованию решения для краевой задачи $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$.

В действительности в предложении 4 условие нормальной разрешимости оператора $Q_{2\mu}$ можно опустить, ибо оно выполняется. Это будет установлено

с помощью замены времени типа квазирастяжения в исходной краевой задаче $\mathcal{A}$, которое будет проведено в следующем параграфе.

Установим более сильное свойство нётеровости ($\text{Im } Q_{2\mu} = \overline{\text{Im } Q_{2\mu}}$, $\text{Ker } Q_{2\mu} < +\infty$, $\text{Ker } Q_{2\mu}^* < +\infty$) для оператора $Q_{2\mu}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, в случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что для ФДУ точечного типа с $B_R = [t_0, t_1]$, как правило, оператор $Q_{2\mu}$ не является фредгольмовым, т.е. $\dim \text{Ker } Q_{2\mu} \neq \dim \text{Ker } Q_{2\mu}^*$.

ЛЕММА 4. Пусть $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$, и соответственно $B = \{t_0, \dots, t_1 - 1\}$. Тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ оператор $Q_{2\mu}$ является нётеровым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оператора $[E - T_{2\mu}^{-1} \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]$ нормальная разрешимость эквивалентна нормальной разрешимости оператора $[T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]$. Используя равенство $P_{\bar{B}} + P_B = E$, проведем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})] &= P_{\bar{B}} [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})] + P_B [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})] \\ &= P_{\bar{B}} [T_{2\mu} - E] + P_B [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})] \\ &= [T_{2\mu} - E] - P_B [T_{2\mu} - E] + P_B [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]. \end{aligned}$$

В [1; гл. 2, лемма 4.1] показано, что в пространстве $K_{2\mu}^n$, $\mu \in (0, 1)$, для оператора $[T_{2\mu} - E]$ существует линейное сечение. В таком случае образ оператора $[T_{2\mu} - E]$ совпадает со всем пространством, т.е. $\text{Im}[T_{2\mu} - E] = K_{2\mu}^n$. С другой стороны, образ оператора $\{-P_B [T_{2\mu} - E] + P_B [T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]\}$ конечномерный, так как множество B конечное. Тогда сумма таких двух операторов также будет нормально разрешимым оператором (см. [1; приложение В, п. 1.10]). Далее, из конечности множества $B = \{t_0, \dots, t_1 - 1\}$ будет следовать конечность ядер операторов $Q_{2\mu}$ и $Q_{2\mu}^*$ и, следовательно, нётеровость оператора $Q_{2\mu}$.

Другой важный аспект вопроса существования решения связан с изучением пространства решений сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющих условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при заданном $\mu \in (0, 1]$. В силу предложений 1 и 3 описание пространства решений сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющих условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, эквивалентно описанию в фазовом пространстве $K_{2\mu-1}^n$ всех решений операторного уравнения

$$[E - T_{2\mu-1}^{-1} \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)] \tilde{\mathcal{X}} = 0. \quad (3.29)$$

Для вывода операторного уравнения (3.29) следует решение

$$\tilde{\mathcal{X}}(t) = \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B t) \tilde{\mathcal{X}}(0)$$

уравнения (3.10) подставить в (3.11) и сделать переобозначение $\tilde{\mathcal{X}}(0) = \tilde{\mathcal{X}}$.

Пространство решений уравнения (3.29) совпадает с собственным подпространством оператора $T_{2\mu-1}^{-1} \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)$, соответствующим собственному значению, равному 1. Изучение спектральных свойств и собственных подпространств следует производить в пространстве

$$\mathbb{K}_{2\mu-1}^n = K_{2\mu-1}^n + iK_{2\mu-1}^n,$$

полученном как комплексификация действительного пространства $K_{2\mu-1}^n$, $\mu \in (0, 1]$.

Сложность изучения этого вопроса связана как с неперестановочностью операторов сдвига $T_{2\mu-1}$ и проектирования P_B , так и с многомерностью (n -мерностью) блоков в матричном представлении оператора $\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1}$. Если исходное ФДУ является скалярным ($n = 1$) и определено на всей прямой, то упомянутая спектральная задача становится более обозримой. В этом случае матрицы A_j , $j = 1, \dots, s$, превращаются в скаляры α_j , $j = 1, \dots, s$, а оператор $\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1}$ имеет представление

$$\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j T_{2\mu-1}^{-n_j}. \quad (3.30)$$

Задача сводится к изучению спектра оператора

$$\tilde{l}(T_{2\mu-1}) = T_{2\mu-1}^{-1} \exp \left[- \sum_{j=1}^s \alpha_j T_{2\mu-1}^{-n_j} \right], \quad (3.31)$$

действующего в пространстве $K_{2\mu-1}^n$, и описанию собственного подпространства, соответствующего собственному значению, равному 1. Весьма важно, что спектр оператора $T_{2\mu-1}$ легко вычисляется, а для изучения спектра оператора $\tilde{l}(T_{2\mu-1})$ мы имеем возможность использовать теорему об отображении спектров (см. [7; гл. 10, теорема 10.33]).

ЛЕММА 5. Пусть задано $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$, сопряженное уравнение (2.1) является скалярным ($n = 1$), а область B_R совпадает со всей прямой, т.е. $B_R = \mathbb{R}$. Тогда единственным решением $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения, удовлетворяющим условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, является нулевое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что пространство решений уравнения (3.29) совпадает с собственным подпространством ранее рассмотренного оператора $T_{2\mu-1}^{-1} \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)$, соответствующим собственному значению, равному 1. Для оператора сдвига $T_{2\mu-1}$, действующего в пространстве $\mathbb{K}_{2\mu-1}$, точка нуль не принадлежит его спектру. Функция

$$l(\lambda) = \lambda^{-1} \exp \left[- \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda^{-n_j} \right] \quad (3.32)$$

аналитическая всюду, кроме точки $\lambda = 0$, и не равна константе. В таком случае по теореме об отображении спектров (см. [7; гл. 10, теорема 10.33]) дискретный спектр оператора $\tilde{l}(T_{2\mu-1})$ совпадает с образом функции $l(\cdot)$ на дискретном спектре оператора сдвига $T_{2\mu-1}$. Простая проверка показывает, что дискретный спектр оператора сдвига пустой. В таком случае уравнение (3.29) имеет единственное нулевое решение, и по предложению 3 единственным решением $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющим условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, также будет нулевое решение.

3.2. Случай произвольных концов интервала B_R . Как отмечалось в начале параграфа, мы должны с помощью замены времени рассматриваемый общий случай свести к случаю с целочисленными концами интервала B_R . Для этого установим ряд утверждений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Гомеоморфизмы прямой $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, k -сопряжены ($k = 0, 1, \dots$) гомеоморфизмам $*q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, если найдется диффеоморфизм $\sigma_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^{(k)}$ такой, что для всякого $j = 1, \dots, s$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{*q_j} & \mathbb{R} \\ \uparrow \sigma_k & & \uparrow \sigma_k \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{q_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\sigma_k \circ q_j = *q_j \circ \sigma_k$, $j = 1, \dots, s$.

Приведем лемму о замене времени типа квазирастяжения, которая была доказана в [1; гл. 3, лемма 2.1].

ЛЕММА 6. Пусть заданы $q_j(t) = t + n_j$, $q_{jk}(t) = t + kn_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, s$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $t_0, t_1, \bar{t} \in \mathbb{R}$. Для каждого k начиная с некоторого достаточно большого натурального числа найдется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\sigma_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$ такой, что сдвиги $q_{jk}(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, 1-сопряжены сдвигам $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, значения $\sigma_k^{-1}(t_0)$, $\sigma_k^{-1}(t_1)$, $\sigma_k^{-1}(\bar{t})$ целые, а последовательности $k\bar{\gamma}_k$, $k\underline{\gamma}_k$, где $\bar{\gamma}_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, $\underline{\gamma}_k = \inf_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, при $k \rightarrow \infty$ стремятся к 1. При этом диффеоморфизм $\sigma_k(\cdot)$ перестановочен со сдвигом $\bar{q}_k(t) = t + k\bar{n}$, $\bar{n} = \text{НОД}\{n_1, \dots, n_s\}$, т.е. $\sigma_k \circ \bar{q}_k = \bar{q}_k \circ \sigma_k$.

Все утверждения этой леммы, кроме последнего, совпадают с утверждениями, полученными в [1; гл. 3, лемма 2.1]. Последнее утверждение о перестановочности следует из построения диффеоморфизма σ_k , приведенного там же.

Наряду с основной начально-краевой задачей $\mathcal{B}$ (краевой задачей $\mathcal{A}$) рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу $\mathcal{B}_{\sigma_k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (краевую задачу $\mathcal{A}_{\sigma_k}$), полученную с помощью замены времени типа квазирастяжения:

$$\dot{x}_{\sigma_k}(\tau) = \sum_{j=1}^s \dot{\sigma}_k(\tau) A_j(\tau + kn_j) + \dot{\sigma}_k(\tau) \psi_{\sigma_k}(\tau), \quad \tau \in B_{\sigma_k R}, \quad (3.33)$$

$$\dot{x}_{\sigma_k}(\tau) = \dot{\sigma}_k(\tau) \varphi_{\sigma_k}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R} \setminus B_{\sigma_k R}, \quad (3.34)$$

$$x_{\sigma_k}(\bar{\tau}_k) = \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}. \quad (3.35)$$

Установим связь между решениями начально-краевых задач $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевых задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\sigma_k}$), $k \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть заданы

$$\begin{aligned} \psi(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \\ \mu &\in (0, \mu^*) \cap (0, 1], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Если $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ – решение основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$), то функция

$$x_{\sigma_k}(\tau) = x(\sigma_k(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $\mathbb{V}_{2\mu_k}^n(\mathbb{R})$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$, и является решением вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевой задачи $\mathcal{A}_{\sigma_k}$), в которой

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma_k}(\tau) &= \psi(\sigma_k(\tau)), \quad \varphi_{\sigma_k}(\tau) = \varphi(\sigma_k(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ \psi_{\sigma_k}(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\sqrt[k]{\mu^*}}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi_{\sigma_k}(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \\ B_{\sigma_k R} &= \sigma_k^{-1}(B_R), \quad \bar{\tau}_k = \sigma_k^{-1}(\bar{t}).\end{aligned}$$

Пусть заданы

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma_k}(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\sqrt[k]{\mu^*}}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi_{\sigma_k}(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}, \\ \bar{\tau}_k &= \sigma_k^{-1}(\bar{t}), \quad B_{\sigma_k R} = \sigma_k^{-1}(B_R), \quad \mu_k \in (0, \sqrt[k]{\mu^*}) \cap (0, 1], \quad k \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Если $x_{\sigma_k}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu_k}^n(\mathbb{R})$ – решение вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевой задачи $\mathcal{A}_{\sigma_k}$), то функция

$$x(t) = x_{\sigma_k}(\sigma_k^{-1}(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $\mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$, $\mu = (\mu_k)^k$, и является решением основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ (краевой задачи $\mathcal{A}$), в которой

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi_{\sigma_k}(\sigma_k^{-1}(t)), \quad \varphi(t) = \varphi_{\sigma_k}(\sigma_k^{-1}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \psi(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Для доказательства достаточно в основной начально-краевой задаче $\mathcal{B}$ (краевой задаче $\mathcal{A}$) произвести замену времени $t = \sigma_k(\tau)$.

Определим диагональную бесконечномерную блочную матрицу (оператор) $W_{\sigma_k}(t) \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$, $t \in [0, 1]$, с блочными элементами $W_{pl} = \dot{\sigma}_k(t)I_n$, $p, l \in \mathbb{Z}$, где I_n – единичная матрица размерности $n \times n$. Ограничение оператора $W_{\sigma_k}(t)$, $t \in [0, 1]$, на подпространство $K_{2\mu}^n$, как и в остальных случаях, будем обозначать через $W_{\sigma_k 2\mu}(t)$.

В фазовом пространстве $K_{2\mu_k}^n$, $\mu_k \in (0, \sqrt[k]{\mu^*}) \cap (0, 1]$, рассмотрим вспомогательную бесконечномерную начально-краевую задачу $\hat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ (краевую задачу $\hat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$)

$$\dot{\varkappa}(t) = P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(t) \mathbb{A}_{2\mu_k} \varkappa(t) + P_{B_{\sigma_k}} F(t) + P_{\bar{B}_{\sigma_k}} v(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.36)$$

$$\varkappa(1) = T_{2\mu_k} \varkappa(0), \quad (3.37)$$

$$(\varkappa(0))_{\bar{i}} = \bar{x} \quad (3.38)$$

с заданными: начальным значением $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и начальным моментом $\bar{i} = \bar{\tau}_k = \sigma_k^{-1}(\bar{t})$; вектор-функциями $F(t) = \{F_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $F_i(t) = \dot{\sigma}_k(t+i)\psi_{\sigma_k}(t+i)$ и $v(t) = \{v_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $v_i(t) = \dot{\sigma}_k(t+i)\varphi_{\sigma_k}(t+i)$; $\mathbb{A}_{2\mu_k}$ как ограничением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство $K_{2\mu_k}^n$; множеством $B_{\sigma_k} \subseteq \mathbb{Z}$ таким, что соответствующий ему интервал $B_{\sigma_k R}$ – это интервал из уравнения (3.33).

Установим связь между решениями вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевой задачи $\mathcal{A}_{\sigma_k}$) и бесконечномерной вспомогательной начально-краевой задачи $\hat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ (краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$), аналогичной утверждению из предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть заданы

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma_k}(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\sqrt[k]{\mu^*}}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), & \varphi_{\sigma_k} &\in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \\ \mu_k &\in (0, \sqrt[k]{\mu^*}) \cap (0, 1], & \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, \\ \tau_{0k}, \tau_{1k}, \bar{\tau}_k &\in \mathbb{Z}, & \tau_{0k} &= \sigma_k^{-1}(t_0), \quad \tau_{1k} = \sigma_k^{-1}(t_1), \quad \bar{\tau}_k = \sigma_k^{-1}(\bar{t}), \\ B_{\sigma_k R} &= \sigma_k^{-1}(B_R), & k &\in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Если $x_{\sigma_k}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu_k}^n(\mathbb{R})$ – решение вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевой задачи $\mathcal{A}_{\sigma_k}$), то вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i(t) = x_{\sigma_k}(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, является решением вспомогательной бесконечномерной краевой задачи $\widehat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ (краевой задачи $\widehat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$).

Если вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, является решением вспомогательной бесконечномерной начально-краевой задачи $\widehat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ (краевой задачи $\widehat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$), то функция $x_{\xi_k}(t) = x_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), является решением вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (краевой задачи $\mathcal{A}_{\sigma_k}$) и $x_{\xi_k}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu_k}^n(\mathbb{R})$.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 2.

Для интегрального представления решения уравнения (3.36) установим важное перестановочное соотношение.

ЛЕММА 7. Для любых $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, справедливо перестановочное свойство

$$\begin{aligned}P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{2\mu_k} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{2\mu_k} \\ = P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{2\mu_k} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{2\mu_k}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу перестановочного свойства

$$\sigma_k \circ \bar{q}_k = \bar{q}_k \circ \sigma_k, \quad \bar{q}_k(t) = t + k\bar{n}, \quad \bar{n} = \text{НОД}\{n_1, \dots, n_s\},$$

и определения диагональных бесконечномерных блочных матриц $W_{\sigma_k 2\mu_k}(t)$, $t \in [0, 1]$ и $\mathbb{A}_{j2\mu_k}$, $j = 1, \dots, s$, имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned}W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) T_{2\mu_k}^{k\bar{n}} &= T^{k\bar{n}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi), \\ W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) &= W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1), \\ W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{j2\mu_k} &= \mathbb{A}_{j2\mu_k} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi), & W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) P_{B_{\sigma_k}} &= P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi), \\ \mathbb{A}_{j2\mu_k} P_{B_{\sigma_k}} &= P_{B_{\sigma_k}} \mathbb{A}_{j2\mu_k}, & \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k} &= T_{2\mu_k} \mathbb{A}_{j2\mu_k}, \\ j &= 1, \dots, s, & \xi, \xi_1, \xi_2 &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Так как $\mathbb{A}_{2\mu_k} = \sum_{j=1}^s \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_j}$, то

$$\begin{aligned}P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{2\mu_k} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{2\mu_k} \\ = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_j} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{i2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s P_{B_{\sigma_k}} \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_j} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{i2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_i} \\
&= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s P_{B_{\sigma_k}} \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_j} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{i2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_i} \\
&= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{j2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_j} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{i2\mu_k} T_{2\mu_k}^{kn_i} \\
&= P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_2) \mathbb{A}_{i2\mu_k} P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi_1) \mathbb{A}_{2\mu_k}.
\end{aligned}$$

В силу свойства перестановочности из леммы 7 решение уравнения (3.36) имеет представление

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \exp\left(\int_0^t P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \kappa(0) \\
&+ \int_0^t \exp\left(\int_\xi^t P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) [P_{B_{\sigma_k}} F(\xi) + P_{\bar{B}_{\sigma_k}} v(\xi)] d\xi. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Здесь также справедлив аналог предложения 1, т.е. $\kappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu_k}^n)$ является решением вспомогательной бесконечномерной краевой задачи $\hat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$ (задачи (3.36), (3.37)) тогда и только тогда, когда она определяется по формуле (3.39), а $\kappa(0)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
&\left[E - T_{2\mu_k}^{-1} \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right] \kappa(0) \\
&= \int_0^1 T_{2\mu_k}^{-1} \exp\left(\int_\xi^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) [P_{B_{\sigma_k}} F(\xi) + P_{\bar{B}_{\sigma_k}} v(\xi)] d\xi. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

ЛЕММА 8. Пусть $\mu \in (0, 1)$ фиксировано и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$. Тогда для достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор

$$Q_{2\mu_k} = \left[E - T_{2\mu_k}^{-1} \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right], \quad (3.41)$$

действующий из пространства $K_{2\mu_k}^n$ в себя, является нормально разрешимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы эквивалентно нормальной разрешимости оператора

$$\left[T_{2\mu_k} - \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right]. \quad (3.42)$$

В силу свойства диффеоморфизма $\sigma_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, из леммы 6 норма оператора $W_{\sigma_k 2\mu_k}(t)$, $t \in [0, 1]$, действующего из пространства $K_{2\mu_k}^n$ в себя, оценивается следующим образом: для любого $t \in [0, 1]$ и достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\|W_{\sigma_k 2\mu_k}(t)\| \leq Ck^{-1}, \quad C > 0.$$

Несложно заметить, что

$$\|\mathbb{A}_{j2\mu_k}\| \leq \|A_j\|, \quad j = 1, \dots, s, \quad \|T_{2\mu_k}\| \leq \mu_k^{-1},$$

где $\|A_j\|$ – норма оператора A_j , действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$, и индуцирующий оператор $\mathbb{A}_{j2\mu_k}$.

Учитывая оценки норм операторов $\mathbb{A}_{j2\mu_k}$, $j = 1, \dots, s$, $T_{2\mu_k}$ и представление оператора $\mathbb{A}_{2\mu}$, получим, что для любого $t \in [0, 1]$ и достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \|P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(t) \mathbb{A}_{2\mu_k}\| &\leq \|P_{B_{\sigma_k}}\| \cdot \|W_{\sigma_k 2\mu_k}\| \cdot \|\mathbb{A}_{2\mu_k}\| \leq Ck^{-1} \|\mathbb{A}_{2\mu_k}\| \\ &\leq Ck^{-1} \sum_{j=1}^s \|\mathbb{A}_{j2\mu_k}\| \cdot \|T_{2\mu_k}^{kn_j}\| \leq Ck^{-1} \sum_{j=1}^s \|A_j\| \mu_k^{-kn_j} = Ck^{-1} \sum_{j=1}^s \|A_j\| \mu^{-n_j}. \end{aligned}$$

Справедливо очевидное равенство

$$\begin{aligned} &\left[T_{2\mu_k} - \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right] \\ &= [T_{2\mu_k} - E] + \left[E - \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right]. \end{aligned}$$

Оператор $[T_{2\mu_k} - E]$ при $\mu_k \in (0, 1)$ сюръективный и имеет норму, большую 1, а оператор $\left[E - \exp\left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi\right) \right]$ за счет больших $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть сделан сколь угодно малым по норме. Следовательно, для достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор (3.42) также будет сюръективным и поэтому нормально разрешимым оператором.

По аналогии с сопряженным уравнением (2.1), выписанным по уравнению (1.2) из основной начально-краевой задачи B , при каждом $k \in \mathbb{Z}$ построим вспомогательное сопряженное уравнение по уравнению (3.33) из вспомогательной начально-краевой задачи $\mathcal{B}_{\sigma_k}$:

$$\dot{\tilde{x}}_{\sigma_k}(\tau) = - \sum_{j=1}^s \dot{\sigma}_k(\tau) A'_j \tilde{x}_{\sigma_k}(\tau - kn_j) \mathcal{K}_{B_{\sigma_k R}}(\tau - kn_j), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

где $B_{\sigma_k R} = \sigma_k^{-1}(B_{\sigma_k})$ с целочисленными концами.

Наряду со вспомогательным сопряженным уравнением (3.43) в фазовом пространстве $K_{2\mu_k^{-1}}^n$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$, $\mu \in (0, 1]$, рассмотрим бесконечномерное вспомогательное сопряженное уравнение

$$\dot{\tilde{\mathcal{X}}}(\tau) = -\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu_k^{-1}} W_{\sigma_k 2\mu_k^{-1}}(\tau) P_{B_{\sigma_k}} \tilde{\mathcal{X}}(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad (3.44)$$

с краевым условием

$$\tilde{\mathcal{X}}(1) = T_{2\mu_k^{-1}} \tilde{\mathcal{X}}(0), \quad (3.45)$$

где $B_{\sigma_k} \subseteq \mathbb{Z}$ такое, что соответствующее ему множество $B_{\sigma_k R}$ совпадает с множеством $B_{\sigma_k R}$ из вспомогательного сопряженного уравнения (3.43). Установим связь между их решениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если решение $\tilde{x}(\cdot)$ вспомогательного сопряженного уравнения (3.43) удовлетворяет условию $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu_k^{-1}}^n(\mathbb{R})$, то вектор-функция

$\tilde{x}(\tau) = \{\tilde{x}_i(\tau)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tilde{x}_i(\tau) = \tilde{x}(\tau + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной вспомогательной краевой задачи (3.44), (3.45).

Если вектор-функция $\tilde{x}(\tau) = \{\tilde{x}_i(\tau)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tau \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной вспомогательной краевой задачи (3.44), (3.45), то функция $\tilde{x}(\tau) \equiv \tilde{x}_{[\tau]}(\tau - [\tau])$, $\tau \in \mathbb{R}$ (где $[\cdot]$ – целая часть числа), является решением вспомогательного сопряженного уравнения (3.43) и удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu_k-1}^n(\mathbb{R})$.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения (3).

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$. Вместо краевой задачи $\mathcal{A}$ при достаточно большом k рассмотрим эквивалентную ей вспомогательную краевую задачу $\mathcal{A}_{\sigma_k}$ (предложение 5) и соответствующую бесконечномерную вспомогательную краевую задачу $\hat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$ (предложение 6). По лемме 4 оператор $Q_{2\mu_k}$ будет нормально разрешимым. Для такой задачи справедливо предложение 4, в котором вместо краевой задачи $\mathcal{A}$ фигурирует вспомогательная краевая задача $\mathcal{A}_{\sigma_k}$, вместо сопряженного уравнения (2.1) фигурирует вспомогательное сопряженное уравнение (3.43), а вместо параметра μ фигурирует параметр μ_k . Следует дословно повторить доказательство предложения 4 применительно к вспомогательной краевой задаче $\mathcal{A}_{\sigma_k}$, используя соответствующую ей бесконечномерную вспомогательную краевую задачу $\hat{\mathcal{A}}_{\sigma_k \mu_k}$ и бесконечномерное вспомогательное сопряженное уравнение (3.44) с краевым условием (3.45).

Остается во вспомогательной краевой задаче $\mathcal{A}_{\sigma_k}$ и вспомогательном сопряженном уравнении (3.43) использовать замену времени $\tau = \sigma^{-1}(t)$, и мы перейдем к краевой задаче $\mathcal{A}$ и исходному сопряженному уравнению (2.1), а утверждение предложения 4 с параметром μ_k перейдет в утверждение теоремы 1 с параметром μ .

Мы можем доказать следующую уточняющую теорему существования решения краевой задачи $\mathcal{A}$ в случае конечного интервала определения уравнения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

и $B_R = [t_0, t_1]$ – конечный интервал. Тогда все решения $x(\cdot)$ краевой задачи $\mathcal{A}$ удовлетворяют условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$. Для существования решения $x(\cdot)$ краевой задачи $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt = 0$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 все решения краевой задачи $\mathcal{A}$ принадлежат пространству $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$. В таком случае при каждом $\mu \in (0, 1]$ решения краевой задачи $\mathcal{A}$, принадлежащие пространствам $\mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, совпадают.

По замечанию 3 при каждом $\mu \in (0, 1]$ решения сопряженного уравнения (2.1), принадлежащие пространствам $\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, также совпадают. Остается применить теорему 1 при каком-либо заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$.

Уточняющая теорема существования решения краевой задачи $\mathcal{A}$ может быть сформулирована и в случае тривиальности пространства решений сопряженного уравнения (2.1). Такой факт мы установили (лемма 5) в случае, когда уравнение (1.2) является скалярным и определено на всей прямой.

ТЕОРЕМА 5. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}),$$

ФДУ (1.2) является скалярным ($n = 1$), а область определения совпадает со всей прямой, т.е. $B_R = \mathbb{R}$. Тогда при каждом $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ существует решение $x(\cdot)$ краевой задачи $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5 при каждом $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ единственным решением $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения, удовлетворяющим условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, является нулевое решение. Следовательно, условие ортогональности (3.13) выполняется. Тогда по теореме 1 для краевой задачи $\mathcal{A}$ существует решение, удовлетворяющее условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$.

§ 4. Теорема существования решения для основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$

Как и в § 2, вначале мы докажем сформулированные результаты для множества B_R с целочисленными концами и начальным моментом $\bar{t}$. Далее с помощью замены времени типа квазирастяжения основная начально-краевая задача $\mathcal{B}$ сводится к краевой задаче с целочисленными концами интервала B_R и начальным моментом $\bar{t}$. Большинство формулируемых свойств будут основаны на аналогичных свойствах для краевой задачи $\mathcal{A}$. Сопряженное уравнение (2.1) также сохраняется неизменным, меняется только класс решений. Нас будет интересовать специальный класс $\mathbb{P}_r \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ импульсных решений $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения.

4.1. Случай целочисленных концов интервала B_R и начального момента $\bar{t}$. Для $r \in \mathbb{Z}$ через $\Pi_{r2\mu}: K_{2\mu}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим оператор, действующий по правилу: для любого $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^n$ имеет место представление $\Pi_{r2\mu}(\varkappa) = x_r$. Через $\mathbb{S}_{r2\mu}$ обозначим линейное сечение $\mathbb{S}_{r2\mu}: \mathbb{R}^n \rightarrow K_{2\mu}^n$ к оператору $\Pi_{r2\mu}$, действующее по правилу: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление $\mathbb{S}_{r2\mu}(x) = \varkappa$, $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_r = x$, $x_i = 0$, $i \in \mathbb{Z} \setminus r$. Как и раньше, там, где это не будет вызывать недоразумений, нижние индексы у операторов будут опускаться.

Наряду с сопряженным уравнением (2.1) в фазовом пространстве $K_{2\mu-1}^n$, $\mu \in (0, 1]$, рассмотрим бесконечномерное сопряженное дифференциальное уравнение

$$\dot{\tilde{\varkappa}}(t) = -\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B \tilde{\varkappa}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.1)$$

с краевым условием

$$\tilde{\varkappa}(1) = T_{2\mu-1} \tilde{\varkappa}(0) - T_{2\mu-1} \mathbb{S}_{\bar{t}2\mu-1} z. \quad (4.2)$$

Установим связь между их решениями в виде аналога предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если импульсное решение $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1) со скачком $z = \tilde{x}(\bar{t}+0) - \tilde{x}(\bar{t}-0)$ в начальный момент $\bar{t} \in \mathbb{Z}$ принадлежит пространству $\mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$, то вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}$, $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, является решением краевой задачи (4.1), (4.2).

Если вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}$, $t \in [0, 1]$, является решением краевой задачи (4.1), (4.2), то функция $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ (где $[\cdot]$ – целая часть числа), является импульсным решением сопряженного уравнения (2.1) со скачком $z = \tilde{x}(\bar{t}+0) - \tilde{x}(\bar{t}-0)$ в начальный момент $\bar{t} \in \mathbb{Z}$ и принадлежит пространству $\mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K_{2\mu-1}^n$. По лемме 2.4 из [1; гл. 2] для производной вектор-функции $\tilde{\varkappa}(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\tilde{\varkappa}}(t) = \{\dot{\tilde{x}}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Тогда из уравнения (2.1) следует, что вектор-функция $\tilde{\varkappa}(\cdot)$ будет удовлетворять уравнению (4.1), а из определения самой $\tilde{\varkappa}(\cdot)$ следует краевое условие (4.2).

Обратное. Из определения функции $\tilde{x}(\cdot)$ и краевого условия (4.2) следует, что эта функция является кусочно абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$ со скачком $z = \tilde{x}(\bar{t}+0) - \tilde{x}(\bar{t}-0)$ в начальный момент $\bar{t} \in \mathbb{Z}$. Так как вектор-функция $\tilde{\varkappa}(\cdot)$ со значениями в пространстве $K_{2\mu-1}^n$ является решением дифференциального уравнения (4.1), то она является сильно абсолютно непрерывной и потому удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$.

Для импульсных решений сопряженного уравнения (2.1) также справедлив следующий аналог замечания 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$ для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), имеющего скачок в точке $\bar{t}$ и удовлетворяющего краевому условию (3.8), вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при любом $\mu \in (0, 1]$.

Определим линейные операторы

$$Q_{r2\mu} : K_{2\mu}^n \longrightarrow K_{2\mu}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \check{\Delta}_{2\mu} : D_{2\mu}^{(0)} \times D_{2\mu}^{(0)} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow K_{2\mu}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0, 1],$$

имеющие представление

$$Q_{r2\mu} = (Q_{2\mu}, \Pi_{r2\mu}), \quad \check{\Delta}_{2\mu} = (\bar{\Delta}_{2\mu}, E_n),$$

где для любых $\varkappa_1(\cdot), \varkappa_2(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$\bar{\Delta}_{2\mu}(\varkappa_1(\cdot), \varkappa_2(\cdot), x) = \Delta_{2\mu}(\varkappa_1(\cdot), \varkappa_2(\cdot)), \quad E_n(\varkappa_1(\cdot), \varkappa_2(\cdot), \bar{x}) = \bar{x}.$$

Сформулируем аналог леммы 1.

ЛЕММА 9. Пусть $F(\cdot), v(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{t} \in \mathbb{Z}$, $\mu \in (0, 1]$. Для того чтобы начально-краевая задача $\hat{\mathcal{B}}_\mu$ имела решение, необходимо, чтобы вектор $\bar{\Delta}_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot), \bar{x})$ был ортогонален решениям уравнения $Q_{i2\mu}^*(\varkappa, z) = 0$. Если оператор $Q_{i2\mu}^*$ является нормально разрешимым, то это условие является и достаточным.

Доказательство непосредственно следует из уравнения (3.6), краевого условия (3.3) и того факта, что $(\text{Im } Q_{i2\mu})^\perp = \text{Ker } Q_{i2\mu}^*$.

В связи с леммой 9 интересен вопрос о том, как устроен образ линейного оператора $\check{\Delta}_{2\mu}$. Здесь также справедлив аналог леммы 2.

ЛЕММА 10. *Для любого $\mu \in (0, 1]$ образ линейного оператора $\check{\Delta}_{2\mu}$ всюду плотен в $K_{2\mu}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Доказательство непосредственно следует из определения оператора $\check{\Delta}_{2\mu}$ и леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из лемм 9 и 10 следует, что в случае нетривиальности ядра сопряженного оператора $Q_{i2\mu}^*$, $\mu \in (0, 1]$, найдутся $F(\cdot), v(\cdot) \in D_{2\mu}^{(0)}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, при которых основная начально-краевая задача $\mathcal{B}$ не имеет решения.

Теперь мы можем доказать результат о существовании решения основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ в виде аналога предложения 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть заданы*

$$\begin{aligned} \psi(\cdot) &\in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), & \varphi(\cdot) &\in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \\ \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, & \bar{t} &\in \mathbb{Z}, & \mu &\in (0, \mu^*) \cap (0, 1]. \end{aligned}$$

Для существования решения основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{t} + 0) - \tilde{x}(\bar{t} - 0)])_{R^n} = 0 \quad (4.3)$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_t \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1). Если оператор $\check{Q}_{i2\mu}$ является нормально разрешимым, то это условие является и достаточным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 существование решения для основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ с функциями $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ эквивалентно существованию решения для начально-краевой задачи $\hat{\mathcal{B}}_\mu$. В силу леммы 9 начально-краевая задача $\hat{\mathcal{B}}_\mu$ имеет решение для тех $\psi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$, для которых

$$\langle \Delta_{2\mu}(F(\cdot), v(\cdot)), \varkappa \rangle_{2\mu} + (\bar{x}, z)_{R^n} = 0 \quad (4.4)$$

для всех решений уравнения

$$Q_{i2\mu}^*(\varkappa, z) = 0. \quad (4.5)$$

Первое слагаемое в (4.4) совпадает с левой частью из (3.14). Поэтому эквивалентными преобразованиями первое слагаемое из (4.4) может быть представлено в виде левой части из равенства (3.22) и равенство (4.4) может быть записано в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu-1})^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \exp(-\tilde{\Delta}_{2\mu-1} P_B \xi) \tilde{\varkappa}(0) \rangle_{2\mu-1} d\xi \\ &+ (\bar{x}, z)_{R^n} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для сопряженного оператора $\Pi_{r2\mu}^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow K_{2\mu}^n$ несложно показать, что

$$\Pi_{r2\mu}^* = \mu^{-2|r|} \mathbb{S}_{r2\mu}.$$

Теперь мы можем расписать сопряженное уравнение (4.5):

$$[E - \exp(\mathbb{A}_{2\mu}^* P_B)(T_{2\mu}^*)^{-1}] \mathfrak{K} + \mu^{-2|\bar{t}|} \mathbb{S}_{\bar{t}2\mu} z = 0. \quad (4.7)$$

Первое слагаемое в сопряженном уравнении совпадает с левой частью в (3.18). Как и при исследовании условия ортогональности, проведенном выше, эквивалентными преобразованиями первое слагаемое в левой части сопряженного уравнения приводится к виду левой части из уравнения (3.23). При этом само сопряженное уравнение с учетом эквивалентных преобразований, проведенных при доказательстве предложения 4, примет следующий вид:

$$[T_{2\mu^{-1}} - \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu^{-1}} P_B)] \tilde{\mathfrak{K}}(0) + T_{2\mu^{-1}} [\mu^{-2|\bar{t}|} \Phi_{2\mu^{-1}}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \mathbb{S}_{\bar{t}2\mu}] z = 0. \quad (4.8)$$

Изучим равенство (4.8). Для этого в фазовом пространстве $K_{2\mu^{-1}}^n$ рассмотрим бесконечномерное дифференциальное уравнение

$$\dot{\tilde{\mathfrak{K}}}(t) = -\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu^{-1}} P_B \tilde{\mathfrak{K}}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.9)$$

с начальным условием в нулевой точке, равным $\tilde{\mathfrak{K}}(0)$. Очевидно, что решение уравнения (4.9) с начальным условием $\tilde{\mathfrak{K}}(0)$ имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{K}}(t) = \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu^{-1}} P_B t) \tilde{\mathfrak{K}}(0).$$

Так как

$$\mathbb{S}_{\bar{t}2\mu^{-1}} = \mu^{-2|\bar{t}|} \Phi_{2\mu^{-1}}^* (\Phi_{2\mu}^*)^{-1} \mathbb{S}_{\bar{t}2\mu},$$

то равенство (4.8) эквивалентно условию

$$\tilde{\mathfrak{K}}(1) = T_{2\mu^{-1}} \tilde{\mathfrak{K}}(0) + T_{2\mu^{-1}} \mathbb{S}_{\bar{t}2\mu^{-1}} z. \quad (4.10)$$

Таким образом, вектор-функция $\tilde{\mathfrak{K}}(\cdot)$ является решением краевой задачи (4.9), (4.10). Но краевая задача (4.9), (4.10) совпадает с краевой задачей (4.1), (4.2). По вектор-функции $\tilde{\mathfrak{K}}(\cdot) = \{\tilde{x}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ построим функцию

$$\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}_{[t]}(t - [t]), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \tilde{x}(i+0) \equiv \tilde{x}_i(0), \quad \tilde{x}(i-0) \equiv \tilde{x}_{i-1}(1), \quad i \in \mathbb{Z}$$

($[\cdot]$ – целая часть). По предложению 8 функция $\tilde{x}(\cdot)$ является импульсным решением сопряженного уравнения (2.1) со скачком $z = \tilde{x}(\bar{i}+0) - \tilde{x}(\bar{i}-0)$ в начальный момент $\bar{t} = \bar{i}$ и удовлетворяет условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}}^n \mathbb{V}_{2\mu^{-1}}^n(\mathbb{R})$.

Изучим условие ортогональности (4.6), которое можно записать в виде

$$\int_0^1 \langle (\Phi_{2\mu^{-1}})^{-1} \Phi_{2\mu} [P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)], \tilde{\mathfrak{K}}(\xi) \rangle_{2\mu^{-1}} d\xi + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{i}+0) - \tilde{x}(\bar{i}-0)])_{R^n} = 0. \quad (4.11)$$

С учетом определений операторов $\Phi_{2\mu^{-1}}$, $\Phi_{2\mu}$, векторов $F(\cdot)$, $v(\cdot)$ и функции $\tilde{x}(\cdot)$ (см. предложение 8) условие ортогональности (4.11) примет вид

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (f(i+\xi), \tilde{x}(i+\xi))_{R^n} \right] d\xi + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{i}+0) - \tilde{x}(\bar{i}-0)])_{R^n} = 0. \quad (4.12)$$

В силу леммы 3 в формуле (4.12) знаки интегрирования и суммирования перестановочны. После такой перестановки мы и получим равенство, эквивалентное (4.3).

Остается только заметить, что проведенная процедура построения импульсных решений сопряженного уравнения (2.1) со скачками в точке $\bar{t} = \bar{i}$ по решениям уравнения (4.5) обратима. В силу этого условие ортогональности (4.4) и соответствующее ему условие (4.3) эквивалентны.

Пусть оператор $Q_{\bar{t}2\mu}$ при заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$ является нормально разрешимым. Если при заданных функциях $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и векторе $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ условие (4.3) выполняется для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_t \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ и имеющего скачок $z = \tilde{x}(\bar{i} + 0) - \tilde{x}(\bar{i} - 0)$ в начальный момент $\bar{t} = \bar{i}$, то, проделав все процедуры предыдущего абзаца в обратном порядке, мы придем к равенствам (4.4). В силу леммы 9 и нормальной разрешимости оператора $Q_{\bar{t}2\mu}$ при таких функциях $\psi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, векторе $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и начальном моменте $\bar{i} = \bar{t} \in \mathbb{Z}$ бесконечномерная начально-краевая задача $\hat{\mathcal{B}}_\mu$ имеет решение. По предложению 2 это эквивалентно существованию решения для основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$, удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ при этом же μ .

В действительности в предложении 9 условие нормальной разрешимости оператора $Q_{\bar{t}2\mu}$ также можно опустить, ибо оно выполняется. Это будет установлено с помощью замены времени типа квазирастяжения в основной начально-краевой задаче $\mathcal{B}$, которое будет проведено в § 5.

Установим для оператора $Q_{\bar{t}2\mu}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, более сильное свойство нётеровости ($\text{Im } Q_{\bar{t}2\mu} = \overline{\text{Im } Q_{\bar{t}2\mu}}$, $\text{Ker } Q_{\bar{t}2\mu} < +\infty$, $\text{Ker } Q_{\bar{t}2\mu}^* < +\infty$) в случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что для ФДУ точечного типа с $B_R = [t_0, t_1]$, как правило, оператор $Q_{\bar{t}2\mu}$ не является фредгольмовым, т.е. $\dim \text{Ker } Q_{\bar{t}2\mu} \neq \dim \text{Ker } Q_{\bar{t}2\mu}^*$.

ЛЕММА 11. Пусть $B_R = [m_0, m_1]$ и, соответственно, $B = \{m_0, \dots, m_1 - 1\}$. Тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ оператор $Q_{r2\mu}$, $r \in \mathbb{Z}$, является нётеровым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь разложением оператора $Q_{2\mu}$, приведенным при доказательстве леммы 4, дадим разложение оператора $Q_{r2\mu}$:

$$\check{Q}_{r2\mu} = (T_{2\mu}^{-1}[T_{2\mu} - E], \Pi_{r2\mu}) + (T_{2\mu}^{-1}\{-P_B[T_{2\mu} - E] + P_B[T_{2\mu} - \exp(P_B \mathbb{A}_{2\mu})]\}, 0). \quad (4.13)$$

При доказательстве леммы 4 мы уже отмечали, что образ оператора $[T_{2\mu} - E]$ совпадает со всем пространством, т.е. $\text{Im}[T_{2\mu} - E] = K_{2\mu}^n$. Следовательно, таким свойством обладает и оператор $T_{2\mu}^{-1}[T_{2\mu} - E]$. Легко видеть, что

$$\Pi_{r2\mu}(\text{ker}[T_{2\mu} - E]) = \mathbb{R}^n,$$

откуда и следует, что первое слагаемое из (4.13) является сюръективным оператором из $K_{2\mu}^n$ в $K_{2\mu}^n \times \mathbb{R}^n$. С другой стороны, образ второго слагаемого из (4.13) конечномерный. Тогда сумма таких двух операторов будет нормально разрешимым оператором (см. [1; приложение В, п. 1.10]).

В силу леммы 4 $\dim(\text{Ker } Q_{2\mu}) < +\infty$, $\dim(\text{Ker } Q_{2\mu}^*) < +\infty$. Так как

$$\text{Ker } Q_{r2\mu} = \text{Ker } Q_{2\mu} \cap \text{Ker } \Pi_{r2\mu},$$

то выполняется неравенство $\dim(\text{Ker } Q_{r2\mu}) < +\infty$. С другой стороны,

$$\dim(\text{Ker } Q_{r2\mu}^*) = \dim(\text{Ker } Q_{2\mu}^*) + \dim(\text{Ker } \Pi_{r2\mu}^*) + \dim(\text{Im } Q_{2\mu}^* \cap \text{Im } \Pi_{r2\mu}^*).$$

Так как

$$\dim(\text{Ker } \Pi_{r2\mu}^*) < +\infty, \quad \dim(\text{Im } \Pi_{r2\mu}^*) < +\infty$$

и в силу нётеровости оператора $Q_{2\mu}$ имеет место оценка $\dim(\text{Ker } Q_{2\mu}^*) < +\infty$, то будет выполняться неравенство $\dim(\text{Ker } Q_{r2\mu}^*) < +\infty$. Следовательно, оператор $Q_{r2\mu}^*$ является нётеровым.

Другой важный аспект вопроса существования решения связан с изучением пространства решений сопряженного уравнения (2.1), удовлетворяющих условию $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ при заданном $\mu \in (0, 1]$. Согласно предложениям 1 и 8 поиск решений $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1) равносильен поиску решений бесконечномерной краевой задачи (4.1), (4.2). Уже отмечалось, что решение уравнения (4.1) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B t) \tilde{x}(0),$$

откуда следует, что

$$\tilde{x}(1) = \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B) \tilde{x}(0).$$

Подставив последнее выражение в краевое условие (4.2), простыми преобразованиями можно прийти к операторному уравнению

$$[E - P_{\{\bar{t}\}}][E - T_{2\mu-1}^{-1} \exp(-\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu-1} P_B)] \tilde{x}(0) = 0. \quad (4.14)$$

Полученное операторное уравнение, в отличие от операторного уравнения (3.29), даже в скалярном случае ($n = 1$) не допускает использования теоремы об отображении спектров для его решения.

4.2. Случай произвольных концов интервала B_R и начального момента $\bar{t}$. Как отмечалось в начале параграфа, мы должны с помощью замены времени общий случай свести к случаю с целочисленными концами интервала B_R и начальным моментом $\bar{t}$. Для этого установим ряд утверждений.

В силу важности условия нормальной разрешимости оператора $Q_{\bar{t}2\mu}$ сформируем аналог леммы 8.

ЛЕММА 12. Пусть $\mu \in (0, 1)$ фиксировано, и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$. Тогда для достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор

$$Q_{r2\mu_k} = \left(\left[E - T_{2\mu_k}^{-1} \exp \left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi \right) \right], \Pi_{r2\mu} \right), \quad (4.15)$$

действующий из пространства $K_{2\mu_k}^n$ в пространство $(K_{2\mu_k}^n, \mathbb{R}^n)$, является нормально разрешимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы эквивалентно нормальной разрешимости оператора

$$\left(\left[T_{2\mu_k} - \exp \left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi \right) \right], \Pi_{r2\mu} \right). \quad (4.16)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \left(\left[T_{2\mu_k} - \exp \left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi \right) \right], \Pi_{r2\mu} \right) \\ &= \left([T_{2\mu_k} - E] + \left[E - \exp \left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi \right) \right], \Pi_{r2\mu} \right). \end{aligned}$$

Оператор $([T_{2\mu_k} - E], \Pi_{r2\mu})$ при $\mu_k \in (0, 1)$ сюръективный. В то же время из доказательства леммы 8 следует, что оператор

$$\left(\left[E - \exp \left(\int_0^1 P_{B_{\sigma_k}} W_{\sigma_k 2\mu_k}(\xi) \mathbb{A}_{2\mu_k} d\xi \right) \right], 0 \right)$$

за счет больших $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть сделан сколь угодно малым по норме. Следовательно, для достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор (3.42) также будет сюръективным и поэтому нормально разрешимым оператором.

Наряду со вспомогательным сопряженным уравнением (3.43) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ в фазовом пространстве $K_{2\mu_k}^n$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$, $\mu \in (0, 1]$, рассмотрим бесконечномерное вспомогательное сопряженное уравнение

$$\tilde{\mathcal{X}}(t) = -\tilde{\mathbb{A}}_{2\mu_k^{-1}} W_{\sigma_k 2\mu_k^{-1}}(\tau) P_{B_{\sigma_k}} \tilde{\mathcal{X}}(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.17)$$

с краевым условием

$$\tilde{\mathcal{X}}(1) = T_{2\mu_k^{-1}} \tilde{\mathcal{X}}(0) - T_{2\mu_k^{-1}} \mathbb{S}_{\bar{\tau}_k 2\mu_k^{-1}} z, \quad (4.18)$$

где $\bar{\tau}_k = \sigma_k^{-1}(\bar{t})$, $\bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}$, а $B_{\sigma_k} \subseteq \mathbb{Z}$ такое, что соответствующее ему множество $B_{\sigma_k R}$ совпадает с множеством $B_{\sigma_k R}$ из вспомогательного сопряженного уравнения (3.43). Установим связь между их решениями в виде аналога предложения 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если импульсное решение $\tilde{x}(\cdot)$ вспомогательного сопряженного уравнения (3.43) со скачком $z = \tilde{x}(\bar{\tau}_k + 0) - \tilde{x}(\bar{\tau}_k - 0)$ в начальный момент $\bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}$ принадлежит пространству $\mathbb{P}_{\bar{\tau}_k} \mathbb{V}_{2\mu_k^{-1}}^n(\mathbb{R})$, то вектор-функция

$$\tilde{\mathcal{X}}(\tau) = \{\tilde{x}_i(\tau)\}, \quad \tilde{x}_i(\tau) = \tilde{x}(\tau + i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \tau \in [0, 1],$$

является решением бесконечномерной вспомогательной краевой задачи (4.17), (4.18).

Если вектор-функция $\tilde{\mathcal{X}}(\tau) = \{\tilde{x}_i(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной вспомогательной краевой задачи (4.17), (4.18), то функция

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}_{[\tau]}(\tau - [\tau]), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

($[\cdot]$ – целая часть числа), является импульсным решением вспомогательного сопряженного уравнения (3.43) со скачком $z = \tilde{x}(\bar{\tau}_k + 0) - \tilde{x}(\bar{\tau}_k - 0)$ в начальный момент $\bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}$ и принадлежит пространству $\mathbb{P}_{\bar{\tau}_k} \mathbb{V}_{2\mu_k^{-1}}^n(\mathbb{R})$.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 8.

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$. Вместо основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ при достаточно большом k рассмотрим эквивалентную ей вспомогательную начально-краевую задачу $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ (предложение 5) и бесконечномерную вспомогательную краевую задачу $\widehat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ (предложение 6). По лемме 12 при достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор $Q_{\bar{\tau}_k 2\mu_k}$ является нормально разрешимым. Для такой задачи справедливо предложение 9, в котором вместо краевой задачи $\mathcal{B}$ фигурирует вспомогательная краевая задача $\mathcal{B}_{\sigma_k}$, вместо сопряженного уравнения (2.1) фигурирует вспомогательное сопряженное уравнение (3.43), а вместо параметра μ и начального момента $\bar{t}$ фигурируют параметр μ_k и начальный момент $\bar{\tau}_k$. Следует дословно повторить доказательство предложения 9 применительно к вспомогательной краевой задаче $\mathcal{B}_{\sigma_k}$, используя соответствующую ей бесконечномерную вспомогательную краевую задачу $\widehat{\mathcal{B}}_{\sigma_k \mu_k}$ и бесконечномерное вспомогательное сопряженное уравнение (4.17) с краевым условием (4.18).

Остается во вспомогательной начально-краевой задаче $\mathcal{B}_{\sigma_k}$ и вспомогательном сопряженном уравнении с краевым условием (3.43) использовать замену времени $\tau = \sigma^{-1}(t)$, и мы перейдем к основной начально-краевой задаче $\mathcal{B}$ и исходному сопряженному уравнению (2.1), а утверждение предложения 9 с параметром μ_k и начальным моментом $\bar{\tau}_k$ перейдет в утверждение теоремы 2 с параметром μ и начальным моментом $\bar{t}$.

Мы можем сформулировать уточняющую теорему существования решения основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ в случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть заданы

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}.$$

Все решения $x(\cdot)$ краевой задачи $\mathcal{B}$ удовлетворяют условию $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$. Для существования решения $x(\cdot)$ основной начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ необходимо и достаточно, чтобы условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{\mathbb{R}^n} dt + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{t} + 0) - \tilde{x}(\bar{t} - 0)])_{\mathbb{R}^n} = 0$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$ сопряженного уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 все решения начально-краевой задачи $\mathcal{B}$ принадлежат пространству $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$. В таком случае при любом $\mu \in (0, 1]$ решения начально-краевой задачи $\mathcal{B}$, принадлежащие пространствам $\mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, совпадают.

По замечанию 5 при любом $\mu \in (0, 1]$ решения сопряженного уравнения (2.1), имеющие скачок в точке $\bar{t}$ и принадлежащие пространствам $\mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{P}_{\bar{t}} \mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, также совпадают. Остается применить теорему 2 при каком-либо заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$.

§ 5. Проблема точечной полноты решений

Подпространство $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ (см. § 2) определяется решениями $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ однородной краевой задачи (2.3), (2.4). Поэтому если основная краевая задача $\mathcal{A}$ имеет решение, то вопрос о степени точечной полноты решений определяется подпространством $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$.

ТЕОРЕМА 7. *Для любого фиксированного $\bar{t} \in \mathbb{R}$ функции*

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu), \quad \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$$

переменной $\mu \in (0, \mu^) \cap (0, 1)$ являются монотонными кусочно постоянными функциями. Первая из них монотонно убывающая, а вторая монотонно возрастающая. Подпространства $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ взаимно ортогональны и выполняется равенство*

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu) + \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $\bar{x} \in \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ применим теорему 2 к однородной начально-краевой задаче (2.3)–(2.5). Для такой однородной задачи $f(\cdot) \equiv 0$. Из условия ортогональности в теореме 2 как необходимого условия следует, что любой вектор $\bar{x} \in \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ ортогонален подпространству $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$, т.е. подпространства $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ взаимно ортогональны. Из условия ортогональности в теореме 2 как достаточного условия следует, что подпространства $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ взаимно дополняемы, т.е. $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu) + \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) = n$. Условия монотонности подпространств $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$, $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ по переменной μ очевидны.

Сформулируем одно очевидное замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ найдется $\mu_{\bar{t}} \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ такое, что на интервале $(0, \mu_{\bar{t}})$ функции $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$ постоянны.

Доказательство непосредственно следует из определения этих функций.

СЛЕДСТВИЕ 2. *При заданном $\bar{t} \in \mathbb{R}$ решения краевой задачи $\mathcal{A}$ являются μ -точечно полными ($\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$) тогда и только тогда, когда для краевой задачи $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно решение $x(\cdot) \in \mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ и выполняется условие $\mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) \equiv 0$.*

Это утверждение является следствием линейности рассматриваемой краевой задачи $\mathcal{A}$, в силу чего каждое ее решение является суммой частного решения и произвольного решения однородной краевой задачи (2.3), (2.4).

В случае конечного интервала $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, теорема 7 также допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $B_R = [t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Для любого фиксированного $\bar{t} \in \mathbb{R}$ функции*

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu), \quad \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu)$$

переменной μ определены при любом $\mu \in (0, 1]$ и являются постоянными. Подпространства $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu)$ и $\mathcal{R}_{\bar{t}}^(\mu)$ взаимно ортогональны и выполняется равенство*

$$\dim \mathcal{R}_{\bar{t}}(\mu) + \dim \mathcal{R}_{\bar{t}}^*(\mu) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 все решения краевой задачи $\mathcal{A}$ принадлежат пространству $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$. В таком случае при любом $\mu \in (0, 1]$ решения краевой задачи $\mathcal{A}$, принадлежащие пространствам $\mathbb{V}_{2\mu}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, совпадают.

По замечанию 3 при любом $\mu \in (0, 1]$ решения сопряженного уравнения (2.1), принадлежащие пространствам $\mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{2\mu-1}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{P}_{\bar{t}}\mathbb{V}_{21}^n(\mathbb{R})$, также совпадают. Остается применить теорему 7 при каком-либо заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову и А. М. Стёпину за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Л. А. Бекларян, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход*, Факториал Пресс, М., 2007.
- [2] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Appl. Math. Sci., **99**, Springer-Verlag, New York, NY, 1993.
- [3] Л. А. Бекларян, М. Б. Крученов, “О разрешимости линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа”, *Дифференц. уравнения*, **44**:4 (2008), 435–445; англ. пер.: L. A. Beklaryan, M. B. Kruchenov, “On the solvability of a linear homogeneous functional-differential equation of point type”, *Differ. Equ.*, **44**:4 (2008), 453–463.
- [4] Ю. Д. Латушкин, А. М. Стёпин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2 (1991), 85–143; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stëpin, “Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems”, *Russian Math. Surveys*, **46**:2 (1991), 95–165.
- [5] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman, Harlow; Wiley, New York, 1994.
- [6] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980; фр. пер.: V. Trénoquine, *Analyse fonctionnelle*, Mir, Moscow, 1985.
- [7] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.

Л. А. Бекларян (L. A. Beklaryan)

Центральный экономико-математический институт РАН,

г. Москва

E-mail: beklar@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию

04.02.2009 и 20.10.2010