Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, Ю. А. Леонычев, О. Ю. Хачай, Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 1, 81–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:57:48

УДК 517.928

А. М. Ильин, Ю. А. Леоничев, О. Ю. Хачай

Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой

Рассматривается начальная задача для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. В окрестности начальной точки асимптотика решения имеет довольно сложную структуру. Построено и обосновано равномерное асимптотическое приближение решения с точностью до любой степени малого параметра.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, начальная задача, метод согласования.

§ 1. Введение

В настоящей статье изучается асимптотика решения начальной задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = f(t, U, V), \\ \frac{dV}{dt} = g(t, U, V), \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Эта задача давно и достаточно хорошо изучена в том случае, когда существует устойчивое решение $U_0(t)$, $V_0(t)$ предельной системы уравнений такое, что

$$\begin{cases} f(t, U_0(t), V_0(t)) \equiv 0, \\ \frac{dV_0}{dt} = g(t, U_0(t), V_0(t)), \\ V(0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t)) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

(Подробная библиография имеется в [1].) Значительно сложнее обстоит дело в том случае, когда условие (2) в каких-то точках нарушается. В настоящей статье предполагается, что условие (2) нарушается в начальной точке $t = 0$. Даже для одного уравнения $\varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = f(t, U)$ в этом случае асимптотика решения весьма непростая. Она давно исследована в [2; гл. II, § 3]. Для рассматриваемой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-96002-р-урал-а, № 08-01-00260 и № 06-01-00138), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2215.2008.1) и INTAS (грант № 05-7921).

здесь системы (1) асимптотика значительно усложняется. В частности, даже вдали от начальной точки правильное асимптотическое разложение это не ряд по степеням малого параметра ε .

§ 2. Постановка задачи. Внешнее разложение

Перейдем к подробному описанию задачи (1). Главное отличие рассматриваемой ситуации состоит в том, что $\frac{\partial f}{\partial U}(0, 0, 0) = 0$, так что предельная функция $U_0(t, V)$ не является гладкой в начале координат. Она имеет простейшую особенность типа складки.

Будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Функции $f(t, U, V)$ и $g(t, U, V)$ бесконечно дифференцируемы на множестве $D = \{t, U, V : 0 \leq t \leq t_0, 0 \leq U \leq B, |V| \leq B\}$, $0 < A < B$.
2. На множестве D при $t > 0$, $U > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial U}(t, U, V) < 0. \quad (3)$$

3. $f(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) > 0$, $\frac{\partial f}{\partial U}(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}(0, 0, 0) < 0$. Без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial U^2}(0, 0, 0) = -2.$$

4. $g(0, 0, 0) = 0$.

В этом параграфе проведем предварительное построение внешнего асимптотического разложения. Будем искать это разложение в следующем естественном виде:

$$U(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} U_{3k}(t), \quad (4)$$

$$V(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} V_{3k}(t). \quad (5)$$

Разлагая функцию $f(t, U, V)$ в формальный ряд по степеням ε , получаем равенство

$$\begin{aligned} f\left(t, U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{3k} U_{3k}(t), V_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{3k} V_{3k}(t)\right) &= f(t, U_0(t), V_0(t)) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{3k} \sum_{m_1+m_2>0} \frac{1}{m_1! m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial^{m_1} U \partial^{m_2} V}(t, U_0(t), V_0(t)) \prod U_{3i}(t) V_{3l}(t), \end{aligned}$$

где число сомножителей U_{3i} в произведении $\prod(\cdot)$ равно m_1 , число сомножителей V_{3l} в этом произведении равно m_2 , а $\sum i + \sum l = k$.

Совершенно аналогично выглядит разложение функции $g(t, U, V)$.

Подставляя ряды (4) и (5) в уравнения системы (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем уравнения

$$f(t, U_0(t), V_0(t)) \equiv 0, \quad (6)$$

$$\frac{dV_0}{dt} = g(t, U_0(t), V_0(t)) \quad (7)$$

и следующую рекуррентную систему:

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{\partial f}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t))U_3 + \frac{\partial f}{\partial V}(t, U_0(t), V_0(t))V_3, \quad (8)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\partial g}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t))U_3 + \frac{\partial g}{\partial V}(t, U_0(t), V_0(t))V_3, \quad (9)$$

$$\dots\dots\dots \frac{dU_{3k-3}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))U_{3k} + \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))V_{3k} + G_{3k}(t), \quad k > 1, \quad (10)$$

$$\frac{dV_{3k}}{dt} = \frac{\partial g}{\partial U}(P_0(t))U_{3k} + \frac{\partial g}{\partial V}(P_0(t))V_{3k} + H_{3k}(t), \quad k > 1, \quad (11)$$

где функции $G_{3k}(t)$ и $H_{3k}(t)$ зависят соответственно от U_{3i} и V_{3i} с индексами, меньшими чем $3k$, а точка $P_0(t)$ – это точка $(t, U_0(t), V_0(t))$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1–4. Тогда для некоторого $t_1 > 0$ при $0 \leq t \leq t_1$ существует решение задачи (6), (7) такое, что

$$U_0(t) \overset{\text{as}}{=} t^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k/2}, \quad V_0(t) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=3}^{\infty} b_k t^{k/2}, \quad t \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если сделать замену независимой переменной $t = s^2$ и замену неизвестных функций $U_0(t) = sx(s)$, $V_0(t) = s^3y(s)$, то система (6), (7) приобретает вид

$$F(s, x, y) \equiv s^{-2}f(s^2, sx(s), s^3y(s)) = 0, \quad \frac{d(s^3y)}{ds} = 2sg(s^2, sx(s), s^3y(s)).$$

По условиям теоремы функции $F(s, x, y)$ и $g(s^2, sx(s), s^3y(s))$ бесконечно дифференцируемы при $s \geq 0$ в окрестности точки $(0, 0, 0)$ и $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 0) = -2$. Следовательно, согласно теореме о неявной функции уравнение $F(s, x, y) = 0$ определяет бесконечно дифференцируемую функцию $\beta(s, y)$ такую, что

$$F(s, \beta(s, y), y) \equiv 0, \quad \beta(s, y) = 1 + O(s + s|y|).$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству существования бесконечно дифференцируемого решения уравнения

$$\frac{d(s^3y)}{ds} = 2sg(s^2, s\beta(s, y(s)), s^3y(s)).$$

Эта задача эквивалентна разрешимости интегрального уравнения

$$y(s) = s^{-3} \int_0^s 2\xi g(\xi^2, \xi\beta(\xi, y(\xi)), \xi^3y(\xi)) d\xi.$$

Существование бесконечно дифференцируемого решения такого уравнения нетрудно получить методом последовательных приближений.

Теорема 1 доказана.

Через $\sigma_k(t)$ будем обозначать функции из $C^\infty(0, t_1]$, которые имеют асимптотические разложения вида $\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} t^{j/2}$ при $t \rightarrow 0$. В большинстве случаев будем опускать индекс k у функции σ и у ее коэффициентов. Множество таких функций будем обозначать Σ .

Обозначим через $P_0(t)$ точку с координатами $(t, U_0(t), V_0(t))$ и через $p(t)$ обозначим функцию $-\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))^{-1} \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))$. Из условий 1–3 и из теоремы 1 следует, что $t^{1/2}p(t) \in \Sigma$.

ТЕОРЕМА 2. Уравнения (8)–(11) имеют решения следующего вида:

$$U_{3k}(t) = t^{(1-3k)/2} \sum_{j=0}^{2k-1} \sigma_{j,1}(t) t^{j/2} \ln^j t, \quad (12)$$

$$V_{3k}(t) = t^{(3-3k)/2} \sum_{j=0}^{2k-1} \sigma_{j,2}(t) t^{j/2} \ln^j t. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 вытекает, что

$$t^{-1/2}U_0(t) \in \Sigma, \quad t^{-1}V_0(t) \in \Sigma, \\ t^{1/2} \frac{dU_0}{dt}(t) \in \Sigma, \quad t^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t)) \right)^{-1} \in \Sigma.$$

Из уравнения (8) следует, что

$$U_3(t) = t^{-1}\sigma(t) + p(t)V_3(t).$$

После подстановки этого выражения в уравнение (9) уравнение для V_3 принимает вид

$$\frac{dV_3}{dt} = q(t)V_3 + b_3(t), \quad (14)$$

где

$$q(t) = \frac{\partial g}{\partial V}(P_0(t)) - \frac{\frac{\partial g}{\partial U}(P_0(t)) \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))} = t^{-1/2}\sigma(t), \quad b_3(t) = t^{-1}\sigma(t).$$

Функция

$$Q(t) = \exp\left(\int_0^t q(\eta) d\eta\right) \in \Sigma$$

является решением однородного уравнения (14). Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$V_3(t) = R_1(t) + R_{1,1}(t) \ln t + C_1 Q(t),$$

где $R_1(t) \in \Sigma$, $R_{1,1}(t) \in \Sigma$, а C_1 – произвольная постоянная. Поэтому

$$U_3(t) = S_1(t) + S_{1,1}(t) \ln t + C_1 p(t) Q(t),$$

где $S_1(t) = t^{-1}\sigma(t)$, $S_{1,1}(t) = t^{-1/2}\sigma(t)$.

Тем самым, утверждение теоремы доказано для $k = 1$. Доказательство для $k > 1$ проводится методом индукции. Пусть равенства (12), (13) справедливы для всех $k \leq n$. Рассмотрим уравнения (10) (11)) при $k = n + 1$. Функции $G_{3n+3}(t)$ и $H_{3n+3}(t)$ – это линейные комбинации различных произведений функций $U_j(t)$ и $V_l(t)$ с гладкими коэффициентами таких, что сумма всех индексов $j > 0$ и $l > 0$ равна $3n + 3$. Следовательно, по предположению индукции

$$G_{3n+3}(t) = t^{1-3(n+1)/2} \sum_{j=0}^{2n} \sigma_j(t) t^{j/2} \ln^j t.$$

Такой же вид имеет и функция $H_{3n+3}(t)$.

Из уравнения (8) следует, что

$$U_{3n+3}(t) = p(t)V_{3n+3}(t) + t^{(1-3(n+1))/2} \sum_{j=0}^{2n} \sigma_j(t) t^{j/2} \ln^j t.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (11) уравнение для V_{3n+3} принимает вид

$$\frac{dV_{3n+3}}{dt} = q(t)V_{3n+3} + b_{3n+3}(t), \quad (15)$$

где

$$q(t) = t^{-1/2} \sigma(t), \quad b_{3n+3}(t) = t^{(1-3(n+1))/2} \sum_{j=0}^{2n} \sigma_j(t) t^{j/2} \ln^j t.$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$V_{3n+3}(t) = t^{(3-3(n+1))/2} \sum_{j=0}^{2n+1} \sigma_{j,2}(t) t^{j/2} \ln^j t,$$

где формальный ряд $\sigma_{0,2}(t)$ содержит свободную постоянную интегрирования; следовательно,

$$U_{3n+3}(t) = t^{(1-3(n+1))/2} \sum_{j=0}^{2n+1} \sigma_{j,2}(t) t^{j/2} \ln^j t.$$

Теорема 2 доказана.

Таким образом, построено формальное асимптотическое разложение (4), (5) системы (1). Это означает, что для любого малого $\delta > 0$ частичные суммы рядов (4), (5) удовлетворяют уравнениям системы (1) при $t > \delta$ с точностью до высокой степени ε .

Однако построенные ряды обладают многими недостатками. Во-первых, ряд (4) даже формально не удовлетворяет начальному условию, так что ряды (4), (5) могут быть хорошим приближением решения лишь при не очень маленьких значениях t . Это, естественно, связано с сингулярностью задачи. Во-вторых, коэффициенты рядов (4), (5) сами имеют особенности при $t \rightarrow 0$, и порядок этих особенностей растет вместе с ростом номеров коэффициентов. Все коэффициенты начиная с $U_3(t)$ и $V_3(t)$ не определяются однозначно (описанные выше постоянные C_n а priori произвольны.) Такое свойство мы называем *бисингулярностью задачи* (1).

Но самой интересной особенностью данной задачи, которая является главным содержанием исследования, является то обстоятельство, что описанная выше форма асимптотики (4), (5) неправильна. Правильное асимптотическое разложение решения имеет другой вид. Он будет получен и обоснован ниже после применения метода согласования асимптотик. Как всегда в таких случаях, в окрестности начала координат разумно искать другое асимптотическое разложение решения в новых, внутренних переменных.

§ 3. Внутреннее разложение

Внутреннее асимптотическое разложение строится обычным путем. Оно мало отличается от такого же разложения в случае одного уравнения (см. [2]), но требует аккуратного исследования. В окрестности начальной точки вводится новая растянутая переменная $\tau = \varepsilon^{-3}t$. Если для неизвестных функций ввести обозначения $U(\varepsilon^3\tau, \varepsilon) \equiv w(\tau, \varepsilon)$, $V(\varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv z(\tau, \varepsilon)$, то уравнения для функций w, z приобретают вид

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = f(\varepsilon^3\tau, w, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon^3 g(\varepsilon^3\tau, w, z), \\ w(0) = A > 0, \quad z(0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Асимптотические ряды функций w и z будем искать в виде

$$w(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} w_k(\tau), \quad (17)$$

$$z(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{3k} z_k(\tau). \quad (18)$$

Как и выше, разложим функции $f(\varepsilon^3\tau, w, z)$ и $g(\varepsilon^3\tau, w, z)$ в формальные ряды по степеням ε^3 . Подставляя ряды (17) и (18) в уравнения системы (16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем следующую рекуррентную систему:

$$\frac{dw_0}{d\tau} = f(0, w_0, 0), \quad w_0(0) = A, \quad (19)$$

$$\frac{dz_1}{d\tau} = g(0, w_0, 0), \quad z_1(0) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial t}(0, w_0, 0)\tau + \frac{\partial f}{\partial U}(0, w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial V}(0, w_0, 0)z_1, \quad w_1(0) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial t}(0, w_0, 0)\tau + \frac{\partial g}{\partial U}(0, w_0, 0)w_1 + \frac{\partial g}{\partial V}(0, w_0, 0)z_1, \quad z_2(0) = 0, \quad (22)$$

.....

$$\frac{dw_k}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial U}(0, w_0, 0)w_k + \frac{\partial f}{\partial V}(0, w_0, 0)z_k + r_k(\tau), \quad w_k(0) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{dz_{k+1}}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial U}(0, w_0, 0)w_k + \frac{\partial g}{\partial V}(0, w_0, 0)z_k + s_k(\tau), \quad k > 1, \quad z_{k+1}(0) = 0, \quad (24)$$

где функции $r_k(\tau)$ и $s_k(\tau)$ зависят от w_i и z_i с индексами, меньшими чем k . Нетрудно заметить, что $r_k(\tau)$ и $s_k(\tau)$ – это линейные комбинации произведений вида $\tau^i \prod_{j>1} w_j \prod_l z_l$, коэффициентами которых являются производные функций f и g в точке $(0, w_0, 0)$, а сумма i индексов j и индексов l равна k .

Решение задачи (19) записывается в явном виде

$$\tau = \int_A^{w_0} \frac{1}{f(0, \lambda, 0)} d\lambda. \quad (25)$$

Из условия (3) вытекает, что $f(0, \lambda, 0) < 0$ при $0 < \lambda < A$. Так как $\frac{\partial f}{\partial U}(0, 0, 0) = 0$, то равенство (25) определяет положительную монотонно убывающую функцию $w_0(\tau)$, которая стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Асимптотику этого решения при $\tau \rightarrow \infty$ можно получить методом последовательных приближений.

Пусть $\frac{\partial^3 f}{\partial U^3}(0, 0, 0) = 6\gamma$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(0, \lambda, 0) = -\lambda^2 + \gamma\lambda^3 + \sum_{k=4}^{n+4} \gamma_k \lambda^k + O(\lambda^{n+5}), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{f(0, \lambda, 0)} = -\lambda^{-2} - \gamma\lambda^{-1} + \sum_{k=0}^n c_{k,1} \lambda^k + O(\lambda^{n+1}), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

После интегрирования из (25) получаем равенство

$$\tau = \frac{1}{w_0} - \gamma \ln w_0 - \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,2} w_0^k + O(w_0^{n+2}), \quad w_0 \rightarrow 0. \quad (26)$$

Далее, применив процесс последовательных асимптотических приближений, нетрудно убедиться в том, что

$$w_0(\tau) = \tau^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-j} \sum_{i=0}^j c_{j,i} (\ln \tau)^i \right). \quad (27)$$

Остальные w_k являются решениями линейных уравнений (21), (23), а функции z_k получаются простым интегрированием соотношений (20), (22), (24).

Через $P_i(z)$ или $P_{i,k}(z)$ будем обозначать полиномы степени i , а через $\omega_i(\tau)$ или $\omega(\tau)$ без индексов будем обозначать функции из $C^\infty[0, \infty]$, для которых при $\tau \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические разложения $\omega(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{-j} P_j(\ln \tau)$.

ТЕОРЕМА 3. Уравнения (19)–(24) при $\tau \geq 0$ имеют решения следующего вида:

$$w_k(\tau) = \tau^{3k-1} \omega_k(\tau), \quad (28)$$

$$z_1(\tau) \in C^\infty[0, \infty], \quad z_1(\tau) \stackrel{\text{as}}{=} \omega(\tau) + C \ln \tau, \quad z_{k+1}(\tau) = \tau^{3k} \omega_k(\tau). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $w_0(\tau)$ утверждение теоремы уже получено выше (формула (27)). Асимптотика функции $z_1(\tau)$ сразу вытекает из уравнения (20). Явные решения уравнений (21)–(24) имеют очень простой вид. Тем не менее из этого вида довольно трудно вывести точные выражения асимптотик решений при $\tau \rightarrow \infty$. Для дальнейшего необходимо найти максимально возможные степени логарифмов в асимптотиках этих решений, что весьма затруднительно для переменной τ . Поэтому дальнейшее изучение асимптотики функций $w_k(\tau), z_k(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ удобно проводить для другой независимой переменной. Такой переменной будем считать $y = w_0(\tau)$. Эта переменная изменяется от 0 до A .

Через $\rho(y)$ будем обозначать функции, которые имеют асимптотические разложения $\sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$ при $y \rightarrow 0$.

Так как $\frac{dw}{d\tau} = \frac{dw}{dy} f(0, y, 0)$, то все уравнения для $w_k(\tau)$, $z_{k+1}(\tau)$ при $k > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dw_k}{dy} &= \frac{1}{f(0, y, 0)} \left[\frac{\partial f}{\partial U}(0, y, 0) w_k + \rho(y) z_k + r_k(\tau(y)) \right], & w_k(A) &= 0, \\ \frac{dz_{k+1}}{dy} &= \frac{1}{f(0, y, 0)} [\rho(y) w_k + \rho(y) z_k + s_k(\tau(y))], & z_{k+1}(A) &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}w_k(y) &= f(0, y, 0) \int_A^y \frac{1}{f^2(0, \xi, 0)} [\rho(\xi) z_k + r_k(\tau(\xi))] d\xi, \\ z_{k+1}(y) &= \int_A^y \frac{1}{f(0, \xi, 0)} [\rho(\xi) w_k + \rho(\xi) z_k + s_k(\tau(\xi))] d\xi.\end{aligned}$$

Так как $f(0, y, 0) = -y^2 + y^3 \rho(y)$, $g(0, y, 0) = y \rho(y)$, то

$$z_1(y) = \int_A^y \frac{g(0, \xi, 0)}{f(0, \xi, 0)} d\xi = \int_A^y \frac{\rho(\xi)}{\xi(-1 + \xi \rho(\xi))} d\xi = C \ln y + \rho(y).$$

Из (26) следует, что $\tau(y) = y^{-1} - \gamma \ln y + \rho(y)$. Поэтому

$$\begin{aligned}w_1(y) &= y^2 \rho(y) \int_A^y \rho(\xi) \xi^{-4} (\xi^{-1} + C_1 \ln \xi + \rho(\xi)) d\xi \\ &= \rho(y) y^{-2} + \rho(y) y^{-1} \ln y + \rho(y) y^2 \ln^2 y, \\ z_2(y) &= \int_A^y \frac{1}{f(0, \xi, 0)} [\rho(\xi) w_1 + \rho(\xi) z_1 + \rho(\xi) \tau(\xi)] d\xi \\ &= \int_A^y [\rho(\xi) \xi^{-4} + \rho(\xi) \xi^{-3} \ln \xi + \rho(\xi) \ln^2 \xi] d\xi \\ &= \rho(y) y^{-3} + \rho(y) y^{-2} \ln y + \rho(y) \ln^2 y.\end{aligned}$$

Через $\Gamma_m(y)$ обозначим функции вида $\sum_{k=0}^m \rho_k(y) y^k \ln^k(y)$ и докажем, что

$$w_k(y) = y^{1-3k} \Gamma_{3k-1}(y), \quad z_{k+1}(y) = y^{-3k} \Gamma_{3k}(y). \quad (30)$$

Доказательство проведем по индукции. Выше показано, что соотношения (30) справедливы при $k = 1$. Пусть формулы (30) справедливы для всех $k < n$. Тогда

$$r_n(\tau(y)) = y^{-3n+2} \Gamma_{3n-2}(y), \quad s_n(\tau(y)) = y^{-3n+2} \Gamma_{3n-2}(y),$$

так как главными членами в этих суммах являются произведения $w_{n-1}(y) w_1(y)$. Поэтому

$$\begin{aligned}w_n(y) &= f(0, y, 0) \int_A^y \frac{1}{f^2(0, \xi, 0)} [\rho(\xi) z_n + r_n(\tau(\xi))] d\xi \\ &= y^2 \rho(y) \int_A^y \rho(\xi) \xi^{-4} \xi^{-3n+2} \Gamma_{3n-2}(\xi) d\xi = y^{1-3n} \Gamma_{3n-1}(y),\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}z_{n+1}(y) &= \int_A^y \frac{1}{f(0, \xi, 0)} [\rho(\xi) w_n + \rho(\xi) z_n + s_n(\tau(\xi))] d\xi \\ &= \int_A^y \rho(\xi) \xi^{-2} \xi^{-3n+1} \Gamma_{3n-1}(\xi) d\xi = y^{-3n} \Gamma_{3n}(y).\end{aligned} \quad (32)$$

Для окончания доказательства теоремы сделаем замену переменной $y = w_0(\tau)$ на первоначальную независимую переменную τ . Вследствие полученного выше соотношения (27)

$$w_0(\tau) = \tau^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-j} P_{j,0}(\ln \tau) \right),$$

где $P_{j,0}(z)$ – это полиномы степени j . Поэтому

$$\ln w_0(\tau) = -\ln \tau + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-j} P_{j,1}(\ln \tau).$$

Из этих равенств и (31), (32) вытекают асимптотические разложения (28), (29).

Теорема 3 доказана.

Таким образом, здесь (как это обычно бывает в бисингулярных задачах) не только коэффициенты рядов (4), (5) имеют растущие особенности при $t \rightarrow 0$, но и коэффициенты рядов (17), (18) имеют растущие особенности при $\tau \rightarrow \infty$.

Следующим отличием данной задачи является несогласованность рядов (4), (5) с рядами (17), (18). Действительно, легко заметить, что, например, при $t = \varepsilon^2$, т.е. при $\tau = \varepsilon^{-1}$, обе пары рядов даже формально не являются асимптотическими и поэтому не могут быть асимптотическими разложениями искомых решений.

Такая же ситуация наблюдалась при исследовании одного уравнения в упомянутой выше книге [2; гл. II, § 3].

Отличие состоит в том, что в настоящей задаче коэффициенты внешнего разложения не определены однозначно – каждый из коэффициентов содержит одну, не определенную пока, постоянную. Такая ситуация не является неожиданной и встречается во многих подобных задачах. Не известные пока коэффициенты могут быть определены из согласования с другим асимптотическим разложением, которое должно быть построено при малых значениях t . Это построение будет проведено в следующих параграфах.

Но особенно интересно, что ни при каких значениях произвольных постоянных C_k ряды (4), (5) не являются правильным асимптотическим разложением решения задачи (1). Правильное асимптотическое разложение решения имеет другой вид, отличный от вида (4), (5). Этот вид также будет получен ниже из условий согласования.

§ 4. Промежуточное разложение

При значениях t , имеющих приблизительно порядок ε^2 , для построения равнономерного асимптотического разложения нужно ввести новые независимые переменные и искомые функции:

$$\eta = t\varepsilon^{-2}, \quad u(\eta, \varepsilon) = U(t, \varepsilon), \quad v(\eta, \varepsilon) = V(t, \varepsilon).$$

После такой замены система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{du}{d\eta} = \varepsilon^{-1} f(\varepsilon^2 \eta, u, v), \\ \frac{dv}{d\eta} = \varepsilon^2 g(\varepsilon^2 \eta, u, v). \end{cases} \quad (33)$$

Так как асимптотики решения в рассматриваемой здесь области должны быть согласованы с построенной выше асимптотикой внутреннего разложения, то вид асимптотических разложений функций $u(\eta, \varepsilon)$ и $v(\eta, \varepsilon)$ определяется построенным внутренним разложением. Если ряды (17), (18) переписать для новой переменной η и сгруппировать члены получившихся рядов по степеням ε и $\ln \varepsilon$, то получатся формальные ряды

$$\tilde{U} = \varepsilon u_1(\eta) + \sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{i=0}^{m-1} u_{m,i}(\eta) (\ln \varepsilon)^i, \quad (34)$$

$$\tilde{V} = \varepsilon^3 (v_{3,0}(\eta) + v_{3,1}(\eta) \ln \varepsilon) + \sum_{m=4}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{i=0}^{m-3} v_{m,i}(\eta) (\ln \varepsilon)^i. \quad (35)$$

Здесь $u_{m,n}(\eta)$ и $v_{m,n}(\eta)$ (функция $u_{1,0}(\eta)$ всюду для удобства обозначается как $u_1(\eta)$) – это формальные ряды следующего вида (при $\eta \rightarrow 0$):

$$v_{3,1} \equiv \text{const}, \quad v_{3,0} = \ln \eta + \varphi(\eta), \quad (36)$$

$$u_{m,n}(\eta) = \eta^{-m} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi_j(\eta) \ln^j(\eta), \quad (37)$$

$$v_{m,n}(\eta) = \eta^{-m+3} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi_j(\eta) \ln^j(\eta), \quad m > 3. \quad (38)$$

Через $\varphi_j(\eta)$ обозначаются формальные ряды $\varphi(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta^{3i}$ при $\eta \rightarrow 0$.

Соотношения между асимптотиками функций $w_k(\tau)$, $z_{k+1}(\tau)$ и формальными рядами $u_{m,n}(\eta)$, $v_{m,n}(\eta)$ можно обычным образом проиллюстрировать таблицами согласования асимптотик.

Предварительно уточним вид коэффициентов в рядах (28), (29) для функций $w_0(\tau)$, $z_0(\tau)$, $w_1(\tau)$ и $z_1(\tau)$. Будем обозначать

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial U^3}(0, 0, 0), & \gamma_k &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial U^k}(0, 0, 0) \quad \text{при } k > 3, \\ \beta &= \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0), & \beta_k &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial U^k} \quad \text{при } k > 1; \end{aligned}$$

так что

$$f(0, \lambda, 0) = -\lambda^2 + \gamma \lambda^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \gamma_k \lambda^k, \quad g(0, \lambda, 0) = \beta \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k \lambda^k, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Непосредственно из уравнений (19)–(22) и из равенства (25) следует, что:

$$w_0(\tau) = \tau^{-1} + \tau^{-2} (h_1 + \gamma \ln(\tau)) + \tau^{-3} P_{2,0}(\ln(\tau)) + O(\tau^{-4} (\ln^4(\tau))),$$

где

$$h_1 = - \int_0^A \left(\frac{1}{f(0, \lambda, 0)} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{\lambda} \right) d\lambda - \frac{1}{A} + \gamma \ln A; \quad (39)$$

$$z_1(\tau) = h_2 + \beta \ln \tau + \tau^{-1}(-\beta\gamma \ln \tau - \beta\gamma - \beta h_1 - \beta_2) + O(\tau^{-2} \ln^2(\tau)),$$

где

$$h_2 = - \int_0^A \left(\frac{g(0, \lambda, 0)}{f(0, \lambda, 0)} + \frac{\beta}{\lambda} \right) d\lambda + \beta \ln A; \quad (40)$$

$$w_1(\tau) = \frac{\tau^2}{4} + \tau P_{1,1}(\ln \tau) + O(\ln^2(\tau)), \quad z_2(\tau) = \frac{1}{12} \beta \tau^3 + O(\tau^2 \ln(\tau)).$$

Таким образом, для функций $u_{m,n}(\eta)$ и $w_k(\tau)$ начало таблицы согласования имеет следующий вид (см. таблицу 1).

ТАБЛИЦА 1. $w_{k,m}(\tau) \hookrightarrow u_{i,l}(\eta)$, $\tau = \eta \varepsilon^2$

	$\varepsilon u_1(\eta)$	$\varepsilon^2 \ln \varepsilon u_{2,1}(\eta)$	$\varepsilon^2 u_{2,0}(\eta)$	$\varepsilon^3 \ln^2 \varepsilon u_{3,2}(\eta)$	...
$w_0(\tau)$	τ^{-1}	$\tau^{-2}(h_1 + \gamma \ln \tau)$		...	...
	$\varepsilon \eta^{-1}$	$-\gamma \varepsilon^2 \ln \varepsilon \eta^{-2}$	$\varepsilon^2 \eta^{-2}(h_1 + \gamma \ln \eta)$	...	...
$\varepsilon^3 w_1(\tau)$	$\varepsilon^3 \frac{1}{4} \tau^2$	$\varepsilon^3 \tau P_{1,1}(\ln \tau)$		...	...
	$\varepsilon \frac{1}{4} \eta^2$	$c_1 \varepsilon^2 \eta \ln \varepsilon$	$\varepsilon^2 \eta P_{1,1}(\ln \eta)$	...	...

Здесь в каждой строке, начинающейся с функции $\varepsilon^{3k} w_k(\tau)$, стоят члены ее асимптотического разложения при $\tau \rightarrow \infty$, а в следующей строке – те же члены, переписанные в переменной η . Тем самым, в столбцах, которые образовались в таблице, стоят члены рядов $u_{m,n}(\eta)$. Многочлены $P_{2,1}$, $P_{1,1}$ и постоянная c_1 так же, как и остальные элементы таблицы, явно выражаются через данные задачи, но здесь нет необходимости приводить эти формулы.

Аналогичный вид имеет и таблица для $z_{k+1}(\tau)$ и $v_{m,n}(\eta)$. Приведем здесь начало этой таблицы (см. таблицу 2).

ТАБЛИЦА 2. $z_{k,m}(\tau) \hookrightarrow v_{i,l}(\eta)$, $\tau = \eta \varepsilon^2$

	$\varepsilon^3 \ln \varepsilon$ $\times v_{3,1}(\eta)$	$\varepsilon^3 v_{3,0}(\eta)$	$\varepsilon^4 \ln \varepsilon$ $\times v_{4,1}(\eta)$	$\varepsilon^4 v_{4,0}(\eta)$	$\varepsilon^5 \ln^2 \varepsilon$ $\times v_{5,2}(\eta)$	...
$\varepsilon^3 z_1(\tau)$	$\varepsilon^3(h_2 + \beta \ln \tau)$		$\varepsilon^3 \tau^{-1}(-\gamma\beta - \beta_2 - \beta h_1 - \beta\gamma \ln \tau)$		...	...
	$-\varepsilon^3 \ln \varepsilon \beta$	$\varepsilon^3(h_2 + \beta \ln \eta)$	$\varepsilon^4 \eta^{-1} \beta \gamma \ln \varepsilon$	$\varepsilon^4 \eta^{-1}(-\gamma\beta - \beta_2 - \beta h_1 - \beta\gamma \ln \eta)$	$c_2 \varepsilon^5 \ln^2 \varepsilon \eta^{-2}$	...
$\varepsilon^6 z_2(\tau)$	$\varepsilon^6 \frac{1}{12} \beta \tau^3$		$\varepsilon^6 \tau^2 P_{1,3}(\ln \tau)$		...	...
	0	$\varepsilon^3 \frac{1}{12} \beta \eta^3$	$\varepsilon^4 \ln \varepsilon c_3 \eta^2$	$\varepsilon^4 \eta^2 P_{1,4}(\ln \eta)$	$c_4 \varepsilon^5 \ln^2 \varepsilon \eta$	...

И в этой таблице все многочлены и постоянные могут быть выражены через данные задачи, но эти явные выражения здесь не приводятся.

Таким образом, построены все формальные ряды (36)–(38). После подстановки этих рядов в уравнения (33) и разложения правых частей уравнений в ряды при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{du_1}{d\eta} - \eta + u_1^2 = 0, \quad (41)$$

$$\frac{dv_{3,0}}{d\eta} - \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0)u_1 = 0, \quad \frac{dv_{3,1}}{d\eta} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{du_{2,0}}{d\eta} + 2u_1u_{2,0} - \frac{\partial f}{\partial V}(0, 0, 0)v_{3,0} - \frac{\partial^2 f}{\partial U \partial t}(0, 0, 0)\eta u_1 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial U^3}(0, 0, 0)u_1^3 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{du_{2,1}}{d\eta} + 2u_1u_{2,1} - \frac{\partial f}{\partial V}(0, 0, 0)v_{3,1} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{dv_{4,0}}{d\eta} - \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0)u_{2,0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial U^2}(0, 0, 0)u_1^2 = 0, \quad \frac{dv_{4,1}}{d\eta} = \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0)u_{2,1}, \quad (45)$$

.....

$$\frac{du_{m,i}}{d\eta} + 2u_1u_{m,i} - G_{m,i}(\eta) = 0, \quad m \geq 1, \quad i \geq 0, \quad (46)$$

$$\frac{dv_{m,i}}{d\eta} - H_{m,i}(\eta) = 0, \quad m \geq 3, \quad i \geq 0, \quad (47)$$

где $G_{m,n}(\eta)$ – линейные комбинации произведений вида $u_{i,j}(\eta)v_{p,q}(\eta)\eta^r$ таких, что $2r + \sum i + \sum p = m + 1$, $\sum j + \sum q = n$, а коэффициенты линейных комбинаций – это различные производные функции f в точке $(0, 0, 0)$.

Аналогичную структуру имеют и правые части уравнений (47): $H_{m,n}(\eta)$ – линейные комбинации произведений вида $u_{i,j}(\eta)v_{p,q}(\eta)\eta^r$ таких, что $2r + \sum i + \sum p = m - 2$, $\sum j + \sum q = n$, а коэффициенты линейных комбинаций – это различные производные функции g в точке $(0, 0, 0)$.

ТЕОРЕМА 4. *Существуют решения уравнений (41)–(47), которые принадлежат $C^\infty(0, \infty)$ и имеют асимптотические разложения (36)–(38) при $\eta \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего следует установить, что формальные ряды (36)–(38) удовлетворяют уравнениям (41)–(47). Для этого рассмотрим частичные суммы

$$A_{3p,\tau}W = \sum_{k=0}^p \varepsilon^{3k} w_k(\tau), \quad A_{3p,\tau}Z = \sum_{k=1}^p \varepsilon^{3k} z_k(\tau)$$

и выясним, насколько точно они удовлетворяют системе (16). Будем всюду ниже считать, что $\tau > 1$, $\eta = \varepsilon\tau < 1$. В выражении

$$\frac{dA_{3p,\tau}W}{d\tau} - f(\varepsilon^3\tau, A_{3p,\tau}W, A_{3p,\tau}Z)$$

разложим функцию f в ряд Тейлора с остаточным членом в точке $(0, w_0(\tau), 0)$. В силу уравнений (19)–(24) коэффициенты при всех степенях ε с показателями, меньшими $3p + 3$, обратятся в нуль. Если учесть оценки функций $w_k(\tau)$ и $z_k(\tau)$, которые вытекают из соотношений (28), (29), то приходим к равенству

$$\frac{dA_{3p,\tau}W}{d\tau} - f(\varepsilon^3\tau, A_{3p,\tau}W, A_{3p,\tau}Z) = O(\varepsilon^{3p+3}\tau^{3p+3}). \quad (48)$$

Такая же оценка справедлива и для второго уравнения:

$$\frac{dA_{3p,\tau}Z}{d\tau} - g(\varepsilon^3\tau, A_{3p,\tau}W, A_{3p,\tau}Z) = O(\varepsilon^{3p+3}\tau^{3p+3}).$$

Далее в выписанных равенствах следует сделать замену независимой переменной $\eta = \varepsilon\tau$ и преобразовать частичные суммы $A_{3p,\tau}W$ и $A_{3p,\tau}Z$.

Каждую функцию $w_k(\tau)$ заменим частичной суммой ее асимптотического ряда при $\tau \rightarrow \infty$ (которая обозначается как $B_{3k-s}w_k(\tau)$ плюс остаточный член), сохраняя лишь члены, в которых показатель степени τ не меньше чем $3k-s$. Таким образом, из вида ряда (28) следует, что $w_k(\tau) = B_{3k-s}w_k(\tau) + O(\tau^{3k-s-1})$.

Следовательно,

$$A_{3p,\tau}W = \sum_{k=0}^p \varepsilon^{3k} B_{3k-s}w_k(\tau) + O(\tau^{-s-1}). \quad (49)$$

Так как в каждой сумме $B_{3k-s}w_k(\tau)$ показатель степени τ не меньше чем $3k-s$, то после замены $\tau = \eta\varepsilon^{-1}$ показатель степени ε будет не больше чем s и

$$\sum_{k=0}^p \varepsilon^{3k} B_{3k-s}w_k(\tau) = \sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i \tilde{B}_{3p-j}u_{j,i}(\eta),$$

где $u_{j,i}(\eta)$ – это ряды (37), а оператор $\tilde{B}_l u$ (аналогично оператору B_{3k-s}) означает, что из бесконечного ряда функции $u(\eta)$ остаются лишь те степени η , чьи показатели не превосходят l .

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \varepsilon^{3k} B_{3k-s}w_k(\tau) &= \sum_{k=0}^p \varepsilon^{3k} \tau^{3k-1} \sum_{j=0}^{s-1} \tau^{-j} P_j(\ln \tau) \\ &= \sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i \sum_{k=0}^p \eta^{3k-j-1} P_{j-i}(\ln \eta) = \sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i \tilde{B}_{3p-j}u_{j,i}(\eta). \end{aligned}$$

Тем самым, по построению выполнено основное условие согласования

$$A_{s,\eta}A_{3p,\tau}W = A_{3p,\tau}A_{s,\eta}\tilde{U}. \quad (50)$$

Точно такие же преобразования и равенства справедливы и для функций $v_{j,i}(\eta)$:

$$A_{n,\eta}A_{3p,\tau}Z = A_{3p,\tau}A_{s,\eta}\tilde{V}. \quad (51)$$

Но пока $u_{j,i}(\eta)$, $v_{j,i}(\eta)$ – это лишь формальные ряды.

Оценка (49) означает, что $A_{3p,\tau}W = A_{s,\eta}A_{3p,\tau}W + O(\tau^{-s-1})$. Отсюда и из оценки (48) следует, что

$$\frac{dA_{s,\eta}A_{3p,\tau}W}{d\tau} - f(\varepsilon^3\tau, A_{s,\eta}A_{3p,\tau}W, A_{s,\eta}A_{3p,\tau}Z) = O(\varepsilon^{3p+3}\tau^{3p+3} + \tau^{-s-1}), \quad (52)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} &\frac{d \sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i B_{3p-j}u_{j,i}(\eta)}{d\eta} \\ &- \varepsilon^{-1} f \left(\varepsilon^2\eta, \sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i B_{3p-j}u_{j,i}(\eta), \sum_{j=3}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} (\ln \varepsilon)^i B_{3p-j}v_{j,i}(\eta) \right) \\ &= O(\eta^{3p+3} + \varepsilon^{s+1}\eta^{-s-1}). \end{aligned}$$

В левой части выписанного выше равенства разложим функцию f в ряд Тейлора с остаточным членом в точке $(0, 0, 0)$, сохраняя лишь члены, у которых показатели степени ε не превосходят s . В результате получим соотношение

$$\sum_{j=1}^s \varepsilon^j \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{G}_{j,i,p}(\eta) (\ln \varepsilon)^i = O(\eta^{3p+3} + \varepsilon^{s+1} \eta^{-s-1}),$$

где $\mathbb{G}_{j,i,p}(\eta)$ – это левые части уравнений (41), (43), (44), (46), только вместо решений $u_{j,i}(\eta)$, $v_{j,i}(\eta)$ теперь стоят частичные суммы их рядов, фигурирующие в равенствах (34), (35).

Аналогичные соотношения справедливы и для уравнений (42), (45)–(47). В силу произвольности чисел s и p , а также из оценок коэффициентов рядов (37), (38) отсюда следует, что $\mathbb{G}_{j,i}(\eta) = O(\eta^{3p-2j+3})$. (Проверку такой оценки можно получить, используя независимость малых величин η и ε . Для этого можно, например, положить $\varepsilon = \eta^\beta$, где показатель β выбирается подходящим образом, и рассмотреть коэффициенты при разных степенях η . Далее, учитывая, что справедлива априорная оценка $\mathbb{G}_{j,i}(\eta) = O(\eta^{-j-1})$, можно получить необходимые оценки последовательно для $\mathbb{G}_{1,0,p}(\eta)$, $\mathbb{G}_{2,1,p}(\eta)$, $\mathbb{G}_{2,0,p}(\eta)$ и т.д.) Такие же оценки справедливы и для членов ряда (35). Смысл полученных оценок состоит в том, что формальные ряды (37), (38) являются формальными асимптотическими решениями соответствующих уравнений (41)–(47).

Далее осталось доказать существование истинных решений уравнений (41)–(47), имеющих рассмотренные выше асимптотики при $\eta \rightarrow 0$.

Искомое решение уравнения (41)

$$u_1(\eta) = \frac{\Lambda'(\eta)}{\Lambda(\eta)},$$

где $\Lambda(\eta)$ – решение уравнения Эйри, равное нулю при $\eta = 0$. Такая функция $\Lambda(\eta)$ определяется единственным образом с точностью до умножения на константу, поэтому функция $u_1(\eta)$ определена равенством (41) единственным образом. Функция $u_1(\eta)$ всюду положительна при $\eta > 0$ и ведет себя, как η^{-1} при $\eta \rightarrow 0$. Будем считать, что $\Lambda'(0) = 1$. Тогда

$$\Lambda(\eta) = h_0 \eta^{-1/4} \Lambda(\eta) = h_0 \eta^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) \left(1 + \frac{5}{48} \eta^{-3/2} + O(\eta^{-3})\right), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

где $h_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3} \Gamma(2/3)}$ (см. [3]).

Решения уравнений (42) получаются однократным интегрированием, так что $v_{3,1} \equiv \text{const}$, $v_{3,0} = \ln \eta + O(1)$ при $\eta \rightarrow 0$, $v_{3,0} = \eta^{3/2} + O(1)$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Решения уравнений (46) имеют следующий вид:

$$u_{m,n}(\eta) = \Lambda(\eta)^{-2} \left(\int_1^\eta \Lambda^2(\eta_1) G_{m,n}(\eta_1) d\eta_1 + c_{m,n} \right), \quad (53)$$

где $c_{m,n}$ – постоянные. Функции $v_{m,n}(\eta)$ получаются из уравнений (47) простым интегрированием. Из этих формул нетрудно по индукции заключить, что решения $u_{m,n}(\eta)$ и $v_{m,n}(\eta)$ имеют при $\eta \rightarrow 0$ асимптотики того же вида, что и асимптотики, выписанные выше в формулах (36)–(38). Более того, все коэффициенты этого разложения, кроме коэффициента при η^{-2} , однозначно определяются исходя из соответствующего дифференциального уравнения. Так что

если этот коэффициент в асимптотике каждого решения выбрать совпадающим с полученным выше при построении формальных рядов (36)–(38), то совпадут и все остальные коэффициенты асимптотики решения. Тем самым, произвольные постоянные $c_{m,n}$, появляющиеся при интегрировании в формулах (53) и в процессе интегрирования для получения $v_{m,n}(\eta)$, однозначно определяются из условия согласования промежуточного разложения (34), (35) с внутренним разложением (17), (18).

Отсюда вытекает, что полученные истинные решения уравнений (41)–(47) имеют асимптотические разложения (36)–(38) при $\eta \rightarrow 0$ и для них выполнено основное условие согласования (50), (51) внутреннего разложения с промежуточным.

Теорема 4 доказана.

Решения уравнений (42) получаются однократным интегрированием, так что $v_{3,1} \equiv \text{const}$, $v_{3,0} = \ln \eta + O(1)$ при $\eta \rightarrow 0$, $v_{3,0} = \eta^{3/2} + O(1)$ при $\eta \rightarrow \infty$. Решения уравнений (46) имеют следующий вид:

$$u_1(\eta) = \eta^{-1}\varphi(\eta), \quad v_{3,0}(\eta) = \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0) \ln \eta + \varphi(\eta),$$

где через $\varphi(\eta)$, как и выше, обозначаются функции из $C^\infty(0, \infty)$, которые при $\eta \rightarrow 0$ имеют асимптотические разложения вида $\varphi(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \eta^j$.

Формула (53) и формулы интегрирования для решений $v_{m,n}(\eta)$ дают возможность исследовать асимптотику решений $u_{n,m}(\eta)$ и $v_{m,n}(\eta)$ и при $\eta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u_{m,n}(\eta) &= \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-1} \eta^{-k/2} \ln^k(\eta) \varphi(\eta^{-1/2}), \\ v_{m,n}(\eta) &= \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-3} \eta^{-k/2} \ln^k(\eta) \varphi(\eta^{-1/2}) + \text{const}(\ln \eta)^{m-n-2}. \end{aligned} \quad (54)$$

После перехода в рядах (34), (35) с использованием (54) от переменной η при $\eta \rightarrow \infty$ к переменной t при $t \rightarrow 0$ получим правильные формулы для внешнего разложения

$$U(t, \varepsilon) = U_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{q=0}^i U_{i,q}(t) \ln^q \varepsilon, \quad (55)$$

$$V(t, \varepsilon) = V_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{q=0}^i V_{i,q}(t) \ln^q \varepsilon, \quad (56)$$

где $U_{i,q}(t)$ и $V_{i,q}(t)$ – формальные ряды следующих видов:

$$U_{i,q} = t^{(1-i)/2} \sum_{l=0}^{i-q} t^l \varphi(t^{-1/2}) (\ln t)^l, \quad (57)$$

$$V_{i,q} = t^{(3-i)/2} \sum_{l=0}^{i-q} t^l \varphi(t^{-1/2}) (\ln t)^l. \quad (58)$$

ТАБЛИЦА 3. $u_{k,m}(\eta) \hookrightarrow U_{i,l}(t)$, $t = \eta\varepsilon^2$

	$\varepsilon U_0(t)$	$\varepsilon^3 \ln \varepsilon U_{3,1}(t)$	$\varepsilon^3 U_{3,0}(t)$	...
$\varepsilon u_1(\eta)$	$\varepsilon \eta^{1/2}$	$-\varepsilon \frac{1}{4} \eta^{-1}$		...
	$\sqrt{t}$	0	$-\frac{1}{4} \varepsilon^3 t^{-1}$	...
$\varepsilon^2 \ln \varepsilon u_{2,1}(\eta)$	0	$-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \frac{\partial f}{\partial V} \beta \eta^{-1/2}$		...
	0	$-\frac{1}{2} \varepsilon^3 \ln \varepsilon \frac{\partial f}{\partial V} \beta t^{-1/2}$	0	...
$\varepsilon^2 u_{2,0}(\eta)$	$\varepsilon^2 \frac{1}{2} c_5 \eta$	$\varepsilon^2 P_{1,5}(\ln \eta) \eta^{-1/2}$		...
	$\varepsilon^2 c_5 t$	$\frac{1}{4} \varepsilon^3 \ln \varepsilon \frac{\partial f}{\partial V} \beta t^{-1/2}$	$\varepsilon^3 P_{1,6}(\ln t) t^{-1/2}$	...

ТАБЛИЦА 4. $v_{k,m}(\eta) \hookrightarrow V_{i,l}(t)$, $t = \eta\varepsilon^2$

	$V_0(t)$	$\varepsilon^3 \ln \varepsilon V_{3,1}(t)$	$\varepsilon^3 V_{3,0}(t)$	...
$\varepsilon^3 v_{3,0}(\eta)$	$\frac{2}{3} \varepsilon^3 \beta \eta^{3/2}$	$\varepsilon^3 (-\frac{1}{4} \beta \ln \eta + \beta \ln h_0 + h_2)$		...
	$\frac{2}{3} \beta t^{3/2}$	$\varepsilon^3 \ln \varepsilon \frac{1}{2} \beta$	$\varepsilon^3 (-\frac{1}{4} \beta \ln t + \beta \ln h_0 + h_2)$	...
$\varepsilon^3 \ln \varepsilon v_{3,1}(\eta)$		$-\varepsilon^3 \beta \ln \varepsilon$		...
		$-\varepsilon^3 \beta \ln \varepsilon$		...
$\varepsilon^4 v_{4,0}(\eta)$	$\varepsilon^4 c_7 \eta^2$	$\varepsilon^4 P_{1,7}(\ln \eta) \eta^{1/2}$		...
	$c_7 t^2$	$\varepsilon^3 \ln \varepsilon \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial f}{\partial V} t^{1/2}$	$\varepsilon^3 P_{1,7}(\ln t) t^{1/2}$	...
$\varepsilon^4 \ln \varepsilon v_{4,1}(\eta)$	0	$-\varepsilon^4 \ln \varepsilon \beta^2 \frac{\partial f}{\partial V} \eta^{1/2}$		...
		$-\varepsilon^3 \ln \varepsilon \beta^2 \frac{\partial f}{\partial V} t^{1/2}$		...

Явный вид рядов (57) и (58) можно получить, используя таблицы 3 и 4 согласования рядов $u_{k,i}(\eta)$ с рядами (55) и рядов $v_{k,i}(\eta)$ с рядами (56) так же, как это было проиллюстрировано выше в таблице 1 и таблице 2.

Подставляя ряды (55) и (56) в уравнения системы (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем следующую рекуррентную систему:

$$\begin{aligned}
 0 &= f(t, U_0(t), V_0(t)), \\
 \frac{dV_0}{dt} &= g(t, U_0(t), V_0(t)), \\
 \frac{dU_{k-3,l}}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))U_{k,l} + \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))V_k + F_{k,l}^U(t), \\
 \frac{dV_{k,l}}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial U}(P_0(t))U_{k,l} + \frac{\partial g}{\partial V}(P_0(t))V_{k,l} + F_{k,l}^V(t),
 \end{aligned}$$

где $k \geq 0$ и $0 \leq l \leq k$; функции $F_{k,l}^U(t)$ и $F_{k,l}^V(t)$ зависят от U_{i_1,j_1} и V_{i_2,j_2} с индексами i_1 и i_2 , меньшими чем k , а точка $P_0(t)$ – это точка $(t, U_0(t), V_0(t))$;

функции $U_{i,j}$ при $i \geq -3$ и $j \geq i + 1$ для единообразия записи полагаются тождественно равными нулю.

Справедливость основных тождеств согласования промежуточного и внешнего разложений

$$\begin{aligned} A_{M,t}A_{N,\eta}u(\eta, \varepsilon) &= A_{N,\eta}A_{M,t}U(t, \varepsilon), \\ A_{M,t}A_{N,\eta}v(\eta, \varepsilon) &= A_{N,\eta}A_{M,t}V(t, \varepsilon) \end{aligned}$$

проверяется так же, как и при согласовании внутреннего и промежуточного разложения.

Рассмотрим составное асимптотическое разложение решения $u(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1)

$$\begin{aligned} X_N(t, \varepsilon) &= A_{N,t}U(t, \varepsilon) + A_{N,\tau}W(\tau, \varepsilon) + A_{N,\eta}\tilde{U}(\eta, \varepsilon) \\ &\quad - A_{N,t}A_{N,\eta}\tilde{U}(\eta, \varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}W(\tau, \varepsilon), \\ Y_N(t, \varepsilon) &= A_{N,t}V(t, \varepsilon) + A_{N,\tau}Z(\tau, \varepsilon) + A_{N,\eta}\tilde{V}(\eta, \varepsilon) \\ &\quad - A_{N,t}A_{N,\eta}\tilde{V}(\eta, \varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}Z(\tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Согласно построению рядов $U(t, \varepsilon)$, $W(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{U}(\eta, \varepsilon)$, $V(t, \varepsilon)$, $Z(\tau, \varepsilon)$ и $\tilde{V}(\eta, \varepsilon)$ функции $X_N(t, \varepsilon)$ и $Y_N(t, \varepsilon)$ приближенно удовлетворяют уравнениям и начальным условиям (1).

Пусть рассмотренные выше функции $U_0(t)$ и $V_0(t)$ определены на отрезке $[0, t_0]$. Обычным способом, как в [2], проверяется, что существует $\gamma > 0$ такое, что всюду на отрезке $[0, t_0]$ справедлива оценка

$$|X_N(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| + |Y_N(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{\gamma N}).$$

В заключение приведем некоторые явные выражения первых коэффициентов полученных асимптотических разложений.

Коэффициенты внутреннего разложения при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= \tau^{-1} + \tau^{-2}(h_1 + \gamma \ln \tau) + O(\tau^{-3} \ln^2 \tau), \\ z_1(\tau) &= h_2 + \beta \ln \tau + \tau^{-1}(-\beta\gamma - \beta h_1 - \beta_2) - \beta\gamma\tau^{-1} \ln \tau + O(\tau^{-2} \ln^2 \tau), \\ w_1(\tau) &= \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau |\ln \tau|), \\ z_2(\tau) &= \frac{1}{12}\beta\tau^3 + O(\tau^2 |\ln \tau|). \end{aligned}$$

Коэффициенты промежуточного разложения при $\eta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u_1(\eta) &= \frac{\Lambda'(\eta)}{\Lambda(\eta)} = \eta^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4}\eta^{-3/2} - \frac{5}{32}\eta^{-3} - \frac{15}{64}\eta^{-9/2} + O(\eta^{-6}) \right), \\ v_{3,1}(\eta) &= -\beta, \\ v_{3,0}(\eta) &= h_2 + \beta \ln \Lambda(\eta) = h_2 + \beta \ln h_0 - \frac{1}{4}\beta \ln \eta + \frac{2}{3}\beta\eta^{3/2} + O(\eta^{-3/2}), \\ u_{2,1}(\eta) &= \Lambda(\eta)^{-2} \left(-\beta \frac{\partial f}{\partial V}(0, 0, 0) \int_1^\eta \Lambda^2(\eta_1) d\eta_1 - \gamma \right) \\ &= -\frac{1}{2}\beta \frac{\partial f}{\partial V}(0, 0, 0) \eta^{-1/2} + O(\eta^{-2}), \end{aligned}$$

$$u_{2,0}(\eta) = \left(\frac{1}{3} \beta \frac{\partial f}{\partial V}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial U \partial t}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} \gamma \right) \eta + O(\eta^{-1/2} \ln \eta),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial U^3}(0, 0, 0), \quad \beta = \frac{\partial g}{\partial U}(0, 0, 0), \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial U^2}(0, 0, 0),$$

а постоянные h_1 и h_2 определены формулами (39) и (40).

Кроме того, важную роль играет постоянная $h_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3} \Gamma(2/3)}$.

Из согласования внешнего разложения с промежуточным, как показано выше, видно, что всюду вне окрестности начальной точки правильное асимптотическое разложение решения имеет вид (55), (56).

Главные члены асимптотик $U_0(t)$ и $V_0(t)$ являются, конечно, решениями выписанной выше системы (6), (7) с начальным условием $V_0(0) = 0$.

Напомним введенные выше обозначения: $P_0(t)$ – это точка $(t, U_0(t), V_0(t))$,

$$q(t) = \frac{\partial g}{\partial V}(P_0(t)) - \frac{\frac{\partial g}{\partial U}(P_0(t)) \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{3,1}(t) &= -\beta Y(t), \quad \text{где } Y(t) = \exp\left(\int_0^t q(\xi) d\xi\right), \\ U_{3,1}(t) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))} V_{3,1}(t), \\ V_{3,0}(t) &= Y(t) \left(\int_0^t \left[\frac{\frac{\partial g}{\partial U}(P_0(\xi)) U'_0(\xi)}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(\xi)) Y(\xi)} + \frac{\beta}{4\xi} \right] d\xi - \frac{1}{4} \beta \ln t + h_2 + \beta \ln h_0 \right), \\ U_{3,0}(t) &= \frac{U'_0(t)}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))} - \frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))} V_{3,0}(t). \end{aligned}$$

Последние формулы внешнего разложения можно проиллюстрировать для конкретных систем.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = t - \left(U - \frac{1}{2} U^2 \right)^2 + V, \\ \frac{dV}{dt} = U - \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{4} (t + V), \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \quad A > 0. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = 1$, $\beta = 1$,

$$\begin{aligned} h_1 &= - \int_0^A \left(\frac{1}{f(0, \lambda, 0)} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{\lambda} \right) d\lambda - \frac{1}{A} + \gamma \ln A \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2-A} - \ln \left(1 - \frac{1}{2} A \right) - \frac{1}{A} + \ln A = \frac{A}{2(2-A)} - \frac{1}{A} - \ln \left(A^{-1} - \frac{1}{2} \right), \\ h_2 &= - \int_0^A \left(\frac{g(0, \lambda, 0)}{f(0, \lambda, 0)} + \frac{\beta}{\lambda} \right) d\lambda + \beta \ln A = - \ln \left(1 - \frac{1}{2} A \right) + \ln A. \end{aligned}$$

Функция $V_0(t)$ является решением уравнения

$$V_0' = \sqrt{t + V_0(t)} + \frac{1}{4}(t + V_0(t))$$

с начальным условием $V_0(0) = 0$. Это монотонно растущая определенная для всех положительных t аналитическая функция, которая следующим образом выражается из простого уравнения:

$$\ln(2 + \sqrt{t + V_0(t)}) + \frac{2}{2 + \sqrt{t + V_0(t)}} = \frac{1}{8}t + \ln 2 + 1.$$

Функция $U_0(t) = 1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{t + V_0}}$ определена для всех положительных $t < t_0 = 8(\ln(5/4) - 1/5)$. Функция $U_0(t)$ является, таким образом, решением уравнения

$$\ln(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)) + \frac{U_0^2(t) - 2U_0(t)}{4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)} = \frac{1}{8}t + 2\ln 2. \quad (59)$$

Равномерная асимптотика решения задачи (1) строится на отрезке $[0, t_1]$ для любого t_1 , где $t_1 < t_0$. Коэффициенты $U_{3,1}(t)$ и $V_{3,1}(t)$ являются решением системы

$$\begin{cases} V_{3,1}(t) - 2U_0(t)U_{3,1}(t) + 3U_0^2(t)U_{3,1}(t) - U_0^3(t)U_{3,1}(t) = 0, \\ \frac{dV_{3,1}}{dt} = \frac{1}{4}V_{3,1}(t) + U_{3,1}(t) - U_0(t)U_{3,1}(t). \end{cases}$$

Следовательно,

$$U_{3,1}(t) = \frac{V_{3,1}(t)}{2U_0(t) - 3U_0^2(t) + U_0^3(t)}, \quad \frac{dV_{3,1}}{dt} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{U_0(t)(2 - U_0(t))} \right) V_{3,1}(t).$$

Поэтому

$$V_{3,1}(t) = C_{3,1} \exp h(t), \quad \text{где } h(t) = \frac{1}{4}t + \int_0^t \frac{1}{U_0(\xi)(2 - U_0(\xi))} d\xi.$$

Из уравнения (59) вытекает, что

$$\begin{aligned} U_0'(t) &= \frac{1}{16} \frac{(4 + 2U_0 - U_0^2)^2}{U_0(1 - U_0)(2 - U_0)}, \\ h(t) &= \frac{1}{4}t + 16 \int_0^{U_0(t)} \frac{y(1-y)(2-y)}{y(2-y)(4+2y-y^2)^2} dy = \frac{1}{4}t + 8 \int_0^{U_0(t)} \frac{d(2y-y^2)}{(4+2y-y^2)^2} \\ &= 2\ln(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)) + \frac{8}{4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)} - 2 - 2\ln 4 \\ &\quad - \frac{8}{4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)} + 2 = 2\ln(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)) - 4\ln 2 \end{aligned}$$

и поэтому $V_{3,1}(t) = C_{3,1}(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2/16$.

Из условий согласования (см. таблицу 4) вытекает, что $C_{3,1} = -\beta/2 = -1/2$.

Таким образом, окончательные выражения коэффициентов $U_{3,1}(t)$ и $V_{3,1}(t)$ следующие:

$$V_{3,1}(t) = \frac{1}{32} (4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2, \quad U_{3,1}(t) = \frac{(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2}{32(2U_0(t) - 3U_0^2(t) + U_0^3(t))}.$$

Коэффициенты $U_{3,0}(t)$ и $V_{3,0}(t)$ являются решением системы

$$\begin{cases} \frac{dU_0}{dt} = V_{3,0} - 2U_0U_{3,0} + 3U_0^2U_{3,0} - U_0^3U_{3,0}, \\ \frac{dV_{3,0}}{dt} = \frac{1}{4}V_{3,0} + U_3 - U_0U_{3,0}. \end{cases}$$

Отсюда вытекают равенства

$$U_{3,0} = \frac{V_{3,0} - U_0'}{2U_0 - 3U_0^2 + U_0^3},$$

$$\frac{dV_{3,0}}{dt} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{U_0(t)(2 - U_0(t))} \right) V_{3,0} - \frac{U_0'(t)}{U_0(t)(2 - U_0(t))}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_{3,0}(t) &= -e^{h(t)} \int_{t_0}^t e^{-h(\xi)} \frac{U_0'(\xi)}{U_0(\xi)(2 - U_0(\xi))} d\xi + \tilde{C}_3 e^{h(t)} \\ &= -(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2 \int_{y_0}^{U_0(t)} \frac{1}{y(2-y)(4+2y-y^2)^2} dy \\ &\quad + \tilde{\tilde{C}}_3 (4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2 \\ &= -(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2 \left[\frac{1}{32} \ln \frac{U_0(t)}{2 - U_0(t)} + \frac{7}{160\sqrt{5}} \ln \frac{1 + \sqrt{5} - U_0(t)}{\sqrt{5} - 1 + U_0(t)} \right] \\ &\quad - \frac{1}{40} (1 - U_0(t))(4 + 2U_0(t) - U_0^2(t)) + C_3 (4 + 2U_0(t) - U_0^2(t))^2. \end{aligned}$$

Коэффициент C_3 можно определить опять-таки из условий согласования (в соответствии с таблицей 4):

$$16C_3 = h_2 + \beta \ln h_0 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7}{10\sqrt{5}} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} + \frac{1}{10}.$$

Трудно представить, как можно получить значение постоянной C_3 , используя только естественное внешнее разложение (4), (5) и не исследуя асимптотики других масштабов и их согласование. Также не ясно, как исходя только из вида уравнений заключить о наличии членов $\varepsilon \ln \varepsilon U_{3,1}(t)$ и $\varepsilon \ln \varepsilon V_{3,1}(t)$. А между тем это главные по величине поправочные члены к очевидному предельному решению.

Аналогичная ситуация наблюдается и при исследовании трех других примеров, которые изложим более кратко.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = t - \left(U - \frac{1}{2}U^2\right)^2 + V, \\ \frac{dV}{dt} = t + \left(U - \frac{1}{2}U^2\right)^2 + V, \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \quad 0 < A < 1, \quad 0 \leq t \leq t_0 < \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma &= 1, \quad \beta = 0, \quad h_1 = \frac{A}{2(2-A)} - \frac{1}{A} - \ln\left(A^{-1} - \frac{1}{2}\right), \quad h_2 = A, \\ V_0(t) &= \frac{1}{2}(e^{2t} - 1 - 2t), \quad U_0(t) = 1 - g(t), \quad \text{где } g(t) = \sqrt{1 - \sqrt{2(e^{2t} - 1)}}, \\ V_{3,1}(t) &= U_{3,1}(t) \equiv 0, \quad \frac{dV_{3,0}}{dt} = 2V_{3,0} - U'_0(t), \quad g'(t) = \frac{e^{2t}}{g(t)(g^2(t) - 1)}, \\ V_{3,0}(t) &= e^{2t} \left\{ \int_0^t e^{-2\xi} \frac{dg}{d\xi}(\xi) d\xi + \tilde{C}_3 \right\} = e^{2t} \left\{ \int_{g_1}^g \frac{2 d\xi}{\xi^4 - 2\xi^2 + 3} + \hat{C}_3 \right\} \\ &= e^{2t} \left[\frac{\sqrt{6}}{12\gamma} \ln \frac{g^2(t) + \gamma\sqrt{2}g(t) + \sqrt{3}}{g^2(t) - \gamma\sqrt{2}g(t) + \sqrt{3}} - \frac{\gamma\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{2g(t)}{\gamma(g^2(t) - \sqrt{3})} + C_3 \right], \\ &\quad \text{где } \gamma = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \\ C_3 &= A + \frac{1}{2\gamma\sqrt{6}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{2}}{\gamma - \sqrt{2}} - \frac{\gamma \operatorname{arctg} \gamma}{2\sqrt{3}}, \\ U_{3,0}(t) &= \frac{V_{3,0}(t)}{g(t)(1 - g^2(t))} + \frac{e^{2t}}{g^2(t)(g^2(t) - 1)^2}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = t - U^2 + V, \\ \frac{dV}{dt} = t + U^2 + V, \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \quad A > 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \quad \beta = 0, \quad h_1 = -\frac{1}{A}, \quad h_2 = A, \\ V_0 &= \frac{1}{2}(e^{2t} - 1 - 2t), \quad U_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{2t} - 1)}, \\ V_{3,1}(t) &= 0, \quad U_{3,1}(t) = 0, \quad V_{3,0}(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2t} - 1} + A\right) e^{2t}, \\ U_{3,0}(t) &= \frac{1}{2} \frac{(-\operatorname{arctg} \sqrt{e^{2t} - 1} + A\sqrt{2})}{\sqrt{e^{2t} - 1}} - \frac{1}{2} \frac{e^{2t}}{e^{2t} - 1}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{dU}{dt} = t - U^2 + U^3 + V - (t + V)^{3/2}, \\ \frac{dV}{dt} = 2U + t + V, \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \quad 0 < A < 1. \end{cases}$$

Здесь формально не применима изложенная выше теория, так как функция $t - U^2 + U^3 + V - (t + V)^{3/2}$ не является гладкой при $t = 0$, $V = 0$. Однако эта функция разлагается по полужелым степеням, и возможно уточнение построений данной статьи. Так что первые члены асимптотических разложений решения получаются таким же способом:

$$\gamma = 1, \quad \beta = 2, \quad h_1 = -\ln(A^{-1} - 1) - A^{-1}, \quad h_2 = -2\ln(A^{-1} - 1).$$

Функция $U_0(t)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} 2\ln(1 + U_0(t)) + \frac{2}{1 + U_0(t)} &= t + 2, \quad V_0(t) = U_0^2(t) - t, \\ V_{3,1}(t) &= C(1 + U_0(t))^2, \quad U_{3,1}(t) = \frac{V_{3,1}(t)}{2U_0(t)}, \\ V_{3,0}(t) &= (1 + U_0(t))^2 \left(\ln U_0(t) + \frac{2}{5(1 + U_0(t))} - \frac{16}{25} \ln(1 + U_0(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{25} \ln(2 - 3U_0(t)) + C \right), \\ U_{3,0}(t) &= \frac{V_{3,0}(t)}{2U_0(t)} - \frac{(1 + U_0(t))^2}{2U_0^2(t)(2 - 3U_0(t))}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая шк., М., 1990.
- [2] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. М. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [3] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.

А. М. Ильин (А. М. Il'in)

Челябинский государственный университет

E-mail: iam@csu.ru

Поступила в редакцию

11.02.2009

Ю. А. Леонычев (Yu. A. Leonychev)

ООО "ИТ Энигма", г. Челябинск

E-mail: yuriy.leonychev@gmail.com

О. Ю. Хачай (O. Yu. Khachay)

Уральский государственный университет

им. А. М. Горького, г. Екатеринбург

E-mail: khachay@yandex.ru