Общероссийский математический портал

Г. Ю. Кокарев, Свойство компактности квазилинейно возмущенного уравнения гармонических отображений, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 105–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:45:59

УДК 517.57

Г. Ю. Кокарев

Свойство компактности квазилинейно возмущенного уравнения гармонических отображений

Для отображений $u: M \rightarrow M'$ замкнутых римановых многообразий рассматривается квазилинейно возмущенное уравнение гармонических отображений

$$\tau(u)(x) = G(x, u(x)) \cdot du(x) + g(x, u(x)), \quad x \in M.$$

В случае неположительно искривленного многообразия M' и малой линейной части возмущения G доказывается, что пространство классических решений фиксированного гомотопического класса является компактным. Доказательство основано на равномерной оценке нормы дифференциала решения возмущенного уравнения в терминах его энергии и C^1 -норм G и g . Ключевой частью этого анализа является неравенство, называемое свойством монотонности.

Библиография: 13 названий.

Введение

В работе [1] были изучены полулинейные и некоторые специальные квазилинейные возмущения уравнения гармонических отображений замкнутого многообразия M в неположительно искривленное замкнутое многообразие M' . В частности, для полулинейных и в случае $\dim M \leq 3$ квазилинейных возмущений было доказано, что множество классических решений фиксированного гомотопического класса является компактным. Это свойство компактности особенно важно для качественной теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений для отображений многообразий (см. обзор [2]). Дело в том, что как правило множество гармонических отображений является вырожденным. Используя подобные возмущения и свойство компактности, можно показать, что в случае общего положения множество решений фиксированного гомотопического класса является конечным и алгебраическое число этих решений является инвариантом многообразия M' .

Настоящая статья посвящена доказательству общей теоремы компактности (анонсированной в [1]) для квазилинейных возмущений гармонических отображений. В силу известности этого утверждения для малых размерностей M (см. [2], [3]) мы рассматриваем только случай $\dim M \geq 3$.

Через M и M' обозначаются C^∞ -гладкие связные компактные многообразия без края с фиксированными C^∞ -гладкими римановыми метриками g и g' . Кроме того, многообразие M предполагается ориентируемым. Для оператора Лапласа–Бельтрами Δ_M используется соглашение о знаке, отличное от принятого в [4]. В центре нормальных римановых координат на M он имеет вид:

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}.$$

Мы также используем эйнштейновское правило суммирования по повторяющимся индексам.

Автор выражает признательность В.М. Бухштаберу, С.Б. Куксину и А. Ширяну за помощь при работе над этой статьей.

§1. Основные обозначения и результаты

Пусть (M, g) и (M', g') – замкнутые римановы многообразия. Римановы метрики на M и M' естественным образом задают метрику в расслоении $J^1(M, M')$ над пространством $M \times M'$. Для отображений $u: M \rightarrow M'$ рассмотрим функционал энергии

$$E(u) = \int_M e(u)(x) d\text{Vol}_g(x),$$

где $e(u)$ обозначает плотность энергии отображения u

$$e(u)(x) = \frac{1}{2} \|du(x)\|^2, \quad x \in M.$$

Через $-\tau(u)$ обозначим оператор Эйлера–Лагранжа для функционала E . В локальных координатах на M и M' он имеет вид:

$$\tau^i(u) = \Delta_M u^i + g^{\alpha\beta} \Gamma_{jk}^{'i} \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta}, \quad (1.1)$$

где $\Gamma_{jk}^{'i}$ обозначают символы Кристофеля связности Леви–Чивита метрики на M' , а Δ_M – оператор Лапласа–Бельтрами на M . Решения уравнения $\tau(u) = 0$ класса C^2 называются *гармоническими отображениями* M в M' , а сам оператор $\tau(u)$ – *оператором гармонических отображений*.

Пусть $u: M \rightarrow M'$ принадлежит некоторому фиксированному гомотопическому классу отображений $[v]$. На таких отображениях u рассмотрим квазилинейное эллиптическое дифференциальное уравнение (см. [3])

$$\tau(u)(x) = G(x, u(x)) \cdot du(x) + g(x, u(x)), \quad x \in M, \quad (1.2)$$

где G – это морфизм векторных расслоений $J^1(M, M')$ и $(\Pi')^*TM'$, $\Pi': M \times M' \rightarrow M'$ – естественная проекция, и g – неавтономное векторное поле на M' . Выберем некоторое целое $s \geq 2$. Ниже мы предполагаем, что $G(x, u)$ и $g(x, u)$ являются C^s -гладкими по $x \in M$ и $u \in M'$. Через $\mathcal{F}_G$ и $\mathcal{F}_g$ обозначим векторные пространства, образованные морфизмами $G(x, u)$ и векторными полями $g(x, u)$ соответственно. В силу свойства эллиптической регулярности любое C^2 -гладкое решение уравнения (1.2) с $G \in \mathcal{F}_G$ и $g \in \mathcal{F}_g$ является C^{s+1} -гладким.

Пусть $\mathcal{U}$ – некоторая область пространства $\mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g$. Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}_{[v]}$, состоящее из троек

$$\mathfrak{M}_{[v]} = \{(u, G, g) : u \text{ – решение (1.2) класса } C^2, u \in [v], \text{ и } G \in \mathcal{F}_G, g \in \mathcal{F}_g\},$$

являющееся подпространством $C^{s+1}(M, M') \times \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g$. Через π обозначается естественная проекция

$$\pi : \mathfrak{M}_{[v]} \rightarrow \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g, \quad (u, G, g) \mapsto (G, g).$$

Напомним, что непрерывное отображение топологических пространств называется *собственным*, если прообраз любого компактного множества компактен. Ниже символом $\|G(x, u)\|$ обозначается норма линейного оператора $G(x, u): \mathcal{L}(T_x M, T_u M') \rightarrow T_u M'$ относительно римановых метрик на M и M' .

Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\dim M \geq 3$ и M' является римановым многообразием неположительной секционной кривизны. Тогда для любого гомотопического класса $[v]$ отображений M в M' существует такая константа $C_{[v]} > 0$, что отображение $\pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$, где

$$\mathcal{U} = \{(G, g) \in \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g : \|G(x, u)\| < C_{[v]} \text{ для любых } x \in M, u \in M'\},$$

является собственным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть M' – замкнутое риманово многообразие отрицательной секционной кривизны. Тогда константа $C_{[v]}$ в теореме 1 может быть выбрана независимо от гомотопического класса $[v]$ (см. далее замечание 4).

В частности, теорема 1 влечет компактность множества решений (1.2) фиксированного гомотопического класса. Для случая уравнения гармонических отображений это следует из результатов [5].

Простые примеры, приведенные в [3], показывают, что свойство собственности проекции π теряется, если опустить одно из следующих предположений: квазилинейность правой части (1.2), малость G или неположительность секционной кривизны M' .

Доказательство теоремы 1 основано на априорной оценке (теорема 2), равномерной относительно C^1 -норм правых частей. Ключевой частью для этого анализа является свойство монотонности (лемма 5). Кроме того, для доказательства ограниченности энергии на решениях (1.2) мы используем оценку энергии и версию неравенства Пуанкаре для отображений многообразий из [2].

Для неавтономного векторного поля g на M' и морфизма G векторных расслоений $J^1(M, M')$ и $(\Pi')^* T M'$ через $\|g\|_{C^0}$ и $\|G\|_{C^0}$ обозначаются следующие нормы:

$$\|g\|_{C^0} = \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} \|g(x, u)\|_{g'}, \quad \|G\|_{C^0} = \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} \|G(x, u)\|.$$

Аналогично, используя связности Леви-Чивита на M и M' , можно определить C^1 -нормы

$$\begin{aligned} \|g\|_{C^1} &= \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} (\|g(x, u)\|_{g'} + \|\nabla g(x, u)\|), \\ \|G\|_{C^1} &= \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} (\|G(x, u)\| + \|\nabla G(x, u)\|), \end{aligned}$$

где $\|\nabla g(x, u)\|$ и $\|\nabla G(x, u)\|$ обозначают естественные нормы линейных операторов

$$\begin{aligned} \nabla g(x, u): T_x M \times T_u M' &\rightarrow T_u M', \\ \nabla G(x, u): T_x M \times T_u M' &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(T_x M, T_u M'), T_u M') \end{aligned}$$

относительно римановых метрик на M и M' .

Выберем положительные C_g и C_G так, что имеют место неравенства

$$\|g\|_{C^1} \leq C_g, \quad \|G\|_{C^1} \leq C_G. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Гармоническое отображение $v: \mathbb{R}^n \rightarrow M'$, $n \geq 3$, называется n -препятствием для риманова многообразия M' , если $\|dv(x)\| \leq \|dv(0)\| \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и существует такая константа $E > 0$, что

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dv(x)\|^2 dx \leq E \quad \forall R > 0,$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = \dim M \geq 3$ и риманово многообразие M' не допускает n -препятствий. Тогда для любого $C_E > 0$ найдется такое $C > 0$, зависящее от констант C_E , C_g , C_G и геометрии многообразий M и M' , что для любого решения и задачи (1.2), (1.3) с энергией $E(u) \leq C_E$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in M} \|du(x)\| \leq C. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формально понятие препятствия имеет смысл также для $n = 2$. В этом случае в силу теоремы об устранении особенностей гармонических отображений [7] условие отсутствия 2-препятствий эквивалентно условию отсутствия нетривиальных гармонических 2-сфер. В случае $\dim M = 2$ оценка (1.4) известна (см., например, доказательство теоремы 1 для случая $\dim M = 2$, приведенное в [3]) и следует из конформной инвариантности энергии [8].

ПРИМЕР. Пусть M' – риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда для любого $n \geq 3$ многообразие M' не допускает n -препятствий.

Действительно, для доказательства этого факта напомним, что для любого гармонического отображения $v: M \rightarrow M'$ (для любых римановых многообразий M и M') в нормальных римановых координатах на M с центром в точке x_0 справедлива формула Бохнера (см. [4; разд. 3])

$$\begin{aligned} \Delta_M e(v)(x_0) &= \|\nabla dv\|^2 + \sum_{\alpha} \langle dv \cdot \text{Ricci}^M e_{\alpha}, dv \cdot e_{\alpha} \rangle \\ &\quad - \sum_{\alpha, \beta} \langle R'(dv \cdot e_{\alpha}, dv \cdot e_{\beta}) dv \cdot e_{\alpha}, dv \cdot e_{\beta} \rangle, \end{aligned}$$

где Ricci^M обозначает тензор Риччи на M , R' – тензор кривизны Римана M' и вектора $e_{\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}|_{x=x_0}$.

Предположим противное. Пусть отображение v является n -препятствием для M' . Тогда так как v – гармоническое отображение евклидова пространства в пространство неположительной секционной кривизны, то из формулы Бохнера следует, что функция $e(v)(x)$ является субгармонической: $\Delta e(v)(x) \geq 0$. В силу неравенства о среднем значении получаем следующую оценку с константой E из определения препятствия

$$e(v)(0) \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} e(v)(x) dx \leq \frac{1}{2\omega_n R^2} E,$$

где ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем $\|dv(0)\| = 0$, что невозможно в силу определения препятствия. Полученное противоречие завершает доказательство.

В заключение этого параграфа отметим несколько следствий теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n = \dim M \geq 3$ и риманово многообразие M' не допускает n -препятствий. Тогда для любой положительной константы C_E семейство отображений

$$\{u: M \rightarrow M' - \text{решение (1.2) класса } C^2 \text{ с } E(u) \leq C_E\}$$

является компактным в C^{s+1} -топологии.

Доказательство заключается в использовании теоремы Арцела–Асколи, которая позволяет локализовать задачу, и в итерированном применении априорной оценки Шаудера (см. доказательство леммы 7).

Полагая правую часть в основном уравнении (1.2) равной нулю, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $n = \dim M \geq 3$ и риманово многообразие M' не допускает n -препятствий. Тогда для любого $C_E > 0$ найдется такое $C = C(C_E, M, M')$, что для любого гармонического отображения u с энергией $E(u) \leq C_E$ имеет место оценка

$$\max_{x \in M} \|du(x)\| \leq C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Задача об априорной оценке $\max_{x \in M} \|du(x)\|$ для более широкого класса стационарных гармонических отображений рассматривалась в [9]. В этой работе получено утверждение, подобное следствию 4, в предположении, что M' не допускает нетривиальных гармонических сфер в размерностях $2, \dots, n-1$, где $n = \dim M \geq 3$. Каково соотношение между этим ограничением на M' и условием отсутствия n -препятствий нам неизвестно.

§ 2. Свойство монотонности

Неравенство монотонности для гармонических (и для более широкого класса стационарных гармонических отображений) хорошо известно (см. [10], [11]). В этом параграфе мы доказываем подобный результат для решений уравнения (1.2). При этом нам будет важно, что полученное неравенство является равномерным относительно C^0 -норм правых частей. Поэтому мы далее будем предполагать, что

$$\|G\|_{C^0} \leq C_G^0, \quad \|g\|_{C^0} \leq C_g^0 \quad (2.1)$$

для некоторых положительных констант C_G^0 и C_g^0 . Ниже мы полагаем $n = \dim M$.

В силу теоремы Нэша без ограничения общности можно считать, что M' является римановым подмногообразием некоторого $\mathbb{R}^N$. Пусть λ_M обозначает радиус инъективности многообразия M . Через $\rho < \lambda_M$ обозначим такое положительное число, что для любой точки $x_0 \in M$ в нормальных римановых координатах с центром x_0 в шаре $B_\rho(x_0)$ риманова метрика g_{ij} удовлетворяет неравенствам

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq K|x|^2, \quad |\partial_k g_{ij}(x)| \leq K|x|, \quad (2.2)$$

где $|x|$ обозначает евклидово расстояние от 0 до x , и, кроме того,

$$\Lambda^{-1}|\xi| \leq |\xi|_{g(x)} \leq \Lambda|\xi| \quad (2.3)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in B_\rho(x_0)$. Здесь $|\xi|_g = (g_{ij}\xi^i\xi^j)^{1/2}$, $|\xi| = (\sum_{i=1}^n (\xi^i)^2)^{1/2}$ и положительные константы K и Λ зависят только от геометрии M . Для отображения $u: M \rightarrow M'$ через $E_r^{x_0}(u)$ обозначается интеграл

$$E_r^{x_0}(u) = \int_{B_r(x_0)} e(u)(x) d\text{Vol}_g(x)$$

по шару радиуса $0 < r \leq \rho$ с центром в точке $x_0 \in M$.

Следуя идеям [6; предложение 2.1], [10], мы доказываем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Существует такое положительное $\bar{r} \leq \rho$ (зависящее только от геометрии M), что для любого решения u уравнения (1.2) с правой частью, удовлетворяющей (2.1), и для любых $0 < r_1 < r_2 \leq \bar{r}$ выполнено неравенство*

$$r_1^{2-n} E_{r_1}^{x_0}(u) \leq C_1 r_2^{2-n} E_{r_2}^{x_0}(u) + C_2, \quad (2.4)$$

где $C_1, C_2 > 0$ зависят только от C_g^0 , C_G^0 и геометрии M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим липшицево векторное поле ξ на M и соответствующее ему однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ_s . Пусть $u_s = u \circ \varphi_s$, тогда $\partial u / \partial s|_{s=0} = du(\xi)$. В силу формулы первой вариации имеем

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(u_s) = - \int_M \langle \tau(u), du(\xi) \rangle d\text{Vol}_g. \quad (2.5)$$

С другой стороны, делая замену переменных, получаем

$$E(u_s) = \frac{1}{2} \int_M \sum_{\ell=1}^N g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_s^\ell}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u_s^\ell}{\partial x^\beta} d\text{Vol}_g = \frac{1}{2} \int_M \sum_{\ell=1}^N g_s^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} d\text{Vol}_{g_s},$$

где $g_s = \varphi_{-s}^* g$ — метрика, перенесенная диффеоморфизмом φ_{-s}^* . Дифференцирование по s предыдущего выражения дает (см. [10])

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(u_s) = -\frac{1}{2} \int_M \|du\|^2 \text{div } \xi d\text{Vol}_g + \int_M \langle du \circ \nabla \xi, du \rangle d\text{Vol}_g. \quad (2.6)$$

Действительно, заметим, что $d\text{Vol}_{g_s} = \varphi_{-s}^* d\text{Vol}_g$. Теперь первое слагаемое в (2.6) следует из соотношения

$$\int_M \|du\|^2 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\varphi_{-s}^* d\text{Vol}_g) = - \int_M \|du\|^2 \text{div } \xi d\text{Vol}_g.$$

Второе слагаемое получается дифференцированием

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle du \circ d\varphi_s, du \circ d\varphi_s \rangle &= 2 \langle du \circ \nabla_{\partial/\partial s}^\Phi|_{s=0} d\varphi_s, du \rangle \\ &= 2 \left\langle du \circ \nabla \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial s} \right) \right|_{s=0}, du \rangle = 2 \langle du \circ \nabla \xi, du \rangle, \end{aligned}$$

где ∇^Φ обозначает связность в расслоении операторов, индуцированную отображением $\Phi(\cdot, s) = \varphi_s$.

Для $0 < t' < t \leq \rho$ рассмотрим векторное поле $\xi = \eta(r)r\partial/\partial r = \eta(|x|)x^\alpha\partial/\partial x^\alpha$, где

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & r \leq t'; \\ \frac{t-r}{t-t'}, & t' < r < t; \\ 0, & t \leq r. \end{cases}$$

Ниже через $O(r^l)$ мы обозначаем величины такие, что $|O(r^l)| \leq Ar^l$, где A – положительная константа, зависящая только от геометрии M . Ковариантно дифференцируя поле ξ , получаем

$$\xi_\alpha^\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\eta(|x|)x^\gamma) + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \eta(|x|)x^\beta = \eta(|x|)\delta_\alpha^\gamma + \eta'(|x|)\frac{x_\alpha x^\gamma}{|x|} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \eta(|x|)x^\beta.$$

Поэтому в силу (2.2)

$$\operatorname{div} \xi = \xi_\alpha^\alpha = n\eta(r) + r\eta'(r) + O(r^2), \quad (2.7)$$

где $r = |x|$. Вычислим второе слагаемое в формуле (2.6):

$$\begin{aligned} \langle du \circ \nabla \xi, du \rangle &= \sum_{\ell=1}^N g^{\alpha\beta} \xi_\alpha^\gamma \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\gamma} = \eta(r) \sum_{\ell=1}^N g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} \\ &\quad + \frac{\eta'(r)}{r} \sum_{\ell=1}^N g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} x_\alpha \right) \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\gamma} x^\gamma \right) + \eta(r) \sum_{\ell=1}^N g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma x^\delta \\ &= \eta(r) \|du\|^2 + \text{I} + \text{II}. \end{aligned}$$

В силу (2.2) и (2.3) имеем $|\text{II}| \leq B \|du\|^2 |x|^2$ с константой $B > 0$, зависящей только от M , т.е. $\text{II} = \|du\|^2 O(r^2)$. Слагаемое I может быть представлено следующим в виде:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{\eta'(r)}{r} \sum_{\ell=1}^N \delta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} x_\alpha \right) \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\gamma} x^\gamma \right) + \frac{\eta'(r)}{r} \sum_{\ell=1}^N (g^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} x_\alpha \right) \left(\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\gamma} x^\gamma \right) \\ &= \eta'(r) r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \|du\|^2 O(r^3), \end{aligned}$$

где $\partial/\partial r = r^{-1}x^\alpha\partial/\partial x^\alpha$. Окончательно имеем

$$\langle du \circ \nabla \xi, du \rangle = \|du\|^2 (\eta(r) + O(r^2)) + \eta'(r) \left(r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \|du\|^2 O(r^3) \right). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в соотношение (2.6) и учитывая формулу первой вариации (2.5), получаем

$$\begin{aligned} -2 \int_{B_t} \langle \tau(u), du(\xi) \rangle d\operatorname{Vol}_g &= (2-n) \int_{B_t} \|du\|^2 (\eta(r) + O(r^2)) d\operatorname{Vol}_g \\ &\quad + \frac{1}{t-t'} \int_{B_t/B_{t'}} \left(\|du\|^2 (r + O(r^3)) - 2r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) d\operatorname{Vol}_g. \end{aligned}$$

Здесь $B_t = B_t(x_0)$ и $B_{t'} = B_{t'}(x_0)$ обозначают шары с центром в точке x_0 радиусов t и t' соответственно. Устремляя $t' \rightarrow t$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} -2 \int_{B_t} \left\langle \tau(u), du \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\rangle d\text{Vol}_g &= (2-n)(1+O(t^2)) \int_{B_t} \|du\|^2 d\text{Vol}_g \\ &+ (t+O(t^3)) \int_{\partial B_t} \|du\|^2 dS - 2t \int_{\partial B_t} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 dS. \end{aligned}$$

Обозначим интеграл в левой части через $\mathcal{I}$. Пренебрегая последним слагаемым в правой части и предполагая, что $t \in (0, \bar{r})$ для достаточно маленького $\bar{r} \leq \rho$, имеем

$$-2(1+O(t^2))|\mathcal{I}| \leq t \frac{d}{dt} E_t^{x_0}(u) - (n-2+O(t^2))E_t^{x_0}(u), \quad (2.9)$$

где $\frac{d}{dt} E_t^{x_0}(u) = \int_{\partial B_t} \|du\|^2 dS$. Так как u является решением (1.2) с правой частью, удовлетворяющей соотношениям (2.1), то имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}| &\leq t \int_{B_t} \|\tau(u)\| \|du\| d\text{Vol}_g \\ &\leq 2tC_G^0 E_t^{x_0}(u) + t \int_{B_t} \|\mathbf{g}\| \|du\| d\text{Vol}_g \\ &\leq 2tC_G^0 E_t^{x_0}(u) + \frac{t}{2} \int_{B_t} (\|\mathbf{g}\|^2 + \|du\|^2) d\text{Vol}_g \\ &\leq 2tC_G^0 E_t^{x_0}(u) + tE_t^{x_0}(u) + \frac{t}{2} \int_{B_t} \|\mathbf{g}\|^2 d\text{Vol}_g \\ &\leq (2C_G^0 + 1)tE_t^{x_0}(u) + (C_G^0)^2 C_* t^{n+1}. \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к (2.9), получаем

$$-C''t^{n+1} \leq t \frac{d}{dt} E_t^{x_0}(u) - (n-2-C't)E_t^{x_0}(u)$$

для некоторых положительных констант C' и C'' . Умножая обе части на $e^{C't}$, приходим к неравенству, эквивалентному следующему

$$-C''t^2 e^{C't} \leq \frac{d}{dt} (t^{2-n} e^{C't} E_t^{x_0}(u)).$$

Интегрируем это неравенство по интервалу (r_1, r_2) . После элементарных преобразований получаем (2.4).

§3. Доказательство теоремы 2

Предположим противное. Тогда существуют такие последовательности $\mathbf{G}_l(x, u)$ и $\mathbf{g}_l(x, u)$, $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие (1.3), и такая последовательность $u_l: M \rightarrow M'$, $l \in \mathbb{N}$, решений

$$\tau(u_l)(x) = \mathbf{G}_l(x, u_l(x)) \cdot du_l(x) + \mathbf{g}_l(x, u_l(x)), \quad x \in M,$$

с равномерно ограниченной энергией $E(u_l) \leq C_E$, что

$$\max_{x \in M} \|du_l(x)\| = \|du_l(x_l)\| = D_l \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty.$$

В силу компактности M можно считать, что последовательность $x_l \rightarrow x_0 \in M$. Пусть $\bar{r} < \lambda_M$ обозначает положительное число такое, как в лемме 5. Будем считать, что в шаре $B_{\bar{r}}(x_0)$ выбраны нормальные римановы координаты. Для любого $R > 0$ найдется $l_0(R)$ такое, что при $l \geq l_0(R)$ корректно определено отображение

$$\phi_l: B_R = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq R\} \rightarrow B_{\bar{r}}(x_0), \quad x \mapsto \frac{x}{D_l} + x_l.$$

Введем на B_R метрику $g_{l,\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ \phi_l$. Прямые вычисления показывают, что отображение $w_l = u_l \circ \phi_l: B_R \rightarrow M'$ удовлетворяет уравнению

$$\tau_l(w_l)(x) = \frac{1}{D_l} G_l(\bar{x}, w_l) \cdot dw_l + \frac{1}{D_l^2} g_l(\bar{x}, w_l), \quad (3.1)$$

где $\bar{x} = x/D_l + x_l$ и τ_l — это оператор гармонических отображений шара B_R с метрикой $g_{l,\alpha\beta}$ в M' . Заметим, что для отображения w_l выполнены соотношения

$$\|dw_l(x)\| \leq 1, \quad \|dw_l(0)\| = 1. \quad (3.2)$$

Кроме того, так как $g_{l,\alpha\beta} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$ при $l \rightarrow \infty$ на B_R вместе со всеми своими производными, то коэффициенты оператора τ_l сходятся вместе со всеми своими производными к коэффициентам оператора гармонических отображений евклидова шара B_R в M' . Покажем, что из последовательности w_l можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на шаре B_R к гармоническому отображению евклидова шара B_R в M' .

Сначала заметим, что отображения w_l для достаточно больших l определены на некотором шаре $B_{R+\varepsilon}$, где ε — некоторое положительное число. Отображения w_l , рассматриваемые как отображения $B_{R+\varepsilon} \rightarrow B_{\bar{r}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений вида

$$g_l^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = h_l(x), \quad (3.3)$$

где $g_l^{\alpha\beta}(x)$ обозначает тензор, обратный метрике $g_{l,\alpha\beta}(x)$, а $h_l(x)$ — сумму всех остальных слагаемых (3.1), перенесенных в правую часть (см. локальное представление (1.1) оператора гармонических отображений). Операторы в левой части (3.3) равномерно эллиптичны (т.е. их константы эллиптичности ограничены по l) и их коэффициенты C^2 -равномерно ограничены, а правые части $h_l(x)$ в силу неравенства из (3.2) равномерно ограничены в пространстве $W^{0,p}(B_{R+\varepsilon}, \mathbb{R}^n)$ для любого $1 < p < \infty$. Применяя оценку Шаудера (см. [12; теорема 9.11]), получаем ограниченность последовательности w_l в пространстве $W^{2,p}(B_{R+\varepsilon/2}, \mathbb{R}^n)$. Неравенства (1.3) (C^1 -ограниченность последовательностей G_l и g_l) обеспечивают теперь равномерную ограниченность последовательности $h_l(x)$ в пространстве $W^{1,p}(B_{R+\varepsilon/2}, \mathbb{R}^n)$ для любого $1 < p < \infty$, и второе применение Шаудера дает ограниченность последовательности w_l в пространстве $W^{3,p}(B_{R+\varepsilon/4}, \mathbb{R}^n)$. Так как при $p > n$ это пространство компактно вкладывается в $C^2(B_{R+\varepsilon/4}, \mathbb{R}^n)$, то из последовательности w_l можно выделить

сходящуюся подпоследовательность w_{l_k} . Переход к пределу в уравнении (3.1) показывает, что она сходится к гармоническому отображению $v_R: B_R \rightarrow M'$.

Прямыми вычислениями получаем, что для $l \geq l_0(R)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} R^{2-n} \int_{B_R} \|dw_l(x)\|^2 (\det g_{l,\alpha\beta})^{1/2}(x) dx \\ = \left(\frac{R}{D_l}\right)^{2-n} \int_{B_{R/D_l}} \|du_l\|^2 (\det g_{\alpha\beta})^{1/2}(x) dx. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу леммы 5 получаем

$$\left(\frac{R}{D_l}\right)^{2-n} E_{R/D_l}^{x_0}(u_l) \leq C_1 \bar{r}^{2-n} E_{\bar{r}}^{x_0}(u_l) + C_2$$

для всех l таких, что $R/D_l < \bar{r}$. Из двух последних соотношений следует, что

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dw_l(x)\|^2 (\det g_{l,\alpha\beta})^{1/2}(x) dx \leq 2(C_1 \bar{r}^{2-n} E_{\bar{r}}^{x_0}(u_l) + C_2).$$

Переходя к пределу по подпоследовательности l_k , окончательно получаем, что для любого $R > 0$ имеет место неравенство

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dv_R(x)\|^2 dx \leq 2(C_1 \bar{r}^{2-n} C_E + C_2). \quad (3.4)$$

Выберем некоторое положительное R_0 . Вышеописанным способом построим последовательность отображений $w_{l_k}: B_{R_0} \rightarrow B_{\bar{r}}(x_0)$, сходящуюся к гармоническому отображению $v_{R_0}: B_{R_0} \rightarrow M'$. Удваивая радиус шара и проделывая ту же самую процедуру для последовательности u_{l_k} , находим гармоническое отображение $v_{2R_0}: B_{2R_0} \rightarrow M'$ такое, что $v_{2R_0}|_{B_{R_0}} = v_{R_0}$. Продолжая итерировать эту процедуру, окончательно получаем гармоническое отображение $v: \mathbb{R}^n \rightarrow M'$.

Мы хотим показать, что полученное отображение v является n -препятствием. Из (3.2) следует, что

$$\|dv(x)\| \leq \|dv(0)\| = 1.$$

Таким образом, осталось проверить, что величины $R^{2-n} \int_{B_R} \|dv\|^2$ равномерно ограничены для всех $R > 0$. Мы покажем, что для любого положительного R имеет место неравенство

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dv(x)\|^2 dx \leq 2(C_1 \bar{r}^{2-n} C_E + C_2). \quad (3.5)$$

Действительно, для $R = 2^m R_0$ это следует из неравенства (3.4). Для любых других R мы найдем целое m такое, что $R < 2^m R_0$, и в этом случае неравенство (3.5) следует из его справедливости для $2^m R_0$ и неравенства монотонности

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dv(x)\|^2 dx \leq (2^m R_0)^{2-n} \int_{B_{2^m R_0}} \|dv(x)\|^2 dx$$

для гармонических отображений евклидовых областей $\mathbb{R}^n$ (см., например, [9]–[11]).

Таким образом, построенное отображение v является n -препятствием для M' . Полученное противоречие завершает доказательство.

§ 4. Ограниченность энергии

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится свойство ограниченности энергии решений (1.2) (следствие 6). Оно является следствием результатов работы [2]: оценки энергии решений (1.2) и версии неравенства Пуанкаре для отображений многообразий. Для полноты изложения мы приводим эти утверждения ниже.

Назовем C^1 -гладкую гомотопию $H(s, x)$, $s \in [0, 1]$, $x \in M$, между C^1 -гладкими отображениями u и v *геодезической*, если для любого $x \in M$ кривая

$$[0, 1] \ni s \mapsto H_s(x) = H(s, x) \in M'$$

является геодезической в M' . Если M' имеет неположительную секционную кривизну, то любые два гомотопных отображения геодезически гомотопны. Действительно, геодезическая гомотопия строится заменой кривой $s \mapsto H_s(x)$ единственной гомотопной ей геодезической.

Для любых гомотопных C^1 -отображений u и v определено расстояние

$$N_p(u, v) = \inf \{N_p(H) : H \text{ является } C^1\text{-гомотопией между } u \text{ и } v\},$$

где $1 \leq p < \infty$ и

$$N_p(H) = \left(\int_M \left(\int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} H_s(x) \right\|_{g'} ds \right)^p d \text{Vol}_g(x) \right)^{1/p}.$$

В силу неравенства Гёльдера для любых $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ имеем

$$N_{p_1}(u, v) \leq N_{p_2}(u, v) (\text{Vol } M)^{(p_2 - p_1)/(p_2 p_1)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть M' – многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда для любого решения u уравнения (1.2) из гомотопического класса $[v]$ имеет место оценка

$$E(u) \leq \|g\|_{C^0} N_1(u, v) + \sqrt{2} \|G\|_{C^0} E(u)^{1/2} N_2(u, v) + E(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H(s, x)$ является геодезической гомотопией между u и v . Тогда в силу неположительности секционной кривизны из формулы второй вариации для функционала энергии (см., например, [4; док. предл. 4.3]) следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} E(H_s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Поэтому функция $s \mapsto E(H_s)$ выпукла, и мы получаем неравенство

$$E(u) \leq E(v) + \frac{\partial}{\partial s} \bigg|_{s=1} E(H_s). \quad (4.1)$$

В силу формулы первой вариации и того, что u является решением уравнения (1.2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} \bigg|_{s=1} E(H_s) = - \int_M \left\langle G \cdot du + g, \frac{\partial H}{\partial s} \right\rangle \bigg|_{s=1} d \text{Vol}_g.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_M \left\langle \mathbf{g} + \mathbf{G} \cdot du, \frac{\partial H}{\partial s} \right\rangle d \text{Vol}_g \right| &\leq \|\mathbf{g}\|_{C^0} N_1(H) + \|\mathbf{G}\|_{C^0} \int_M \sqrt{2e(u)} \left\| \frac{\partial H}{\partial s} \right\| d \text{Vol}_g \\ &\leq \|\mathbf{g}\|_{C^0} N_1(H) + \sqrt{2} \|\mathbf{G}\|_{C^0} E(u)^{1/2} N_2(H). \end{aligned}$$

Это неравенство и (4.1) влекут требуемую оценку.

Доказательство следующего геометрического неравенства (версия неравенства Пуанкаре) см. в работе [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть M' – многообразие неположительной секционной кривизны и $[v]$ – произвольный гомотопический класс, $v \in C^1(M, M')$. Тогда существует такая константа $\overline{C} > 0$ (зависящая от $[v]$), что для любого C^1 -гладкого $u \in [v]$ имеет место неравенство

$$N_2(u, v) \leq \overline{C}(E(u)^{1/2} + E(v)^{1/2} + 1). \quad (4.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для многообразий отрицательной секционной кривизны в неравенстве (4.2) константа $\overline{C}$ может быть выбрана независимо от гомотопического класса [13].

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть многообразие M' имеет неположительную секционную кривизну и $[v]$ – гомотопический класс, $v \in C^1(M, M')$. Тогда для любых положительных $C_{\mathbf{g}}^0$ и $C_{\mathbf{G}}^0 < C_{[v]} = (\sqrt{2}\overline{C})^{-1}$ найдется такое $C_E \geq 0$, что для любого решения $u \in [v]$ уравнения (1.2) с правой частью, удовлетворяющей

$$\|\mathbf{G}\|_{C^0} \leq C_{\mathbf{G}}^0, \quad \|\mathbf{g}\|_{C^0} \leq C_{\mathbf{g}}^0,$$

имеет место оценка $E(u) \leq C_E$.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Пусть, следуя обозначениям теоремы 1,

$$\mathcal{U} = \{(\mathbf{G}, \mathbf{g}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{G}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{g}} : \|\mathbf{G}(x, u)\| < C_{[v]} \text{ для любых } x \in M, u \in M'\}$$

обозначает область пространства $\mathcal{F}_{\mathbf{G}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{g}}$. Используя аргументы теории эллиптической регулярности, можно доказать следующее простое достаточное условие собственности отображения $\pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$.

ЛЕММА 9. Пусть для любой последовательности $(u_l, \mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l) \in \mathfrak{M}_{[v]}$, $(\mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l) \in \mathcal{U}$, такой, что $(\mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l) \rightarrow (\mathbf{G}, \mathbf{g}) \in \mathcal{U}$ в C^s -топологии, существует такая константа $C > 0$, что

$$\max_{x \in M} \|du_l(x)\| \leq C \quad \forall l \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Тогда для задачи (1.2) отображение $\pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$ является собственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для доказательства леммы достаточно показать, что для любой последовательности $(u_l, \mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l)$, удовлетворяющей условиям леммы, существует подпоследовательность отображений u_{i_m} , которая сходится в C^{s+1} -топологии к отображению u такому, что $(u, \mathbf{G}, \mathbf{g}) \in \mathfrak{M}_{[v]}$. Действительно, это влечет, что из любой последовательности $(u_l, \mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l) \in \pi^{-1}(K)$, где K — компактное подмножество $\mathcal{U}$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C^{s+1}(M, M') \times \mathcal{F}_{\mathbf{G}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{g}}$ к некоторой точке $\pi^{-1}(K)$. Что и означает компактность $\pi^{-1}(K)$.

Пусть последовательность $(u_l, \mathbf{G}_l, \mathbf{g}_l) \in \mathfrak{M}_{[v]}$ удовлетворяет предположениям леммы. Так как для последовательности отображений u_l выполнено (5.1), то в силу теоремы Арцела–Асколи найдется подпоследовательность (также обозначаемая u_l), C^0 -сходящаяся к некоторому отображению u . Следовательно, найдутся такое конечное покрытие картами $\{Q_i\}$ многообразия M и такая конечная система карт $\{Q'_i\}$ многообразия M' , что для почти всех индексов l имеет место включение $u_l(Q_i) \subset Q'_i$ для любого i . (Без ограничения общности можно считать, что замыкания $\overline{Q}_i$ компактны и сами содержатся в некоторых картах M .) Через $\{U_i\}$ обозначим такое покрытие многообразия M , что $\overline{U}_i \subset Q_i$. Ограничения отображений u_l на Q_i , рассматриваемые как отображения $Q_i \rightarrow Q'_i \subset \mathbb{R}^{n'}$, где $n' = \dim M'$, удовлетворяют эллиптической системе дифференциальных уравнений

$$g^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = h_l(x), \quad (5.2)$$

где векторы $h_l(x) = (h_l^1(x), \dots, h_l^{n'}(x))$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} h_l^\ell(x) &= (\mathbf{G}_l)_{k^\ell}^{\ell\gamma}(x, u_l(x)) \frac{\partial u_l^k}{\partial x^\gamma} + (\mathbf{g}_l)^\ell(x, u_l(x)) \\ &\quad - g^{\alpha\beta}(x) \Gamma_{kj}^{\ell\gamma}(u_l(x)) \frac{\partial u_l^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u_l^j}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\beta}(x) \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\ell}(x) \frac{\partial u_l^\ell}{\partial x^\gamma}. \end{aligned}$$

Из неравенств (5.1) и равномерной ограниченности последовательностей $\mathbf{G}_l$ и $\mathbf{g}_l$ следует, что последовательность правых частей $h_l(x)$ является ограниченной в пространстве $W^{0,p}(Q_i, \mathbb{R}^{n'})$. Через $\{V_i^1\}$ обозначим такое открытое покрытие M , что

$$\overline{U}_i \subset V_i^1 \subset \overline{V}_i^1 \subset Q_i \quad \forall i.$$

Применяя оценку Шаудера (как при доказательстве теоремы 2), получаем ограниченность последовательности отображений u_l в пространстве $W^{2,p}(V_j^1, \mathbb{R}^{n'})$. Теперь в силу C^1 -ограниченности последовательностей $\mathbf{G}_l$ и $\mathbf{g}_l$ последовательность векторов $h_l(x)$ является ограниченной в пространстве $W^{1,p}(V_j^1, \mathbb{R}^{n'})$. Покрывая M такими открытыми множествами $\{V_i^2\}$, что

$$\overline{U}_i \subset V_i^2 \subset \overline{V}_i^2 \subset V_i^1,$$

и применяя оценку Шаудера на областях V_i^1 , находим, что последовательность u_l ограничена в пространстве $W^{3,p}(V_i^2, \mathbb{R}^{n'})$. Повторяя эту процедуру достаточное число раз, получаем ограниченность последовательности u_l в пространстве $W^{s+1,p}(U_i, \mathbb{R}^{n'})$. Напомним, что при $p > n$ это пространство компактно вкладывается в $C^{s+1}(U_i, \mathbb{R}^{n'})$, а конечная система множеств $\{U_i\}$ является открытым

покрытием M . Поэтому существует такая подпоследовательность u_{l_m} последовательности u_l , которая сходится в C^{s+1} -топологии к отображению u . Переходя к пределу в уравнениях (5.2), получаем принадлежность (u, G, g) пространству $\mathfrak{M}_{[v]}$ и завершаем доказательство леммы.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой последовательности (u_l, G_l, g_l) , удовлетворяющей условиям леммы 9, существует такая константа $C > 0$, что выполнено соотношение (5.1). Возьмем такие положительные C_g^0 и $C_G^0 < C_{[v]}^0$, что

$$\|G_l\|_{C^0} \leq C_G^0, \quad \|g_l\|_{C^0} \leq C_g^0 \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

В силу следствия 8 существует такое $C_E \geq 0$, что для любого $l \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $E(u_l) \leq C_E$. Так как последовательность (G_l, g_l) сходится к некоторому (G, g) в C^2 -топологии, то, в частности, она является C^1 -ограниченной. Так как многообразия неположительной секционной кривизны не допускают n -препятствий для $n \geq 3$ (см. пример в § 1), то применение теоремы 2 доставляет требуемую оценку и завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. *Кокарев Г. Ю.* О компактности множества решений квазилинейно возмущенного уравнения гармонических отображений // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 155–156.
2. *Kappeler T., Kuksin S., Schröder V.* Perturbations of the harmonic map equation // Preprint № 02-01. Zürich: Inst. Math., Univ. Zürich, 2001; to appear in Commun. Contemp. Math.
3. *Кокарев Г. Ю., Куksин С. Б.* Квазилинейные эллиптические дифференциальные уравнения на отображениях многообразий. 1 // Алгебра и анализ. (в печати).
4. *Ells J., Lemaire L.* Selected topics in harmonic maps. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math. V. 50.)
5. *Shoen R., Yau S.-T.* Compact group actions and the topology of manifolds with non-positive sectional curvature // Topology. 1979. V. 18. P. 361–380.
6. *Ding W. Y.* Blow-up of solutions of heat flow for harmonic maps // Adv. Math. 1990. V. 19. P. 80–92.
7. *Sacks J., Uhlenbeck K.* The existence of minimal immersions of 2-sphere // Ann. of Math. 1981. V. 113. P. 1–24.
8. *Ells J., Sampson J. H.* Harmonic mappings of Riemannian manifolds // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 109–160.
9. *Lin F.-H.* Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps // Ann. of Math. (2). 1999. V. 149. P. 785–829.
10. *Price P.* A monotonicity formula for Yang–Mills fields // Manuscripta Math. 1983. V. 43. P. 131–166.
11. *Shoen R.* Analytic aspects of the harmonic map problem // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 1984. V. 2. P. 321–358.
12. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
13. *Kappeler T., Kuksin S., Schröder V.* Poincaré inequality for maps into closed manifolds of negative sectional curvature // Preprint. Zürich: Inst. Math., Univ. Zürich, 2002.

Heriot-Watt University, Edinburgh, UK
E-mail: G.Y.Kokarev@ma.hw.ac.uk

Поступила в редакцию
24.12.2002