Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^* -алгебрами, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 3, 63–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:11:31

УДК 515.168.5+517.956.22

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин

Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^* -алгебрами

Рассматриваются некоммутативные эллиптические операторы над C^* -алгебрами, ассоциированные с дискретной группой изометрий многообразия. Основной результат настоящей работы – формула, выражающая характеры Черна индекса (инварианты Конна) в топологических терминах. В качестве следствия этой формулы получено простое доказательство высших формул индекса для некоммутативных эллиптических операторов.

Библиография: 36 названий.

Ключевые слова: некоммутативные эллиптические операторы, операторы над C^* -алгебрами, формулы индекса, скрещенное произведение.

Введение

1. В статье исследуются эллиптические операторы над C^* -алгебрами, ассоциированные с изометрическим действием дискретной группы Γ на гладком замкнутом многообразии. Такие операторы возникают при квантовании скрещенного произведения алгебры функций на косферическом расслоении к многообразию и некоторой дискретной группы. Коэффициенты данных операторов содержат операторы сдвига и, очевидно, образуют некоммутативную алгебру. Следовательно, мы по-существу имеем дело с некоммутативной теорией псевдодифференциальных операторов.

Этот класс операторов включает в себя, в частности, дифференциальные операторы на некоммутативном торе, изучавшиеся А. Конном (см. [1]). Последние имеют важные приложения к конкретным физическим задачам – например, как квантовый эффект Холла. Более общие операторы связаны с деформациями алгебр функций на торических многообразиях, в частности с квантовыми сферами, получаемыми изоспектральной деформацией (см. [2]–[4]).

2. Эллиптическая теория (классических) псевдодифференциальных операторов над C^* -алгебрами была построена А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко (см. [5]) в связи с гипотезой Новикова об инвариантности высших сигнатур. Более точно, в работе [5] рассматриваются псевдодифференциальные операторы, действующие в сечениях расслоений, слоями которых служат проективные модули

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №08-01-00867), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант №НШ-1562.2008.1) и Немецкого научно-исследовательского общества (грант №436RUS113/849/0-1@ “К-теория и некоммутативная геометрия стратифицированных многообразий”). Работа первого автора также поддержана премией им. Э. Бальзана, полученной П. Делинем в 2004 г.

над C^* -алгебрами. Индекс эллиптического оператора в этой ситуации является элементом K -группы $K_0(A)$, где через A обозначена C^* -алгебра, над которой рассматриваются операторы. Используя индекс Мищенко–Фоменко, можно строить ряд новых числовых инвариантов оператора. Именно, следуя А. Конну (см. [6]), можно определить числовые инварианты спариванием индекса Мищенко–Фоменко с циклическими коциклами, определенными над плотными подалгебрами $B \subset A$. Эти инварианты мы будем в дальнейшем называть *инвариантами Конна*. Формулы, выражающие инварианты Конна в топологических терминах, т.е. в терминах символа оператора и характеристических классов многообразия, были получены в [7]–[9] и других работах.

3. В настоящей работе рассматривается алгебра операторов, порожденная псевдодифференциальными операторами над C^* -алгебрами и операторами сдвига, ассоциированными с дискретной группой изометрий многообразия. Для операторов из этой алгебры формулируется условие эллиптичности.¹ Как и в работе [5], индекс эллиптического оператора над алгеброй A является элементом группы $K_0(A)$. Основным результатом настоящей работы – формула, выражающая соответствующие инварианты Конна в топологических терминах. В качестве следствия этой формулы получено простое доказательство для так называемых высших формул индекса (см. [10]).

4. Остановимся кратко на содержании работы.

В § 1 приводятся необходимые сведения по теории скрещенных произведений. Здесь же строится траекторное представление для операторнозначных функций (без предположения о топологической свободе действий).

В § 2 и § 3 вводятся некоммутативные эллиптические операторы над C^* -алгебрами, ассоциированные с действием группы, доказывается теорема конечности и дается их гомотопическая классификация. Эти результаты были получены в [10]. Здесь мы приводим их краткое изложение в удобной для нас форме.

В § 4 определяется характер Черна. Это одно из центральных мест в работе. В некоммутативной геометрии есть два способа построения характера Черна: первый из них (А. Конн; см. [11]) состоит в использовании теории циклических гомологий, так что соответствующий характер Черна–Конна принимает значения в циклических гомологиях алгебры; второй (М. Каруби; см. [12]), которому мы и следуем, основан на использовании некоммутативных дифференциальных форм. Однако в наших построениях, в отличие от работы [12], мы не используем универсальную алгебру некоммутативных дифференциальных форм. Вместо этого у нас ключевую роль играет понятие дифференциального следа, и именно такой след позволяет определить характер Черна. Этот подход представляется более простым, и в наших приложениях удастся довести характер Черна до явных форм де Рама. Отметим, что проблема построения характера Черна для скрещенных произведений была поднята еще в работе [13]. При этом явная формула для характера Черна в цитированной работе была получена в случае конечных групп или, более общим образом, для собственных

¹Заметим, что элементы этой алгебры являются, вообще говоря, нелокальными операторами.

действий. Здесь при построении характера Черна собственность действия не предполагается.

В § 5 получена формула для фредгольмова индекса скалярных операторов.² Первоначально такая формула была дана в [10]. Здесь мы приводим более прямое и короткое доказательство этого результата. Отметим, что в ряде частных случаев (а именно, для конечных групп) некоторые формулы индекса были получены в [14], а затем для операторов Дирака – в [15], [16].

В § 6 установлены формулы инвариантов Конна для операторов над произвольными C^* -алгебрами. Здесь устанавливается центральный результат данной работы – формула, выражающая характеры Черна индекса (инварианты Конна) некоммутативного эллиптического оператора над C^* -алгеброй в терминах символа этого оператора. Наконец, в § 7 дано приложение этой формулы к вычислению высших индексов для скалярных операторов.

5. Отметим, что первоначальные результаты по некоммутативной теории эллиптических псевдодифференциальных операторов были получены в книге [10]. Настоящая статья является дальнейшим развитием идей, содержащихся в этой книге. Остановимся кратко на связи книги [10] и настоящей статьи.

Основной задачей, которая стояла перед авторами книги, было установление формулы фредгольмова индекса для скалярных операторов, ассоциированных с действием группы Γ . Эта задача решалась с помощью перехода к операторам над групповой C^* -алгеброй группы Γ . Попутно для этого частного случая были вычислены и соответствующие инварианты Конна. В отличие от этого в настоящей работе формула для инвариантов Конна получена в общей ситуации, т.е. для эллиптических операторов над произвольной C^* -алгеброй. Кроме того мы даем и новое (прямое) доказательство формулы фредгольмова индекса для операторов, рассмотренных в книге [10], свободное от привлечения теории операторов в гильбертовых модулях.

Настоящая работа была доложена на семинарах академика А. Т. Фоменко и профессора А. С. Мищенко в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, а также на Международной конференции “ C^* -algebras and elliptic theory III” (26–31 января 2009 г., г. Бедлево, Польша). Мы благодарны участникам семинаров и конференции за обсуждение и дискуссии, которые были для нас очень полезны.

§ 1. Скрещенные произведения

1.1. C^* -скрещенные произведения. Пусть Γ – дискретная конечно-порожденная группа, которую мы в этом параграфе будем предполагать аменабельной.

Напомним, что C^* -динамической системой называется тройка (A, Γ, τ) , где A – C^* -алгебра, а $\tau: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A)$ – действие группы Γ на A $*$ -автоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. C^* -скрещенное произведение $A \rtimes \Gamma$, далее для краткости обозначаемое через A_Γ , определяется (см., например, [11; гл. 2, приложение C])

²Под термином “скалярные операторы” мы понимаем операторы над алгеброй комплексных чисел.

как пополнение $*$ -алгебры финитных A -значных функций на Γ с умножением

$$(f_1 f_2)(g) = \sum_{\substack{k, h \in \Gamma \\ kh = g}} [\tau(h)^{-1} (f_1(k))] f_2(h) \quad (1.1)$$

и инволюцией

$$f^*(g) = \tau(g)^{-1} [f(g^{-1})]^* \quad (1.2)$$

по норме

$$\|f\| = \sup_{(\pi, U)} \left\| \sum_{g \in \Gamma} U(g) \pi(f(g)) \right\|_{\mathcal{B}H} \quad (1.3)$$

(здесь и ниже τ опускаем). Здесь $\mathcal{B}H$ – алгебра ограниченных операторов в H . Точная верхняя грань в (1.3) берется по всевозможным ковариантным представлениям C^* -динамической системы (A, Γ, τ) в гильбертовых пространствах H – парам (π, U) , состоящим из представления π C^* -алгебры A в H и унитарного представления U группы Γ в H со свойством

$$\pi(g(a)) = U(g)\pi(a)U(g^{-1}), \quad a \in A. \quad (1.4)$$

В случае, когда A есть алгебра комплексных чисел, а представление τ тривиально, скрещенное произведение совпадает с групповой C^* -алгеброй, обозначаемой через $C^*(\Gamma)$.

Любому ковариантному представлению (π, U) отвечает представление скрещенного произведения A_Γ , определенное на пространстве $C_c(\Gamma, A)$ финитных функций на Γ формулой $f \mapsto \sum_g U(g)\pi(f(g))$.

Приведенное скрещенное произведение. Ниже мы будем пользоваться также эквивалентным определением скрещенного произведения A_Γ . Чтобы дать это определение, рассмотрим правый гильбертов A -модуль $l^2(\Gamma, A)$, который получается из пространства финитных A -значных функций на группе Γ пополнением по норме

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{g \in \Gamma} f^*(g)f(g) \right\|_A.$$

C^* -алгебру ограниченных операторов, действующих в этом модуле и имеющих сопряженный оператор, обозначим через $\mathcal{B}l^2(\Gamma, A)$. Определим теперь гомоморфизм $\pi: C_c(\Gamma, A) \rightarrow \mathcal{B}l^2(\Gamma, A)$ как отвечающий ковариантному представлению (π, U)

$$(\pi(a)u)(h) = h^{-1}(a)u(h), \quad (U(g)u)(h) = u(g^{-1}h). \quad (1.5)$$

Определим норму

$$\|f\|_{\text{red}} = \|\pi(f)\|_{\mathcal{B}l^2(\Gamma, A)}. \quad (1.6)$$

Нормы (1.6) и (1.3) эквивалентны (см. [17]).

Траекторное представление. Пусть X – компактное метрическое пространство, на котором изометрически действует дискретная аменабельная группа Γ . Пусть A – C^* -алгебра. Тогда Γ действует на алгебре $C(X, A)$ непрерывных A -значных функций $*$ -автоморфизмами $f(x) \mapsto f(g^{-1}(x))$ и определено скрещенное произведение $C(X, A)_\Gamma$.

Для каждого $x \in X$ определим представление

$$\pi_x: C(X, A)_\Gamma \longrightarrow \mathcal{B}l^2(\Gamma, A) \quad (1.7)$$

алгебры $C(X, A)_\Gamma$ в гильбертовом A -модуле $l^2(\Gamma, A)$ в терминах ковариантного представления (π, U) :

$$(\pi(f)u)(h) = f(h(x))u(h), \quad (U(g)u)(h) = u(g^{-1}h),$$

где $u \in l^2(\Gamma, A)$, $f \in C(X, A)$. Представление π_x называется *траекторным*, поскольку оно использует только значения функций f на Γ -орбите точки x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 (ср. [18]). *Элемент $a \in C(X, A)_\Gamma$ обратим тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ оператор $\pi_x(a)$ обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Так как π_x – представление и $\pi_x(1) = 1$, то из обратимости a следует обратимость $\pi_x(a)$ при всех x .

2. Наоборот, возьмем некоторый элемент a и предположим, что операторы $\pi_x(a)$ обратимы при всех x . Надо доказать, что в этом случае элемент a обратим. Для этого совокупность всех представлений π_x обозначим через

$$\pi: C(X, A)_\Gamma \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} \mathcal{B}(l^2(\Gamma, A)). \quad (1.8)$$

Из изоморфизма

$$l^2(\Gamma, C(X, A)) = C(X, l^2(\Gamma, A))$$

и эквивалентности норм (1.3) и (1.6) следует, что норма в скрещенном произведении $C(X, A)_\Gamma$ совпадает с нормой

$$\|a\| = \sup_{x \in X} \|\pi_x(a)\|_{\mathcal{B}l^2(\Gamma, A)}.$$

Отсюда следует, что π – мономорфизм.

Далее, мы утверждаем, что $\pi_x(a)$ непрерывно зависит от x . В самом деле, из изометричности действия и компактности X следует, что если расстояние между x и y мало, то и величина

$$\sup_{h \in \Gamma} \|f(h(x)) - f(h(y))\|_A$$

для фиксированной непрерывной функции $f \in C(X, A)$ также будет мала. Поэтому операторы, входящие в ковариантное представление (1.8), непрерывно зависят от X . Следовательно, элемент $\pi(a)$ лежит в подалгебре $C(X, \mathcal{B}l^2(\Gamma, A))$ непрерывных функций.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что обратимость в алгебре $C(X, \mathcal{B}l^2(\Gamma, A))$ непрерывных функций эквивалентна поточечной обратимости.

Предложение 1.2 доказано.

Для непрерывного Γ -отображения Γ -многообразий $f: X \rightarrow Y$ определен индуцированный гомоморфизм

$$f^*: C(Y)_\Gamma \longrightarrow C(X)_\Gamma.$$

На плотном подмножестве в $C(Y)_\Gamma$ финитных функций $\varphi: \Gamma \rightarrow C(Y)$ он задается формулой

$$(f^*\varphi)(g, x) = \varphi(g, f(x)).$$

В частности, если $K \overset{i}{\subset} X$ – Γ -инвариантное замкнутое подмножество, то определен гомоморфизм сужения $i^*: C(X)_\Gamma \rightarrow C(K)_\Gamma$. В дальнейшем элемент $i^*\varphi$ обозначается также через $\varphi|_K$.

1.2. Гладкие скрещенные произведения. Пусть Γ – дискретная группа степенного роста,³ а B – некоторая алгебра Фреше, на которой Γ действует автоморфизмами. Будем предполагать, что действие ограничено в топологии пространства Фреше равномерно по $g \in \Gamma$.

Рассмотрим пространство B -значных функций на группе Γ таких, что для любой из полунорм $\|\cdot\|_\alpha$, задающих топологию на B , и для всех $N \in \mathbb{Z}_+$ конечны выражения

$$\|f\|_{\alpha, N} = \sup_{g \in \Gamma} (\|f(g)\|_\alpha (1 + |g|)^N) \quad (1.9)$$

(условие быстрого убывания), где через $|g|$ обозначена длина элемента $g \in \Gamma$. Обозначим это пространство через B_Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Гладким скрещенным произведением B на Γ называется пространство B_Γ , снабженное структурой пространства Фреше, определяемой полунормами (1.9), с умножением (1.1).

В случае, когда алгебра B есть алгебра комплексных чисел $\mathbb{C}$, гладкое скрещенное произведение будем обозначать $C^\infty(\Gamma)$ и называть *гладкой групповой алгеброй*.

Весьма важным для дальнейшего является понятие сильной спектральной инвариантности, введенное Л. Швайцером (см. [20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Плотная подалгебра Фреше $B \subset A$ в банаховой алгебре A называется *сильно спектрально-инвариантной*, если существует такая константа $C > 0$, что для любого m существуют такие числа $D_m > 0$ и $p_m \geq 0$, что при всех n и $b_1, \dots, b_n \in B$ выполнено неравенство

$$\|b_1 \cdots b_n\|_m \leq D_m C^n \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq p_m} \|b_1\|_{k_1} \cdots \|b_n\|_{k_n}. \quad (1.10)$$

В этом определении предполагается, что $\|\cdot\|_k$, $k = 0, 1, \dots$, – полунормы, определяющие B , причем $\|\cdot\|_0$ – норма в алгебре A .

³Напомним, что дискретная конечно порожденная группа называется *группой степенного роста* (см., например, [19]), если число элементов группы, длина которых $\leq N$ в словесной метрике, растет при $N \rightarrow \infty$ не быстрее чем некоторый полином.

ТЕОРЕМА 1.5 (см. [20]). Пусть $B \subset A$ – сильно спектрально-инвариантная подалгебра. Тогда гладкое скрещенное произведение B_Γ является спектрально-инвариантной подалгеброй в скрещенном произведении A_Γ . В частности, сильно спектрально-инвариантная подалгебра является спектрально-инвариантной.

Так как вложение плотной спектрально-инвариантной подалгебры Фреше индуцирует изоморфизм в K -теории, то получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. В условиях предыдущей теоремы вложение $B_\Gamma \subset A_\Gamma$ индуцирует изоморфизм K -групп

$$K_0(B_\Gamma) \xrightarrow{\cong} K_0(A_\Gamma). \quad (1.11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть $B \subset A$ – сильно спектрально-инвариантная подалгебра. Тогда подалгебра $C^\infty(X, B) \subset C(X, A)$ гладких B -значных функций на компактном гладком многообразии X также является сильно спектрально-инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости рассмотрим случай, когда $X = [0, 1]$ (в общем случае доказательство аналогично). В качестве определяющей системы полунорм в $C^\infty(X, B)$ рассмотрим

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{x \in X} \|\partial^k f(x)\|_l,$$

где через ∂ обозначен оператор d/dx . Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|f_1 \cdots f_n\|_{k,l} &= \sup_{x \in X} \|\partial^k (f_1(x) \cdots f_n(x))\|_l \\ &\leq A_k \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \sup_{x \in X} \|(\partial^{k_1} f_1(x)) \cdots (\partial^{k_n} f_n(x))\|_l \\ &\leq A_k \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \sup_{x \in X} \left(D_l C^n \sum_{l_1 + \cdots + l_n \leq p_l} \|\partial^{k_1} f_1(x)\|_{l_1} \cdots \|\partial^{k_n} f_n(x)\|_{l_n} \right) \\ &\leq A_k D_l C^n \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_n = k \\ l_1 + \cdots + l_n \leq p_l}} \|f_1\|_{k_1, l_1} \cdots \|f_n\|_{k_n, l_n}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Предложение 1.7 доказано.

§ 2. Некоммутативные эллиптические операторы, ассоциированные с действием группы

Пусть задано действие дискретной группы Γ на компактном гладком замкнутом многообразии M диффеоморфизмами. Всюду ниже будем предполагать, что Γ – группа степенного роста, которая вложена как подгруппа в компактную группу Ли G диффеоморфизмов многообразия M . Через $|g|$ будем обозначать длину элемента $g \in \Gamma$ относительно некоторой фиксированной системы порождающих в Γ .

Будем считать, что на M задана метрика, инвариантная относительно диффеоморфизмов из группы G . Такую метрику можно построить, усреднив по действию группы G произвольную риманову метрику. Зафиксируем на M инвариантную форму объема dx , ассоциированную с метрикой.

Пусть A – унитарная C^* -алгебра. Действие группы Γ на A предполагается тривиальным.

Пространство L^2 . Через $L^2(M, A)$ (см. [5]) обозначим банахово пространство, которое получается пополнением пространства $C^\infty(M, A)$ гладких A -значных функций на M по норме

$$\|f\|^2 = \left\| \int_M f^*(x)f(x) dx \right\|_A, \quad \text{где } f \in C^\infty(M, A).$$

Это пространство рассматривается как правый гильбертов A -модуль, который будем далее обозначать через $\mathcal{H}$. Через

$$\mathcal{Q}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$$

обозначим алгебру Калкина ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, действующих в гильбертовом A -модуле $\mathcal{H}$, по модулю компактных операторов $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Отметим, что здесь и ниже рассматриваются только операторы, имеющие сопряженный.

Скалярные псевдодифференциальные операторы (ПДО). Диффеоморфизму $g: M \rightarrow M$ сопоставим его дифференциал

$$dg: T^*M \rightarrow T^*M,$$

который накрывает действие на базе. Тогда сопоставление $g \mapsto dg$ определяет действие группы G на кокасательном расслоении T^*M . В силу изометричности исходного действия это действие сохраняет норму в слоях, так что корректно определено действие группы G на косферическом расслоении

$$S^*M = \{(x, \xi) \in T^*M \mid |\xi| = 1\},$$

где через (x, ξ) обозначены канонические координаты на T^*M .

Рассмотрим теперь C^* -динамическую систему $(C(S^*M, A), \Gamma, \tau)$, где действие

$$\tau: \Gamma \longrightarrow \text{Aut}(C(S^*M, A))$$

равно $(\tau(g)u)(x, \xi) = u((dg)^{-1}(x, \xi))$. Соответствующее скрещенное произведение обозначим через $C(S^*M, A)_\Gamma$, а гладкое скрещенное произведение – через $C^\infty(S^*M, A)_\Gamma$.

Зафиксируем на многообразии M квантование гладких символов, т.е. элементов алгебры $C^\infty(S^*M, A)$. Такое квантование можно построить, используя фиксированное покрытие многообразия M координатными окрестностями, фиксированное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, и стандартные формулы Кона–Ниренберга (см. [21]) для псевдодифференциального квантования в локальных координатах.

Определим отображение

$$\begin{aligned} \pi: C^\infty(S^*M, A)_\Gamma &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}), \\ a &\longmapsto \hat{a} = \sum_{g \in \Gamma} T(g) \operatorname{Op}(a(g)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$(T(g)u)(x) = u(g^{-1}(x))$$

– унитарное представление группы Γ операторами сдвига, а через $\operatorname{Op}(a(g))$ обозначается псевдодифференциальный оператор с символом $a(g) \in C^\infty(S^*M, A)$. Ряд в (2.1) сходится абсолютно, что следует из быстрого убывания коэффициентов $a(g)$ при $|g| \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2.1. *Отображение π является $*$ -гомоморфизмом и продолжается (по непрерывности) на скрещенное произведение $C(S^*M, A)_\Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения доказывается прямым вычислением. Докажем, например, что произведению элементов скрещенного произведения отвечает произведение операторов ($*$ -свойство проверяется аналогично). Рассмотрим элементы

$$a_0\delta_{g_0}, a_1\delta_{g_1} \in C^\infty(S^*M, A)_\Gamma, \quad (2.2)$$

где $a_0, a_1 \in C^\infty(S^*M, A)$ – гладкие функции, а $\delta_{g_0}, \delta_{g_1}$ – δ -функции на группе Γ в точках g_0 и g_1 . Тогда имеем

$$\pi(a_0\delta_{g_0})\pi(a_1\delta_{g_1}) = T(g_0) \operatorname{Op}(a_0)T(g_1) \operatorname{Op}(a_1) = T(g_0g_1)(g_1^*(\operatorname{Op}(a_0)) \operatorname{Op}(a_1)).$$

В силу формулы замены переменных для ПДО последний оператор по модулю компактных операторов равен

$$T(g_0g_1)(\operatorname{Op}((dg_1)^*a_0) \operatorname{Op}(a_1)).$$

В силу закона умножения (1.1) в алгебре $C^\infty(S^*M, A)_\Gamma$ последнее выражение равно

$$T(g_0g_1) \operatorname{Op}((a_0\delta_{g_0}a_1\delta_{g_1})(g_0g_1)) = \pi(a_0\delta_{g_0}a_1\delta_{g_1}).$$

Итак, мы получили искомое равенство

$$\pi(a_0\delta_{g_0})\pi(a_1\delta_{g_1}) = \pi(a_0\delta_{g_0}a_1\delta_{g_1})$$

по модулю компактных операторов. Так как линейные комбинации элементов (2.2) образуют плотное множество в гладком скрещенном произведении, то это равенство верно для всех элементов.

Вторая часть утверждения следует из первой части и того, что представление (2.1) отвечает C^* -динамической системе $(C(S^*M, A), \Gamma, \tau)$ и, следовательно, продолжается до гомоморфизма скрещенного произведения.

Лемма 2.1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Оператор $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ будем называть *некоммутативным псевдодифференциальным оператором* на M (или, более кратко, *ПДО*), если его класс в алгебре Калкина лежит в образе гомоморфизма (2.1). Символом оператора $\text{Op}(a)$ будем называть элемент a .

Обозначим через $\Psi_\Gamma(M, A)$ алгебру ПДО на M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Ясно, что произвольный компактный оператор $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ является псевдодифференциальным в смысле определения 2.2. Можно показать (см. [10]), что гомоморфизм (2.1), а также его замыкание

$$\bar{\pi}: C(S^*M, A)_\Gamma \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \quad (2.3)$$

являются мономорфизмами при условии, что многообразие M связно, а действие группы Γ эффе́ктивно. При этих предположениях символ ПДО корректно определен, т.е. не зависит от представления оператора $\text{Op}(a)$ в виде (2.1).

Операторы в расслоениях. Алгебра $C^\infty(M, A)_\Gamma$ отображается в $\Psi_\Gamma(M, A)$ и реализуется при этом операторами в пространстве $L^2(M, A)$ таким образом, что элемент $g \in \Gamma$ действует как оператор сдвига $T(g)$, а функция $f \in C^\infty(M, A)$ действует как оператор умножения

$$(fu)(x) = f(x)u(x), \quad u \in \mathcal{H}, \quad x \in M.$$

Пусть $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(C^\infty(M, A)_\Gamma)$ – эрмитовы проекторы в алгебре $(N \times N)$ -матриц, компоненты которых лежат в алгебре $C^\infty(M, A)_\Gamma$. Гильбертовы A -модули – образы проекторов в пространстве $L^2(M, A^N) \equiv \mathcal{H}^N$ – обозначим $P_1\mathcal{H}^N$ и $P_2\mathcal{H}^N$.

Пусть также $D \in \text{Mat}_N(\Psi_\Gamma(M, A))$ – матричный ПДО на M , сплетающий проекторы P_1 и P_2 , т.е. удовлетворяющий условию $P_2D = DP_1$. Рассмотрим сужение

$$D|_{P_1\mathcal{H}^N}: P_1\mathcal{H}^N \longrightarrow P_2\mathcal{H}^N \quad (2.4)$$

оператора D на подпространство $P_1\mathcal{H}^N$. Этот оператор не изменится, если заменить D на P_2DP_1 , так что в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что оператор D удовлетворяет соотношению $D = P_2DP_1$. В этом случае оператор D определен однозначно, и его символ удовлетворяет соотношению $\sigma(D) = \sigma(P_2)\sigma(D)\sigma(P_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Оператор (2.4) будем называть *некоммутативным ПДО в пространствах, определяемых проекторами P_1 и P_2* . Символом оператора (2.4) будем называть тройку $(\sigma(D), \sigma(P_1), \sigma(P_2))$.

Теорема конечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Некоммутативный ПДО (2.4) называется *эллиптическим*, если существует такой символ $r \in \text{Mat}_N(C^\infty(S^*M, A)_\Gamma)$, что

$$r\sigma(D) = \sigma(P_1), \quad \sigma(D)r = \sigma(P_2). \quad (2.5)$$

В дальнейшем оператор (2.4) будем для краткости обозначать через D , а его символ – через $\sigma(D)$.

ЛЕММА 2.6. Если оператор (2.4) эллиптический, то он является A -фредгольмовым в смысле Мищенко–Фоменко (см. [5]) как ограниченный оператор, действующий в гильбертовых A -модулях. Следовательно, для эллиптического оператора D определен его индекс

$$\operatorname{ind}_A D \in K_0(A). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – это оператор с символом r . Тогда из соотношений (2.5) следует, что разности

$$(P_1 R P_2)D - P_1, \quad D(P_1 R P_2) - P_2$$

являются компактными операторами. Поэтому $P_1 R P_2$ является почти обратным оператором для оператора (2.4). Следовательно, оператор D A -фредгольмов.

Лемма 2.6 доказана.

§ 3. Гомотопическая классификация

3.1. ПДО на некомпактных многообразиях. При доказательстве теоремы об индексе в п. 5.1.3 важную роль будут играть ПДО на специальных некомпактных многообразиях – тотальных пространствах векторных расслоений с компактной базой.

Некомпактные многообразия. Пусть задано конечномерное вещественное векторное G -расслоение

$$\pi: E \rightarrow X$$

со слоем F и компактной гладкой базой X . Точку слоя будем обозначать через ξ . В слоях введем скалярное произведение таким образом, чтобы задаваемые элементами группы G послойные отображения были изометриями. Используя G -инвариантную связность на E , определим G -инвариантную метрику на тотальном пространстве E , которая совпадает с указанным скалярным произведением на вертикальных подпространствах и с поднятием метрики на X на горизонтальных подпространствах.

Координаты в кокасательном расслоении. Пусть T^*F – расслоение над E кокасательных пространств к слоям расслоения π . Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \pi^*(T^*X) \longrightarrow T^*E \longrightarrow T^*F \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

векторных G -расслоений над E .

Пользуясь G -инвариантным скалярным произведением в слоях расслоения T^*E , фиксированным выше, по последовательности (3.1) построим ортогональное разложение

$$T^*E = \pi^*(T^*X) \oplus T^*F. \quad (3.2)$$

Будем предполагать, что метрика в слоях T^*E есть прямая сумма метрик, естественно заданных на слагаемых. Пусть x – координаты на X , ξ – линейные координаты относительно некоторого локального ортогонального репера

в расслоении E . Далее, пусть p и η – двойственные координаты к x и ξ в слоях расслоений T^*X и T^*F соответственно.

Очевидно, используя разложение (3.2), можно трактовать T^*E как расслоение

$$TX \oplus E \oplus E \quad (3.3)$$

над X со слоем $T_x X \oplus F \oplus F$ и координатами (p, η, ξ) в слоях. Это разложение (как и разложение (3.2)) удобно тем, что группа G действует в слоях линейными преобразованиями раздельно по каждой из трех групп переменных p , η и ξ . В частности, ортогональные проекции на прямые слагаемые в разложениях (3.2) и (3.3) являются G -отображениями.

ПДО на некомпактных многообразиях. Пусть $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(C^\infty(E, A)_\Gamma)$ – два проектора над алгеброй $C^\infty(E, A)_\Gamma$. Поднятия проекторов на косферическое расслоение $S^*E \equiv S(T^*E)$ при естественной проекции $\pi: S^*E \rightarrow E$ обозначим $\pi^*(P_1)$, $\pi^*(P_2)$. Обозначим через $\text{Im } P_1$, $\text{Im } P_2$ образы проекторов P_1, P_2 в пространстве $L^2_{\text{loc}}(E, A^N)$, которое по определению состоит из вектор-функций, принадлежащих $L^2(B_R, A^N)$ на любом шаре

$$B_R = \{|\xi| \leq R\} \subset E. \quad (3.4)$$

Далее, пусть a – элемент матричной алгебры над $C^\infty(S^*E, A)_\Gamma$, сплетающий эти два проектора и не зависящий при больших $|\xi|$ от копеременных p, η (т.е. совпадающий вне шара B_R с поднятием некоторого элемента b , сплетающего проекторы $\pi^*(P_1)$ и $\pi^*(P_2)$ над алгеброй $C^\infty(E \setminus B_R, A)_\Gamma$). В этом случае мы говорим, что тройка

$$(a, \pi^*(P_1), \pi^*(P_2)) \quad (3.5)$$

– мультипликативно финитный символ. По такому символу с помощью очевидной конструкции строится некоммутативный ПДО

$$\text{Op}(a): \text{Im } P_1 \longrightarrow \text{Im } P_2, \quad (3.6)$$

совпадающий с оператором b при $|\xi| > R$ и имеющий a своим символом.

Далее, если символ (3.5) эллиптический (т.е. a осуществляет эквивалентность проекторов $\pi^*(P_1)$ и $\pi^*(P_2)$), то оператор $\text{Op}(a)$ будет A -фредгольмов в сужениях пространств $\text{Im } P_1$, $\text{Im } P_2$ на шары $B_{R'}$ при всех $R' > R$, причем его индекс, ядро и коядро во всех этих парах пространств одинаковы.

3.2. Гомотопическая классификация.

Стабильные гомотопии эллиптических операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Тривиальными будем называть обратимые операторы вида $\text{id}: PL^2_{\text{loc}}(E, A^N) \rightarrow PL^2_{\text{loc}}(E, A^N)$, где $P \in \text{Mat}_N(C^\infty(E, A)_\Gamma)$ – некоторый проектор. Два эллиптических ПДО D_1, D_2 вида (3.6) называются стабильно гомотопными, если существует непрерывная по операторной норме гомотопия в классе эллиптических ПДО между их прямыми суммами

$$D_1 \oplus Q_1, \quad D_2 \oplus Q_2$$

с некоторыми тривиальными операторами Q_1, Q_2 .

Стабильная гомотопия является отношением эквивалентности. Соответствующую (абелеву) группу классов стабильной гомотопии обозначим $\text{Ell}_\Gamma(E, A)$.

Цель этого пункта – выразить группу $\text{Ell}_\Gamma(E, A)$ в терминах K -группы некоторой C^* -алгебры.

Разностная конструкция. Пусть $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(C^\infty(E, A)_\Gamma)$ – два проектора над алгеброй $C^\infty(E, A)_\Gamma$, и пусть элемент $a \in \text{Mat}_N(C^\infty(E, A)_\Gamma)$ сплетает эти проекторы, т.е. $P_2 a P_1 = a$.

Будем говорить, что тройка

$$(a, P_1, P_2) \quad (3.7)$$

обратима вне шара $B_R = \{e \in E \mid |e| \leq R\}$, если для любого компактного G -инвариантного множества $K_1 \subset E$, не пересекающегося с B_R , элемент $a|_{K_1}$ задает эквивалентность проекторов $P_1|_{K_1}$ и $P_2|_{K_1}$ над алгеброй $C(K_1, A)_\Gamma$.

Будем также говорить, что тройка *обратима на бесконечности*, если она обратима вне некоторого шара B_R . На множестве троек, обратимых на бесконечности, естественным образом вводится понятие стабильной гомотопии. Стандартными методами (см., например, [22] и [23]) доказывается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Группа стабильных гомотопических классов троек (3.7), обратимых на бесконечности, изоморфна K -группе $K_0(C_0(E, A)_\Gamma)$. При этом стабильному гомотопическому классу тройки (a, P_1, P_2) сопоставляется элемент*

$$[(a, P_1, P_2)] = [q_2] - [q_1] \in K_0(C_0(E, A)_\Gamma), \quad (3.8)$$

который называется разностной конструкцией тройки. При этом проекторы q_1 и q_2 имеют вид

$$q_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \sin \psi) P_1 & a^{-1} \cos \psi \\ a \cos \psi & (1 + \sin \psi) P_2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Здесь через $\psi = \psi(|e|) \in C^\infty(E)$ обозначена Γ -инвариантная функция, которая при малых $|e|$ тождественно равна $-\pi/2$, затем при возрастании $|e|$ монотонно возрастает, а при больших $|e|$ тождественно равна $+\pi/2$. При этом символы операторов рассматриваются как однородные функции степени нуль на расслоении $E \setminus 0$ без нулевого сечения. Наконец, предполагается, что проектор P_2 имеет вид $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$ (этого всегда можно добиться стабильной гомотопией).

В дальнейшем мы в основном используем именно представление элементов K -группы тройками, обратимыми на бесконечности.

Изоморфизм групп Ell и K . Символ $(\sigma(D), \sigma(P_1), \sigma(P_2))$ некоммутативного эллиптического оператора D на многообразии E определяет тройку

$$(\sigma'(D), \pi^*(P_1), \pi^*(P_2)), \quad (3.10)$$

обратимую на бесконечности, на многообразии T^*E , где $\pi^*(P_{1,2})$ – поднятия проекторов $P_{1,2}$ при проекции $\pi: T^*E \rightarrow E$, а $\sigma'(D)$ – произвольный сплетающий гомоморфизм, который равен $\sigma(D)$ на S^*E и является однородным

нулевой степени при $p^2 + \eta^2 + \xi^2 \geq 1$. Тройку вида (3.10) будем называть *однородным эллиптическим символом*.

Нетрудно видеть, что разностная конструкция тройки (3.10) в K -группе определяется символом. Обозначим соответствующий элемент через $[\sigma(D)] \in K_0(C_0(T^*E, A)_\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 3.3 (гомотопическая классификация). *Отображение*

$$\chi: \text{Ell}_\Gamma(E, A) \longrightarrow K_0(C_0(T^*E, A)_\Gamma), \quad (3.11)$$

сопоставляющее эллиптическому оператору D класс $[\sigma(D)]$ его символа, является изоморфизмом.

Основная сложность доказательства состоит в проверке сюръективности отображения χ (см. [10; теорема 4.5]). Эта проверка производится следующим образом.

Пусть элемент группы $K_0(C_0(T^*E, A)_\Gamma)$ задан тройкой (a, Q_1, Q_2) , обратной на бесконечности. Во-первых, используя стягивание кокасательного расслоения T^*E на нулевое сечение E и соответствующую гомотопию тройки, можно считать, что проекторы подняты с базы E , т.е. $Q_{1,2} = \pi^*(P_{1,2})$. Во-вторых, можно построить гомотопию тройки $(a, \pi^*(P_1), \pi^*(P_2))$, обратной вне некоторого открытого шара

$$\tilde{B}_R = \{\xi^2 + p^2 + \eta^2 < R^2\} \subset T^*E,$$

заданного в координатах, отвечающих разложению (3.3), к тройке, отвечающей мультипликативно финитному эллиптическому символу. С этой целью рассмотрим непрерывное семейство отображений $\Lambda_t: T^*E \rightarrow T^*E$, $t \in [0, 1]$, определяемое в локальных координатах выражением

$$\Lambda_t(x, \xi, p, \eta) = (x, \xi, \lambda(t, \xi, p, \eta)p, \lambda(t, \xi, p, \eta)\eta),$$

где неотрицательная функция λ имеет вид

$$\lambda(t, \xi, p, \eta) = \begin{cases} t, & |\xi| \geq R, \\ t + (1-t) \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2}}{\max\{1, \sqrt{p^2 + \eta^2}\}}, & |\xi| \leq R. \end{cases}$$

Гомотопия троек

$$(a_t, \pi^*P_1, \pi^*P_2), \quad a_t = \Lambda_t^*a, \quad (3.12)$$

при $t = 1$ дает исходную тройку, а при $t = 0$ – мультипликативно финитный однородный эллиптический символ

$$a_0(x, \xi, p, \eta) = a\left(x, \xi, \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2}}{\max\{1, \sqrt{p^2 + \eta^2}\}}p, \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2}}{\max\{1, \sqrt{p^2 + \eta^2}\}}\eta\right). \quad (3.13)$$

Прямое вычисление показывает, что тройка (3.12) обратима при всех t вне шара $\tilde{B}_R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. На одноточечном пространстве конструкции, изложенные в этом параграфе, дают изоморфизм

$$\chi: \text{Ell}_\Gamma(pt, A) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma) \otimes A),$$

при котором тройке (D, P_1, P_2) сопоставляется разность

$$[P_1] - [P_2] \in K_0(C^*(\Gamma) \otimes A).$$

§ 4. Характер Черна

4.1. Абстрактный характер Черна. Пусть B – унитарная алгебра Фреше. Будем предполагать, что все возникающие в этом параграфе дифференциальные градуированные алгебры являются алгебрами Фреше, а отображения, действующие между ними, являются непрерывными.

Некоммутативные дифференциальные формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Любую пару (Λ, ρ) , состоящую из дифференциальной градуированной алгебры $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \dots$ с дифференциалом d и гомоморфизма $\rho: B \rightarrow \Lambda^0$, будем называть *алгеброй некоммутативных дифференциальных форм* над B .

В дальнейшем будем для краткости считать, что ρ – мономорфизм; отождествим B с подалгеброй в Λ^0 , а ρ будем опускать.

Дифференциальные следы. Пусть Λ и Ω – дифференциальные градуированные алгебры, причем алгебра Ω является градуированно-коммутативной:

$$f_1 f_2 = (-1)^{|f_1||f_2|} f_2 f_1 \quad \text{при всех } f_1, f_2 \in \Omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Линейное отображение

$$\tau: \Lambda \longrightarrow \Omega \tag{4.1}$$

называется *дифференциальным следом порядка k* , если выполнены следующие три условия:

- 1) $\tau(\Lambda^n) \subset \Omega^{n-k}$ при всех $n \geq k$ и $\tau(\Lambda^n) = 0$ при $n < k$;
- 2) $\tau(df) = (-1)^k d(\tau(f))$ при всех $f \in \Lambda$;
- 3) $\tau(f_1 f_2) = (-1)^{|f_1||f_2|} \tau(f_2 f_1)$ при всех $f_1, f_2 \in \Omega$.

Дифференциальный след в случае алгебры $\Omega = \mathbb{C}$ называют *замкнутым следом* (см. [11]).

Характер Черна. Пусть над алгеброй B заданы алгебра некоммутативных дифференциальных форм и дифференциальный след $\tau: \Lambda \longrightarrow \Omega$. Продолжение следа τ на матричную алгебру $\text{Mat}_n(B)$ будем обозначать той же буквой.

Пусть $P^2 = P \in \text{Mat}_n(B)$ – матричный проектор над алгеброй B . Рассмотрим выражение

$$\text{ch}_\tau(P) = \tau \left[P \exp \left(-\frac{dP dP}{2\pi i} \right) \right] \in \Omega. \tag{4.2}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Форма $\text{ch}_\tau(P)$ является замкнутой, а ее класс в когомологиях $H(\Omega)$ дифференциальной алгебры Ω определяется стабильным гомотопическим классом проектора P .

Это утверждение доказывается стандартным образом с использованием свойств дифференциального следа (ср., например, с [24] в случае классического характера Черна).

В силу предложения 4.3 корректно определен гомоморфизм

$$\begin{aligned} \text{ch}_\tau: K_0(B) &\longrightarrow H(\Omega), \\ P &\longmapsto \text{ch}_\tau(P). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Мультипликативное свойство характера Черна. Пусть теперь B_1 и B_2 – две унитарные алгебры, а $\tau_{1,2}: \Lambda_{1,2} \rightarrow \Omega_{1,2}$ – дифференциальные следы на алгебрах некоммутативных дифференциальных форм для B_1 и B_2 . Все возникающие алгебры будем предполагать ядерными.

Над тензорным произведением $B_1 \otimes B_2$ рассмотрим градуированные тензорные произведения $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ и $\Omega_1 \otimes \Omega_2$. Несложно проверить, что тензорное произведение

$$\tau_1 \otimes \tau_2: \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \longrightarrow \Omega_1 \otimes \Omega_2 \quad (4.4)$$

следов τ_1 и τ_2 также является дифференциальным следом. Порядок следа $\tau_1 \otimes \tau_2$ равен сумме порядков сомножителей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_0(B_1) \times K_0(B_2) & \longrightarrow & K_0(B_1 \otimes B_2) \\ \text{ch}_{\tau_1} \times \text{ch}_{\tau_2} \downarrow & & \downarrow \text{ch}_{\tau_1 \otimes \tau_2} \\ H(\Omega_1) \times H(\Omega_2) & \longrightarrow & H(\Omega_1 \otimes \Omega_2) \end{array} \quad (4.5)$$

горизонтальные отображения которой отвечают умножениям в K -теории и когомологиях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P и Q – это проекторы над алгебрами B_1 и B_2 соответственно. Тогда отображение в верхней строке диаграммы (4.5) сопоставляет классам этих проекторов класс их тензорного произведения $P \otimes Q$.

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} &\text{ch}_{\tau_1 \otimes \tau_2}(P \otimes Q) \\ &= (\tau_1 \otimes \tau_2) \left[\left(\left(P \exp \left(-\frac{dP dP}{2\pi i} \right) \right) \otimes 1 \right) \left(1 \otimes \left(Q \exp \left(-\frac{dQ dQ}{2\pi i} \right) \right) \right) \right] \\ &= \text{ch}_{\tau_1}(P) \text{ch}_{\tau_2}(Q), \end{aligned} \quad (4.6)$$

что и доказывает мультипликативность характера Черна.

Предложение 4.4 доказано.

Характер Черна для алгебр без единицы определяется путем перехода к алгебре с добавленной единицей.

4.2. Пример. Характер Черна для скрещенных произведений.

Пусть X – компактное G -многообразие. Применим результаты п. 4.1, чтобы построить характер Черна, отвечающий алгебрам вида $C^\infty(X, B)_\Gamma$, где B – некоторая сильно спектрально инвариантная алгебра. Такой характер Черна был ранее построен в [10] в частном случае, когда $B = \mathbb{C}$.

Некоммутативные дифференциальные формы. В качестве алгебры некоммутативных дифференциальных форм рассмотрим гладкое скрещенное произведение $\Omega(X)_\Gamma$ (в смысле определения 1.3) алгебры $\Omega(X)$ дифференциальных форм и группы Γ , которая действует индуцированными отображениями (элемент $g \in G$ переводит форму $\omega \in \Omega(X)$ в $(g^{-1})^*\omega$). Полученная алгебра имеет естественную градуировку и дифференциал:

$$\Omega(X)_\Gamma = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Omega^j(X)_\Gamma, \quad (d\omega)(g) = d(\omega(g)).$$

Дифференциальный след. Обозначим через $\langle \Gamma \rangle$ множество классов сопряженных элементов⁴ группы Γ . Через g_0 обозначим произвольно зафиксированный элемент класса сопряженности, обозначаемого через $\langle g_0 \rangle$. Пусть C_{g_0} – централизатор элемента g_0 в группе Ли G

$$C_{g_0} = \{h \in G : hg_0h^{-1} = g_0\},$$

а X_{g_0} – множество неподвижных точек элемента g_0 . Напомним, что множество неподвижных точек изометрии – гладкое подмногообразие (см., например, [25]). Для каждой пары сопряженных элементов g, g_0 зафиксируем элемент g' , который их сопрягает: $g'g_0g'^{-1} = g$. Отметим, что любой такой элемент g' задает диффеоморфизм $g' : X_{g_0} \rightarrow X_g$.

Определим теперь отображение

$$\tau : \Omega(X)_\Gamma \longrightarrow \bigoplus_{\langle g_0 \rangle} \Omega(X_{g_0}), \quad (4.7)$$

$$\tau_{g_0}(f) = \int_{C_{g_0}} k^* \left(\sum_{g \in \langle g_0 \rangle} g'^* f(g) \right) \Big|_{X_{g_0}} dk, \quad f \in \Omega(X)_\Gamma. \quad (4.8)$$

Здесь $\omega|_{X_{g_0}}$ – обратный образ формы ω при вложении $X_{g_0} \subset X$, а через dk обозначена мера Хаара на компактной группе Ли C_{g_0} .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Выражение (4.8) не зависит от выбора элементов g' . Действительно, если g'' – другой элемент, сопрягающий элементы g и g' , то мы имеем $g'' = g'k_0$, где $k_0 \in C_{g_0}$. Поэтому после усреднения в (4.8) по группе C_{g_0} слагаемые, отвечающие элементам g' и g'' , становятся равными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Отображение (4.7) является дифференциальным следом нулевого порядка на алгебре $\Omega(X)_\Gamma$.*

⁴Напомним, что $\langle \Gamma \rangle = \Gamma / \sim$, где два элемента $x, y \in \Gamma$ называются *сопряженными* (обозначение $x \sim y$), если существует такой $g \in \Gamma$, что $x = gyg^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сходимость ряда в (4.8) вытекает из быстрого убывания $f(g)$ при $|g| \rightarrow \infty$ и условия степенного роста для группы Γ .

2. Линейность и перестановочность следа с дифференциалами очевидны. Проверим свойство 3) определения 4.2. Имеем

$$\tau_{g_0}(f_1 f_2) = \int_{C_{g_0}} k^* \left(\sum_{ab \in \langle g_0 \rangle} g'^* [b^*(f_1(a)) f_2(b)] \right) \Big|_{X_{g_0}} dk. \quad (4.9)$$

С другой стороны,

$$\tau_{g_0}(f_2 f_1) = \int_{C_{g_0}} k^* \left(\sum_{ba \in \langle g_0 \rangle} g''^* [a^*(f_2(b)) f_1(a)] \right) \Big|_{X_{g_0}} dk, \quad (4.10)$$

где мы полагаем $g'' = a^{-1}g'$. Здесь мы учли, что условия $ab \in \langle g_0 \rangle$ и $ba \in \langle g_0 \rangle$ равносильны. Если в последнем выражении переставить формы $a^* f_2(b)$ и $f_1(a)$ и заметить, что сужения форм $g'^* b^* f_1(a)$ и $g''^* f_1(a)$ на X_{g_0} совпадают,⁵ то мы получим искомое соотношение

$$\tau_{g_0}(f_1 f_2) = (-1)^{|f_1||f_2|} \tau_{g_0}(f_2 f_1).$$

Предложение 4.6 доказано.

Характер Черна. Теперь мы можем определить характер Черна для скрещенного произведения как гомоморфизм

$$\text{ch}: K_0(C^\infty(X)_\Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{\langle g \rangle} H^{\text{ev}}(X_g), \quad (4.11)$$

определяемый по формуле (4.3), в котором используется дифференциальный след (4.7). Здесь и ниже рассматриваются когомологии с комплексными коэффициентами.

Компоненту характера Черна (4.11), попадающую в группу $H^{\text{ev}}(X_g) \otimes \mathbb{C}$, будем обозначать ch_g .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если действие является свободным, то характер Черна (4.11) принимает значения в когомологиях основного многообразия X .

Характер Черна в случае B -значных функций. Пусть, как и выше, X – G -многообразие, а B – алгебра Фреше, над которой заданы алгебра некоммутативных дифференциальных форм и дифференциальный след

$$\tau: \Lambda(B) \longrightarrow \Omega(B). \quad (4.12)$$

Пусть $C^\infty(X, B)_\Gamma$ – гладкое скрещенное произведение. Определим для него характер Черна.

⁵В самом деле, из равенства $g'g_0g'^{-1} = ab$ следует, что $a^{-1}g'g_0 = bg'$. Следовательно, $g_0^*g'^*a^{-1*} = g'^*b^*$. Отсюда равенство сужений форм на множество неподвижных точек диффеоморфизма g_0 следует непосредственно.

Рассмотрим градуированное тензорное произведение $\Omega(X) \otimes \Lambda(B)$. Его можно представлять как пространство гладких сечений расслоения над X , слоем которого является пространство $\Lambda(B)$ -значных форм. В качестве алгебры некоммутативных дифференциальных форм возьмем скрещенное произведение

$$(\Omega(X) \otimes \Lambda(B))_\Gamma. \quad (4.13)$$

Для произвольного элемента $f \in (\Omega^k(X) \otimes \Lambda^l(B))_\Gamma$ положим

$$(\tau_g \otimes \tau)(f) = (-1)^{km} \int_{C_g} k^* \tau \left(\sum_{g_0 \in \langle g \rangle} g'^* f(g_0) \right) \Big|_{X_g} dk, \quad (4.14)$$

где $g'gg'^{-1} = g_0$. Очевидно, что левая часть в формуле (4.14) равна нулю при $l \neq m$, где m – порядок следа τ .

В этой ситуации характер Черна является гомоморфизмом

$$\text{ch}_\tau: K_0(C^\infty(X, B)_\Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{\langle g \rangle} H(\Omega(X_g) \otimes \Omega(B)), \quad (4.15)$$

определяемым формулой (4.3), где след определен равенством (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Для тривиальной группы $\Gamma = G = \{e\}$ имеется только класс единичного элемента $\langle e \rangle$, $X = X_e$, и гомоморфизм (4.15) при $\Omega(B) = \mathbb{C}$ равен

$$\text{ch}_\tau: K_0(C^\infty(X, B)) \longrightarrow H^*(X).$$

Этот гомоморфизм в частном случае $A = B = \mathbb{C}$ и $\tau = \text{id}$ совпадает с обычным топологическим характером Черна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Если B является сильно спектрально инвариантной подалгеброй в C^* -алгебре A , то вложение $C^\infty(X, B)_\Gamma \subset C(X, A)_\Gamma$ индуцирует изоморфизм K -групп (предложение 1.7 и следствие 1.6). Характер Черна также корректно определен на группе $K_0(C(X, A)_\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Характер Черна определен и для некомпактного пространства X , являющегося тотальным пространством вещественного векторного расслоения с компактной гладкой базой. В этом случае формула (4.2) применяется к формальной разности проекторов, совпадающих на бесконечности, и соответствующее отображение действует в когомологии с компактными носителями.

4.3. Скрещенное произведение и характер Черна. При доказательстве теоремы об индексе важную роль играет одно мультипликативное свойство характера Черна, которое мы опишем в этом пункте.

Скрещенные произведения символов. Пусть X – многообразие (компактное или нет) с действием группы G и в $\mathbb{C}^N$ задано представление

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^N) \quad (4.16)$$

группы G . Элемент $b \in \text{Mat}_N(C^\infty(X))$ называется *эквивариантным* (относительно представления ρ и действия G на X), если выполнено равенство

$$\rho(g)T(g)b = b\rho(g)T(g), \quad g \in G.$$

Если $a \in \text{Mat}_{N'}(C^\infty(X)_\Gamma)$, то тензорное произведение $a \otimes b \in \text{Mat}_{NN'}(C^\infty(X)_\Gamma)$ определим формулой

$$[a \otimes b](g) = a(g) \otimes \rho(g)b.$$

Пусть теперь

$$(a, P_1, P_2), \quad (b, Q_1, Q_2) \quad (4.17)$$

– символы над $C^\infty(X)_\Gamma$ и $C^\infty(X)$ соответственно, причем второй из них эквивариантен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11. *Скращенным произведением* символов (4.17) называется символ

$$\left(\begin{pmatrix} a \otimes 1 & -1 \otimes b^* \\ 1 \otimes b & a^* \otimes 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \otimes Q_1 & 0 \\ 0 & P_2 \otimes Q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2 \otimes Q_1 & 0 \\ 0 & P_1 \otimes Q_2 \end{pmatrix} \right).$$

Вместо указанной длинной записи будем для краткости писать

$$a \# b = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix},$$

опуская проекторы и тензорные произведения на единичные операторы. Пусть многообразие X компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. *Пусть в каждой точке $x \in X$ обратим траекторный символ либо элемента a , либо элемента b . Тогда символ $a \# b$ обратим на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимость элемента $a \# b$ равносильна обратимости обоих элементов

$$(a \# b)^*(a \# b), \quad (a \# b)(a \# b)^*.$$

Внедиагональные элементы матрицы $a \# b$ коммутируют с диагональными. Поэтому $(a \# b)^*(a \# b)$ и $(a \# b)(a \# b)^*$ суть диагональные матрицы с диагональными элементами вида $a^*a + bb^*$ и $aa^* + b^*b$. Теперь достаточно воспользоваться предложением 1.2 и учесть, что сумма двух положительных элементов C^* -алгебры, один из которых обратим, обратима.

Предложение 4.12 доказано.

Мультипликативное свойство. Пусть E_1, E_2 – вещественные векторные G -расслоения на X . Тогда операция скрещенного произведения индуцирует произведение в K -теории

$$\# : K_0(C_0(E_1)_\Gamma) \times K_G^0(E_2) \longrightarrow K_0(C_0(E_1 \oplus E_2)_\Gamma). \quad (4.18)$$

А именно, тройке (σ, P_0, P_1) , определяющей класс в $K_0(C_0(E_1)_\Gamma)$, и эквивариантной тройке (σ', Q_0, Q_1) , определяющей класс в $K_G^0(E_2)$, ставится в соответствие скрещенное произведение $\sigma \# \sigma'$.

Чтобы теперь связать характер Черна с произведением (4.18), напомним определение гомоморфизма

$$\text{ch}(g): K_G^0(X) \rightarrow H^{\text{ev}}(X_g)$$

для G -пространства X (см. [26]). Он определяется как композиция

$$K_G^0(X) \rightarrow K_{G(g)}^0(X_g) \simeq R(G(g)) \otimes H^{\text{ev}}(X_g) \rightarrow H^{\text{ev}}(X_g), \quad (4.19)$$

где $G(g)$ обозначает группу, порожденную элементом g ; последнее отображение отвечает гомоморфизму $R(G(g)) \rightarrow \mathbb{C}$ – вычислению характеров представлений в точке g .

В [10; лемма 9.10] была установлена коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_0(C_0(E_1)_\Gamma) \times K_G^0(E_2) & \longrightarrow & K_0(C_0(E_1 \oplus E_2)_\Gamma) \\ \text{ch}_g \times \text{ch}(g) \downarrow & & \downarrow \text{ch}_g \\ H_c^{\text{ev}}(E_{1,g}) \times H_c^{\text{ev}}(E_{2,g}) & \longrightarrow & H_c^{\text{ev}}((E_1 \oplus E_2)_g) \end{array} \quad (4.20)$$

при всех $g \in \Gamma$. Здесь через H_c^{ev} обозначаются четномерные когомологии с компактными носителями.

§ 5. Формула фредгольмова индекса (для алгебры $A = \mathbb{C}$)

Формула индекса для случая, когда $A = \mathbb{C}$, имеет более или менее стандартный вид. Схема доказательства совпадает с изложенной в классической работе [27].

1. Сначала устанавливается формула индекса в K -теории, которая выражает индекс эллиптического оператора через прямой образ в K -теории элемента, определяемого символом оператора.
2. Затем устанавливается формула Римана–Роха, сравнивающая прямой образ в K -теории и когомологиях.
3. Наконец, из п. 1 и п. 2 получается формула индекса в когомологиях.

Заметим, однако, что в отличие от цитированной выше работы мы не используем никаких аксиом, а работаем с явными гомотопиями эллиптических операторов. Этого удалось добиться благодаря тому, что отображение прямого образа строится на уровне Ел-групп, а в гомотопиях используются только ПДО нулевого порядка. Последнее обстоятельство позволяет обойти тонкие рассуждения, связанные с вопросом о гладкости решений (см., например, [27; предложение 6.6]).

5.1. Прямой образ.

5.1.1. *Прямой образ в K -теории при вложениях.* Пусть задано вложение G -многообразий $i: M \subset X$. В этом пункте будет построено отображение прямого образа

$$i_!: K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \longrightarrow K_0(C_0(T^*X)_\Gamma). \quad (5.1)$$

Отображение (5.1) индуцировано сопоставлением эллиптическому символу на M эллиптического символа на X . Как и в классической K -теории, новый символ в окрестности подмногообразия M в X представляется как скрещенное произведение исходного символа на символ Эйлера в нормальном направлении, а вне этой окрестности он мультипликативно тривиален.

Перейдем к подробному изложению соответствующей конструкции.

Трубчатая окрестность подмногообразия. Пусть $NM \rightarrow M$ – нормальное расслоение вложения i . Обозначим через F слой этого расслоения, и пусть $\dim F = n$. В F имеется скалярное произведение (индуцированное метрикой). Поскольку G действует и на M , и на X изометриями, то NM – G -расслоение. Далее, используя геодезическое экспоненциальное отображение, можно отождествить G -инвариантную трубчатую окрестность

$$U = \{m \in X \mid \text{dist}(m, M) < \varepsilon\}$$

многообразия M в X с окрестностью $\tilde{U} = \{(x, \xi) \in NM \mid |\xi| < \varepsilon\}$ нулевого сечения в NM , причем это экспоненциальное отображение будет G -отображением. Гомеоморфизм

$$U \simeq \tilde{U} \longrightarrow NM, \quad (x, \xi) \longmapsto \left(x, \xi \frac{\text{tg}(\pi|\xi|/(2\varepsilon))}{|\xi|} \right)$$

есть G -отображение и потому индуцирует изоморфизм алгебр

$$C_0(T^*U)_\Gamma \simeq C_0(T^*NM)_\Gamma. \quad (5.2)$$

Далее, вложение $U \subset X$ открытых множеств индуцирует вложение

$$C_0(T^*U)_\Gamma \subset C_0(T^*X)_\Gamma. \quad (5.3)$$

Символ Эйлера. Рассмотрим зависящий от параметра $z \in \mathbb{C}^n$ линейный оператор

$$B(z) = z \wedge + (z \wedge)^* = z \wedge + \bar{z} \lrcorner: \Omega^{\text{ev}}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \Omega^{\text{odd}}(\mathbb{C}^n). \quad (5.4)$$

Пусть $\pi_F: T^*F \rightarrow F$ – естественная проекция. На кокасательном расслоении к слоям T^*F определим гомоморфизм расслоений

$$Q: \pi_F^* \Omega^{\text{ev}}(T^*F) \longrightarrow \pi_F^* \Omega^{\text{odd}}(T^*F), \quad (5.5)$$

задаваемый в канонических координатах (ξ, η) , где ξ – координаты в F относительно произвольного ортонормированного базиса, а η – двойственные к ним импульсы, формулой

$$Q(\xi, \eta) = B(\xi + i\eta). \quad (5.6)$$

Отметим, что формулы (5.4), (5.6) корректно определяют гомоморфизм (5.5), т.е. определение не зависит от выбора базиса. Это следует из того, что ортогональное преобразование в F индуцирует унитарное преобразование в расслоении $T^*F \simeq F \oplus F$, рассматриваемом как комплексное пространство с оператором умножения на i , задаваемым симплектической структурой.

Гомоморфизм (5.5) есть не что иное, как символ оператора Эйлера на F , модифицированный таким образом, чтобы при $\xi \neq 0$ он был обратим при всех η , включая $\eta = 0$.

Гомоморфизм (5.5) является Γ -эquivariantным. Пользуясь проекцией на второй сомножитель в ортогональном разложении (3.2), мы поднимем его на T^*NM .

Определение прямого образа. Рассмотрим класс $[\sigma] \in K_0(C_0(T^*M)_\Gamma)$. Пользуясь проекцией на первый сомножитель в ортогональном разложении (3.2), поднимем отображение σ на T^*NM .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Прямой образ* элемента $[\sigma]$ при вложении $j: M \rightarrow NM$ многообразия M как нулевого сечения называется элемент

$$j![\sigma] = [\sigma \# Q] \in K_0(C_0(T^*NM)_\Gamma), \quad (5.7)$$

где скрещенное произведение $\sigma \# Q$ понимается в смысле определения 4.11.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Прямой образ (5.7) корректно определен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить, что элемент $\sigma \# Q$ обратим на бесконечности в T^*NM и что его стабильный гомотопический класс не зависит от выбора представителя σ класса $[\sigma]$. Пусть $\sigma(x, p)$ обратим при $|p| > R$. Так как $\sigma(x, p)$ обратим, если $|p|$ достаточно велико, а Q обратим на множестве $\{\eta^2 + \xi^2 \geq 1\}$, то скрещенное произведение $\sigma \# Q$ обратимо на объединении этих множеств согласно предложению 4.12.

Если теперь σ_t – гомотопия обратимых на бесконечности элементов на T^*M , то проведенное выше рассуждение показывает, что $\sigma_t \# Q$ – гомотопия обратимых на бесконечности элементов на T^*NM . Наконец, если символ σ всюду обратим, то это же верно и для $\sigma \# Q$, так что при стабилизации первого сомножителя класс скрещенного произведения также не меняется.

Предложение 5.2 доказано.

Наконец, отображение (5.1) прямого образа в K -теории при вложении $i: M \rightarrow X$ определим как композицию трех гомоморфизмов:

$$K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \xrightarrow{j!} K_0(C_0(T^*NM)_\Gamma) \simeq K_0(C_0(T^*U)_\Gamma) \rightarrow K_0(C_0(T^*X)_\Gamma). \quad (5.8)$$

В этой композиции гомоморфизм $j!$ определен в (5.7), а второе и третье отображения индуцированы отображениями (5.2), (5.3).

5.1.2. *Прямой образ в K -теории при проекции в точку.* Чтобы определить прямой образ для проекции в точку (это необходимо для теоремы об индексе), нужна еще теорема периодичности Ботта, которую мы сейчас сформулируем.

Пусть задано ортогональное представление группы G в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вложение

$$j: \{pt\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

точки как нулевого элемента G -модуля $\mathbb{R}^n$. Этому вложению соответствует отображение прямого образа

$$j!: K_0(C^*(\Gamma)) \longrightarrow K_0(C_0(T^*\mathbb{R}^n)_\Gamma). \quad (5.9)$$

ТЕОРЕМА 5.3 (периодичность Ботта; см. [10; теорема 6.5]). *Отображение (5.9) является изоморфизмом.*

Теперь для проекции $p: M \longrightarrow \{pt\}$ многообразия M в точку определим прямой образ в K -теории

$$p_! : K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma)) \quad (5.10)$$

следующим образом. Как известно (см. [25]), любое G -многообразие M можно вложить в G -пространство $\mathbb{R}^N$ с линейным действием группы G , если выбрать число N достаточно большим. Обозначим это вложение через $i: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ и положим

$$p_! = (j_!)^{-1} \circ i_!.$$

Поскольку любые два G -вложения гомотопны (в прямой сумме пространств образов), это определение прямого образа (5.10) корректно, т.е. не зависит от выбора вложения.

5.1.3. *Прямой образ в Ell-теории при вложениях.* Пусть задано вложение

$$i: M \subset X$$

G -многообразий. Цель этого пункта – построить отображение

$$i_!^a: \text{Ell}_\Gamma(M) \longrightarrow \text{Ell}_\Gamma(X). \quad (5.11)$$

Оператор Эйлера. Рассмотрим $O(n)$ -эквивариантный оператор нулевого порядка

$$A_0: L_{\text{loc}}^2(F, \Omega^{\text{ev}}(F \otimes \mathbb{C})) \longrightarrow L_{\text{loc}}^2(F, \Omega^{\text{odd}}(F \otimes \mathbb{C})) \quad (5.12)$$

на $F = \mathbb{R}^n$, символ которого получается из символа Эйлера (5.5) конструкцией (3.13). Следуя работе [28], оператор (5.12) выберем таким образом, чтобы выполнялось $\dim \ker A_0 = 1$, $\dim \text{coker } A_0 = 0$, а ядро состояло из $O(n)$ -инвариантных сечений. Заметим, что поскольку символ (5.5) обратим всюду вне начала координат в $T^*F \simeq \mathbb{R}^{2n}$, число R в конструкции (3.13) можно взять произвольно малым.

Скращенное умножение на оператор Эйлера. Пусть (D, P_1, P_2) – некоммутативный эллиптический ПДО на M , действующий в пространствах, определяемых проекторами P_1, P_2 .

Далее, пусть A – семейство G -инвариантных операторов порядка 0, мультипликативно тривиальных на бесконечности, индекса 1 с тривиальным коядром в слоях нормального расслоения NM , получающееся, если в каждом слое в качестве оператора семейства взять оператор (5.12). Это семейство будем рассматривать как оператор на тотальном пространстве NM .

Определим “сглаженное” скращенное произведение $D \hat{\#}_a A$ следующим образом. Пусть $\varphi \in C^\infty(NM)$ – финитная вещественная G -инвариантная функция такая, что $\varphi(\xi) = 1$ в области $|\xi| \leq 3R/2$, вне которой оператор A мультипликативно тривиален, и $\varphi(\xi) = 0$ в области $|\xi| \geq 2R$. Покроем многообразие M

таким атласом $\{U_j\}$, что в объединении любых двух карт нормальное расслоение $NM \rightarrow M$ тривиализуется. Оператор

$$D = \sum_{g \in \Gamma} T(g)D(g)$$

представим в виде

$$D = \sum_{jk} \psi_j D \psi_k \equiv \sum_{jk} D_{jk},$$

где $\{\psi_j\}$ – разбиение единицы, подчиненное атласу $\{U_j\}$. Слагаемое D_{jk} поднимаем на NM . Для этого выберем в $U = U_j \cup U_k$ ортонормированный репер в F_x , $x \in U$, относительно метрики, и пусть ξ – координаты в слоях F_x относительно этого репера. (Они, естественно, линейно выражаются через координаты, канонически двойственные к x .) Эти координаты задают тривиализацию расслоения NM над U . Мы используем эту тривиализацию, чтобы поднять оператор D_{jk} в $\pi^{-1}(U)$, где $\pi: NM \rightarrow M$. Операторы $T(g)$ при этом поднимаются как соответствующие операторы сдвига на NM . Поднятый оператор обозначим через $\tilde{D}_{jk}$. Положим

$$\tilde{D} = \sum_{jk} \tilde{D}_{jk}.$$

Аналогичные поднятия проекторов P_1, P_2 обозначим $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$.

Пусть χ_1, χ_2 – гладкие неотрицательные G -инвариантные скалярные символы на S^*NM такие, что:

- 1) $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$ всюду;
- 2) при $|\xi| \geq 2R$ выполнены равенства $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 1$;
- 3) если $|\xi| \leq 3R/2$, то $\chi_1 = 0$ при $|p| \leq |\eta|/2$ и $\chi_2 = 0$ при $|\eta| \leq |p|/2$.

Напомним, что координаты (x, ξ, p, η) были введены в § 3. Существование таких символов доказывается усреднением по компактной группе Ли G .

Через Φ_1 и Φ_2 обозначим самосопряженные G -инвариантные ПДО на NM с символами χ_1 и χ_2 соответственно. Оператор

$$D \hat{\#}_a A = \begin{pmatrix} \tilde{P}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \tilde{D} & -\Phi_2 A^* \\ \Phi_2 A & \Phi_1 \tilde{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

будем называть *сглаженным скрещенным произведением* операторов D и A .

Можно показать (см. [10; лемма 7.13]), что оператор $D \hat{\#}_a A$ является ПДО на NM с символом, равным

$$\sigma(D \hat{\#}_a A) = \begin{pmatrix} \sigma(\tilde{D})\chi_1 & -\sigma(A^*)\chi_2 \\ \sigma(A)\chi_2 & \sigma(\tilde{D}^*)\chi_1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

на косферическом расслоении S^*NM .

Символ (5.14) является скрещенным произведением в смысле определения 4.11 символов $\sigma(\tilde{D})\chi_1$ и $\sigma(A)\chi_2$. При этом траекторный символ для $\sigma(\tilde{D})\chi_1$ обратим вне окрестности вертикального подрасслоения $T^*F \subset T^*NM$, а для $\sigma(A)\chi_2$ – вне окрестности горизонтального подрасслоения $\pi^*T^*M \subset T^*NM$. Отсюда, применяя предложение 4.12, получаем эллиптичность символа (5.14).

Определение прямого образа. Отображение (5.11) определим как композицию

$$\mathrm{Ell}_\Gamma(M) \xrightarrow{j_!^a} \mathrm{Ell}_\Gamma(NM) \simeq \mathrm{Ell}_\Gamma(U) \rightarrow \mathrm{Ell}_\Gamma(X) \quad (5.15)$$

отображений, которые задаются следующим образом. Отображение $j_!^a$, отвечающее вложению j многообразия M в NM как нулевого сечения, дается формулой

$$j_!^a[D] = [D \hat{\#}_a A].$$

Второе отображение индуцировано G -дiffeоморфизмом $NM \simeq U$. Наконец, последнее отображение $\mathrm{Ell}_\Gamma(U) \rightarrow \mathrm{Ell}_\Gamma(X)$ в (5.15) индуцировано сопоставлением эллиптическому оператору (D, P_1, P_2) , мультипликативно финитному в U , продолжения этого оператора до эллиптического оператора на X , являющегося изоморфизмом вне U (при этом получаемый класс в $\mathrm{Ell}_\Gamma(X)$ не зависит от продолжения).

Согласованность прямого образа в Ell- и K-теории. По построению прямой образ в K -теории (5.1) согласован с прямым образом в Ell-теории (5.11) в смысле следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Для G -вложения $i: M \rightarrow X$ имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{i_!^a} & \mathrm{Ell}_\Gamma(X) \\ \chi \downarrow & & \chi \downarrow \\ K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{i_!} & K_0(C_0(T^*X)_\Gamma) \end{array} \quad (5.16)$$

где χ – отображение разностной конструкции (3.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения прямого образа (и в Ell, и в K_0) раскладываются в композиции трех отображений (см. (5.8), (5.15)). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{j_!^a} & \mathrm{Ell}_\Gamma(NM) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ell}_\Gamma(U) & \longrightarrow & \mathrm{Ell}_\Gamma(X) \\ \chi \downarrow & & \chi \downarrow & & \chi \downarrow & & \chi \downarrow \\ K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{j_!} & K_0(C_0(T^*NM)_\Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & K_0(C_0(T^*U)_\Gamma) & \longrightarrow & K_0(C_0(T^*X)_\Gamma) \end{array} \quad (5.17)$$

Центральный и правый прямоугольник диаграммы коммутативны по построению. Коммутативность левого прямоугольника следует из того, что соответствующие отображения прямого образа задаются соответственно скрещенным произведением на оператор Эйлера и символ оператора Эйлера. Ясно, что произведение операторов переходит в произведение символов при отображении χ . Теперь из коммутативности всех малых прямоугольников следует коммутативность прямоугольника, образованного периметром диаграммы (5.17).

Предложение 5.4 доказано.

Наконец, для проекции $p: M \rightarrow \{pt\}$ в точку определим прямой образ в Ell-теории

$$p_!^a: \text{Ell}_\Gamma(M) \longrightarrow \text{Ell}_\Gamma(pt),$$

положив $p_!^a = (j_!^a)^{-1} \circ i_!^a$, где отображения в этой композиции индуцированы вложениями i и j такими же, как в п. 5.1.2. Определение корректно, так как $j_!^a$ – изоморфизм. В самом деле, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}_\Gamma(pt) & \xrightarrow{j_!^a} & \text{Ell}_\Gamma(\mathbb{R}^n) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ K_0(C^*(\Gamma)) & \xrightarrow{j_!} & K_0(C_0(T^*\mathbb{R}^n)_\Gamma) \end{array}$$

коммутативна в силу предложения 5.4. Так как отображение $j_!$ – изоморфизм (теорема 5.3), то и отображение $j_!^a$ – тоже изоморфизм.

5.2. Формула индекса. В этом пункте мы установим теорему об индексе в K -теории.

ТЕОРЕМА 5.5. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{\chi} & K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \\ & \searrow \text{ind} & \swarrow \alpha_* \circ p_! \\ & \mathbb{Z} & \end{array} \quad (5.18)$$

В этой диаграмме:

$\text{Ell}_\Gamma(M)$ – группа, образованная некоммутативными эллиптическими операторами на M , рассматриваемыми по модулю стабильных гомотопий;

ind – аналитический индекс;

χ – отображение (разностная конструкция), сопоставляющее классу оператора класс его символа;

$p_!$ – отображение прямого образа, индуцированное проекцией $p: M \rightarrow \{pt\}$;

$\alpha_*: K_0(C^*(\Gamma)) \rightarrow K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ – гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом алгебр $\alpha: C^*(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, отвечающим тривиальному представлению $\Gamma \rightarrow \{1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{p_!^a} & \text{Ell}_\Gamma(pt) \\ \chi \downarrow & \searrow \text{ind} & \downarrow \alpha_* \circ \chi \\ K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{\alpha_* \circ p_!} & \mathbb{Z} \end{array} \quad (5.19)$$

коммутативен прямоугольник без диагонали (согласованность прямого образа в эллиптической и K -теории; предложение 5.4). Поэтому утверждение теоремы о коммутативности треугольника, содержащего левый нижний угол прямоугольника, будет доказано, если мы докажем коммутативность треугольника, содержащего правый верхний угол.

2. Докажем коммутативность треугольника, содержащего правый верхний угол диаграммы (5.19). Построим этот треугольник до диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ell}_\Gamma(\mathbb{R}^n) & \\
 i_1^a \nearrow & \updownarrow & \nwarrow j_1^a \\
 & \mathbb{Z} & \\
 \text{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{p_1^a} & \text{Ell}_\Gamma(pt)
 \end{array} \quad (5.20)$$

Здесь $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторое G -вложение, а отображения, действующие в группе $\mathbb{Z}$ в центре, суть аналитические индексы (при этом противоречия нет, так как отображение $\alpha_* \circ \chi: \text{Ell}_\Gamma(pt) \rightarrow \mathbb{Z}$ совпадает с аналитическим индексом).

3. В диаграмме (5.20) треугольник, образованный Ell -группами, коммутативен по построению (напомним, что мы полагаем $p_1^a := (j_1^a)^{-1} \circ i_1^a$).

4. Докажем, что левый и правый треугольники диаграммы (5.20) коммутативны. Отсюда будет следовать искомая коммутативность нижнего треугольника диаграммы (5.20).

Так как правый треугольник диаграммы (5.20) является частным случаем левого треугольника при $M = \{pt\}$, то поэтому достаточно доказать коммутативность левого треугольника. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{j_1^a} & \text{Ell}_\Gamma(NM) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Ell}_\Gamma(U) & \longrightarrow & \text{Ell}_\Gamma(\mathbb{R}^n) \\
 & \searrow & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & & & \mathbb{Z}
 \end{array} \quad (5.21)$$

где верхняя строка определена в (5.15). Композиция отображений в верхней строке определяет отображение i_1^a . Два правых треугольника в этой диаграмме коммутативны по построению. Коммутативность левого треугольника доказывается ниже (в предложении 5.6). Отсюда следует, что коммутативен треугольник, образованный периметром диаграммы (5.21).

Теорема 5.5 доказана.

5.3. Доказательство сохранения индекса при прямом образе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ell}_\Gamma(M) & \xrightarrow{j_1^a} & \text{Ell}_\Gamma(NM) \\
 \searrow \text{ind} & & \swarrow \text{ind} \\
 & \mathbb{Z} &
 \end{array} \quad (5.22)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [10]). Надо доказать, что для любого эллиптического ПДО D на M выполнено равенство

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind} D \hat{\#}_a A. \quad (5.23)$$

Напомним, что ПДО $D \hat{\#}_a A$ на NM был определен в п. 5.1.3.

А. Сначала мы будем предполагать, что в классе $[D] \in \operatorname{Ell}_\Gamma(M)$ существует матричный⁶ некоммутативный эллиптический ПДО (общий случай будет рассмотрен в п. В). Для краткости будем считать, что сам D – матричный ПДО, который запишем в виде $D = \sum_g T(g)D(g)$, где последовательность классических ПДО $D(g)$ быстро убывает.

Чтобы доказать равенство индексов операторов D и $D \hat{\#}_a A$, мы построим ниже такой фредгольмов оператор (не ПДО), что его индекс равен индексу оператора D (лемма 5.8), и этот оператор гомотопен оператору $D \hat{\#}_a A$ в классе фредгольмовых операторов (лемма 5.9). На этом доказательство предложения 5.6 в этом частном случае будет закончено.

Прежде всего докажем одну лемму о коммутаторах.

ЛЕММА 5.7. В обозначениях п. 5.1.3 имеют место равенства

$$[\varphi \tilde{D}_{jk}, A] = 0, \quad [\varphi \tilde{D}_{jk}, A^*] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению имеем

$$\tilde{D}_{jk} = \sum_g T(dg) \tilde{D}_{jk}(g),$$

где $dg: NM \rightarrow NM$ – поднятие диффеоморфизма $g: M \rightarrow M$ на нормальное расслоение NM . Докажем, что коммутаторы, отвечающие каждому из слагаемых в последней сумме, обращаются в нуль.

Действительно, во-первых, отображение $dg: NM \rightarrow NM$ действует послойно и сохраняет метрику в слоях (так как g – изометрия). Поэтому оператор сдвига $T(dg)$ на NM перестановочен с оператором A в силу $O(n)$ -эквивариантности последнего. Во-вторых, поднятия ПДО $\tilde{D}_{jk}(g)$ с M в тривиализующую окрестность, изоморфную $(U_j \cup U_k) \times \mathbb{R}^n$, перестановочны с A в силу того, что действуют по разным группам переменных. Наконец, функция φ вообще со всеми встречающимися тут элементами коммутирует.

Лемма 5.7 доказана.

ЛЕММА 5.8. Оператор

$$D \hat{\#}_a A = \begin{pmatrix} \varphi \tilde{D} & -A^* \\ A & \varphi \tilde{D}^* \end{pmatrix}$$

фредгольмов, причем

$$\operatorname{ind} D \hat{\#}_a A = \operatorname{ind} D.$$

⁶То есть пространства, в которых действует оператор, суть $L^2(M, \mathbb{C}^N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Проверим фредгольмовость оператора $D \#_a A$. Достаточно доказать это же свойство для операторов

$$(D \#_a A)^*(D \#_a A), \quad (D \#_a A)(D \#_a A)^*.$$

Вычислим, например,

$$(D \#_a A)^*(D \#_a A) = \text{diag}(\varphi^2 \tilde{D}^* \tilde{D} + A^* A, \varphi^2 D D^* + A A^*)$$

(внедиагональные элементы равны нулю в силу леммы 5.7). Оператор AA^* положительно определен, так что второй диагональный элемент обратим. Оператор A^*A положительно определен на ортогональном дополнении к $\ker A$. На подпространстве $\ker A$ имеем

$$\varphi^2 \tilde{D}^* \tilde{D} = \tilde{D}^* \tilde{D} = (P_{\ker \tilde{D}} \tilde{D} + \tilde{D}^* \tilde{D}) - P_{\ker \tilde{D}}.$$

Здесь первое слагаемое положительно определено, а второе компактно, откуда следует, что оператор $(D \#_a A)^*(D \#_a A)$ фредгольмов. Аналогично доказывается фредгольмовость оператора $(D \#_a A)(D \#_a A)^*$.

2. Докажем равенство индексов. Из леммы 5.7 получаем, что $\ker D \#_a A = \ker A \cap \ker \varphi \tilde{D}$. Из свойств оператора A получаем, что $\ker A = L^2(M, \mathbb{C}^N) \otimes \ker A_0$. Если $u \in \ker A$, то $\varphi u = u$, так что $\ker D \#_a A \simeq \ker D \otimes \ker A$. Отсюда получаем $\ker D \#_a A \simeq \ker D$. Аналогично доказывается, что $\ker(D \#_a A)^* \simeq \ker D^*$.

Лемма 5.8 доказана.

ЛЕММА 5.9. Операторы $D \#_a A$ и $D \hat{\#}_a A$ гомотопны в классе фредгольмовых операторов. В частности, имеет место равенство

$$\text{ind}(D \hat{\#}_a A) = \text{ind}(D \#_a A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что операторы

$$\begin{aligned} (D \#_a A)^*(D \hat{\#}_a A) + (D \hat{\#}_a A)^*(D \#_a A), \\ (D \#_a A)(D \hat{\#}_a A)^* + (D \hat{\#}_a A)(D \#_a A)^* \end{aligned}$$

определяют неотрицательные элементы алгебры Калкина.

Рассмотрим первый из элементов. Его слагаемые суть

$$\begin{aligned} (D \#_a A)^*(D \hat{\#}_a A) &= \begin{pmatrix} \varphi \tilde{D}^* & A^* \\ -A & \varphi \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{D} \Phi_1 & -A^* \Phi_2 \\ A \Phi_2 & \tilde{D}^* \Phi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi \tilde{D}^* \tilde{D} \Phi_1 + A^* A \Phi_2 & -\varphi \tilde{D}^* A^* \Phi_2 + A^* \tilde{D}^* \Phi_1 \\ -A \tilde{D} \Phi_1 + \varphi \tilde{D} A \Phi_2 & A A^* \Phi_2 + \varphi \tilde{D} \tilde{D}^* \Phi_1 \end{pmatrix}, \\ (D \hat{\#}_a A)^*(D \#_a A) &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \tilde{D}^* & \Phi_2 A^* \\ -\Phi_2 A & \Phi_1 \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \tilde{D} & -A^* \\ A & \varphi \tilde{D}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \tilde{D}^* \tilde{D} \varphi + \Phi_2 A^* A & -\Phi_1 \tilde{D}^* A^* + \Phi_2 A^* \tilde{D}^* \varphi \\ -\Phi_2 A \tilde{D} \varphi + \Phi_1 \tilde{D} A & \Phi_2 A A^* + \Phi_1 \tilde{D} \tilde{D}^* \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Суммируя последние два выражения в алгебре Калкина, получаем

$$\begin{aligned} & (D \#_a A)^* (D \hat{\#}_a A) + (D \hat{\#}_a A)^* (D \#_a A) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\varphi \tilde{D}^* \tilde{D} \Phi_1 + A^* A \Phi_2) & 0 \\ 0 & 2(\varphi \tilde{D} \tilde{D}^* \Phi_1 + A A^* \Phi_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(внедиагональные члены сократились, так как операторы $\Phi_{1,2}$ коммутируют в алгебре Калкина с $\tilde{D}, \tilde{D}^*, A, A^*$; также операторы $\tilde{D}, \tilde{D}^*$ коммутируют с операторами A, A^*). Последняя матрица является неотрицательной, поскольку она является суммой неотрицательных матриц.

Неотрицательность оператора $(D \#_a A)(D \hat{\#}_a A)^* + (D \hat{\#}_a A)(D \#_a A)^*$ доказывается аналогично.

Теперь остается воспользоваться приведенной ниже леммой (ср. [29; предложение 17.2.7]).

ЛЕММА 5.10. *Пусть U и V – такие фредгольмовы операторы, что операторы*

$$U^*V + V^*U, \quad UV^* + VU^*$$

определяют неотрицательные элементы в алгебре Калкина. Тогда операторы U и V гомотопны в классе фредгольмовых операторов. В частности,

$$\operatorname{ind} U = \operatorname{ind} V.$$

Лемма 5.9 доказана.

В. Продолжим доказательство предложения 5.6. Мы показали, что

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind} j_!^a[D]$$

для того случая, когда класс $[D]$ имеет матричный представитель. Докажем теперь это равенство в общем случае.

Пусть B – эллиптический ПДО, действующий на функциях на окружности, такой, что $\operatorname{ind} B = 1$. Рассмотрим произведение $NM \times \mathbb{S}^1$ (на $\mathbb{S}^1$ группа G действует тривиальным образом). Тогда справедливо соотношение

$$T^*(NM \times \mathbb{S}^1) \simeq T^*NM \times T^*\mathbb{S}^1. \quad (5.24)$$

Пусть теперь $[D] \in \operatorname{Ell}_\Gamma(M)$. Тогда

$$\operatorname{ind}[D] = \operatorname{ind}[D \hat{\#}_a B].$$

Действительно, для доказательства этого равенства достаточно аналогично сделанному выше рассмотреть скрещенное произведение $D \#_a B$. Поскольку $M \times \mathbb{S}^1$ – прямое произведение, оператор D_0 можно поднять на это произведение глобально, не прибегая к разбиениям единицы (при поднятии операторов с M на NM именно необходимость использовать разбиения единицы в тривиализующих NM картах не позволяла поднять оператор, сплетающий нетривиальные проекторы). Как и выше, показывается, что $\operatorname{ind} D \#_a B = \operatorname{ind} D$, а затем используется гомотопия леммы 5.10, чтобы показать, что $\operatorname{ind} D \#_a B = \operatorname{ind} D \hat{\#}_a B$.

Далее, оператор $D \hat{\#}_a B$ является эндоморфизмом (проекторы, которые он сплетает, совпадают). Добавляя к нему в качестве прямого слагаемого дополнительный проектор P , получим (лежащий в том же классе) матричный оператор $(D \hat{\#}_a B) \oplus P$, так что

$$\text{ind}[D \hat{\#}_a B] = \text{ind}[(D \hat{\#}_a B) \oplus P].$$

По доказанному выше

$$\text{ind}[(D \hat{\#}_a B) \oplus P] = \text{ind}[((D \hat{\#}_a B) \oplus P) \hat{\#}_a A].$$

Но

$$\begin{aligned} [((D \hat{\#}_a B) \oplus P) \hat{\#}_a A] &= [(D \hat{\#}_a B) \hat{\#}_a A \oplus (P \hat{\#}_a A)] \\ &= [(D \hat{\#}_a B) \hat{\#}_a A] = [(D \hat{\#}_a A) \hat{\#}_a B]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\text{ind } D = \text{ind}[(D \hat{\#}_a A) \hat{\#}_a B] = \text{ind}[D \hat{\#}_a A] \equiv \text{ind } j_!^a[D].$$

Здесь мы еще раз воспользовались скрещенным умножением на B .

Предложение 5.6 полностью доказано.

5.4. Формула индекса в когомологиях.

Формула Римана–Роха. Пусть $i: M \longrightarrow X$ – вложение G -многообразий и $g \in \Gamma$ – некоторый элемент. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{i_!} & K_0(C_0(T^*X)_\Gamma) \\ \text{ch}_g \downarrow & & \downarrow \text{ch}_g \\ H_c^{\text{ev}}(T^*M_g) & \xrightarrow{i_*} & H_c^{\text{ev}}(T^*X_g) \end{array} \quad (5.25)$$

где i_* – прямой образ в когомологиях. Диаграмма (5.25), вообще говоря, не является коммутативной. Чтобы сделать из нее коммутативную диаграмму, рассмотрим когомологический класс (см. [26])

$$\text{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \frac{\text{Td}(T^*M_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})(g)} \in H^{\text{ev}}(M_g) \quad (5.26)$$

в четномерных когомологиях множества неподвижных точек. Числитель этой дроби равен классу Тодда комплексификации кокасательного расслоения многообразия M_g , а класс

$$\text{ch } \Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})(g) \equiv \text{ch } \Omega^{\text{ev}}(NM_g \otimes \mathbb{C})(g) - \text{ch } \Omega^{\text{odd}}(NM_g \otimes \mathbb{C})(g) \in H^{\text{ev}}(M_g)$$

(NM_g – нормальное расслоение вложения $M_g \subset M$, а $\Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})$ – расслоение внешних форм) определяется при помощи гомоморфизма (4.19). Отметим, что нулевая компонента таким образом определенного класса обратима (см. [25]), а значит, обратим и весь этот класс.

ТЕОРЕМА 5.11 (формула Римана–Роха). Для любого $g \in \Gamma$ и любого элемента $m \in K_0(C_0(T^*M)_\Gamma)$ справедливо следующее соотношение в $H_c^{\text{ev}}(T^*X_g)$:

$$i_* (\text{ch}_g(m) \text{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C})) = \text{ch}_g(i_!(m)) \text{Td}_g(T^*X \otimes \mathbb{C}). \quad (5.27)$$

Теорема 5.11 будет доказана ниже (в п. 5.5), а сейчас в качестве следствия получим когомологическую формулу индекса.

Формула индекса.

ТЕОРЕМА 5.12. Пусть D – некоммутативный эллиптический оператор на многообразии M . Тогда

$$\text{ind } D = \sum_{\langle g \rangle \subset \Gamma} \langle \text{ch}_g[\sigma(D)] \text{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}), [T^*M_g] \rangle, \quad (5.28)$$

где g пробегает множество представителей классов сопряженных элементов группы Γ ; элемент $[T^*M_g] \in H_{\text{ev}}(T^*M_g)$ – фундаментальный класс многообразия T^*M_g , угловые скобки обозначают спаривание между гомологиями и когомологиями. Ряд в правой части (5.28) абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ell}_\Gamma(M) & & \\ & \swarrow \chi & & \searrow \text{ind} & \\ K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{p!} & K_0(C^*(\Gamma)) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathbb{C} \\ \downarrow \text{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}) \text{ ch} & & \downarrow \text{ch} & & \nearrow \Sigma \\ \bigoplus_{\langle g \rangle} H_c^{\text{ev}}(T^*M_g) & \xrightarrow{p_*} & \bigoplus_{\langle g \rangle} H_c^{\text{ev}}(pt) & & \end{array} \quad (5.29)$$

Здесь отображение Σ сопоставляет набору чисел, являющемуся элементом пространства $\bigoplus_{\langle g \rangle} H_c^{\text{ev}}(pt) \simeq \bigoplus_{\langle g \rangle} \mathbb{C}$, сумму компонент.

Если мы докажем, что диаграмма (5.29) коммутативна, то в силу того, что отображение p_* определяется спариванием с фундаментальным циклом, коммутативность ее периметра даст в точности формулу (5.28). Чтобы доказать коммутативность диаграммы, достаточно показать, что два ее треугольника и прямоугольник коммутативны. Докажем это.

1. Верхний треугольник диаграммы (5.29) коммутативен по теореме об индексе в K -теории.

2. Реализуем прямоугольник диаграммы (5.29) как периметр диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{i_!} & K_0(C_0(T^*\mathbb{R}^N)_\Gamma) & \xrightarrow{(j_!)^{-1}} & K_0(C^*(\Gamma)) \\ \downarrow \text{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}) \text{ ch}_g & & \downarrow \text{Td}_g(T^*\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{C}) \text{ ch}_g & & \downarrow \text{ch}_g \\ H_c^{\text{ev}}(T^*M_g) & \xrightarrow{i_*} & H_c^{\text{ev}}(T^*(\mathbb{R}^N)_g) & \xrightarrow{(j_*)^{-1}} & H_c^{\text{ev}}(pt) \end{array} \quad (5.30)$$

отвечающей вложениям $M \xrightarrow{i} \mathbb{R}^N \xleftarrow{j} \{pt\}$ в некоторый G -модуль $\mathbb{R}^N$. Применение теоремы Римана–Роха к этим вложениям показывает, что диаграмма (5.30) коммутативна, т.е. коммутативен прямоугольник в (5.29).

3. Наконец, мы утверждаем, что нижний треугольник диаграммы (5.29) коммутативен, т.е. имеет место равенство

$$\sum_{\langle g \rangle} \text{ch}_g = \alpha_*$$

элементов, рассматриваемых как функционалы на группе $K_0(C^*(\Gamma))$. В самом деле, для проектора $p \in \text{Mat}_n(C^\infty(\Gamma))$, дающего класс $[p] \in K_0(C^*(\Gamma))$, по определению имеем

$$\sum_{\langle g \rangle} \text{ch}_g p = \sum_{\langle g \rangle} \sum_{h \in \langle g \rangle} \text{tr } p(h) = \sum_h \text{tr } p(h) \equiv \text{tr } \alpha(p).$$

Отметим, что ряды сходятся абсолютно, так как коэффициенты $p(h)$ быстро убывают при $|h| \rightarrow \infty$.

Теорема 5.12 доказана.

5.5. Доказательство формулы Римана–Роха. В этом пункте мы докажем теорему 5.11. Определим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) & \xrightarrow{j!} & K_0(C_0(T^*NM)_\Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & K_0(C_0(T^*U)_\Gamma) & \longrightarrow & K_0(C_0(T^*X)_\Gamma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{\text{ev}}(T^*M_g) & \xrightarrow{j^*} & H_c^{\text{ev}}(T^*(NM)_g) & \xrightarrow{\simeq} & H_c^{\text{ev}}(T^*U_g) & \longrightarrow & H_c^{\text{ev}}(T^*X_g) \end{array} \quad (5.31)$$

Здесь верхняя строка совпадает с (5.8). Далее, вертикальные отображения диаграммы равны характеру Черна ch_g , умноженному на класс Тодда $\text{Td}_g(\cdot)$ соответствующего многообразия. Наконец, нижняя строка представляет отображение прямого образа $H_c^{\text{ev}}(T^*M_g) \rightarrow H_c^{\text{ev}}(T^*X_g)$ в виде композиции изоморфизма Тома, обозначенного через j^* , отображения, индуцированного диффеоморфизмом $(NM)_g \simeq U_g$, и прямого образа $H_c^{\text{ev}}(T^*U_g) \rightarrow H_c^{\text{ev}}(T^*X_g)$, индуцированного вложением открытого множества $U_g \subset X_g$. При этом изоморфизм Тома отвечает вложению $M_g \subset (NM)_g$ нулевого сечения в нормальном расслоении $(NM)_g$, которое является векторным расслоением в силу следующей леммы.

ЛЕММА 5.13. *Для любого $g \in G$ множество неподвижных точек $(NM)_g \subset NM$ является векторным расслоением над множеством M_g неподвижных точек на базе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, можно считать, что $(NM)_g$ и M_g являются гладкими подмногообразиями. Остается доказать, что $(NM)_g$ – гладкое подрасслоение в $NM|_{M_g}$. Действительно, в точке $x \in M_g \subset NM$ касательное пространство $T_x NM$ распадается в прямую сумму $T_x M_g \oplus N_x M_g \oplus (N_x M)_g \oplus (N_x M)_g^\perp$, по отношению к которой дифференциал есть $dg = 1 \oplus a \oplus 1 \oplus b$, где преобразования a, b не имеют собственного значения, равного единице. Отсюда вытекает локальная тривиальность расслоений $(NM)_g^\perp$ и $(NM)_g$.

Лемма 5.13 доказана.

Очевидно, что формула (5.27) эквивалентна коммутативности периметра диаграммы (5.31). Чтобы доказать коммутативность диаграммы (5.31), надо только доказать коммутативность ее левого прямоугольника (коммутативность центрального и правого прямоугольника следует из определений).

Итак, пусть $[\sigma] \in K_0(C_0(T^*M)_\Gamma)$ – элемент, определяемый эллиптическим символом σ . Зафиксируем элемент $g \in \Gamma$.

В силу двойственности $H_c^{\text{ev}}(T^*(NM)_g) \times H^{\text{ev}}(M_g) \rightarrow \mathbb{C}$ на $T^*(NM)_g$, рассматриваемом как векторное расслоение над M_g , для доказательства коммутативности левого квадрата диаграммы (5.31) достаточно показать, что для любого класса когомологий $\omega \in H^{\text{ev}}(M_g)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \left\langle \text{ch}_g[\sigma] \frac{\text{Td}(T^*M_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})(g)} \omega, [T^*M_g] \right\rangle \\ &= \left\langle \text{ch}_g j! [\sigma] \frac{\text{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(N(NM)_g \otimes \mathbb{C})(g)} \omega, [T^*(NM)_g] \right\rangle \end{aligned} \quad (5.32)$$

(на кокасательных расслоениях выбирается ориентация $\xi_1, x_1, \dots, \xi_n, x_n$).

Для доказательства последнего равенства преобразуем его правую часть.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim M > 0$. Правая часть в (5.32) равна

$$\left\langle \text{ch}_g[\sigma \# Q_{NM}] \frac{\text{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(N(NM)_g \otimes \mathbb{C})(g)} \omega, [T^*(NM)_g] \right\rangle, \quad (5.33)$$

где Q_{NM} – символ оператора Эйлера в слоях расслоения $NM \rightarrow M$.

Кокасательное расслоение $T^*(NM)_g$ является прямой суммой

$$T^*(NM)_g \simeq \pi_0^*(T^*M_g \oplus (NM)_g) \quad (5.34)$$

G -расслоений, где $\pi_0: (NM)_g \rightarrow M_g$ – проекция. Из этого представления следует, что $T^*(NM)_g$ расслаивается над T^*M_g со слоем $(N_x M)_g \oplus (N_x M)_g \simeq T^*(N_x M)_g$, $x \in M_g$. Проекцию этого расслоения обозначим через π . Произведем в выражении (5.33) интегрирование по слоям расслоения π . Получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle \text{ch}_g[\sigma \# Q_{NM}] \frac{\text{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(N(NM)_g \otimes \mathbb{C})(g)} \omega, [T^*(NM)_g] \right\rangle \\ &= \left\langle \pi_* \left(\text{ch}_g[\sigma \# Q_{NM}] \frac{\text{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C})}{\text{ch } \Omega(N(NM)_g \otimes \mathbb{C})(g)} \omega, [T^*M_g] \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Покажем, что дробь в правой части этого равенства можно вынести за знак интеграла по слою. Действительно, в силу разложения (5.34) получаем в числителе

$$\text{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C}) = \text{Td}(T^*M_g \otimes \mathbb{C}) \text{Td}((NM)_g \otimes \mathbb{C}) \in H^{\text{ev}}(M_g), \quad (5.36)$$

а в знаменателе

$$\text{ch } \Omega(N((NM)_g) \otimes \mathbb{C})(g) = \text{ch } \Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})(g) \text{ch } \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g) \in H^{\text{ev}}(M_g). \quad (5.37)$$

Здесь мы используем разложение $NM|_{M_g} \simeq (NM)_g \oplus (NM)_g^\perp$, формулу Картана $\Omega(E_1 \oplus E_2) = \Omega(E_1) \otimes \Omega(E_2)$ (тензорное произведение $\mathbb{Z}_2$ -градуированных пространств) и тот факт, что g действует на тензорном произведении диагонально. Таким образом, дробь в (5.35) представляет собой класс когомологий базы M_g и поэтому выносится за знак интеграла по слою (операция π_*).

Наконец, характер Черна мультипликативен относительно скрещенного произведения (см. коммутативную диаграмму (4.20)). В данном случае из этой диаграммы следует равенство

$$\mathrm{ch}_g[\sigma \# Q_{NM}] = \mathrm{ch}_g[\sigma](\chi^*(Q_{NM})(g)), \quad (5.38)$$

где $i^*(Q_{NM})$ – сужение символа Q_{NM} на подпространство $T^*(NM)_g \subset T^*NM$.

Подставляя (5.36), (5.37) и (5.38) в (5.35), получаем следующее выражение для правой части в (5.32):

$$\left\langle \mathrm{ch}_g[\sigma] \frac{\mathrm{Td}(T^*M_g \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{ch} \Omega(NM_g \otimes \mathbb{C})(g)} \frac{\mathrm{Td}((NM)_g \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g)} \pi_*(\mathrm{ch}(i^*Q_{NM})(g)) \omega, [T^*M_g] \right\rangle.$$

Теперь доказательство равенства (5.32) завершается применением следующей ниже леммы 5.14 к последнему выражению в комбинации с соответствующим сокращением сомножителей.

ЛЕММА 5.14. *Справедливо равенство*

$$\pi_*(\mathrm{ch}(i^*Q_{NM})(g)) = \frac{\mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g)}{\mathrm{Td}((NM)_g \otimes \mathbb{C})}. \quad (5.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Для $\mathbb{Z}_2$ -градуированных расслоений внешних форм имеет место изоморфизм $\Omega((NM)_g \oplus (NM)_g^\perp) = \Omega((NM)_g) \otimes \Omega((NM)_g^\perp)$. Для символа оператора Эйлера имеем аналогично

$$Q_{(NM)_g \oplus (NM)_g^\perp} = Q_{(NM)_g} \# Q_{(NM)_g^\perp}$$

(см. [27]). Поэтому сужение символа оператора Эйлера на множество неподвижных точек равно

$$i^*Q_{NM} = \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C}) \otimes Q_{(NM)_g}.$$

Действие элемента g нетривиально только на внешней алгебре нормального расслоения. Поэтому характер Черна символа i^*Q_{NM} равен

$$\mathrm{ch}(i^*Q_{NM})(g) = \mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g) \mathrm{ch}(Q_{(NM)_g}).$$

б) Интеграл по слою проекции $\pi: T^*(NM)_g \rightarrow T^*M_g$ от последнего выражения вычисляется стандартным образом (формула Римана–Роха для вложения $M_g \subset (NM)_g$; см., например, [22]):

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g) \mathrm{ch} Q_{(NM)_g}) &= \mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g) \pi_*(\mathrm{ch} Q_{(NM)_g}) \\ &= \mathrm{ch} \Omega((NM)_g^\perp \otimes \mathbb{C})(g) \frac{1}{\mathrm{Td}((NM)_g \otimes \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Лемма 5.14 доказана.

2. Пусть теперь M есть точка, а $NM = \mathbb{R}^n$ – конечномерный G -модуль. Тогда прямой образ есть гомоморфизм

$$i_! : K_0(C^*(\Gamma)) \longrightarrow K_0(C_0(\mathbb{R}^{2n})_\Gamma).$$

Приведенное выше доказательство равенства (5.32) в этом случае изменяется следующим образом:

1) так как в данной ситуации $M = M_g = \{pt\}$, а $(NM)_g$ и $(NM)_g^\perp = N((NM)_g)$ – конечномерные линейные подпространства, то классы Тодда

$$\mathrm{Td}(T^*M_g \otimes \mathbb{C}), \quad \mathrm{Td}(T^*(NM)_g \otimes \mathbb{C})$$

равны единице, а характер Черна нормального расслоения содержит только форму нулевой степени;

2) сохраняется свойство мультипликативности характера Черна, которое принимает вид

$$\mathrm{ch}_g[(\sigma : \mathrm{Im} P \rightarrow 0) \# Q_{NM}] = (\mathrm{ch}_g P)(\mathrm{ch} i^*(Q_{NM})(g)).$$

Формула Римана–Роха (теорема 5.11) полностью доказана.

§ 6. Теорема об индексе некоммутативных операторов над C^* -алгебрами

Пусть D – некоммутативный эллиптический ПДО над C^* -алгеброй A , а $\tau : \Lambda(B) \rightarrow \mathbb{C}$ – замкнутый след четного порядка на алгебре некоммутативных дифференциальных форм $\Lambda(B)$, отвечающих плотной сильно спектрально инвариантной подалгебре Фреше $B \subset A$.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

ТЕОРЕМА 6.1. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{ch}_\tau(\mathrm{ind}_A D) = \sum_{\langle g \rangle \subset \Gamma} \langle \mathrm{ch}_{\tau,g}[\sigma(D)] \mathrm{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}), [T^*M_g] \rangle, \quad (6.1)$$

где $\mathrm{ch}_{\tau,g}$ обозначает g -компоненту в (4.15), характеристический класс $\mathrm{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C})$ был определен в (5.26), $[T^*M_g] \in H_{\mathrm{ev}}(T^*M_g)$ – фундаментальный класс, а угловые скобки обозначают спаривание де Рама. При этом ряд в (6.1) сходится абсолютно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае тривиальной группы $\Gamma = \{e\}$ теорема 6.1 дает когомологическую формулу для индекса эллиптических операторов над C^* -алгебрами (в случае операторов Дирака такого рода формулы были получены в [7]–[9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если $A = B = \mathbb{C}$ и $\tau = \mathrm{id} : \Lambda(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, то левая часть в (6.1) совпадает с фредгольмовым индексом, а теорема 6.1 дает когомологическую формулу для фредгольмова индекса (см. теорему 5.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. 1. Левую и правую части формулы (6.1) будем рассматривать как функционалы на группе $\text{Ell}_\Gamma(M, A)$. Отображение разностной конструкции $D \mapsto [\sigma(D)]$ дает изоморфизм (см. (3.11))

$$\text{Ell}_\Gamma(M, A) \longrightarrow K_0(C_0(T^*M, A)_\Gamma).$$

Имеет место изоморфизм $C_0(T^*M, A)_\Gamma \simeq C_0(T^*M)_\Gamma \otimes A$ (это частный случай леммы 2.75 из [30]). Пользуясь этим изоморфизмом, получаем

$$\text{Ell}_\Gamma(M, A) \simeq K_0(C_0(T^*M)_\Gamma \otimes A).$$

2. Для алгебр A и $C_0(T^*M)_\Gamma$ справедлива формула Кюннета в K -теории, т.е. имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K_*(C_0(T^*M)_\Gamma) \otimes K_*(A) &\rightarrow K_*(C_0(T^*M)_\Gamma \otimes A) \\ &\rightarrow \text{Tor}(K_*(C_0(T^*M)_\Gamma), K_*(A)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Это следует из [31; следствие 0.2]. Отметим, что условия цитированного утверждения выполнены, а именно:

1) так как Γ имеет полиномиальный рост и, следовательно, аменабельна, то для группы Γ справедлив изоморфизм Баума–Конна с коэффициентами (см. [32], [33]);

2) алгебра $C_0(T^*M)$ является алгеброй типа I .⁷

Тензорно умножая последовательность (6.2) на $\mathbb{C}$, получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} (K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \otimes K_0(A)) \otimes \mathbb{C} \oplus (K_1(C_0(T^*M)_\Gamma) \otimes K_1(A)) \otimes \mathbb{C} \\ \xrightarrow{\simeq} K_0(C_0(T^*M, A)_\Gamma) \otimes \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

определяемый произведением в K -теории.

3. Из изоморфизма (6.3) следует, что для того, чтобы доказать теорему, достаточно проверить равенство (6.1) только для операторов, отвечающих произведениям классов из $K_i(C_0(T^*M)_\Gamma)$ и $K_i(A)$, $i = 0, 1$, соответственно.

4. Рассмотрим сначала случай $i = 0$. Пусть

$$D_0: P_1 \mathcal{H}^L \longrightarrow P_2 \mathcal{H}^L$$

– некоммутативный эллиптический оператор на M ; здесь предполагается, что D_0 – матричный ПДО размера L на L , где $L \in \mathbb{Z}_+$. Символ этого оператора определяет класс $[\sigma(D_0)] \in K_0(C_0(T^*M)_\Gamma)$. Пусть $P \in \text{Mat}_N(B)$ – матричный проектор, определяющий класс $[P] \in K_0(B) \simeq K_0(A)$. Рассмотрим оператор

$$D = D_0 \otimes P: (P_1 \otimes P) \mathcal{H}^{LN} \longrightarrow (P_2 \otimes P) \mathcal{H}^{LN}. \quad (6.4)$$

С одной стороны, индекс оператора (6.4) равен

$$\text{ind}_A D = (\text{ind } D_0)[P] \in K_0(A)$$

(ср. [5; лемма 3.5]); следовательно, левая часть в (6.1) равна $(\text{ind } D_0) \text{ch}_\tau[P] \in \mathbb{C}$.

⁷Если алгебра A принадлежит так называемому bootstrap классу N , то формула Кюннета следует из [34] (при этом соответствующее доказательство не использует теорию Баума–Конна).

С другой стороны, элемент $[\sigma(D)]$ является произведением элементов $[P]$ и $[\sigma(D_0)]$, а характер Черна обладает мультипликативным свойством (предложение 4.4)

$$\text{ch}_{\tau,g}([\sigma(D_0)][P]) = (\text{ch}_{\tau}[P])(\text{ch}_g[\sigma(D_0)]), \quad (6.5)$$

где через $\text{ch}_g: K_0(C_0(T^*M)_{\Gamma}) \rightarrow H_c^{\text{ev}}(T^*M_g)$ и $\text{ch}_{\tau}: K_0(A) \rightarrow \mathbb{C}$ обозначены характеры Черна, отвечающие соответствующим следам.

Итак, из (6.4) и (6.5) получаем равенство

$$\text{ch}_{\tau,g}[\sigma(D)] = (\text{ch}_{\tau}[P])(\text{ch}_g[\sigma(D_0)]) \in H_c^{\text{ev}}(T^*M_g), \quad (6.6)$$

из которого следует, что правая часть в (6.1) равна

$$\begin{aligned} & \sum_{\langle g \rangle} \langle \text{ch}_{\tau,g}[\sigma(D)] \text{Td}_g(T^*M), [T^*M_g] \rangle \\ &= \left(\sum_{\langle g \rangle} \langle \text{ch}_g[\sigma(D_0)] \text{Td}_g(T^*M), [T^*M_g] \rangle \right) \text{ch}_{\tau}[P]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

В силу теоремы об индексе для некоммутирующих эллиптических ПДО над алгеброй $\mathbb{C}$ (теорема 5.12) ряд в круглых скобках в (6.7) абсолютно сходится, а его сумма равна $\text{ind } D_0$.

Таким образом, в этом случае правая часть в (6.1) равна $(\text{ind } D_0) \text{ch}_{\tau}[P]$, т.е. равна левой части.

5. Рассмотрим теперь случай $i = 1$. Пусть элемент $z \in K_0(C_0(T^*M, A)_{\Gamma})$ представляется в виде произведения

$$z = xy, \quad x \in K_1(C_0(T^*M)_{\Gamma}), \quad y \in K_1(A). \quad (6.8)$$

Покажем, что в этом случае правая часть в формуле (6.1) обращается в нуль.

Обозначим для краткости $W = T^*M$.

ЛЕММА 6.4. Если элемент $z \in K_0(C_0(W, A)_{\Gamma})$ представим в виде $z = xy$, где $x \in K_1(C_0(W)_{\Gamma})$, $y \in K_1(A)$, то $\text{ch}_{\tau} z = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{\text{ev}}(W_g \times \mathbb{R}) \times H_c^{\text{ev}}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\otimes} & H_c^{\text{ev}}(W_g \times \mathbb{R}^2) & & \\ \uparrow \text{ch}_g \times \text{ch}_{\tau} & & \uparrow \text{ch}_{\tau,g} & \searrow & \\ K_0(C_0(W \times \mathbb{R})_{\Gamma}) \times K_0(C_0(\mathbb{R}, A)) & \xrightarrow{\otimes} & K_0(C_0(W \times \mathbb{R}^2, A)_{\Gamma}) & \xrightarrow{\text{ch}_{\tau,g}} & H_c^{\text{ev}}(W_g \times \mathbb{R}^2) \\ \uparrow S \times S & & \uparrow \otimes \beta & & \uparrow \otimes b \\ K_1(C_0(W)_{\Gamma}) \times K_1(A) & \xrightarrow{\otimes} & K_0(C_0(W, A)_{\Gamma}) & \xrightarrow{\text{ch}_{\tau,g}} & H_c^{\text{ev}}(W_g) \end{array} \quad (6.9)$$

Здесь S – изоморфизм надстройки; $\beta \in K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ – элемент Ботта; $b \in H_c^2(\mathbb{R}^2)$ – образующая; символом $\otimes$ обозначены произведения в K -теории и когомологиях.

Мы утверждаем, что эта диаграмма коммутативна. В самом деле, коммутативность левого нижнего прямоугольника – известная согласованность изоморфизмов надстройки и периодичности Ботта с умножением в K -теории; коммутативность правого нижнего и левого верхнего прямоугольников – мультипликативность характера Черна $\text{ch}_{\tau,g}$ (предложение 4.4).

В. Характер Черна элемента $Sx \otimes Sy \in K_0(C_0(W \times \mathbb{R}^2, A)_\Gamma)$ равен нулю. В самом деле, $H_c^{\text{ev}}(\mathbb{R}) = 0$. Поэтому имеем

$$\text{ch}_{\tau,g}(Sx \otimes Sy) = \text{ch}_g(Sx) \otimes \text{ch}_\tau(Sy) = \text{ch}_g(Sx) \otimes 0 = 0.$$

С. Теперь из равенства $\text{ch}_\tau(Sx \otimes Sy) = 0$, коммутативности диаграммы (6.9) и изоморфности отображения $\otimes b$ следует, что $\text{ch}_\tau(x \otimes y) = 0$.

Лемма 6.4 доказана.

В [10; § 11.2.2] показано, что аналитический индекс произвольного оператора D такого, что $[\sigma(D)] = z$ (элемент z был определен в (6.8)), равен нулю:

$$\text{ind}_A D = 0 \in K_0(A). \quad (6.10)$$

Теорема 6.1 доказана.

Для полноты изложения дадим здесь схему доказательства равенства (6.10) для операторов, символ которых определяет элемент в подгруппе

$$K_1(C_0(T^*M)_\Gamma) \times K_1(A) \subset K_0(C_0(T^*M)_\Gamma \otimes A). \quad (6.11)$$

Рассмотрим оператор D вида

$$D = P \otimes u + (1 - P) \otimes 1, \quad (6.12)$$

где $u \in \text{Mat}_n(A)$ – обратимый элемент, а $P = P^2 \in \text{Mat}_N(\Psi_\Gamma(M))$ – матричный ПДО, который является проектором. С одной стороны, индекс оператора D равен нулю, так как оператор D обратим:

$$D^{-1} = P \otimes u^{-1} + (1 - P) \otimes 1.$$

С другой стороны, можно показать, что символ оператора (6.12) лежит в подгруппе (6.11).

Далее, если на многообразии M существует Γ -инвариантное векторное поле, нигде не обращающееся в нуль, то подгруппа (6.11) порождается символами операторов вида (6.12). Следовательно, на многообразиях, удовлетворяющих этому условию, индекс равен нулю на всей подгруппе (6.11).

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $[D] \in \text{Ell}_\Gamma(M, A)$ – элемент, определяемый некоторым эллиптическим оператором D , а $[B] \in \text{Ell}(\mathbb{S}^1)$ – элемент, определяемый эллиптическим оператором на окружности, действующим на функциях, и такой, что $\text{ind } B = 1$. С одной стороны, можно построить сглаженное скрещенное произведение $D \hat{\#}_a B$ по формуле (5.13) и установить равенство

$$\text{ind}_A(D \hat{\#}_a B) = \text{ind}_A D \cdot \text{ind } B = \text{ind}_A D.$$

С другой стороны, оператор $D \hat{\#}_a B$ рассматривается на произведении $M \times \mathbb{S}^1$. Для произведения $M \times \mathbb{S}^1$ выполнено условие п. 2 (в качестве векторного поля можно взять $\partial/\partial\varphi$, где φ – координата на $\mathbb{S}^1$). Поэтому, применяя рассуждение п. 2, получаем искомое равенство $\text{ind}_A D = 0$.

§ 7. Приложение. Высшие индексы

В этом параграфе мы получим формулы для высших индексов некоммутативных эллиптических операторов, которые были впервые получены в [10; гл. 10] другим способом.

Пусть

$$D: P_1 L^2(M, \mathbb{C}^N) \longrightarrow P_2 L^2(M, \mathbb{C}^N) \quad (7.1)$$

– некоммутативный эллиптический оператор на многообразии M , снабженном действием дискретной группы диффеоморфизмов Γ . Другими словами, D – это некоммутативный эллиптический оператор вида (2.4) над алгеброй $A = \mathbb{C}$. Мы предполагаем, что группа и действие удовлетворяют условиям, сформулированным в начале § 2.

Пусть $C^*(\Gamma)$ – групповая C^* -алгебра группы Γ . Рассмотрим скрещенное произведение $C(M, C^*(\Gamma))_\Gamma$, отвечающее действию группы Γ на многообразии M , которое было зафиксировано выше, и тривиальному действию на $C^*(\Gamma)$. Определим гомоморфизм скрещенных произведений

$$\begin{aligned} C(M)_\Gamma &\longrightarrow C(M, C^*(\Gamma))_\Gamma, \\ f = \{f(g)\} &\longmapsto \tilde{f} = \{f(g)g\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где в произведении $f(g)g \in C(M, C^*(\Gamma))$ множитель g рассматривается как элемент групповой алгебры. Гомоморфизм (7.2) корректно определен, так как соответствие $f \mapsto \tilde{f}$ отвечает ковариантному представлению.

Правый гильбертов модуль $L^2(M, C^*(\Gamma))$ будем обозначать через $\mathcal{H}$, а его прямую сумму в количестве N экземпляров – через $\mathcal{H}^N$. Проекторы, которые получаются из проекторов P_1, P_2 (см. (7.1)) применением гомоморфизма (7.2), будем обозначать через $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$. Наконец, через $\tilde{D}$ обозначим произвольный некоммутативный ПДО над C^* -алгеброй $C^*(\Gamma)$ с символом, равным $\widehat{\sigma}(\tilde{D}) \in \text{Mat}_N(C(S^*M, C^*(\Gamma))_\Gamma)$. Отметим, что оператор $\tilde{D}$ определен однозначно с точностью до компактных операторов.

Рассмотрим оператор

$$\tilde{P}_2 \tilde{D}: \tilde{P}_1 \mathcal{H}^N \longrightarrow \tilde{P}_2 \mathcal{H}^N, \quad (7.3)$$

действующий в правых гильбертовых $C^*(\Gamma)$ -модулях $\tilde{P}_{1,2} \mathcal{H}^N$. Из эллиптичности оператора D следует, что оператор (7.3) также эллиптичен (для доказательства достаточно заметить, что гомоморфизм (7.2) унитарен).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Оператор (7.3) можно интерпретировать как скрещенное произведение оператора (7.1) и единичного оператора, скрученное при помощи унитарного представления группы Γ в алгебре $C^*(\Gamma)$.

Пусть τ – замкнутый след четного порядка на алгебре некоммутативных дифференциальных форм $\Lambda(C^\infty(\Gamma))$ над гладкой групповой алгеброй, где

$$C^\infty(\Gamma) \subset C^*(\Gamma)$$

– гладкая групповая алгебра. *Высшим индексом* оператора D будем называть число $\text{ch}_\tau(\text{ind}_{C^*(\Gamma)} \tilde{D})$.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{ch}_\tau(\mathrm{ind}_{C^*(\Gamma)} \tilde{D}) = \sum_{\langle g \rangle \subset \Gamma} \langle \mathrm{ch}_{\tau,g}[\sigma(\tilde{D})] \mathrm{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}), [T^*M_g] \rangle. \quad (7.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для группы Γ степенного роста алгебра Фреше $C^\infty(\Gamma)$ является сильно спектрально инвариантной в групповой C^* -алгебре $C^*(\Gamma)$ (см. [35; § 2], [36; следствие 2.3]). Поэтому мы можем применить к оператору $\tilde{D}$ теорему 6.1 и получить формулу (7.4).

Следствие 7.2 доказано.

Отметим, что формула (7.4) совпадает с формулой, полученной в [10; гл. 10], с точностью до обозначений. В самом деле, единственным существенным различием этих формул являются разные алгебры некоммутативных дифференциальных форм, входящие в определение характера Черна символа. Покажем, что эти способы в действительности эквивалентны. В самом деле, нетрудно видеть, что все дифференциальные формы, участвующие в вычислении класса когомологий $\mathrm{ch}_{\tau,g}[\sigma(\tilde{D})]$, лежат в дифференциальной подалгебре в $\Lambda(T^*M, C^\infty(\Gamma))_\Gamma$, порожденной элементами f вида

$$f(g) = \begin{cases} \omega g_0 dg_1 \cdots dg_n, & \text{если } g = g_0 g_1 \cdots g_n, \\ 0, & \text{если } g \neq g_0 g_1 \cdots g_n, \end{cases}$$

где форма $\omega \in \Omega(T^*M)$ и элементы $g_0, g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ произвольны. Именно эта дифференциальная подалгебра и сужение следа (4.14) на нее использовались в цитированной выше работе. Отсюда следует искомое совпадение характера Черна $\mathrm{ch}_{\tau,g}[\sigma(\tilde{D})]$ в формуле (7.4) и характера Черна, использованного в [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. В случае, когда группа Γ конечна, по некоммутативному эллиптическому оператору D над алгеброй $A = \mathbb{C}$ можно построить Γ -эквивариантный эллиптический оператор, который обозначим через D_{inv} (см. [14]; ср. с изоморфизмом $\mathrm{Green}\text{-}\mathrm{Julg} \ K_0(C_0(T^*M)_\Gamma) \simeq K_\Gamma^0(T^*M)$). Можно показать, что Γ -индекс оператора D_{inv} , рассматриваемый как элемент кольца $R(\Gamma)$ виртуальных представлений группы Γ , совпадает с $\mathbb{C}\Gamma$ -индексом оператора $\tilde{D}$ при изоморфизме $K_0(\mathbb{C}\Gamma) \simeq R(\Gamma)$. При этом если для элемента $g \in \Gamma$ рассмотреть след $\tau: \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, отвечающий классу сопряженности $\langle g \rangle \subset \Gamma$, то число $\mathrm{ch}_\tau(\mathrm{ind}_{\mathbb{C}\Gamma} \tilde{D})$ совпадает с числом Лефшеца

$$L(D_{\mathrm{inv}}, g) = \mathrm{tr} g^*|_{\ker D_{\mathrm{inv}}} - \mathrm{tr} g^*|_{\ker D_{\mathrm{inv}}^*},$$

а формула (6.1) перейдет в формулу Лефшеца (см. [26]).

Список литературы

- [1] A. Connes, “ C^* algèbres et géométrie différentielle”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **290**:13 (1980), 599–604.
- [2] A. Connes, G. Landi, “Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations”, *Comm. Math. Phys.*, **221**:1 (2001), 141–159.

- [3] A. Connes, M. Dubois-Violette, “Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples”, *Comm. Math. Phys.*, **230**:3 (2002), 539–579.
- [4] G. Landi, W. van Suijlekom, “Principal fibrations from noncommutative spheres”, *Comm. Math. Phys.*, **260**:1 (2005), 203–225.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 831–859; англ. пер.: A. S. Miščenko, A. T. Fomenko, “The index of elliptic operators over C^* -algebras”, *Math. USSR Izv.*, **15**:1 (1980), 87–112.
- [6] A. Connes, “Non-commutative differential geometry”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **62**:1 (1985), 41–144.
- [7] J. Lott, “Superconnections and higher index theory”, *Geom. Funct. Anal.*, **2**:4 (1992), 421–454.
- [8] Th. Schick, “ L^2 -index theorems, KK -theory, and connections”, *New York J. Math.*, **11** (2005), 387–443.
- [9] Ch. Wahl, “Homological index formulas for elliptic operators over C^* -algebras”, *New York J. Math.*, **15** (2009), 319–351; arXiv:abs/math/0603694
- [10] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic theory and noncommutative geometry*, Oper. Theory Adv. Appl., **183**, Birkhäuser, Basel, 2008.
- [11] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [12] M. Karoubi, “Homologie cyclique et K -théorie”, *Astérisque*, 1987, №149, 1–147.
- [13] P. Baum, A. Connes, “Chern character for discrete groups”, *A fête of topology*, Academic Press, Boston, MA, 1988, 163–232.
- [14] А. Б. Антоневи́ч, “Индекс псевдодифференциального оператора с конечной группой сдвигов”, *Докл. АН СССР*, **190** (1970), 751–752; англ. пер.: A. B. Antonevich, “On the index of a pseudodifferential operator with a finite group of shifts”, *Dokl. Sov. Math.*, **11** (1979), 168–170.
- [15] F. M. Azmi, “The equivariant Dirac cyclic cocycle”, *Rocky Mountain J. Math.*, **30**:4 (2000), 1171–1206.
- [16] E. Park, “Index theory of Toeplitz operators associated to transformation group C^* -algebras”, *Pacific J. Math.*, **223**:1 (2006), 159–165.
- [17] G. K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, London Math. Soc. Monogr., **14**, Academic Press, London–New York, 1979.
- [18] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman, Harlow; Wiley, New York, 1994.
- [19] M. Gromov, “Groups of polynomial growth and expanding maps”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1981, №1, 53–78.
- [20] L. B. Schweitzer, “Spectral invariance of dense subalgebras of operator algebras”, *Internat. J. Math.*, **4**:2 (1993), 289–317.
- [21] J. J. Kohn, L. Nirenberg, “An algebra of pseudo-differential operators”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**:1–2 (1965), 269–305.
- [22] А. С. Мищенко, *Векторные расслоения и их применения*, Наука, М., 1984; англ. пер.: G. Luke, A. S. Mishchenko, *Vector bundles and their applications*, Math. Appl., **447**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [23] A. Savin, “Elliptic operators on manifolds with singularities and K -homology”, *K-Theory*, **34**:1 (2005), 71–98.
- [24] W. Zhang, *Lectures on Chern–Weil theory and Witten deformations*, Nankai Tracts Math., **4**, World Scientific, River Edge, NJ, 2001.
- [25] М. Ф. Атья, Г. Б. Сегал, “Индекс эллиптических операторов. II”, *УМН*, **23**:6 (1968), 135–149; пер. с англ.: M. F. Atiyah, G. B. Segal, “The index of elliptic operators. II”, *Ann. of Math.* (2), **87**:3 (1968), 531–545.

- [26] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. II”, *УМН*, **24**:1 (1969), 127–182; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators. II”, *Ann. of Math. (2)*, **87**:3 (1968), 546–604.
- [27] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. I”, *УМН*, **23**:5 (1968), 99–142; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators. I”, *Ann. of Math. (2)*, **87**:3 (1968), 484–530.
- [28] Г. Г. Каспаров, “Топологические инварианты эллиптических операторов. I. K -гомологии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:4 (1975), 796–838; англ. пер.: G. G. Kasparov, “Topological invariants of elliptic operators. I: K -homology”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:4 (1975), 751–792.
- [29] B. Blackadar, *K -theory for operator algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [30] D. P. Williams, *Crossed products of C^* -algebras*, Math. Surveys Monogr., **134**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [31] J. Chabert, S. Echterhoff, H. Oyono-Oyono, “Going-down functors, the Künneth formula, and the Baum–Connes conjecture”, *Geom. Funct. Anal.*, **14**:3 (2004), 491–528.
- [32] N. Higson, G. Kasparov, “ E -theory and KK -theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space”, *Invent. Math.*, **144**:1 (2001), 23–74.
- [33] J.-L. Tu, “La conjecture de Baum–Connes pour les feuilletages moyennables”, *K -Theory*, **17**:3 (1999), 215–264.
- [34] C. Schochet, “Topological methods for C^* -algebras. II: Geometric resolutions and the Künneth formula”, *Pacific J. Math.*, **98**:2 (1982), 443–458.
- [35] R. Ji, L. B. Schweitzer, “Spectral invariance of smooth crossed products, and rapid decay locally compact groups”, *K -Theory*, **10**:3 (1996), 283–305.
- [36] X. Chen, Sh. Wei, “Spectral invariant subalgebras of reduced crossed product C^* -algebras”, *J. Funct. Anal.*, **197**:1 (2003), 228–246.

А. Ю. Савин (A. Yu. Savin)

Российский университет дружбы народов, г. Москва;

Leibniz University of Hannover, Germany

E-mail: antonsavin@mail.ru

Поступила в редакцию

07.02.2009 и 15.04.2009

Б. Ю. Стернин (B. Yu. Sternin)

Российский университет дружбы народов, г. Москва;

Leibniz University of Hannover, Germany

E-mail: sternin@mail.ru