Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:02:00

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена

Получены общие неравенства для квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от значений функций Грина и Робена. Эти неравенства содержат также приведенные модули полос и полуполос. Обсуждаются некоторые приложения полученных результатов к задачам об экстремальном разбиении и смежным вопросам геометрической теории функций.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: функция Грина, функция Робена, приведенные модули, экстремальные разбиения, теоремы покрытия.

§ 1. Введение. Формулировки основных результатов

В геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известны утверждения общего характера, касающиеся неравенств для квадратичных форм различного вида [1], [2]. В частности, в работах Е. Нехари, Ю. Е. Аленицына, П. Дюрена, М. Шиффера и других математиков изучались квадратичные формы, коэффициенты которых зависят от значений функций Грина $g_B(z, \zeta)$ или функций Робена $g_B(z, \zeta, \Gamma)$ (см., например, “Добавление” в книге [1] и работы [3]–[5]). В настоящей статье установлены новые свойства таких форм, содержащие и уточняющие многие известные результаты. В отличие от работ других авторов, в этой работе рассматриваются также функции Робена с полюсом в граничной точке [6]. Для простоты изложения мы ограничимся функциями Робена $g_B(z, \zeta, \Gamma)$ конечносвязных областей B комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек и с полюсом в допустимой точке $\zeta \in \overline{B} \setminus \Gamma$, $\Gamma \subset \partial B$. Полное определение этих функций будет дано в § 2. Если $\Gamma = \partial B$, то функция Робена совпадает с функцией Грина $g_B(z, \zeta)$, и в этом случае мы будем рассматривать произвольные области B и даже произвольные открытые множества B , понимая под $g_B(z, \zeta)$ функцию Грина связной компоненты B , содержащей полюс ζ . *Радиусом Робена области B относительно конечной точки ζ и множества Γ* назовем величину

$$r(B, \Gamma, \zeta) = \exp \left\{ \lim_{z \rightarrow \zeta} [g_B(z, \zeta, \Gamma) + \log |z - \zeta|] \right\}.$$

При $\Gamma = \partial B$ эта величина называется *внутренним радиусом* и обозначается через $r(B, \zeta)$. В случае $\zeta = \infty$ локальный параметр $z - \zeta$ в этом определении необходимо заменить на $1/z$. Для фиксированных B , Γ , $\{z_k\}_{k=1}^n$, $z_k \in \overline{B} \setminus \Gamma$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00028) и ДВО РАН (грант № 09-III-A-01-007).

$k = 1, \dots, n$, и произвольных вещественных чисел x_k , $k = 1, \dots, n$, рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \sigma(z_k) \log r(B, \Gamma, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l \sigma(z_k) g_B(z_k, z_l, \Gamma), \quad (1)$$

где $\sigma(z_k) = 2$, если точка $z_k \in B$, а в случае граничной точки z_k величина $\sigma(z_k)\pi$ равна внутреннему по отношению к области B углу с вершиной в z_k , $k = 1, \dots, n$.

Ранее изучалась монотонность квадратичной формы (1) при деформации множеств B и Γ в ряде частных случаев (см. [3]–[5], [7]) и при поляризации (см. [7]). Наиболее полные утверждения о монотонности вытекают из свойств емкостей обобщенных конденсаторов (см. [6]). Эти утверждения состоят в следующем. Квадратичная форма (1) не увеличивается, если либо множество Γ расширяется, либо область B расширяется за счет части границы, не принадлежащей $\Gamma \cup (\bigcup_{k=1}^n \{z_k\})$, и форма (1) не уменьшается, если множество B расширяется за счет Γ . В §3 доказаны более глубокие свойства квадратичной формы (1), получающиеся, по существу, путем разбиения подходящего обобщенного конденсатора на конденсаторы, лежащие либо в криволинейных полосах, либо в полуполосах, с последующей оценкой емкостей этих конденсаторов. Такой подход был предложен в работе [8] и впоследствии развит в [9], [10] и других публикациях автора. Независимо в работах Г. В. Кузьминой [11], Е. Г. Емельянова [12] и А. Ю. Солынина [13] были введены понятия приведенного модуля криволинейной полосы (в оригинале – двуугольника; см. [11], [12]) и полуполосы (треугольника; см. [13]). Методы, разработанные на основе этих понятий, во многом схожи с указанным подходом, а в ряде частных случаев совпадают с ним, но описаны в терминах модулей семейств кривых. Основные результаты настоящей работы (теоремы 1 и 2) также содержат эти понятия. *Полосой* называется односвязная область гиперболического типа с двумя отмеченными различными достижимыми граничными точками, называемыми *вершинами*. Будем рассматривать только те полосы P , у которых вершины z_1 и z_2 обладают следующим свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает P на прямолинейную полосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ так, что $f(z_1) = -i\infty$, $f(z_2) = +i\infty$, то в окрестности каждой точки z_k справедливо разложение

$$f(z) = \frac{(-1)^{k+1}i}{\varphi_k \pi} \log(z - z_k) + c_k + o(1), \quad z \rightarrow z_k, \quad (2)$$

где $\varphi_k > 0$ и c_k – постоянные, $k = 1, 2$ (в случае $z_k = \infty$ локальный параметр $z - z_k$ заменяем на $1/z$). Ясно, что $\varphi_k \pi$ – внутренний угол области P в точке z_k , $k = 1, 2$. Траектория полосы P определяется как прообраз любой прямой $\operatorname{Re} w = u$, $0 < u < 1$, при отображении f . Следуя [11], [12], *приведенным модулем области P* назовем величину

$$M(P) = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Аналогично, *полуполоса* – это односвязная область гиперболического типа P , $P \subset \mathbb{C}$, с тремя отмеченными различными достижимыми граничными точками z_1 , z_2 и z_3 , расположенными в положительном направлении обхода границы P , одна из которых (пусть, например, z_1) называется *вершиной*. Рассматриваем только те полуполосы P , у которых вершина z_1 обладает следующим

свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область P на прямолинейную полуполосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$ так, что $f(z_1) = -i\infty$, $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$, то в окрестности точки z_1 выполняется разложение (2) при $k = 1$. Следуя [13], приведенный модуль полуполосы P определим как

$$M(P) = -\operatorname{Im} c_1.$$

В работе [13] рассматривается эквивалентное понятие приведенного модуля треугольника (а не полуполосы), что, на наш взгляд, менее точно, так как треугольник предполагает наличие трех угловых точек, а не одной, как в нашем случае. Траекторию полуполосы P определим как прообраз любой полупрямой $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w \leq 0$, $0 < u < 1$, при отображении f . В частности, траектория содержит соответствующий граничный элемент на “стороне” $z_2 z_3$. Число φ_k в разложении (2) в случае полосы (при $k = 1, 2$) либо полуполосы (при $k = 1$) назовем *показателем вершины* z_k области P .

Рассмотрим совокупность различных точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ на сфере $\bar{\mathbb{C}}$ и конечную совокупность попарно непересекающихся полос и полуполос $\{P\}$, носители вершин которых расположены в точках из $\{z_k\}_{k=1}^n$ так, что каждая точка z_k является носителем некоторой вершины. Обозначим через z_{kl} , $l = 1, \dots, m_k$, все вершины областей из $\{P\}$, для которых точка z_k является носителем, $k = 1, \dots, n$. Пусть φ_{kl} – показатель вершины z_{kl} , а P_{kl} – область с вершиной z_{kl} , $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$. Ясно, что при такой нумерации полосы учитываются дважды, а полуполосы – один раз. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть совокупности $\{z_k\}_{k=1}^n$ и $\{P\}$ определены выше, B – открытое множество на сфере $\bar{\mathbb{C}}$, содержащее точки z_k , $k = 1, \dots, n$, и пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – произвольная совокупность вещественных чисел. Предположим, что выполняются следующие условия:

- 1) $\sum_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = 2$, $k = 1, \dots, n$;
- 2) для любой полосы P_{kl} из $\{P\}$ справедливо равенство $|x_k \varphi_{kl}| = |x_{k'} \varphi_{k'l'}|$, где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ – показатели вершин этой полосы;
- 3) если P_{kl} – либо полуполоса, либо полоса с вершинами z_{kl} и $z_{k'l'}$, причем $x_k x_{k'} > 0$, то ни одна из траекторий области P_{kl} не принадлежит множеству B , $1 \leq l, l' \leq m_k$, $1 \leq k, k' \leq n$.

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \log r(B, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l g_B(z_k, z_l) \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \left[\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right], \quad (3)$$

где $\lambda_{kl} = 1/2$, если P_{kl} – полоса, и $\lambda_{kl} = 1$, если P_{kl} – полуполоса.

Если B – область, $n = 1$ и совокупность $\{P\}$ состоит только из полуполос, то неравенство (3) совпадает с неравенством (1) работы [10] (ср. [14]). Если, кроме того, B – односвязная область, то (3) содержится в теореме 3 из статьи [13]. В случае, когда множество B представляет собой объединение n попарно непересекающихся односвязных областей, каждая из которых содержит только одну точку z_k и не содержит некоторые точки a_k , $k = 1, \dots, n$, а совокупность $\{P\}$ состоит только из полос, не содержащих a_k , неравенство (3) (с указанием всех случаев равенства) получено впервые Е. Г. Емельяновым в работе [15] (см. также [10; § 3]). В этом частном случае левая часть неравенства (3) не содержит

слагаемых, зависящих от значений функций Грина. Такие оценки относятся к так называемым задачам об экстремальном разбиении, которые восходят к работам М. А. Лаврентьева, Г. М. Голузина, имеют богатую историю и более или менее непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций (см. [16]). Значительных результатов в этой области удалось достичь с помощью метода экстремальных метрик (см., например, [11]–[13], [15]–[19]). В нашем случае условие неналегания заменяется на условие “непокрытия” траекторий или вовсе снимается, при этом допускаются числа x_k , $1 \leq k \leq n$, разных знаков.

Пусть теперь B – конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Рассмотрим совокупность $\{z_k\}_{k=1}^n$ различных допустимых точек области B и конечную совокупность $\{P\}$ попарно непересекающихся полос и полуполос в $\overline{\mathbb{C}}$, обладающих следующим свойством. При всех достаточно малых $r > 0$ окрестность $U(z, r, P)$ любой вершины z любой области P из $\{P\}$ принадлежит некоторой окрестности $U(z_k, r, B)$, $1 \leq k \leq n$, и, наоборот, в любой окрестности $U(z_k, r, B)$ содержится некоторая окрестность $U(z, r, P)$ вершины z области $P \in \{P\}$. В частности, носители достижимых точек z и z_k совпадают. (Определения окрестностей даны в §2.) Обозначим через z_{kl} , $l = 1, \dots, m_k$, все вершины областей $P \in \{P\}$, подходящие окрестности которых лежат в окрестности $U(z_k, r, B)$ при достаточно малых r , а через φ_{kl} – показатель вершины z_{kl} , $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область B и совокупности $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\{P\}$ определены выше, Γ – непустое замкнутое подмножество границы ∂B , состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, и пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел. Предположим, что точки $z_k \notin \Gamma$, $k = 1, \dots, n$, траектории областей P из $\{P\}$ не пересекаются с частью границы $(\partial B) \setminus \Gamma$ и выполняются следующие условия:

- 1) $\sum_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = \sigma(z_k)$, $k = 1, \dots, n$;
- 2) для любой полосы P_{kl} из $\{P\}$ справедливо равенство $|x_k \varphi_{kl}| = |x_{k'} \varphi_{k'l'}|$, где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ – показатели вершин этой полосы;
- 3) если P_{kl} – либо полуполоса, либо полоса с вершинами z_{kl} и $z_{k'l'}$, причем $x_k x_{k'} > 0$, то ни одна из траекторий области P_{kl} не принадлежит множеству B , $1 \leq l, l' \leq m_k$, $1 \leq k, k' \leq n$.

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x_k^2 \sigma(z_k) \log r(B, \Gamma, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l \sigma(z_k) g_B(z_k, z_l, \Gamma) \\ & \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \left[\pi \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right], \end{aligned}$$

где λ_{kl} такие же, как в теореме 1.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на применении асимптотики емкости обобщенных конденсаторов (см. [6], [20]) и симметризации (см. [8]). Этот подход приводит также к оценкам квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от функций Неймана. Асимптотика емкости соответствующего конденсатора получена в недавней работе [21]. Далее нам понадобится некоторая

информация о функциях Грина и, в особенности, функциях Робена с полюсом в граничной точке.

§ 2. Функции Грина и Робена

Предположим, что для области B сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и точки $z_0 \in B$, $z_0 \neq \infty$, существует функция $g_B(z, z_0)$, непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$ и гармоническая в B , исключая точку z_0 , обращающаяся в нуль вне B и такая, что функция $g_B(z, z_0) + \log|z - z_0|$ — гармоническая в окрестности z_0 . Тогда функцию $g_B(z, z_0)$ называют (классической) *функцией Грина области B с полюсом в точке z_0* . Если $z_0 = \infty$, то функция $g_B(z, \infty)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность $g_B(z, \infty) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. В случае произвольной области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функция Грина определяется как предел

$$g_B(z, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{B_n}(z, z_0), \quad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

где $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — исчерпание области B областями, имеющими классическую функцию Грина, т.е. $\overline{B_n} \subset B_{n+1}$, $z_0 \in B_1$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Функция Грина не зависит от выбора исчерпания области B и совпадает с классической функцией Грина, если B имеет таковую. Для произвольного открытого множества B плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ под функцией Грина $g_B(z, z_0)$ будем понимать функцию Грина связной компоненты множества B , содержащей точку z_0 . Если множество B имеет функцию Грина с полюсом в точке $z_0 \in B$, то оно имеет функцию Грина с полюсом в любой другой точке этого множества. *Внутренним радиусом открытого множества B относительно точки $z_0 \in B$* назовем величину

$$r(B, z_0) = \exp \left\{ \lim_{z \rightarrow z_0} [g_B(z, z_0) + \log|z - z_0|] \right\}, \quad z_0 \neq \infty,$$

$$r(B, \infty) = \exp \left\{ \lim_{z \rightarrow \infty} [g_B(z, \infty) - \log|z|] \right\}.$$

Если множество B не имеет функции Грина, то считаем, что $r(B, z_0) = +\infty$.

Перейдем теперь к определению функции Робена в случае области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, ограниченной конечным числом аналитических жордановых кривых. Пусть Γ — непустое замкнутое подмножество ∂B , состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть z_0 — конечная точка множества $\overline{B} \setminus \Gamma$. Обозначим через $g_B(z, z_0, \Gamma)$ вещественную непрерывную функцию на $\overline{B} \setminus \{z_0\}$, непрерывно дифференцируемую на $\overline{B} \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$, гармоническую в $B \setminus \{z_0\}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = 0 \quad \text{при } z \in \Gamma, \quad \frac{\partial}{\partial n} g_B(z, z_0, \Gamma) = 0 \quad \text{при } z \in \partial B \setminus (\Gamma \cup \{z_0\}),$$

$g_B(z, z_0, \Gamma) + \log|z - z_0|$ — ограниченная гармоническая функция в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к ∂B). Если $z_0 = \infty$, функция $g_B(z, \infty, \Gamma)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность $g_B(z, \infty, \Gamma) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. При $z_0 \in B$ функцию $g_B(z, z_0, \Gamma)$ называют *функцией Робена области B с полюсом в точке z_0* . Мы оставим за ней это название для любых точек $z_0 \in \overline{B} \setminus \Gamma$. В случае, когда $\Gamma = \partial B$, функция Робена совпадает в области B с функцией Грина $g_B(z, z_0)$. Существование и единственность функции $g_B(z, z_0, \Gamma)$ в приведенных выше условиях легко проверяется.

Пусть теперь B – произвольная конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Под границей ∂B области B будем понимать совокупность простых концов. В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, носитель достижимой граничной точки и саму такую точку будем обозначать одной и той же буквой. Напомним, что граничная точка ζ области G называется *достижимой граничной точкой*, если ее можно соединить с какой-либо внутренней точкой области G некоторой непрерывной кривой $l : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, целиком лежащей в G , кроме одного ее конца $\zeta = z(b)$. Окрестность достижимой граничной точки $U(\zeta, r, B)$ определим как связную компоненту пересечения $B \cap U(\zeta, r)$, содержащую некоторую открытую дугу кривой l с концом в точке

$$z(b), \quad U(\zeta, r) := \{z : |z - \zeta| < r\},$$

если $\zeta \neq \infty$ и

$$U(\infty, r) := \left\{z : |z| > \frac{1}{r}\right\}.$$

Две достижимые граничные точки ζ_1 и ζ_2 считаются различными, если существуют непересекающиеся окрестности $U(\zeta_k, r, B)$, $k = 1, 2$. Окрестность $U(\zeta, r, B)$ внутренней точки $\zeta \in B$ совпадает с обычным “кругом” $U(\zeta, r) \subset B$ при малых r . Запись $z \rightarrow \zeta$ означает направление, при котором каждая последующая точка принадлежит той же окрестности точки ζ , что и предыдущая.

Пусть функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых в плоскости $\mathbb{C}$. Точку z_0 назовем *допустимой точкой области B с показателем α* , $0 < \alpha \leq 2$, если $z_0 \in B$ либо z_0 является достижимой граничной точкой области B и в некоторой окрестности этой точки справедливо разложение вида

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha}(A + o(1)), \quad z \rightarrow z_0, \quad (4)$$

где A – некоторая отличная от нуля постоянная. В случае $z_0 = \infty$ локальный параметр $z - z_0$ в разложении (4) необходимо заменить на $1/z$. Если $z_0 \in B$, $z_0 \neq \infty$, то разложение (4) автоматически выполняется с показателем $\alpha = 1$ и $A = f'(z_0)$. Очевидно, что свойство допустимости точки z_0 не зависит от функции f , а зависит только от области B . В частности, если в некоторой окрестности точки $z_0 \neq \infty$ граница области B состоит из двух замкнутых аналитических дуг с общим концом в z_0 , расположенных под внутренним по отношению к области B углом $\alpha\pi > 0$, то по теореме Лихтенштейна–Варшавского [22; с. 359] точка z_0 допустима с показателем α . Пусть область B и функция f такие же, как и выше, Γ – непустое замкнутое подмножество границы ∂B , состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, и пусть z_0 – допустимая точка области B с показателем α , не принадлежащая Γ . Определим функцию Робена равенством

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = \alpha g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma)).$$

Легко видеть, что в окрестности конечной допустимой точки z_0 функция $g_B(z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|$ – гармоническая, а если $z_0 = \infty$, то гармонической является функция $g_B(z, z_0, \Gamma) - \log |z|$, как и в случае функции Грина.

§ 3. Доказательства теорем

Можно считать, что каждая связная компонента множества B из теоремы 1 ограничена конечным числом гладких кривых и содержит, по крайней мере, одну точку z_k , $1 \leq k \leq n$. Кроме того, теорему 1 достаточно доказать в случае, когда области совокупности $\{P\}$ ограничены кусочно гладкими кривыми, а числа x_k , $k = 1, \dots, n$, отличны от нуля. Введем обозначение

$$I(\omega, D) := \iint_D |\nabla \omega|^2 dx dy.$$

Пусть для достаточно малого $r > 0$ ω_r – потенциальная функция конденсатора

$$(B, \{\partial B, \overline{U(z_1, r^{1/|x_1|})}, \dots, \overline{U(z_n, r^{1/|x_n|})}\}, \{0, \text{sign } x_1, \dots, \text{sign } x_n\}),$$

т.е. функция ω_r – непрерывная в $\overline{B}$, гармоническая в $B \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{U(z_k, r^{1/|x_k|})}$, равна нулю на границе ∂B и равна $\text{sign } x_k$ на множестве $\overline{U(z_k, r^{1/|x_k|})}$, $k = 1, \dots, n$ (см. [6], [20]). Из асимптотики емкости конденсатора [20] следует, что

$$I(\omega_r, B) = 2\pi \sum_{k=1}^n |x_k| \left(\frac{-1}{\log r} \right) - 2\pi Q \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0, \quad (5)$$

где Q совпадает с левой частью неравенства (3). Пусть $w = f_{kl}(z)$ – функция из определения области $P_{kl} \in \{P\}$, $f_{kl}(z_{kl}) = -i\infty$, доопределенная на границе P_{kl} в смысле граничного соответствия, $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим вещественнозначные функции ω_{kl} , $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$, заданные в полосе $\mathcal{P} := \{w : 0 \leq \text{Re } w \leq 1\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_{kl}(w) &= 1 - |\omega_r(f_{kl}^{-1}(w))|, & \text{если } P_{kl} - \text{полоса,} \\ \omega_{kl}(w) &= \begin{cases} 1 - |\omega_r(f_{kl}^{-1}(w))|, & \text{при } \text{Im } w \leq 0, \quad 0 \leq \text{Re } w \leq 1, \\ 1 - |\omega_r(f_{kl}^{-1}(\overline{w}))|, & \text{при } \text{Im } w \geq 0, \quad 0 \leq \text{Re } w \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

если P_{kl} – полуполоса. Здесь потенциальная функция ω_r доопределена по непрерывности нулем вне множества B . Из конформной инвариантности интеграла Дирихле и свойств симметричной равноизмеримой перестановки функции имеем

$$I(\omega_r, B) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} I(\omega_{kl}, \mathcal{P}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} I(\omega_{kl}^*, \mathcal{P}),$$

где ω_{kl}^* – результат симметризации Штейнера функции ω_{kl} относительно вещественной оси, $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$ (см., например, [8; теорема 3]). Ввиду непрерывности функции ω_r , а также условия 3) теоремы 1 каждая функция ω_{kl}^* равна единице на отрезке $[0, 1]$. Используя принцип Дирихле, разложение (2) и условие 2) теоремы 1, заключаем, что

$$\begin{aligned} I(\omega_{kl}^*, \mathcal{P}) &\geq \frac{2}{(-\log r)(1/(|x_k \varphi_{kl}| \pi)) + \lambda_{kl} M(P_{kl}) + o(1)} \\ &= \frac{2|x_k \varphi_{kl}| \pi}{-\log r} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{kl} M(P_{kl}) |x_k \varphi_{kl}| \pi}{-\log r} + o \left(\frac{1}{\log r} \right) \right\}, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$. Суммируя полученные соотношения и учитывая условие 1), приходим к неравенству

$$I(\omega_r, B) \geq 2\pi \sum_{k=1}^n |x_k| \left(\frac{-1}{\log r} \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} M(P_{kl}) x_k^2 \varphi_{kl}^2 \pi^2 \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0.$$

Сравнение с (5) дает оценку

$$Q \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} M(P_{kl}) x_k^2 \varphi_{kl}^2.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 в основном повторяет предыдущее доказательство, однако имеются следующие различия. Вместо введенного выше конденсатора необходимо рассмотреть аналогичный конденсатор из § 3 статьи [6] с пластинами, построенными по множествам Γ и $U(z_k, r^{1/|x_k|}, B)$, $k = 1, \dots, n$. Далее, функции ω_{kl} необходимо доопределить по непрерывности единиц в точках полосы $\mathcal{P}$, не принадлежащих множеству

$$f_{kl}(\overline{B} \cap \overline{P}_{kl}), \quad l = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Последнее возможно, так как траектории областей $P_{kl} \in \{P\}$ не пересекаются с $(\partial B) \setminus \Gamma$.

§ 4. Приложения

Ради простоты изложения мы ограничимся некоторыми следствиями теоремы 1. Применения теоремы 2 аналогичны, но требуют более сложных вычислений. В этом случае учитывается поведение функций на границе области определения. Довольно общая конкретизация теоремы 1 состоит в следующем утверждении (мы пользуемся терминологией из работ [16]–[19]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – область сферы $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная конечным (возможно нулевым) числом простых замкнутых аналитических кривых. Пусть $Q(z)dz^2$ – положительный квадратичный дифференциал на G , регулярный всюду, за исключением m простых полюсов и n полюсов второго порядка $z_1, \dots, z_n$, в окрестностях которых в терминах некоторого локального параметра, изображающего z_k как точку $z = 0$, имеют место разложения

$$Q(z)dz^2 = \left(-\frac{x_k^2}{z^2} + \dots \right) dz^2,$$

где $x_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, – вещественные числа ($m \geq 0$, $n \geq 1$, множество простых полюсов может быть пустым). Пусть G является внутренним замыканием круговых областей $G_1, \dots, G_n$, соответствующих полюсам $z_1, \dots, z_n$. Предположим, что открытое множество $B \subset G$ содержит точки z_k , $k = 1, \dots, n$, и не содержит ортогональных траекторий квадратичного

дифференциала $Q(z)dz^2$ с предельными концевыми точками $z_k, z_{k'}$, для которых $x_k, x_{k'} > 0, 1 \leq k, k' \leq n$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \log r(B, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l g_B(z_k, z_l) \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \log r(G_k, z_k). \quad (6)$$

Знак равенства в (6) имеет место в случае, когда $B = \bigcup_{k=1}^n G_k$ при любых значениях $x_k, k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим объединение всех траекторий $Q(z)dz^2$, имеющих предельную концевую точку в нуле или простом полюсе квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, через Φ . Пусть, далее, $z_0 \in \Phi$ и

$$\zeta = \mathcal{F}(z) = \int_{z_0}^z Q^{1/2}(z) dz.$$

Аналитическая функция $\mathcal{F}$ локально однолистка в области G за исключением нулей и полюсов $Q(z)dz^2$. Она отображает это множество на некоторую риманову поверхность $\mathcal{R}$, лежащую над ζ -плоскостью. В каждой области $G_k \setminus z_k$ функция $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = \pm i |x_k| \log f_k(z), \quad (7)$$

где функция f_k конформно и однолистно отображает область G_k на единичный круг $|w| < 1, f_k(z_k) = 0, k = 1, \dots, n$ (см. [8; § 4]). Пусть E – объединение всех ортогональных траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, соединяющих двойные полюсы z_k с нулями и полюсами, лежащими на границе соответствующей области $G_k, k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\mathcal{E}$ образ множества E при отображении $\mathcal{F}$. Из локального строения траекторий квадратичного дифференциала следует, что каждая связная компонента множества $\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}$ однократно покрывает либо некоторую полосу вида $a < \operatorname{Re} \zeta < b$, либо полуполосу $a < \operatorname{Re} \zeta < b, \operatorname{Im} \zeta > 0$ ($\operatorname{Im} \zeta < 0$). Таким образом, множество $G \setminus \overline{E}$ представляет собой объединение некоторых полос и полуполос $P_{kl}, l = 1, \dots, m_k, k = 1, \dots, n$, образующих совокупность $\{P\}$ (см. текст перед теоремой 1). Условия 1)–3) теоремы 1 выполняются автоматически. Для вычисления правой части неравенства (3) заметим, что если P_{kl} – полоса с вершинами z_{kl} и $z_{k'l'}$, показатели которых равны соответственно φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$, то из представления (7) имеем

$$M(P_{kl}) = -\frac{1}{\varphi_{kl}\pi} \log |f'_k(z_k)| - \frac{1}{\varphi_{k'l'}\pi} \log |f'_{k'}(z_{k'})|.$$

В случае, когда P_{kl} – полуполоса с вершиной в z_{kl} , выполняется равенство

$$M(P_{kl}) = -\frac{1}{\varphi_{kl}\pi} \log |f'_k(z_k)|.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \left[\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \Psi_{kl},$$

где

$$\Psi_{kl} = \begin{cases} -\frac{1}{2} [x_k^2 \varphi_{kl} \log |f'_k(z_k)| + x_{k'}^2 \varphi_{k'l'} \log |f'_{k'}(z_{k'})|], & \text{если } P_{kl} \text{ – полоса,} \\ -x_k^2 \varphi_{kl} \log |f'_k(z_k)|, & \text{если } P_{kl} \text{ – полуполоса.} \end{cases}$$

Последняя сумма равна

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} x_k^2 \varphi_{kl} \log |f'_k(z_k)| = - \sum_{k=1}^n x_k^2 \log |f'_k(z_k)| = \sum_{k=1}^n x_k^2 \log r(G_k, z_k),$$

что и требовалось доказать.

При $n = 1$ квадратичная форма вырождается и следствие 1 совпадает со следствием 5 работы [8]. Если дополнительно B – односвязная область, то указанное следствие дает теорему покрытия линий для однолистных в круге функций, содержащую известные результаты Г. Поля, Г. Гретша, М. А. Лаврентьева, Е. Ренгеля, П. М. Тамразова и других математиков (см. [1], а также комментарий в [8]). В случае $n \geq 2$ следствие 1 усиливает основной результат статьи [8], так как в левой части неравенства (6) при $x_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, содержатся неотрицательные слагаемые, зависящие от значений функции Грина. Если множество B является объединением n попарно непересекающихся односвязных областей D_k , $z_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$, и не содержит полюсов первого порядка дифференциала $Q(z) dz^2$, то условия следствия 1 заведомо выполняются и неравенство (6) имеет вид

$$\prod_{k=1}^n r^{x_k^2}(D_k, z_k) \leq \prod_{k=1}^n r^{x_k^2}(G_k, z_k)$$

(см. [8; следствие 2]). Этот результат установлен Дж. Дженкинсом на основе “общей теоремы о коэффициентах” [17]. Как известно, в ряде частных случаев удается найти точное выражение для правой части неравенства (6). Это обстоятельство приводит к уточнению соответствующих оценок М. А. Лаврентьева, Г. М. Голузина, П. П. Куфарева и А. Э. Фалес, Л. И. Колбиной и других математиков, полученных для неналегающих областей. Покажем это на примере результата Г. М. Голузина о трех неналегающих областях в $\overline{\mathbb{C}}$ [1; глава IV, § 4], причем утверждение сформулируем в терминах отображающих функций, как это иногда принято в литературе (см. [1], [2]). Имея ввиду дробно-линейные автоморфизмы комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, можно считать, что $z_k = \exp(2\pi i(k-1)/3)$, $k = 1, 2, 3$. Пусть функции $z = f_k(\zeta)$, $f_k(0) = z_k$, $k = 1, 2, 3$, мероморфны в единичном круге $U := \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Из теоремы Хеймана [23; с. 124] следует, что

$$|f'_k(0)| \leq r(f_k(U), z_k) \leq r(B, z_k),$$

где $B := \bigcup_{k=1}^3 f_k(U)$. Положим в следствии 1 область $G = \overline{\mathbb{C}}$,

$$Q(z) dz^2 = \frac{-9z}{(z^3 - 1)^2} dz^2.$$

Области G_k , $k = 1, 2, 3$, представляют собой углы, ограниченные лучами $\arg z^3 = \pi$. Если выполняется неравенство (6) с числами x_k , $|x_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$, то

$$\left[\prod_{k=1}^3 |f'_k(0)| \right] \exp\{2x_1x_2g_B(z_1, z_2) + 2x_2x_3g_B(z_2, z_3) + 2x_3x_1g_B(z_3, z_1)\} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3; \quad (8)$$

равенство имеет место в случае, когда функции f_k отображают круг U конформно и однолистно на области G_k , $k = 1, 2, 3$, соответственно. Введем следующие обозначения: B_{2k-1} – связная компонента множества $\{z \in B : 2\pi(k-1)/3 < \arg z < 2\pi k/3\}$, для которой точка z_k является граничной, $k = 1, 2, 3$; B_{2k-2} – связная компонента множества $\{z \in B : 2\pi(k-2)/3 < \arg z < 2\pi(k-1)/3\}$, для которой z_k – граничная точка, $k = 2, 3, 4$, ($z_4 = z_1$). Предположим, что $B_1 \cap B_2 = B_3 \cap B_4 = B_5 \cap B_6 = \emptyset$. Тогда выполняются условия следствия 1 с $x_k = 1$, $k = 1, 2, 3$, и мы имеем неравенство (8). Если только одно из пересечений пусто, например, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то вновь справедливо неравенство (8), но уже с $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Напомним, что Г. М. Голузин доказал (8) в случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, и при условии, что функции f_k отображают круг U конформно и однолистно на попарно непересекающиеся области, $k = 1, 2, 3$.

В качестве полос совокупности $\{P\}$ из теоремы 1 можно брать полособразные области квадратичных дифференциалов, являющихся полными квадратами (см. [9], [24]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть z_k , $k = 1, \dots, n$, – различные конечные точки плоскости $\mathbb{C}$, а α_k и x_k , $k = 1, \dots, n$, – вещественные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, $|\alpha_k| = |x_k| \neq 0$, $k = 1, \dots, n$ ($n \geq 2$). Предположим, что открытое множество $B \subset \mathbb{C}$ содержит точки z_k , $k = 1, \dots, n$, и не содержит траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - z_k} \right)^2 dz^2$$

с предельными концевыми точками z_k , $z_{k'}$, для которых $x_k x_{k'} > 0$, $1 \leq k, k' \leq n$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \log r(B, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l g_B(z_k, z_l) \leq - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \alpha_k \alpha_l \log |z_k - z_l|.$$

Знак равенства имеет место в случае, когда $\alpha_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$, и множество

$$B = \left\{ z : \sum_{l=1}^n \alpha_l \log |z - z_l| \neq c \right\},$$

где c – произвольная вещественная постоянная.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству следствия 1, отличие лишь в том, что

$$\mathcal{F}(z) = \int [-Q(z)]^{1/2} dz = i \sum_{k=1}^n \alpha_k \log |z - z_k| + c$$

(см. [9]). Случай равенства проверяется непосредственно.

Выписанное неравенство уточняет и обобщает в различных направлениях теорему 1 работы [9], а также соответствующие неравенства Ю. Е. Аленицына, З. Нехари [1; Добавление, § 2] и П. Дюрена–М. Шиффера [25].

В заключение приведем утверждение об экстремальном разбиении со “свободными полюсами” z_k , $k = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $z_k = e^{i\theta_k}$, $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$, $P_k = \{z : \theta_k < \arg z < \theta_{k+1}\}$ и x_k – вещественные числа, $|x_k| = 1$, $k = 1, \dots, n$, ($n \geq 2$). Обозначим через f_k регулярную ветвь функции

$$w = \frac{1}{\pi i} \log \frac{(ze^{-i\theta_k})^{\pi/(\theta_{k+1}-\theta_k)} - 1}{(ze^{-i\theta_k})^{\pi/(\theta_{k+1}-\theta_k)} + 1}, \quad (9)$$

конформно и однолистно отображающую область P_k на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$. Предположим, что открытое множество B содержит точки z_k , $k = 1, \dots, n$, и в случае $x_k x_{k+1} > 0$, $1 \leq k \leq n$ ($x_{n+1} = x_1$), не содержит кривых $\operatorname{Re} f_k(z) = u$, $0 < u < 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \log r(B, z_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_k x_l g_B(z_k, z_l) \leq \sum_{k=1}^n \log \left[\frac{2(\theta_{k+1} - \theta_k)}{\pi} \right] \leq n \log \left(\frac{4}{n} \right). \quad (10)$$

Равенство в (10) достигается в случае, когда $z_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$, и $B = \bigcup_{k=1}^n \{z : |\arg z - \theta - 2\pi k/n| < \pi/n\}$ при любых вещественных θ , x_k , $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему 1 к множеству B и совокупности полос $\{P_k\}_{k=1}^n$. Носители вершин полосы P_k расположены в точках z_k и z_{k+1} , $k = 1, \dots, n$ ($z_{n+1} = z_1$). Показатели всех вершин равны единице. Таким образом, выполняются условия 1) и 2) теоремы 1. Условие 3) этой теоремы формулируется в следствии 3. Из представления (9) имеем

$$M(P_k) = \frac{2}{\pi} \log \left[\frac{2(\theta_{k+1} - \theta_k)}{\pi} \right],$$

и неравенство (3) дает требуемую оценку (10). Случай равенства проверяется непосредственно. Следствие доказано.

Заметим, что условия следствия 3 выполняются, если в случае $x_k x_{k+1} > 0$ не существует связной компоненты множества $B \cap P_k$, граница которой содержит обе точки z_k и z_{k+1} . Тем более, эти условия выполняются, если множество B представляет собой объединение n попарно непересекающихся областей D_k , каждая из которых содержит только одну точку z_k , $k = 1, \dots, n$. В последнем случае из (10) имеем оценку

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, z_k) \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \prod_{k=1}^n (\theta_{k+1} - \theta_k) \leq \left(\frac{4}{n} \right)^n,$$

полученную ранее в [26]. Обобщения этой оценки, установленные в работе [27], также допускают распространение на случай квадратичных форм.

Неравенства для квадратичных форм (1) приводят к теоремам искажения в теории однолистных функций (см. [7], [20], [21], [28]). Разбиения на полосы и полуполосы эффективно даже в случае $n = 1$ и $\Gamma = \partial B$. Например, Е. Г. Емельяновым [15] было замечено, что разбиение на полосы дает общую теорему покрытия отрезков или, что то же самое, оценку трансфинитного диаметра континуума [14] (ср. [29; доказательство теоремы 4]). А. Ю. Солянин решил задачу Поля–Сегё о внутреннем радиусе n -угольника фиксированной площади путем разбиения этого n -угольника на полуполосы [13]. Нетривиальные примеры разбиений на полосы и полуполосы с приложениями к однолистным

функциям даны в книге А. Ю. Васильева [19]. Все эти факты свидетельствуют о широком применении неравенств вида (3) в геометрической теории функций комплексного переменного.

Список литературы

- [1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [2] Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, М., 1975.
- [3] Z. Nehari, "Some inequalities in the theory of functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75**:2 (1953), 256–286.
- [4] P. L. Duren, M. M. Schiffer, "Robin functions and energy functionals of multiply connected domains", *Pacific J. Math.*, **148**:2 (1991), 251–273.
- [5] P. Duren, M. M. Schiffer, "Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping", *Complex Variables Theory Appl.*, **21**:3–4 (1993), 189–196.
- [6] В. Н. Дубинин, "Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 19, Записки науч. сем. ПОМИ, **302**, ПОМИ, СПб., 2003, 38–51; англ. пер.: V. N. Dubinin, "Generalized condensers and the asymptotics of their capacities under degeneration of some plates", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **129**:3 (2005), 3835–3842.
- [7] В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, "О вариационных принципах конформных отображений", *Алгебра и анализ*, **18**:3 (2006), 39–62; англ. пер.: V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, "On variational principles of conformal mappings", *St. Petersburg Math. J.*, **18**:3 (2007), 373–389.
- [8] В. Н. Дубинин, "Метод симметризации в задачах о неналегающих областях", *Матем. сб.*, **128(170)**:1(9) (1985), 110–123; англ. пер.: V. N. Dubinin, "The symmetrization method in problems on nonoverlapping domains", *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 107–119.
- [9] В. Н. Дубинин, "К теоремам покрытия в теории аналитических функций", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 7, Записки науч. сем. ЛОМИ, **154**, Наука, Л., 1986, 67–75; англ. пер.: V. N. Dubinin, "Covering theorems in the theory of analytic functions", *J. Soviet Math.*, **43**:4 (1988), 2553–2558.
- [10] В. Н. Дубинин, "Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 9, Записки науч. сем. ЛОМИ, **168**, Наука, Л., 1988, 48–66; англ. пер.: V. N. Dubinin, "Covering theorems in the theory of analytic functions", *J. Soviet Math.*, **53**:3 (1991), 252–263.
- [11] Г. В. Кузьмина, "Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полособразными областями в структуре траекторий", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 7, Записки науч. сем. ЛОМИ, **154**, Наука, Л., 1986, 110–129; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, "Extremal properties of quadratic differentials with strip-shaped domains in the structure of the trajectories", *J. Soviet Math.*, **43**:4 (1988), 2579–2591.
- [12] Е. Г. Емельянов, "К задачам об экстремальном разбиении", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 7, Записки науч. сем. ЛОМИ, **154**, Наука, Л., 1986, 76–89; англ. пер.: E. G. Emel'yanov, "Problems of extremal decomposition", *J. Soviet Math.*, **43**:4 (1988), 2558–2566.
- [13] А. Ю. Солынин, "Решение одной изопериметрической задачи Поляа–Сегё", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 9, Записки науч. сем. ЛОМИ, **168**, Наука, Л., 1988, 140–153; англ. пер.: A. Yu. Solynin, "Solution of a Polya-Szegő isoperimetric problem", *J. Soviet Math.*, **53**:3 (1991), 320–322.

- [14] В. Н. Дубинин, “Метод симметризации и трансфинитный диаметр”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:2 (1986), 39–46; англ. пер.: A. Yu. Solynin, “The symmetrization method and the transfinite diameter”, *Siberian Math. J.*, **27**:2 (1986), 174–180.
- [15] Е. Г. Емельянов, “О связи двух задач об экстремальном разбиении”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 8, Записки науч. сем. ЛОМИ, **160**, Наука, Л., 1987, 91–98; англ. пер.: E. G. Emel'yanov, “A connection between two extremal partition problems”, *J. Soviet Math.*, **52**:3 (1990), 3063–3068.
- [16] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. II”, *Алгебра и анализ*, **9**:5 (1997), 1–50; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Methods of geometric function theory. II”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:5 (1998), 889–930.
- [17] J. A. Jenkins, “The method of the extremal metric”, *Handbook of complex analysis: geometric function theory*. Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 2002, 393–456.
- [18] А. Ю. Солянин, “Модули и экстремально-метрические проблемы”, *Алгебра и анализ*, **11**:1 (1999), 3–86; англ. пер.: A. Yu. Solynin, “Modules and extremal metric problems”, *St. Petersburg Math. J.*, **11**:1 (1999), 1–65.
- [19] A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **1788**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [20] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 14, Записки научн. сем. ПОМИ, **237**, ПОМИ, СПб., 1997, 56–73; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Asymptotics of the module of a degenerating condenser and some of their applications”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **95**:3 (1999), 2209–2220.
- [21] D. Karp, E. Prilepkina, “Reduced modulus with free boundary and its applications”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **34**:2 (2009), 353–378.
- [22] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, vol. 3, Pure Appl. Math. (N. Y.), Wiley, New York, 1986.
- [23] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Tracts in Math., **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [24] Е. Г. Емельянов, “О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами. II”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 22, Записки научн. сем. ПОМИ, **350**, ПОМИ, СПб., 2007, 40–51; англ. пер.: E. G. Emel'yanov, “On quadratic differentials on multiply connected domains that are perfect squares. II”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **150**:3 (2008), 2027–2033.
- [25] P. L. Duren, M. M. Schiffer, “Conformal mappings onto nonoverlapping regions”, *Complex analysis*, Birkhäuser, Basel, 1988, 27–39.
- [26] В. Н. Дубинин, “О произведении внутренних радиусов “частично неналегающих” областей”, *Вопросы метрической теории отображений и ее применение*, Наука-думка, Киев, 1978, 24–31.
- [27] А. К. Бахтин, “Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами”, *Докл. РАН*, **405**:2 (2005), 151–153; англ. пер.: A. K. Bakhtin, “Piecewise separating transformation and extremal problems with free poles”, *Dokl. Math.*, **72**:3 (2005), 854–856.
- [28] V. N. Dubinin, D. B. Karp, “Generalized condensers and distortion theorems for conformal mappings of planar domains”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 33–51.
- [29] В. Н. Дубинин, *Некоторые применения линейно-усредняющего преобразования в теоремах покрытия*, Изд-во Кубанского гос. ун-та, Краснодар, 1977, деп. в ВИНИТИ 770-77.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)
 Институт прикладной математики ДВО РАН,
 г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию
 05.02.2009