Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Казарин, Е. И. Чанков, Конечные просто приводимые группы разрешимы, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 5, 27–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:59:00

УДК 512.547.212

Л. С. Казарин, Е. И. Чанков

Конечные просто приводимые группы разрешимы

Конечная группа G называется просто приводимой (кратко – SR -группой), если она обладает следующими двумя свойствами: любой элемент этой группы сопряжен со своим обратным; тензорное произведение любых двух неприводимых представлений разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими единицы. Доказано, что конечные SR -группы разрешимы.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: конечные группы, характеры, представления без кратностей, просто приводимые группы.

Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа G называется *просто приводимой* (кратко – SR -группой), если она обладает следующими двумя свойствами:

- 1) любой элемент этой группы сопряжен со своим обратным;
- 2) тензорное произведение любых двух неприводимых обыкновенных представлений разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими единицы.

Класс SR -групп введен Ю. Вигнером (см. [1]). Условие 2) из определения существенно для физических приложений. Из него следует, что “правильные линейные комбинации” произведений базисных функций определены с точностью до фазового множителя и что решение физической задачи однозначно определяется из соображений симметрии (см. [2]). Некоторое обобщение указанных групп предложено Дж. Макки (см. [3]). Задача описания SR -групп отмечена также А. И. Кострикиным в приложении “Нерешенные задачи” книги [4]. С. П. Струнковым поставлен вопрос о разрешимости конечных просто приводимых групп (см. [5; задача 11.94]). В работе [6] доказательство разрешимости конечной SR -группы сведено к специфическому случаю, когда композиционные факторы группы ограничиваются знакопеременными группами степени не выше 6 (минимальный контрпример).

В настоящей работе с использованием результатов работы [6] получено положительное решение задачи, предложенной С. П. Струнковым (следствие 1). На самом деле доказана разрешимость более широкого класса групп, включающего в себя и группы, предложенные Дж. Макки.

Следующее определение было предложено в работе [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется ASR -группой, если тензорный квадрат любого неприводимого обыкновенного представления этой группы разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими единицы.

Ослабление достигнуто как за счет отказа от условия 1) определения 1 (группы, удовлетворяющие этому условию, принято называть *вещественными*), так и за счет наложения условия 2) только на тензорные квадраты представлений. Очевидно, что любая SR -группа является ASR -группой. Обратное (см. [6]), вообще говоря, неверно.

В [6] проблема разрешимости конечных ASR -групп сведена к следующей ситуации. Конечная неразрешимая ASR -группа существует тогда и только тогда, когда таковой является группа $G \leq \text{Aut}(N)$, где N – прямое произведение простых неабелевых групп, каждая из которых изоморфна знакопеременной группе A_5 (соответственно A_6) и G/N разрешима. Эта группа – минимальный контрпример к гипотезе о разрешимости конечных ASR -групп. В настоящей работе показано, что минимального контрпримера не существует. Тем самым, оказывается справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная ASR -группа; тогда G разрешима.

Из этой теоремы следует положительное решение вопроса 11.94 из “Коуровской тетради” [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – конечная SR -группа; тогда G разрешима.

Кроме того, теорема позволяет сформулировать следующее свойство неприводимых характеров неразрешимых групп.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – конечная неразрешимая группа, то найдутся такие неприводимые характеры χ, φ группы G , что скалярное произведение $[\chi^2, \varphi]$ больше единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для бесконечных групп утверждение теоремы неверно, так как трехмерная группа вращений $O(3)$ является SR -группой (см. [2]).

План изложения следующий. В § 1 представлены необходимые предварительные сведения, касающиеся характеров групп A_5 и A_6 , а также некоторые сведения о группах перестановок и теории представлений. В § 2 обсуждается строение минимального контрпримера и зафиксированы используемые в дальнейшем обозначения. Доказательство теоремы состоит из двух частей (лемма 7 и лемма 8) в зависимости от строения композиционных неабелевых факторов минимального контрпримера. В § 3 рассматривается случай, когда у ASR -группы есть композиционный фактор, изоморфный A_5 . В § 4 содержится анализ случая с композиционным фактором A_6 . Отметим, что схема доказательства теоремы отличается от предложенной в [6]. Основная идея состоит в конструировании неприводимых характеров со специальными свойствами у группы, являющейся минимальным контрпримером. При этом важными оказываются свойства разрешимых подгрупп симметрических групп. Известно, что свойство тензорного произведения двух представлений иметь в своем разложении неприводимые представления кратности не более единицы эквивалентным образом переводится на язык характеров. Именно, если φ и ρ – некоторые представления группы G с характерами χ_φ и χ_ρ соответственно, тензорное произведение которых имеет в своем разложении в сумму неприводимых представлений групп кратности не выше единицы, то характер представления $\varphi \otimes \rho$ имеет то же свойство. В этом случае

$$\chi_\varphi \chi_\rho = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \delta_\chi \chi,$$

где коэффициенты δ_χ принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Здесь через $\text{Irr}(G)$ обозначено множество неприводимых характеров G . Скалярное произведение характеров χ и θ группы G обозначается $[\chi, \theta]$. В том случае, когда требуется уточнить, на какой именно группе рассматривается скалярное произведение, мы помечаем знак скалярного произведения индексом внизу. Для группы перестановок S , действующей на множестве Ω , глобальный стабилизатор подмножества Δ обозначается $\text{Stab}_S(\Delta)$. Стабилизатор пустого множества полагается равным всей группе. Остальные обозначения в основном стандартные и разъясняются по мере необходимости. Сведения из теории представлений, используемые в статье, можно найти в [7] и [8].

§ 1. Вспомогательные результаты

Нами используются некоторые свойства произведений неприводимых характеров групп A_5 и A_6 . Необходимые сведения представлены в следующих четырех таблицах. В качестве исходного материала использованы таблицы характеров из [7].

1. Таблица характеров группы A_5 имеет следующий вид.

Таблица 1

	$(\cdot)$	$(12)(34)$	(123)	(12345)	(12354)
η_1	1	1	1	1	1
η_2	3	-1	0	$-a$	$-a^*$
η_3	3	-1	0	$-a^*$	$-a$
η_4	4	0	1	-1	-1
η_5	5	1	-1	0	0

В верхнем ряду этой таблицы записаны перестановки группы A_5 , являющиеся представителями классов сопряженных элементов; через η_i , $i = 1, \dots, 5$, обозначены неприводимые характеры группы A_5 ; число a равно $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, а число a^* равно $-\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

2. Построим таблицу 2 кратностей вхождения характера η_5 в попарные произведения $\eta_2, \dots, \eta_5$ неприводимых характеров группы A_5 . А именно, элемент с индексом $\{ij\}$ таблицы равен скалярному произведению $[\eta_i \eta_j, \eta_5]$, где $i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Эта таблица получается прямыми вычислениями, основанными на данных таблицы 1.

Таблица 2

	η_2	η_3	η_4	η_5
η_2	1	1	1	1
η_3	1	1	1	1
η_4	1	1	1	2
η_5	1	1	2	2

3. Таблица 3 – фрагмент таблицы характеров группы A_6 .

ТАБЛИЦА 3

	$(\cdot)$	$(12)(34)$	(123)	$(123)(456)$	$(1234)(56)$	(12345)	(12354)
η_2	8	0	-1	-1	0	$-a$	$-a^*$
η_3	8	0	-1	-1	0	$-a^*$	$-a$
η_4	9	1	0	0	1	-1	-1
η_5	10	-2	1	1	0	0	0

Как и прежде, верхний ряд этой таблицы – это представители классов сопряженных элементов группы A_6 , записанные в виде перестановок; через η_i , $i = 2, \dots, 5$, обозначены четыре неприводимых характера группы A_6 ; наконец, $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ и $a^* = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

4. Построим таблицу 4 кратностей вхождения характера η_5 в попарные произведения неприводимых характеров η_i , $i = 2, \dots, 5$, группы A_6 . А именно, элемент с индексом $\{ij\}$ таблицы равен скалярному произведению $[\eta_i \eta_j, \eta_5]$, где $i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Эту таблицу можно построить на основании данных таблицы 3.

ТАБЛИЦА 4

	η_2	η_3	η_4	η_5
η_2	2	2	2	2
η_3	2	2	2	2
η_4	2	2	2	3
η_5	2	2	3	2

Следующая лемма, существенным образом используемая в доказательстве теоремы, принадлежит А. Серессу (см. [9]) и независимо получена С. Дольфи (см. [10]).

ЛЕММА 1. Пусть S – группа перестановок конечного множества Ω . Если S не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_n для $n \geq 5$, то найдутся такие четыре попарно непересекающихся подмножества Ω , глобальные стабилизаторы которых имеют тривиальное пересечение.

В принципе, некоторые из указанных множеств могут оказаться пустыми. Нам понадобится следующее (очевидное) уточнение леммы 1.

ЛЕММА 1'. Пусть S – группа перестановок конечного множества Ω и $|\Omega| > 1$. Если S не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_n для $n \geq 5$, то найдутся такие четыре попарно непересекающихся подмножества Ω , по меньшей мере два из которых непустые, глобальные стабилизаторы которых пересекаются тривиально.

Согласно теории Клиффорда (см. [8; гл. 6]), если $\Theta \in \text{Irr}(N)$ и χ – неприводимый характер G , то из $[\chi|_N, \Theta]_N \neq 0$ следует, что

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^l \Theta_i,$$

где Θ_i – характеры, сопряженные Θ . Напомним, что сопряженный характер (при помощи элемента $g \in G$) к характеру Θ определяется следующим образом: $\Theta^g(x) = \Theta(gxg^{-1})$ для всякого $x \in G$. Число l различных сопряженных характеров к характеру Θ равно индексу подгруппы инерции $I_G(\Theta)$ характера Θ (состоящей из всех $g \in G$, для которых $\Theta^g = \Theta$), а число $e = e(\chi)$ делит $|I_G(\Theta) : N|$, если G/N – разрешимая группа. Характер $\Theta \in \text{Irr}(N)$ называется *инвариантным*, если $I_G(\Theta) = G$.

Кратко необходимые факты, касающиеся характеров, индуцированных с нормальных подгрупп, сформулируем (см. [8; с. 82–84]) в виде следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть K – нормальная подгруппа конечной группы X с разрешимой факторгруппой X/K , и пусть ψ – неприводимый характер K . Тогда

$$\psi^X = \sum_{i=1}^s e_i \chi_i,$$

где $\chi_i \in \text{Irr}(X)$, e_i делят $|I_X(\psi) : K|$, $\chi_i|_K = e_i \sum_{j=1}^l \psi_j$, где ψ_j – сопряженные характеры к характеру $\psi = \psi_1$, $l = |X : I_X(\psi)|$ и $\sum_{i=1}^s e_i^2 = |I_X(\psi) : K|$. Если $\chi \in \text{Irr}(X)$ и $[\chi|_K, \psi] \neq 0$, то $\chi = \chi_i$ для некоторого $i \leq s$.

Следующий общий результат принадлежит П. Галлахеру (см. [11]) и дается в редакции из работы [12]. Для его формулировки нам понадобится

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для любой конечной группы T параметр $k_0(T)$ определим как наибольшее из чисел классов сопряженных элементов ее подгрупп, включая и T .

ЛЕММА 3. Пусть K – нормальная подгруппа конечной группы X , и пусть $k_0(X/K) \leq r$. Если ψ – неприводимый характер K , то число неприводимых характеров группы X , лежащих над (сопряженным с характером) ψ (т.е. таких $\chi \in \text{Irr}(X)$, что $[\chi|_K, \psi] \neq 0$), не превосходит $k_0(I_G(\psi)/K)$. В частности, оно не больше r .

Следующая лемма, фиксирующая одно полезное свойство группы A_6 , получена с помощью информации из работы [13].

ЛЕММА 4. Группа автоморфизмов $\text{PGL}_2(9)$ группы $L = A_6 \simeq L_2(9)$ имеет ровно три подгруппы индекса 2, изоморфные S_6 , $\text{PGL}_2(9)$ и M_{10} (стабилизатору точки в простой группе Матье M_{11}) соответственно. При этом подгруппа $\text{PGL}_2(9)$ служит подгруппой инерции характеров η_2 и η_3 группы A_6 степени 8.

§ 2. Минимальный контрпример

Описание свойств минимального контрпримера к утверждению о разрешимости конечной ASR -группы взято из работы [6].

ЛЕММА 5. Пусть G является неразрешимой ASR -группой наименьшего порядка и N – ее минимальная нормальная подгруппа. Тогда G/N – разрешимая группа, N – цокль G , являющийся прямым произведением $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_m$ изоморфных простых неабелевых групп. Группа G является подгруппой сплетения $\mathfrak{S} = R \wr S$, где $R = \text{Aut}(L)$ для простой неабелевой группы $L \simeq L_1$, а S – разрешимая подгруппа симметрической группы степени m , действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N .

ЛЕММА 6. Пусть группа G является неразрешимой ASR -группой наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , являющуюся прямым произведением $m > 1$ групп, изоморфных A_5 или A_6 . Подгруппа M группы G , состоящая из элементов, нормализующих каждую минимальную нормальную подгруппу группы N , нормальна в G и факторгруппа G/M – разрешимая ASR -подгруппа симметрической группы S_m , действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N .

Зафиксируем обозначения, которые будут употребляться на протяжении оставшейся части работы.

В силу леммы 6 группа G является подгруппой сплетения $\mathfrak{S} = \text{Aut}(L) \wr S$, где S – разрешимая подгруппа симметрической группы степени m , действующей транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$, а L изоморфна A_5 или A_6 . Таким образом, $N \leq G \leq \text{Aut}(N)$, где

$$N \simeq L_1 \times L_2 \times \dots \times L_m.$$

Подгруппы L_i , $i = 1, 2, \dots, m$, изоморфны L . Пусть R_i , $i = 1, 2, \dots, m$, – подгруппы $\mathfrak{S}$, изоморфные $\text{Aut}(L)$, из базы сплетения $\text{Aut}(L) \wr S$ такие, что

$$\mathfrak{S} = \text{Aut}(N) = (R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m) \rtimes S.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ группу $R_1 \times \dots \times R_m$. Из лемм 5 и 6 следует, что $M = \mathfrak{M} \cap G$ и любой элемент x из G представим в виде $x = \mu\sigma$, где $\mu \in M$ и $\sigma \in S$.

Так как $\mathfrak{M} = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m$, то элемент $\mu \in M$ можно однозначно записать в виде $\mu_1\mu_2 \dots \mu_m$, где $\mu_i \in R_i$. Эта запись будет использоваться в дальнейшем без напоминания.

Ввиду того, что элементы множества Ω будут использоваться нами в качестве индексов, будем считать далее, что $\Omega = \{1, 2, \dots, m\}$, где $m > 1$ (лемма 6). Так как S – разрешимая группа перестановок множества Ω , то по лемме 1' найдутся такие четыре попарно непересекающихся подмножества $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ множества Ω , что

$$\bigcap_{i=1}^4 \text{Stab}_S(\Delta_i) = 1.$$

Будем считать далее, что нумерация выбрана так, что Δ_1 и Δ_2 заведомо не пустые.

В доказательстве теоремы (§ 3 и § 4) нам потребуются неприводимые характеры группы N , использующие выделенные подмножества Δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Напомним, что любой неприводимый характер прямого произведения групп есть произведение неприводимых характеров сомножителей. Пусть $\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ – неприводимые характеры группы $L \simeq A_5$, фигурирующие в таблице 1 для случая $L = A_5$ и в таблице 3 для случая $L = A_6$. Обозначим через $\eta_2^{(i)}, \eta_3^{(i)}, \eta_4^{(i)}, \eta_5^{(i)}$ неприводимые характеры группы $L_i \simeq L$ степеней 3, 3, 4, 5 соответственно для $L = A_5$ и степеней 8, 8, 9, 10 для $L = A_6$. Тогда необходимый нам характер группы N строится как произведение $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, где $\alpha_i \in \text{Irr}(L_i)$ выбираются специальным образом в зависимости от L .

Пусть α_i – неприводимые характеры L_i и $\nabla = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \in \text{Irr}(N)$. Как сказано выше, любой элемент y из G имеет запись в виде $y = \mu\sigma$, где $\mu \in M$ и $\sigma \in S$. Действие y на характере ∇ из $\text{Irr}(N)$ определяется с помощью соотношения

$$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^y = \alpha_{\sigma^{-1}(1)}^\mu \alpha_{\sigma^{-1}(2)}^\mu \cdots \alpha_{\sigma^{-1}(m)}^\mu. \quad (*)$$

§ 3. Доказательство теоремы для случая $L = A_5$

ЛЕММА 7. Пусть группа G – минимальный контрпример к теореме. Тогда G не содержит композиционных факторов, изоморфных группе A_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть группа G содержит композиционный фактор, изоморфный знакопеременной группе A_5 . Разобьем доказательство леммы на три этапа.

1) Построим два неприводимых характера θ_1 и θ_2 группы $N = L^m$, где $L = A_5$, следующим образом:

$$\theta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \eta_5^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_1, \\ \alpha_i &= \eta_4^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_2, \\ \alpha_i &= \eta_3^{(i)}, & \text{если } i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2); \end{aligned}$$

и

$$\theta_2 = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m,$$

где

$$\begin{aligned} \beta_i &= \eta_5^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_3, \\ \beta_i &= \eta_4^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_4, \\ \beta_i &= \eta_3^{(i)}, & \text{если } i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4). \end{aligned}$$

Здесь η_5, η_4, η_3 – неприводимые характеры группы $L = A_5$ степеней 5, 4, 3 соответственно (см. таблицу 1).

Рассмотрим подгруппы инерции характеров θ_1 и θ_2 в G .

Пусть $H_1 = I_G(\theta_1)$. Если $\theta_1^\mu = \theta_1$, то $\theta_1^{\mu\sigma} = \theta_1$, где $\mu \in \mathfrak{M}$ и $\sigma \in S$. Значит, $\theta_1^\mu = \theta_1^{\sigma^{-1}}$. Однако μ оставляет на месте характеры α_i как для $i \in \Delta_1$, так и для

$i \in \Delta_2$. Поэтому σ^{-1} также оставляет на месте Δ_1 и Δ_2 , т.е. $\sigma \in \text{Stab}_S(\Delta_1) \cap \text{Stab}_S(\Delta_2)$.

Запишем μ в виде $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m$, где $\mu_i \in R_i$, $i = \overline{1, m}$. Отметим, что для $i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ имеем $(\eta_3^{(i)})^{\mu_i} = \eta_2^{(i)}$ при $\mu_i \in R_i \setminus L_i$. Следовательно, элемент μ принадлежит $I_G(\theta_1)$ только тогда, когда $\mu_i \in L_i$ для всех $i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Обозначим

$$M_1 = \{\mu \in M \mid \mu_i \in L_i \text{ для всех } i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)\}.$$

Очевидно, что $M_1 = H_1 \cap M \triangleleft H_1$ и $H_1/M_1 = H_1/(H_1 \cap M) \leq G/M \simeq S$. При этом в качестве представителей смежных классов в H_1/M_1 можно выбрать элементы из $\text{Stab}_S(\Delta_1) \cap \text{Stab}_S(\Delta_2)$.

Пусть $H_2 = I_G(\theta_2)$. Рассуждая так же, как в рассмотренном выше случае для $I_G(\theta_1)$, заключаем, что если $\theta_2^\mu = \theta_2$, то $\theta_2^{\mu^\sigma} = \theta_2$, где $\mu \in M$ и $\sigma \in S$. Значит, $\theta_2^\mu = \theta_2^{\sigma^{-1}}$. Однако μ оставляет на месте характеры α_i как для $i \in \Delta_3$, так и для $i \in \Delta_4$. Поэтому σ^{-1} также оставляет на месте Δ_3 и Δ_4 , т.е. $\sigma \in \text{Stab}_S(\Delta_3) \cap \text{Stab}_S(\Delta_4)$. Запишем элемент μ в виде $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m$. Отметим, что для $i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4)$ выполнено $(\eta_3^{(i)})^{\mu_i} = \eta_2^{(i)}$ при $\mu_i \in R_i \setminus L_i$. Следовательно, элемент μ принадлежит $I_G(\theta_2)$ только в том случае, когда $\mu_i \in L_i$ для всех $i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4)$. Обозначим

$$M_2 = \{\mu \in M \mid \mu_i \in L_i \text{ для всех } i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4)\}.$$

Аналогично предыдущему случаю имеем $H_2 \cap M = M_2 \triangleleft H_2$ и H_2/M_2 – подгруппа $\text{Stab}_S(\Delta_3) \cap \text{Stab}_S(\Delta_4)$.

Покажем, что $H_1 \cap H_2 = N$. Пусть $x \in H_1 \cap H_2$. По доказанному выше элемент x можно записать в виде $x = \nu_1 \sigma_1 = \nu_2 \sigma_2$, где $\nu_i \in M_i$, $i = 1, 2$, а $\sigma_1 \in \text{Stab}_S(\Delta_1) \cap \text{Stab}_S(\Delta_2)$ и $\sigma_2 \in \text{Stab}_S(\Delta_3) \cap \text{Stab}_S(\Delta_4)$. В таком случае $\theta_1^{\nu_1 \sigma_1} = \theta_1 = \theta_1^{\nu_2 \sigma_2}$ и $\theta_2^{\nu_1 \sigma_1} = \theta_2 = \theta_2^{\nu_2 \sigma_2}$. Так как $\nu_1 \sigma_1$ оставляет на месте Δ_1 и Δ_2 , то $\nu_2 \sigma_2$ (а стало быть, и σ_2) оставляет на месте Δ_1 и Δ_2 . Аналогично, так как $\nu_2 \sigma_2$ оставляет на месте Δ_3 и Δ_4 , то и σ_1 оставляет на месте Δ_3 и Δ_4 . Итак, $\sigma_1, \sigma_2 \in \bigcap_{i=1}^4 \text{Stab}_S(\Delta_i) = 1$ в силу леммы 1, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Поэтому $H_1 \cap H_2 \leq M_1 \cap M_2$. Из предыдущего ясно, что $M_1 \cap M_2 = N$, таким образом,

$$H_1 \cap H_2 = N. \quad (1)$$

2) Пусть Ψ – неприводимый характер группы $N = \prod_{i=1}^m L_i$, определенный следующим образом: $\Psi = \eta_5^{(1)} \eta_5^{(2)} \cdots \eta_5^{(m)}$, где η_5 – неприводимый характер степени 5 группы $L \simeq A_5$ (см. таблицу 1), а $\eta_5^{(i)}$ – неприводимый характер группы $L_i \simeq L$ той же степени. Поскольку скалярное произведение $[\eta_i \eta_j, \eta_5]_L$ (на группе L) для любых $i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$ (см. таблицу 2) не меньше единицы, то для любых элементов $x, y \in G$ имеем $[\theta_1^x \theta_1^y, \Psi]_N \geq 1$ и $[\theta_2^x \theta_2^y, \Psi]_N \geq 1$. Кроме того, можно считать, что Δ_1 – непустое множество (лемма 1'). Так как $[\eta_5^2, \eta_5]_L = 2$ (см. таблицу 2), то в этом случае мы имеем строгое неравенство $[\theta_1^2, \Psi]_N > 1$. Пусть $x_1 = 1$, а $x_2, x_3, \dots, x_n$ – произвольные элементы группы G ; тогда

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \theta_1^x \theta_1^{x_j}, \Psi \right]_N > n^2, \quad (2)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \theta_2^x \theta_2^{x_j}, \Psi \right]_N \geq n^2. \quad (3)$$

3) Для неприводимых характеров θ_1 и θ_2 группы N рассмотрим индуцированные характеры θ_1^G и θ_2^G группы G .

Пусть неприводимый характер φ группы G входит в разложение θ_1^G в сумму неприводимых характеров группы G , а неприводимый характер ξ группы G входит в разложение θ_2^G в сумму неприводимых характеров G . Тогда по теории Клиффорда (см. лемму 2)

$$\varphi|_N = e \sum_{k=1}^{l_1} \theta_1^{x_k}, \quad \xi|_N = f \sum_{k=1}^{l_2} \theta_2^{y_k},$$

где $\theta_1^{x_k}$ – характеры, сопряженные к θ_1 , и $\theta_2^{y_k}$ – характеры, сопряженные к θ_2 . При этом $l_1 = |G : I_G(\theta_1)| = |G : H_1|$ и $l_2 = |G : I_G(\theta_2)| = |G : H_2|$. Так как G – ASR -группа, то квадраты характеров φ и ξ раскладываются в суммы неприводимых характеров группы G с кратностями, не превосходящими единицы, т.е. (на языке характеров)

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \sum_i \delta_i \chi_i, \quad \text{где } \delta_i \in \{0, 1\}, \quad \chi_i \in \text{Irr}(G), \\ \xi^2 &= \sum_i \varepsilon_i \chi_i, \quad \text{где } \varepsilon_i \in \{0, 1\}, \quad \chi_i \in \text{Irr}(G). \end{aligned}$$

Пусть индуцированный характер $\Psi^G = \sum_{j=1}^r d_j \chi_j$, где χ_j – неприводимые характеры группы G , а d_j – целые положительные числа. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$r \leq k_0(G/N), \quad \sum_{j=1}^r d_j^2 = |G : N|. \quad (4)$$

Найдем значение скалярного произведения $[\varphi^2, \Psi^G]_G$ двумя способами. Во-первых,

$$[\varphi^2, \Psi^G]_G = \left[\sum_i \delta_i \chi_i, \sum_{j=1}^r d_j \chi_j \right]_G = \sum_{j=1}^r \delta_j d_j.$$

С другой стороны, по закону взаимности Фробениуса

$$[\varphi^2, \Psi^G]_G = [\varphi^2|_N, \Psi]_N.$$

Используя разложение $\varphi|_N$ и применяя неравенство (2), получаем, что

$$[\varphi^2|_N, \Psi]_N = \left[\left(e \sum_{k=1}^{l_1} \theta_1^{x_k} \right)^2, \Psi \right]_N > l_1^2 = |G : H_1|^2.$$

Тем самым, имеем следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^r \delta_j d_j > |G : H_1|^2.$$

Для скалярного произведения $[\xi^2, \Psi^G]_G$, выполняя аналогичные вычисления и используя неравенство (3), получаем

$$\sum_{j=1}^r \varepsilon_j d_j \geq |G : H_2|^2.$$

Оценим сумму $\sum_{j=1}^r \delta_j d_j$ с помощью неравенства Коши–Буняковского–Шварца:

$$\sum_{j=1}^r \delta_j d_j \leq \left(\sum_{j=1}^r \delta_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^r d_j^2 \right)^{1/2}.$$

Так как G является ASR -группой, то коэффициент δ_j равен 0 или 1 для любого $j \leq r$. Поэтому из (4) следует, что справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^r \delta_j d_j \leq r^{1/2} |G : N|^{1/2} \leq k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2}.$$

В итоге имеем

$$|G : H_1|^2 < k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2}.$$

В точности так же оценивая сумму $\sum_{j=1}^r \varepsilon_j d_j$, получаем, что

$$|G : H_2|^2 \leq k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2}.$$

Перемножив последние два неравенства, имеем

$$\frac{|G|^4}{|H_1|^2 |H_2|^2} < k_0(G/N) |G : N|.$$

Преобразуем выражение в левой части неравенства. Из (1) следует, что $H_1 \cap H_2 = N$, поэтому $|H_1| |H_2| = |H_1 H_2| |H_1 \cap H_2| \leq |G| |N|$. Таким образом,

$$\frac{|G|^4}{|H_1|^2 |H_2|^2} \geq |G : N|^2$$

и, как следствие, $k_0(G/N) > |G : N|$. Последнее приводит к противоречию.

Лемма 7 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы для случая $L = A_6$

ЛЕММА 8. Пусть группа G – минимальный контрпример к теореме. Тогда G не содержит композиционных факторов, изоморфных группе A_6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G содержит композиционный фактор, изоморфный A_6 . По лемме 6 группа G является подгруппой сплетения $\text{Aut}(L) \wr S$, где S – разрешимая подгруппа симметрической группы степени m , а $L = A_6$. Напомним, что любой элемент x из G представим в виде $\mu\sigma$, где $\mu \in \prod_{i=1}^m R_i$, $\sigma \in S$ и $R_i \simeq \text{Aut}(L_i) = P\Gamma L_2(9)$ (см. лемму 4). Пусть F – подгруппа $\text{Aut}(L)$, изоморфная $PGL_2(9)$, и $\mathfrak{M}_0 = \prod_{i=1}^m F_i$, где $F_i \simeq F$. Обозначим через M_0 подгруппу группы G , изоморфную $\mathfrak{M}_0 \cap M$, где $M = G \cap \mathfrak{M}$ (см. обозначения из § 2).

Разобьем, как и в случае леммы 7, все доказательство на три этапа.

1) Сначала построим два неприводимых характера θ_1 и θ_2 группы $N = \prod_{i=1}^m L_i$ следующим образом:

$$\theta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m,$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \eta_5^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_1, \\ \alpha_i &= \eta_4^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_2, \\ \alpha_i &= \eta_3^{(i)}, & \text{если } i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2);\end{aligned}$$

и

$$\theta_2 = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m,$$

где

$$\begin{aligned}\beta_i &= \eta_5^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_3, \\ \beta_i &= \eta_4^{(i)}, & \text{если } i \in \Delta_4, \\ \beta_i &= \eta_3^{(i)}, & \text{если } i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4).\end{aligned}$$

Здесь η_5, η_4, η_3 – неприводимые характеры группы $L = A_6$ степеней 10, 9, 8 соответственно (см. таблицу 3).

Рассмотрим подгруппы инерции характеров θ_1, θ_2 в G .

Пусть $H_1 = I_G(\theta_1)$. Если $\theta_1^\mu = \theta_1$, то $\theta_1^{\mu\sigma} = \theta_1$, где $\mu \in M$ и $\sigma \in S$. Значит, $\theta_1^\mu = \theta_1^{\sigma^{-1}}$. Однако μ оставляет на месте характеры α_i как для $i \in \Delta_1$, так и для $i \in \Delta_2$. Поэтому σ^{-1} также оставляет на месте Δ_1 и Δ_2 , т.е. $\sigma \in \text{Stab}_S(\Delta_1) \cap \text{Stab}_S(\Delta_2)$. Запишем элемент μ в виде произведения $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m$, где $\mu_i \in R_i$ для всех i . Отметим, что для $i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ $(\eta_3^{(i)})^{\mu_i} = \eta_2^{(i)}$ при $\mu_i \in R_i \setminus F_i$. Следовательно, элемент μ принадлежит $I_G(\theta_1)$ только в том случае, когда $\mu_i \in F_i$ для всех $i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Обозначим

$$M_1 = \{\mu \in M \mid \mu_i \in F_i \text{ для всех } i \in \Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)\}.$$

Как и в п. 1) доказательства леммы 7, имеем

$$H_1 \cap M = M_1 \triangleleft H_1, \quad H_1/M_1 \text{ – подгруппа } \text{Stab}_S(\Delta_1) \cap \text{Stab}_S(\Delta_2).$$

Совершенно таким же образом для $I_G(\theta_2) = H_2$ определяем подгруппу

$$M_2 = \{\mu \in M \mid \mu_i \in F_i \text{ для всех } i \in \Omega \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4)\}.$$

Повторяя с очевидными изменениями предыдущие рассуждения для H_1 , получаем

$$H_2 \cap M = M_2 \triangleleft H_2, \quad H_2/M_2 \text{ – подгруппа } \text{Stab}_S(\Delta_3) \cap \text{Stab}_S(\Delta_4).$$

Нетрудно убедиться, что $H_1 \cap H_2 \leq M_1 \cap M_2$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = M_0$. Таким образом,

$$H_1 \cap H_2 = M_0. \quad (5)$$

2) Пусть Ψ – неприводимый характер группы $N = \prod_{i=1}^m L_i$, где $L_i \simeq L \simeq A_6$ для всех i , определенный следующим образом: $\Psi = \eta_5^{(1)} \eta_5^{(2)} \cdots \eta_5^{(m)}$, где η_5 – неприводимый характер группы L (см. таблицу 3).

Поскольку для скалярного произведения справедливо $[\eta_i \eta_j, \eta_5]_L \geq 2$ при $i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$ (см. таблицу 4), то для любых двух элементов x, y группы G

имеем $[\theta_1^x \theta_1^y, \Psi]_N \geq 2^m$ и $[\theta_2^x \theta_2^y, \Psi]_N \geq 2^m$. Кроме того, Δ_1 и Δ_2 – непустые множества и $[\eta_5 \eta_4, \eta_5]_L = 3$ (см. таблицу 4). Поскольку S – транзитивная группа на Ω , то найдется такой элемент $x^{-1} \in G$, который переставляет на место характера $\eta_5^{(i_1)}$ другой характер, фигурирующий в определении характера θ_1 , – характер $\eta_4^{(i_2)}$, где $i_1 \in \Delta_1$, $i_2 \in \Delta_2$. Рассуждаем более подробно. Как отмечено в § 2, элемент x^{-1} из G имеет запись в виде $x^{-1} = \mu\sigma$, где $\mu \in M$ и $\sigma \in S$, и переводит символ i_1 в i_2 , т.е.

$$\theta_1^x = (\alpha_1 \cdots \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_2} \cdots \alpha_m)^x = (\gamma_1 \cdots \alpha_{i_2} \cdots \gamma_{i_2} \cdots \gamma_m).$$

Здесь $\gamma_j = \alpha_{\sigma(j)}^\mu$. В этом случае имеет место строгое неравенство $[\theta_1 \theta_1^x, \Psi]_N > 2^m$. Пусть $x_1 = 1$, $x_2 = x$, а $x_3, \dots, x_n$ – произвольные элементы группы G . Тогда

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \theta_1^{x_i} \theta_1^{x_j}, \Psi \right]_N > 2^m n^2, \quad (6)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \theta_2^{x_i} \theta_2^{x_j}, \Psi \right]_N \geq 2^m n^2. \quad (7)$$

3) Для характеров θ_1, θ_2 группы N , определенных выше, рассмотрим индуцированные характеры θ_1^G и θ_2^G группы G . Пусть неприводимый характер φ группы G входит в разложение θ_1^G в сумму неприводимых характеров G , а неприводимый характер $\xi \in \text{Irr}(G)$ входит в разложение θ_1^G в сумму неприводимых характеров G . Тогда по лемме 2

$$\varphi|_N = e \sum_{k=1}^{l_1} \theta_1^{x_k}, \quad \xi|_N = f \sum_{k=1}^{l_2} \theta_2^{y_k},$$

где $\theta_1^{x_k}$ – характеры, сопряженные к θ_1 , и $\theta_2^{y_k}$ – характеры, сопряженные к θ_2 . Пусть $l_1 = |G : I_G(\theta_1)| = |G : H_1|$ и $l_2 = |G : I_G(\theta_2)| = |G : H_2|$. Так как G – ASR -группа, то тензорные квадраты неприводимых представлений, определяющих характеры φ и ξ , раскладываются в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими единицы, т.е. (на языке характеров)

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \sum_i \delta_i \chi_i, \quad \text{где } \delta_i \in \{0, 1\}, \quad \chi_i \in \text{Irr}(G), \\ \xi^2 &= \sum_i \varepsilon_i \chi_i, \quad \text{где } \varepsilon_i \in \{0, 1\}, \quad \chi_i \in \text{Irr}(G). \end{aligned}$$

В свою очередь, пусть $\Psi^G = \sum_{j=1}^r d_j \chi_j$, где χ_j – неприводимые характеры группы G , а d_j – целые положительные числа. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$r \leq k_0(G/N), \quad \sum_{j=1}^r d_j^2 = |G : N|. \quad (8)$$

Найдем значение скалярного произведения $[\varphi^2, \Psi^G]_G$ двумя способами. Во-первых,

$$[\varphi^2, \Psi^G]_G = \left[\sum_i \delta_i \chi_i, \sum_{j=1}^r d_j \chi_j \right]_G = \sum_{j=1}^r \delta_j d_j.$$

С другой стороны, по закону взаимности Фробениуса

$$[\varphi^2, \Psi^G]_G = [\varphi^2|_N, \Psi]_N.$$

Используя разложение φ_N и неравенство (6), имеем

$$[\varphi^2|_N, \Psi]_N = \left[\left(e \sum_{k=1}^{l_1} \theta_1^{x_k} \right)^2, \Psi \right]_N > 2^m l_1^2 = 2^m |G : H_1|^2.$$

Тем самым, получаем следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^r \delta_j d_j > 2^m |G : H_1|^2.$$

Аналогично, преобразования для скалярного произведения $[\xi^2, \Psi^G]_G$ и неравенство (7) дают

$$\sum_{j=1}^r \varepsilon_j d_j \geq 2^m |G : H_2|^2.$$

Оценим сумму $\sum_{j=1}^r \delta_j d_j$ с помощью неравенства Коши–Буняковского–Шварца:

$$\sum_{j=1}^r \delta_j d_j \leq \left(\sum_{j=1}^r \delta_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^r d_j^2 \right)^{1/2}.$$

Так как δ_j равен 0 или 1, то из (8) следует, что имеет место неравенство $k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2} \geq r^{1/2} |G : N|^{1/2} \geq \sum_{j=1}^r \delta_j d_j$. Поэтому

$$k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2} > 2^m |G : H_1|^2.$$

В точности так же, оценивая сумму $\sum_{j=1}^r \varepsilon_j d_j$, имеем

$$k_0(G/N)^{1/2} |G : N|^{1/2} \geq 2^m |G : H_2|^2.$$

Перемножив последние два неравенства, получаем

$$k_0(G/N) |G : N| > \frac{2^{2m} |G|^4}{|H_1|^2 |H_2|^2}.$$

Займемся правой частью этого неравенства. Из (5) следует, что $H_1 \cap H_2 = M_0$, поэтому $|H_1| |H_2| = |H_1 H_2| |H_1 \cap H_2| \leq |G| |M_0|$. Напомним, что $M_0 = PGL_2^m(9) \cap M$. Поэтому $|M_0| \leq 2^m |N|$ и, стало быть, $|H_1| |H_2| \leq 2^m |G| |N|$. Тем самым, оказывается, что правая часть неравенства не меньше $|G : N|^2$ и, как следствие, $k_0(G/N) > |G : N|$. Последнее приводит к противоречию.

Лемма 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно рассматривать и другое обобщение SR -групп, а именно группы G , у которых для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$ произведение неприводимых обыкновенных характеров χ и $\bar{\chi}$ в своем разложении по неприводимым характерам группы G имеет кратности не более единицы. Как можно убедиться, используя [6] и настоящую работу, конечные группы с указанным свойством также разрешимы.

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, “On representations of certain finite groups”, *Amer. J. Math.*, **63**:1, (1941), 57–63.
- [2] М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley, Reading, MA–London, 1962.
- [3] G. W. Mackey, “Multiplicity free representations of finite groups”, *Pacific. J. Math.*, **8**, (1958), 503–510.
- [4] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры*, Физматлит, М., 2000.
- [5] В. Д. Мазуров, В. А. Чуркин (ред.), *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 16-е, дополн., Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 2006; англ. пер.: V. D. Mazurov, Yu. I. Merzlyakov, V. A. Churkin (eds.), *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*, ed. 16, Institute of Math., Novosibirsk, 2006.
- [6] Л. С. Казарин, В. В. Янишевский, “О конечных просто приводимых группах”, *Алгебра и анализ*, **19**:6, (2007), 86–116; англ. пер.: L. S. Kazarin, V. V. Yanishevskii, “On finite simply reducible groups”, *St. Petersburg Math. J.*, **19**:6, (2008), 931–951.
- [7] В. А. Белоногов, *Представления и характеры в теории конечных групп*, Акад. наук СССР. Уральское отделение, Свердловск, 1990.
- [8] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1976.
- [9] Á. Seress, “The minimal base size of primitive solvable permutation groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **53**:2, (1996), 243–255.
- [10] S. Dolfi, “Orbits of permutation groups on the power set”, *Arch. Math. (Basel)*, **75**:5, (2000), 321–327.
- [11] P. X. Gallagher, “The number of conjugacy classes in a finite group”, *Math. Z.*, **118**:3, (1970), 175–179.
- [12] L. G. Kovács, G. R. Robinson, “On the number of conjugacy classes of a finite group”, *J. Algebra*, **160**:2, (1993), 441–460.
- [13] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford Univ. Press, Eynsham, 1985.

Л. С. Казарин (L. S. Kazarin)

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
13.02.2009 и 30.06.2009

Е. И. Чанков (E. I. Chankov)

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: EIChankov@yandex.ru