Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 3, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:16:15

УДК 512.54+510.67

Е. И. Бунина

Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами

В работе доказано, что (элементарные) группы Шевалле над локальными кольцами с обратимой двойкой элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы и весовые решетки совпадают, а кольца, по которым группы построены, элементарно эквивалентны.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: группы Шевалле, элементарная эквивалентность, локальные кольца.

Введение

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют различные мощности (более подробные примеры см. в [1]).

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А. И. Мальцевым в 1961 г. в работе [2]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = \text{GL}, \text{SL}, \text{PGL}, \text{PSL}$, $n, m \geq 3$, K, L – поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 г., когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме (см. [1]) К. И. Бейдар и А. В. Михалёв (см. [3]) сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L – тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2005 гг. автор продолжила изучать некоторые проблемы этого типа (см. [4]–[9]). Результаты А. И. Мальцева были обобщены для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями.

Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал (совпадающий с радикалом J этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

В работе [8] были анонсированы следующие результаты об элементарной эквивалентности групп Шевалле над локальными кольцами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G_\pi(\Phi, R)$ и $G_{\pi'}(\Phi', R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', R')$) – две (элементарные) группы Шевалле над локальными кольцами R и R' с обратимой двойкой (в случае системы корней G_2 – с обратимой шестеркой), Φ, Φ' – неразложимые системы корней рангов, больших единицы. Тогда из элементарной эквивалентности этих групп Шевалле следует, что $\Phi \cong \Phi'$ и $R \equiv R'$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', R')$) – две (элементарные) группы Шевалле над элементарно эквивалентными локальными кольцами R и R' , где представления π и π' имеют изоморфные решетки весов. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны.

В настоящей работе эти теоремы будут подробно доказаны. Основным результатом работы является

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', R')$) – две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными локальными кольцами R и R' с обратимой двойкой (в случае системы корней G_2 – с обратимой шестеркой), с неразложимыми системами корней Φ, Φ' рангов, больших одного, с решетками весов Λ и Λ' соответственно. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, кольца R и R' элементарно эквивалентны, решетки Λ и Λ' совпадают.

§ 1. Необходимые сведения о группах Шевалле

Основные сведения о системах корней, полупростых алгебрах Ли, группах Шевалле, которые будут использоваться в настоящей работе, можно найти в работах автора [9]–[11]. Подробные сведения о системах корней и их свойствах можно найти в книгах [12], [13]. Более подробные сведения о полупростых алгебрах Ли можно найти в книге [12]. Более подробные сведения об элементарных группах Шевалле содержатся в книге [14], а сведения о группах Шевалле (в том числе и над кольцами) – в работах [15], [16] (см. также ссылки в этих работах).

Мы фиксируем некоторую произвольную (неразложимую) систему корней Φ ранга $l \geq 2$. Будем считать, что в этой системе n положительных и n отрицательных корней.

Кроме того фиксировано некоторое бесконечное локальное кольцо R с обратимой двойкой (в случае системы G_2 – с обратимой шестеркой).

Мы рассматриваем произвольную группу Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, построенную по системе корней Φ , кольцу R и представлению π соответствующей алгебры Ли. Как известно, группа Шевалле определяется системой корней, кольцом R и решеткой весов представления π . Будем обозначать эту решетку через Λ или Λ_π . Если рассматривается элементарная группа Шевалле, будем обозначать ее через $E_\pi(\Phi, R)$.

Подгруппа диагональных (в стандартном базисе из весовых векторов) матриц группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ называется *стандартным максимальным тором* группы $G_\pi(\Phi, R)$ и обозначается через $T_\pi(\Phi, R)$. Эта группа изоморфна группе $\text{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)$.

Обозначим через $h(\chi)$ элемент тора $T_\pi(\Phi, R)$, соответствующий гомоморфизму $\chi \in \text{Hom}(\Lambda(\pi), R^*)$.

В частности, $h_\alpha(u) = h(\chi_{\alpha,u})$, $u \in R^*$, $\alpha \in \Phi$, где

$$\chi_{\alpha,u}: \lambda \mapsto u^{\langle \lambda, \alpha \rangle}, \quad \lambda \in \Lambda_\pi.$$

Связь между группами Шевалле и соответствующими элементарными группами Шевалле составляет значительную проблему в теории групп Шевалле над кольцами. Если для элементарных групп Шевалле существует удобная система порождающих $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, и соотношения между этими порождающими изучены, ничего подобного невозможно сделать для самих групп Шевалле.

Если K – алгебраически замкнутое поле, то

$$G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)$$

для любого представления π . Это равенство неверно даже в случае полей, не являющихся алгебраически замкнутыми.

Однако если G – односвязная группа, а кольцо R *полулокально* (т.е. содержит конечное число максимальных идеалов), то имеет место соотношение

$$G_{\text{sc}}(\Phi, R) = E_{\text{sc}}(\Phi, R).$$

(см. [17]–[20]).

Покажем, в чем состоит различие между группами Шевалле и их элементарными подгруппами, когда кольцо R полулокально, а группа Шевалле не является односвязной. В этом случае

$$G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)T_\pi(\Phi, R)$$

(см. [17], [18], [20]), причем элементы $h(\chi)$ связаны с элементарными порождающими формулой

$$h(\chi)x_\beta(\xi)h(\chi)^{-1} = x_\beta(\chi(\beta)\xi). \quad (1)$$

Известно, что группа элементарных матриц $E_2(R) = E_{\text{sc}}(A_1, R)$ не обязательно нормальна в специальной линейной группе $\text{SL}_2(R) = G_{\text{sc}}(A_1, R)$ (см. [21]–[23]).

Однако если Φ – неприводимая система корней ранга $l \geq 2$, то $E(\Phi, R)$ всегда нормальна в $G(\Phi, R)$. В случае полулокальных колец с $1/2$ легко показать, что

$$[G(\Phi, R), G(\Phi, R)] = E(\Phi, R).$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

В книге [1] доказано, что элементарная эквивалентность сохраняется при взятии прямых произведений, откуда немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если полупростая алгебра Ли $\mathcal{L}$ представляется в виде $\mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_k$, где алгебры $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ просты, R, R' – кольца, то из попарной эквивалентности (элементарных) групп Шевалле*

$$G_{\pi|_{\mathcal{L}_1}}(\mathcal{L}_1, R) \text{ и } G_{\pi'|_{\mathcal{L}_1}}(\mathcal{L}_1, R'), \quad \dots, \quad G_{\pi|_{\mathcal{L}_k}}(\mathcal{L}_k, R) \text{ и } G_{\pi'|_{\mathcal{L}_k}}(\mathcal{L}_k, R')$$

следует элементарная эквивалентность (элементарных) групп Шевалле $G_\pi(\mathcal{L}, R)$ и $G_{\pi'}(\mathcal{L}, R')$.

Таким образом, нам достаточно доказать теорему для простых алгебр Ли.

Следующая теорема верна для произвольных коммутативных колец с единицей R и R' .

ТЕОРЕМА 3. *Если две группы Шевалле $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_\pi(\Phi, R')$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же ее представления π , а также с помощью элементарно эквивалентных колец R и R' , то $G \equiv G'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем из определения группы Шевалле,

$$G = \{(a_{i,j}) \in M_N(R) \mid p_1(a_{i,j}) = p_2(a_{i,j}) = \dots = p_m(a_{i,j}) = 0\},$$

$$G' = \{(a_{i,j}) \in M_N(R') \mid p_1(a_{i,j}) = p_2(a_{i,j}) = \dots = p_m(a_{i,j}) = 0\},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_m$ – некоторые заранее известные полиномы с целыми коэффициентами, N – некоторое заранее известное целое число.

Предположим, что мы имеем некоторое предложение φ группового языка, которое будем рассматривать на группах G и G' . Переведем его в предложение $\tilde{\varphi}$ кольцевого языка следующим образом:

подформула $\forall g \quad \psi(g)$ переходит в подформулу

$$\forall a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g \quad (p_1(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g) = 0 \\ \implies \tilde{\psi}(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g));$$

подформула $\exists g \quad \psi(g)$ переходит в подформулу

$$\exists a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g \quad (p_1(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g) = 0 \\ \wedge \tilde{\psi}(a_{1,1}^g, \dots, a_{N,N}^g));$$

подформула $g = h$ переходит в подформулу

$$a_{1,1}^g = a_{1,1}^h \wedge \dots \wedge a_{N,N}^g = a_{N,N}^h;$$

подформула $g = h \cdot f$ переходит в подформулу

$$\bigwedge_{i,j=1}^N \left(a_{i,j}^g = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^h \cdot a_{k,j}^f \right).$$

Очевидно, что $G(R) \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $R \models \tilde{\varphi}$.

Таким образом, если кольца R и R' элементарно эквивалентны, то для любого предложения φ группового языка

$$G \models \varphi \iff R \models \tilde{\varphi} \iff R' \models \tilde{\varphi} \iff G' \models \varphi.$$

Значит, $G \equiv G'$.

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема верна для локальных и полулокальных колец R и R' с $1/2$.

ТЕОРЕМА 4. *Если две элементарные группы Шевалле $E = E_\pi(R, \Phi)$ и $E' = E_\pi(R', \Phi)$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же ее представления π , а также с помощью элементарно эквивалентных полулокальных колец R и R' с $1/2$, то $E \equiv E'$.*

Эта теорема, очевидно, следует из теоремы 3 и предложения 2.

§ 3. Переход к элементарной присоединенной группе

Теперь мы хотим доказать, что если две (элементарные) группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их системы корней совпадают, а исходные кольца элементарно эквивалентны, решетки весов изоморфны.

Для удобства мы будем считать кольца бесконечными. Заметим, что это предположение ни в какой степени не ограничивает общность результата, так как в случае двух конечных колец R и R' (элементарные) группы Шевалле $G(R)$ и $G(R')$ (или $E(R)$ и $E(R')$) конечны, т.е.

$$G(R) \equiv G(R') \implies G(R) \cong G(R').$$

Таким образом, мы можем сослаться на доказанные ранее результаты, которые показывают, что в этом случае $\Phi \cong \Phi'$, $R \cong R'$, т.е. $\Phi \cong \Phi'$, $R \equiv R'$.

Для начала покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если две группы Шевалле G и G' элементарно эквивалентны, то их элементарные подгруппы E и E' также элементарно эквивалентны.*

ЛЕММА. *Пусть $G = G_\pi(\Phi, R)$ – группа Шевалле, $E = E_\pi(\Phi, R)$ – ее элементарная подгруппа, R – полулокальное кольцо с $1/2$ (и $1/3$, если $\Phi \cong G_2$). Тогда $E = [G, G]$ и существует такое число N , зависящее от Φ , но не зависящее от R (и даже от представления π), что любой элемент группы E есть произведение не более чем N коммутаторов группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система корней Φ имеет ранг l .

Если R – это (полу)локальное кольцо, то для любого элемента $g \in E$ имеет место разложение Гаусса (см. [18])

$$g = uhvu', \quad u, u' \in U, \quad v \in V, \quad h \in H.$$

Известно (см. [14]), что элементы u, u', v представляются в виде произведения не более чем n (количество положительных корней системы Φ) элементов $x_\alpha(t)$, а элемент h есть произведение не более чем l элементов вида $h_\alpha(t)$, которые в свою очередь являются произведениями не более шести элементов $x_\alpha(t)$.

Значит, каждый элемент группы $E_\pi(\Phi, R)$ есть произведение не более чем $6l + 3n$ элементов $x_\alpha(t)$, где n – количество положительных корней, зависящее от l , как показано в таблице 1.

Осталось показать, что каждое $x_\alpha(t)$ является произведением некоторого ограниченного сверху числа коммутаторов.

Для этого следует рассмотреть типы корней по отдельности.

А именно, если рассмотреть любую систему корней A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$), то в ней каждый корень входит в какую-то систему типа A_2 , т.е. можно считать, что $\alpha = \alpha_i + \alpha_j$ для некоторых корней α_i, α_j ; эти три корня образуют множество положительных корней системы A_2 . В этом случае

$$[x_{\alpha_i}(t), x_{\alpha_j}(s)] = x_\alpha(\pm ts),$$

откуда любой $x_\alpha(t)$ является коммутатором.

Таблица 1

тип системы корней	ранг	n
A_l	l	$(l^2 + l)/2$
B_l	l	l^2
C_l	l	l^2
D_l	l	$l^2 - l$
E_6	6	36
E_7	7	63
E_8	8	120
F_4	4	24
G_2	2	6

Для систем корней B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$), F_4 каждый корень может рассматриваться как длинный или короткий корень системы B_2 . В этой системе любой корень имеет вид

$$\pm e_1, \pm e_2 \quad \text{или} \quad \pm e_1 \pm e_2.$$

Заметим, что:

1) $\pm e_1 \pm e_2 = (\pm e_1) + (\pm e_2)$ и никакая линейная комбинация корней $\pm e_1$ и $\pm e_2$ с натуральными коэффициентами, отличная от $(\pm e_1) + (\pm e_2)$, не является корнем, откуда

$$[x_{\pm e_1}(t), x_{\pm e_2}(s)] = x_{\pm e_1 \pm e_2}(\pm 2ts),$$

т.е. $x_{\pm e_1 \pm e_2}(t)$ является коммутатором (так как $1/2 \in R$);

2) $\pm e_1 = (\pm e_1 - e_2) + e_2$, откуда

$$[x_{\pm e_1 - e_2}(t), x_{e_2}(s)] = x_{\pm e_1}(\pm 2ts)x_{\pm e_1 + e_2}(cts^2),$$

поэтому $x_{\pm e_1}(t)$ является произведением двух коммутаторов.

Значит, любой элемент $x_\alpha(t)$ является произведением не более чем двух коммутаторов.

Для системы G_2 корни имеют вид

$$\begin{aligned} & \pm(e_1 - e_2), \quad \pm(e_1 - e_3), \quad \pm(e_2 - e_3), \\ & \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \quad \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \quad \pm(2e_3 - e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \pm(2e_1 - e_2 - e_3) &= \pm(2e_2 - e_1 - e_3) + (\mp(2e_3 - e_1 - e_2)), \\ \pm(2e_2 - e_1 - e_3) &= \pm(2e_3 - e_1 - e_2) + (\pm(2e_1 - e_2 - e_3)), \\ \pm(2e_3 - e_1 - e_2) &= \pm(2e_1 - e_2 - e_3) + (\mp(2e_2 - e_1 - e_3)). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого длинного корня α элемент $x_\alpha(t)$ является коммутатором.

Далее, имеем

$$e_1 - e_2 = (e_1 - e_3) + (e_3 - e_2),$$

откуда

$$[x_{e_1-e_3}(t), x_{e_3-e_2}(s)] = x_{e_1-e_2}(\pm 3ts)x_{-2e_2+e_1+e_3}(c_1ts^2)x_{2e_1-e_2-e_3}(c_2t^2s).$$

Значит, при $1/3 \in R$ любой элемент $x_{e_i-e_j}(t)$ является произведением трех коммутаторов. Следовательно, любой элемент $x_\alpha(t)$ является произведением не более чем трех коммутаторов.

Отсюда мы видим, что любой элемент элементарной группы Шевалле $E_\pi(\Phi, R)$ есть произведение не более чем M коммутаторов группы $G_\pi(\Phi, R)$, где число M зависит только от системы корней Φ .

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Рассмотрим множество предложений

$$\begin{aligned} \text{Define}_M &:= \forall x_1, \dots, x_M, y_1, \dots, y_M, z_1, \dots, z_M, t_1, \dots, t_M \\ &\quad \exists v_1, \dots, v_M, u_1, \dots, u_M \\ &\quad ([x_1, y_1] \cdots [x_M, y_M])([z_1, t_1] \cdots [z_M, t_M]) = [u_1, v_1] \cdots [u_M, v_M]. \end{aligned}$$

Каждое такое предложение утверждает, что каждый элемент коммутанта группы, на которой оно рассматривается, есть произведение не более чем M коммутаторов. Мы знаем, что для групп G и G' существует (одно и то же, так как они элементарно эквивалентны) M такое, что предложение Define_M выполняется в обеих группах. В этом случае формула

$$\text{Commut}_M(x) := \exists u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_M \quad (x = [u_1, v_1] \cdots [u_M, v_M])$$

определяет в обеих группах G и G' подгруппы E и E' соответственно, откуда следует, что эти подгруппы элементарно эквивалентны.

Предложение 2 доказано.

Естественно, имея две элементарно эквивалентные группы Шевалле E и E' , мы также имеем две элементарно эквивалентные элементарные присоединенные группы Шевалле E_{ad} и E'_{ad} , являющиеся факторами по центру исходных групп.

§ 4. Факторизация для локальных колец

Так как радикал J является единственным максимальным (т.е. наибольшим собственным) идеалом кольца R , то подгруппа $E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$, порожденная элементами $x_\alpha(t)$, $t \in J$, является наибольшей собственной нормальной подгруппой группы $E = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ (см. [24]).

Таким образом, если мы сможем показать, что подгруппа E_J определима в группе E , то, профакторизовав E по E_J , мы получим группу $\tilde{E} \cong E_{\text{ad}}(R/J)$, т.е. группу Шевалле над полем, и после этого сможем сослаться на доказанные в работе [9] результаты по элементарной эквивалентности групп Шевалле над полями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Подгруппа $E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ определима в группе $E = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в группе E элементы A , удовлетворяющие формуле

$$\text{NoInv}_N(A) = \varphi_1(A) \wedge \varphi_2(A),$$

где формула

$$\begin{aligned} \varphi_1(A) := & \bigwedge_{i,j=0}^N \forall X_1, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_j \left(\bigvee_{k=0}^N \exists Z_1, \dots, Z_k \right. \\ & \left. ((1 \cdot X_1 A X_1^{-1} \dots X_i A X_i^{-1}) \cdot (1 \cdot Y_1 A Y_1^{-1} \dots Y_j A Y_j^{-1}) \right. \\ & \left. = (1 \cdot Z_1 A Z_1^{-1} \dots Z_k A Z_k^{-1})) \right) \end{aligned}$$

означает, что элементы $X_1 A X_1^{-1} \dots X_k A X_k^{-1}$ для $k \leq N$ образуют подгруппу в E , а формула

$$\begin{aligned} \varphi_2(A) = & \bigwedge_{i=0}^N \forall X_1, \dots, X_i, X \left(\bigvee_{k=0}^N \exists Z_1, \dots, Z_k \right. \\ & \left. (X(X_1 A X_1^{-1} \dots X_i A X_i^{-1})X^{-1} = Z_1 A Z_1^{-1} \dots Z_k A Z_k^{-1}) \right) \\ & \wedge \exists X \left(\bigwedge_{i=0}^N \forall X_1, \dots, X_i \quad (X \neq X_1 A X_1^{-1} \dots X_i A X_i^{-1}) \right) \end{aligned}$$

означает, что эта подгруппа нормальна и не совпадает со всей группой E .

Если для данного элемента A и некоторого N эта формула истинна, то это означает, что минимальная нормальная подгруппа группы E , содержащая элемент A , является собственной подгруппой в E . Как мы знаем, любая собственная нормальная подгруппа в E содержится в E_J , откуда следует, что $A \in E_J$.

С другой стороны, для любого $A = x_\alpha(u)$, $u \in J$, $\alpha \in \Phi$, формула $\text{NoInv}_N(A)$ истинна для некоторого достаточно большого N (которое можно выбрать единым для данной системы корней).

Зафиксируем такое минимальное натуральное число N , что если для некоторого A не выполняется предложение $\text{NoInv}_N(A)$, то для этого A не будет выполнено и никакое предложение $\text{NoInv}_p(A)$, $p > N$.

Теперь рассмотрим M такое, что в нашей группе истинно предложение

$$\text{Norm}_{M,N} = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 := & \bigwedge_{i,j=0}^M \forall X_1, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_j \\ & \left(\text{NoInv}_N(X_1) \wedge \dots \wedge \text{NoInv}_N(X_i) \wedge \text{NoInv}_N(Y_1) \wedge \dots \wedge \text{NoInv}_N(Y_j) \right. \\ & \implies \bigvee_{k=0}^M \exists Z_1, \dots, Z_k \\ & \left. (\text{NoInv}_N(Z_1) \wedge \dots \wedge \text{NoInv}_N(Z_k) \wedge X_1 \dots X_i Y_1 \dots Y_j = Z_1 \dots Z_k) \right) \end{aligned}$$

(это предложение означает, что произведения $X_1 \cdots X_k$, $k \leq M$, элементов группы E , удовлетворяющие формуле $\text{NoInv}_N(X)$, образуют подгруппу в E);

$$\begin{aligned} \psi_2 &:= \bigwedge_{i=0}^M \forall X_1, \dots, X_i, X \left(\text{NoInv}_N(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{NoInv}_N(X_i) \right. \\ &\quad \implies \bigvee_{j=0}^M \exists Y_1, \dots, Y_j \\ &\quad \left. (\text{NoInv}_N(Y_1) \wedge \cdots \wedge \text{NoInv}_N(Y_j) \wedge X(X_1 \cdots X_i)X^{-1} = Y_1 \cdots Y_j) \right) \end{aligned}$$

(это предложение означает, что образованная подгруппа нормальна);

$$\psi_3 := \exists X_1, X_2 \left(\text{NoInv}_N(X_1) \wedge \text{NoInv}_N(X_2) \wedge X_1 \neq X_2 \right)$$

(данная подгруппа отлична от единичной);

$$\begin{aligned} \psi_4 &:= \exists X \left(\bigwedge_{i=0}^M \forall X_1, \dots, X_i \right. \\ &\quad \left. (\text{NoInv}_N(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{NoInv}_N(X_i) \implies X \neq X_1 \cdots X_i) \right) \end{aligned}$$

(подгруппа не совпадает со всей группой E).

С помощью этой формулы мы находим число M такое, что каждый элемент группы E_J порождается не более чем M элементами $x_\alpha(u)$, $u \in J$.

Теперь формула

$$\begin{aligned} \text{Normal}_{M,N}(X) &:= \bigwedge_{i=0}^M \exists X_1, \dots, X_i \\ &\quad (\text{NoInv}_N(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{NoInv}_N(X_i) \wedge X = X_1 \cdots X_i) \end{aligned}$$

выделяет в группе E подгруппу E_J .

Предложение 3 доказано.

На данный момент мы получаем следующую импликацию:

$$\begin{aligned} G_\pi(\Phi, R) \equiv G_{\pi'}(\Phi', R') &\implies E_\pi(\Phi, R) \equiv E_{\pi'}(\Phi', R') \\ \implies E_{\text{ad}}(\Phi, R) \equiv E_{\text{ad}}(\Phi', R') &\implies E_{\text{ad}}(\Phi, R/J) \equiv E_{\text{ad}}(\Phi', R'/J') \\ \implies \Phi \equiv \Phi'. \end{aligned}$$

Последняя импликация следует из основной теоремы работы [9] (элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями).

Теперь мы можем всегда считать, что система корней группы Шевалле известна.

§ 5. Формулы для разложения Гаусса групп Шевалле

Напомним, что мы имеем систему корней Φ ранга, большего единицы. Множество простых корней будем обозначать через Δ , положительных – через Φ^+ . Подгруппа $U = U(R)$ группы Шевалле G (соответственно E) порождается элементами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi^+$, $t \in R$, подгруппа $V = V(R)$ – элементами $x_{-\alpha}(t)$, $\alpha \in \Phi^+$, $t \in R$.

Для обратимых $t \in R^*$ через $w_\alpha(t)$ обозначается элемент $x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, через $h_\alpha(t)$ – элемент $w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Группа $H = H(R)$ порождается всеми $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) Любой элемент x группы Шевалле G (соответственно E) над локальным кольцом R представляется в виде

$$x = utvu' \quad (\text{соответственно } x = uhvu'),$$

где $u, u' \in U(R)$, $v \in V(R)$, $t \in T(R)$, $h \in H(R)$.

(ii) Для разложений $x_1 = u_1 t_1 v_1 u'_1$ и $x_2 = u_2 t_2 v_2 u'_2$, где

$$\begin{aligned} u_i &= x_{\alpha_1}(t_1^{(i)}) \cdots x_{\alpha_n}(t_n^{(i)}), & u'_i &= x_{\alpha_1}(s_1^{(i)}) \cdots x_{\alpha_n}(s_n^{(i)}), \\ v_i &= x_{-\alpha_1}(r_1^{(i)}) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n^{(i)}), & t_i &= h_{\alpha_1}(\xi_1^{(i)}) \cdots h_{\alpha_l}(\xi_l^{(i)}), \\ & & i &= 1, 2, \end{aligned}$$

существует формула первого порядка кольцевого языка

$$\begin{aligned} &\varphi(t_1^{(1)}, \dots, t_n^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_n^{(2)}, s_1^{(1)}, \dots, s_n^{(1)}, s_1^{(2)}, \dots, s_n^{(2)}, \\ &r_1^{(1)}, \dots, r_n^{(1)}, r_1^{(2)}, \dots, r_n^{(2)}, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}), \end{aligned}$$

истинная тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2.$$

(iii) Аналогично, для разложений $x_1 = u_1 t_1 v_1 u'_1$, $x_2 = u_2 t_2 v_2 u'_2$ и $x_3 = u_3 t_3 v_3 u'_3$, где

$$\begin{aligned} u_i &= x_{\alpha_1}(t_1^{(i)}) \cdots x_{\alpha_n}(t_n^{(i)}), & u'_i &= x_{\alpha_1}(s_1^{(i)}) \cdots x_{\alpha_n}(s_n^{(i)}), \\ v_i &= x_{-\alpha_1}(r_1^{(i)}) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n^{(i)}), & t_i &= h_{\alpha_1}(\xi_1^{(i)}) \cdots h_{\alpha_l}(\xi_l^{(i)}), \\ & & i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

существует формула первого порядка кольцевого языка

$$\psi(t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}, s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)}, r_1^{(i)}, \dots, r_n^{(i)}, \xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}),$$

истинная тогда и только тогда, когда

$$x_3 = x_1 \cdot x_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Нам достаточно доказать, что

$$TUVVUx_\alpha(t) \in TUVVU \quad \forall \alpha \in \Phi^*, \quad \forall t \in R, \quad (2)$$

$$TUVVUh(\chi) \in TUVVU \quad \forall h(\chi) \in T, \quad (3)$$

$$TUVVUx_{-\alpha}(\pm 1) \in TUVVU \quad \forall \alpha \in \Delta, \quad (4)$$

так как

$$\begin{aligned} x_{-\alpha}(t) &= w_{\alpha}(\pm 1)x_{\alpha}(t)w_{\alpha}(\pm 1)^{-1} \\ &= x_{\alpha}(\pm 1)x_{-\alpha}(\mp 1)x_{\alpha}(\pm 1)x_{\alpha}(t)x_{\alpha}(\mp 1)x_{-\alpha}(\pm 1)x_{\alpha}(\mp 1), \end{aligned}$$

и при этом $w_{\alpha}(1) = w_{\alpha_{i_1}}(1) \cdots w_{\alpha_{i_k}}(1)$, где $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \in \Delta$.

Соотношение (2) совершенно очевидно следует из того, что $Ux_{\alpha}(t) \subset U \forall \alpha \in \Phi^+, \forall t \in R$.

Соотношение (3) следует из того, что

$$h(\chi)x_{\alpha}(t)h(\chi)^{-1} = x_{\alpha}(\chi(\alpha)t).$$

Остается доказать соотношение (4).

Без ограничения общности мы можем считать, что $\alpha = \alpha_1 \in \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} B &= h(\chi)x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n)x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n)x_{\alpha_1}(s_1) \cdots x_{\alpha_n}(s_n)x_{-\alpha_1}(1) \\ &= h(\chi)x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n)x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) \\ &\quad \times x_{\alpha_1}(s_1)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(s'_2) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n), \end{aligned} \quad (5)$$

где $s'_2, \dots, s'_n$ — это многочлены с целыми коэффициентами от $s_2, \dots, s_n$.

Если $1 + s_1 \in R^*$, то равенство (5) продолжается так:

$$\begin{aligned} B &= h(\chi)x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n)x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n)x_{-\alpha_1}(\mu)h_{\alpha_1}(\eta)x_{\alpha_1}(s'_1) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n) \\ &= h'(\chi)x_{\alpha_1}(t'_1) \cdots x_{\alpha_n}(t'_n)x_{-\alpha_1}(r'_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r'_n)x_{\alpha_1}(s'_1) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n), \end{aligned}$$

где элементы $\mu, \eta, s'_1, \dots, s'_n, t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, h'(\chi)$ являются многочленами Лорана (с целыми коэффициентами) от старых элементов.

Если $1 + s_1 \notin R^*$, то $s_1 \in R^*$ и

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(s_1)x_{-\alpha_1}(1) &= x_{\alpha_1}(1 + s_1)x_{\alpha_1}(-1)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_1}(-1)x_{\alpha_1}(1) \\ &= x_{\alpha_1}(1 + s_1)w_{\alpha_1}(-1)x_{\alpha_1}(1) = w_{\alpha_1}(-1)x_{-\alpha_1}(-1 - s_1)x_{\alpha_1}(1). \end{aligned}$$

Тогда равенство (5) продолжается так:

$$\begin{aligned} B &= h(\chi)x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n)x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) \\ &\quad \times w_{\alpha_1}(-1)x_{-\alpha_1}(-1 - s_1)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(s'_2) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n) \\ &= h(\chi)x_{\alpha_2}(t'_2) \cdots x_{\alpha_n}(t'_n)x_{\alpha_1}(t_1)x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) \\ &\quad \times w_{\alpha_1}(-1)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(s'_2) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся равенством

$$x_{\alpha_1}(t_1)x_{-\alpha_1}(r_1) = x_{\alpha_1}(1 + t_1)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_1}(1 - r_1)w_{\alpha_1}(1).$$

Получим продолжение равенства (5):

$$\begin{aligned} B &= h(\chi)x_{\alpha_2}(t'_2) \cdots x_{\alpha_n}(t'_n)x_{\alpha_1}(1 + t_1)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_1}(1 - r_1) \\ &\quad \times w_{\alpha_1}(1)x_{-\alpha_2}(r_2) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) \\ &\quad \times w_{\alpha_1}(-1)x_{-\alpha_1}(-1 - s_1)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(s'_2) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n) \\ &= h(\chi)x_{\alpha_1}(t''_1) \cdots x_{\alpha_n}(t''_n)x_{-\alpha_1}(1)x_{\alpha_1}(1 - r_1)x_{-\alpha_2}(r'_2) \cdots x_{-\alpha_n}(r'_n) \\ &\quad \times x_{-\alpha_1}(-1 - s_1)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(s'_2) \cdots x_{\alpha_n}(s'_n) \\ &= h'(\chi)x_{\alpha_1}(\bar{t}_1) \cdots x_{\alpha_n}(\bar{t}_n)x_{-\alpha_1}(\bar{r}_1) \cdots x_{-\alpha_n}(\bar{r}_n)x_{\alpha_1}(\bar{s}_1) \cdots x_{\alpha_n}(\bar{s}_n), \end{aligned}$$

где все новые параметры являются рациональными функциями с целыми коэффициентами от старых параметров.

Таким образом, п. (i) доказан.

Докажем пп. (ii) и (iii). Пусть для $\alpha \in \Phi^+$, $\alpha = \alpha_i$

$$\psi^{\alpha,+}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n; \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l; t)$$

– это формула

$$\begin{aligned} t_1 &= \bar{t}_1 \wedge \dots \wedge t_n = \bar{t}_n \wedge r_1 = \bar{r}_1 \wedge \dots \wedge r_n \\ &= \bar{r}_n \wedge \xi_1 = \bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \xi_l = \bar{\xi}_l \wedge \eta^{\alpha,+}(s_1, \dots, s_n; \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n; t), \end{aligned}$$

где

$$\eta^{\alpha,+}(\cdot) = \eta_1^{\alpha,+}(s_1, \dots, s_n, \bar{s}_1, t) \wedge \dots \wedge \eta_n^{\alpha,+}(s_1, \dots, s_n, \bar{s}_n, t),$$

а формула $\eta_j^{\alpha_i,+}(s_1, \dots, s_n, \bar{s}_j, t)$ имеет вид $s_j = p(s_1, \dots, s_n, t)$, p – многочлен от $n+1$ переменных с целыми коэффициентами такой, что эта формула истинна тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(s_1) \dots x_{\alpha_n}(s_n) x_{\alpha_i}(t) \\ = x_{\alpha_1}(\cdot) x_{\alpha_2}(\cdot) \dots x_{\alpha_{j-1}}(\cdot) x_{\alpha_j}(\bar{s}_j) x_{\alpha_{j+1}}(\cdot) \dots x_{\alpha_n}(\cdot). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что формула $\psi^{\alpha,+}(\cdot)$ истинна тогда и только тогда, когда для

$$\bar{x} = h_{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_l}(\chi) x_{\alpha_1}(\bar{t}_1) \dots x_{\alpha_n}(\bar{t}_n) x_{-\alpha_1}(\bar{r}_1) \dots x_{-\alpha_n}(\bar{r}_n) x_{\alpha_1}(\bar{s}_1) \dots x_{\alpha_n}(\bar{s}_n)$$

и для

$$x = h_{\xi_1 \dots \xi_l}(\chi) x_{\alpha_1}(t_1) \dots x_{\alpha_n}(t_n) x_{-\alpha_1}(r_1) \dots x_{-\alpha_n}(r_n) x_{\alpha_1}(s_1) \dots x_{\alpha_n}(s_n)$$

имеет место равенство

$$\bar{x} = x \cdot x_{\alpha}(t).$$

Пусть теперь

$$h(\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_l}) \in T(R).$$

Пусть формула

$$\psi^T(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n; \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$$

истинна для

$$\bar{x} = x \cdot h(\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_l}).$$

Она имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \xi_1 \cdot \lambda_1 \wedge \dots \wedge \bar{\xi}_l = \xi_l \cdot \lambda_l \wedge \bar{t}_1 = \psi_{1,1}^T(t_1, \lambda_1, \dots, \lambda_l) \wedge \dots \wedge \bar{t}_n \\ &= \psi_{1,n}^T(t_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l) \wedge \bar{r}_1 = \psi_{2,1}^T(r_1, \lambda_1, \dots, \lambda_l) \wedge \dots \wedge \bar{r}_n \\ &= \psi_{2,n}^T(r_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l) \wedge \bar{s}_1 = \psi_{3,1}^T(s_1, \lambda_1, \dots, \lambda_l) \wedge \dots \wedge \psi_{3,n}^T(s_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l), \end{aligned}$$

где $\psi_{i,j}^T$ — многочлен (точнее, одночлен) Лорана с целыми коэффициентами от своих аргументов.

Наконец, для $x_{-\alpha_i}(1)$ и $x_{-\alpha_i}(-1)$ при $\alpha_i \in \Delta$ в доказательстве п. (i) мы показали, что существуют формулы $\psi^{i,1}(\cdot)$ и $\psi^{i,-1}(\cdot)$ от переменных

$$t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l,$$

истинные в случаях $\bar{x} = x \cdot x_{-\alpha_i}(1)$ и $\bar{x} = x \cdot x_{-\alpha_i}(-1)$ соответственно.

Построим теперь формулу $\psi^{w_i}(\cdot)$, истинную при $\bar{x} = x \cdot w_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Delta$.

Она строится так:

$$\begin{aligned} & \psi^{w_i}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \\ & \quad \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l) \\ &= \exists t'_1, \dots, t'_n, t''_1, \dots, t''_n, r'_1, \dots, r'_n, r''_1, \dots, r''_n, s'_1, \dots, s'_n, s''_1, \dots, s''_n \in R \\ & \quad \exists \xi'_1, \dots, \xi'_l, \xi''_1, \dots, \xi''_l \in R^* \\ & \psi^{\alpha_i,+}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \\ & \quad t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l; 1) \\ & \wedge \psi^{i,-1}(t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, \\ & \quad t''_1, \dots, t''_n, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l) \\ & \wedge \psi^{\alpha_i,+}(t''_1, \dots, t''_n, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l, \\ & \quad \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l; 1). \end{aligned}$$

На групповом языке она утверждает

$$\exists x', x'' \quad x' = x \cdot x_{\alpha_i}(1) \wedge x'' = x' \cdot x_{-\alpha_i}(-1) \wedge \bar{x} = x'' \cdot x_{\alpha_i}(1).$$

Если $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$, то для того, чтобы построить формулу $\psi^{w_\alpha}(\cdot)$, истинную при $\bar{x} = x \cdot w_\alpha$, разложим w_α в произведение простых отражений $w_\alpha = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ и применим последовательно умножения на $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$.

Теперь напомним формулу

$$\begin{aligned} & \psi^{\alpha,-}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \\ & \quad \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l; t), \end{aligned}$$

истинную при

$$\bar{x} = x \cdot x_{-\alpha}(t).$$

Она имеет вид

$$\begin{aligned} & \exists t'_1, \dots, t'_n, t''_1, \dots, t''_n, r'_1, \dots, r'_n, r''_1, \dots, r''_n, s'_1, \dots, s'_n, s''_1, \dots, s''_n \in R \\ & \quad \exists \xi'_1, \dots, \xi'_l, \xi''_1, \dots, \xi''_l \in R^* \\ & \psi^{w_\alpha}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \\ & \quad t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l) \\ & \wedge \psi^{\alpha,+}(t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, \\ & \quad t''_1, \dots, t''_n, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l; -t) \\ & \wedge \psi^{w_\alpha}(t''_1, \dots, t''_n, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l, \\ & \quad \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l). \end{aligned}$$

Теперь мы легко можем написать формулу

$$\psi^{\otimes}(t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_l, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \\ \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l; t'_1, \dots, t'_n, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l),$$

истинную при $\bar{x} = x \cdot x'$, в виде композиции полученных выше формул $\psi^{\alpha,+}$, $\psi^{\alpha,-}$, ψ^T .

Однако поскольку запись элемента $x \in G$ в виде $x = tuv u'$ не единственна, мы получили формулу, которая будет истинна при $x_3 = x_1 \cdot x_2$ только для каких-то определенных записей для x_1, x_2, x_3 .

Нам же требуется, чтобы параметры удовлетворяли формуле $\widetilde{\psi}^{\otimes}(\cdot)$ тогда и только тогда, когда они определяли элементы $x_1, x_2, x_3 \in G$ такие, что $x_3 = x_1 \cdot x_2$, т.е. когда существуют параметры, определяющие x'_3 , такое, что записи для x_3 и x'_3 определяют одни и те же элементы, и при этом

$$\psi^{\otimes}(x_1, x_2, x_3).$$

То, что два элемента x_1 и x_2 равны, означает, что $x_1 \cdot x_2^{-1} = 1$. Найдем формулу, выражающую равенство элемента единице:

$$x = x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n) h(\chi_{\xi_1 \dots \xi_l}) x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) x_{\alpha_1}(s_1) \cdots x_{\alpha_n}(s_n) = 1.$$

Пусть $utvu' = 1$, где $u, u' \in U$, $t \in T$, $v \in V$. Тогда $TV \ni tv = u^{-1}u'^{-1} \in U$. Так как $TV \cap U = 1$, то $tv = 1 \wedge u'u = 1$.

Пусть $\psi^U(t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$ – это формула, истинная тогда и только тогда, когда

$$x_{\alpha_1}(\bar{t}_1) \cdots x_{\alpha_n}(\bar{t}_n) = x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n) x_{\alpha_1}(t'_1) \cdots x_{\alpha_n}(t'_n).$$

Тогда формула, выражающая равенство x единице, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) \\ = (\xi_1 = 1) \wedge \cdots \wedge (\xi_l = 1) \wedge r_1 = 1 \wedge \cdots \wedge r_n \\ = 1 \wedge \psi^u(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Чтобы найти обратный элемент к

$$x = x_{\alpha_1}(t_1) \cdots x_{\alpha_n}(t_n) h(\chi_{\xi_1 \dots \xi_l}) x_{-\alpha_1}(r_1) \cdots x_{-\alpha_n}(r_n) x_{\alpha_1}(s_1) \cdots x_{\alpha_n}(s_n),$$

выразим в виде $UTVU$ элемент x^{-1} :

$$\begin{aligned} x^{-1} &= x_{\alpha_n}(-s_n) \cdots x_{\alpha_1}(-s_1) x_{-\alpha_n}(-r_n) \cdots x_{-\alpha_1}(-r_1) h(\chi_{\xi_1^{-1} \dots \xi_l^{-1}}) \\ &\quad \times x_{\alpha_n}(-t_n) \cdots x_{\alpha_1}(-t_1) \\ &= x_{\alpha_n}(-s_n) \cdots x_{\alpha_1}(-s_1) h(\chi_{\xi_1^{-1} \dots \xi_l^{-1}}) \\ &\quad \times x_{-\alpha_n}(-q_n(\xi_1, \dots, \xi_l) r_n) \cdots x_{-\alpha_1}(-q_1(\xi_1, \dots, \xi_l) r_1) x_{\alpha_n}(-t_n) \cdots x_{\alpha_1}(-t_1) \\ &= x_{\alpha_1}(p_1^+(-s_n, \dots, -s_1)) \cdots x_{\alpha_n}(p_n^+(-s_n, \dots, -s_1)) h(\chi_{\xi_1^{-1} \dots \xi_l^{-1}}) \\ &\quad \times x_{-\alpha_1}(p_1^-(-q_n(\xi_1, \dots, \xi_l) r_n, \dots, -q_1(\xi_1, \dots, \xi_l) r_1)) \\ &\quad \times \cdots \times x_{-\alpha_n}(p_n^-(-q_n(\xi_1, \dots, \xi_l) r_n, \dots, -q_1(\xi_1, \dots, \xi_l) r_1)) \\ &\quad \times x_{\alpha_1}(p_1^+(-t_n, \dots, -t_1)) \cdots x_{\alpha_n}(p_n^+(-t_n, \dots, -t_1)), \end{aligned}$$

где $p_1^+(\cdot), \dots, p_n^+(\cdot), p_1^-(\cdot), \dots, p_n^-(\cdot)$ – многочлены от n переменных с целыми коэффициентами, $q_1(\cdot), \dots, q_n(\cdot)$ – одночлены Лорана от l переменных.

Таким образом, формула

$$\begin{aligned} & \psi^{(-1)}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \\ & \quad t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n) \\ & := (t'_1 = p_1^+(-t_n, \dots, -t_1)) \wedge \dots \wedge (t'_n = p_n^+(-t_n, \dots, -t_1)) \wedge (\xi'_1 = \xi_1^{-1}) \\ & \quad \wedge \dots \wedge (\xi'_l = \xi_l^{-1}) \wedge (r'_1 = p_1^-(-q_1(\xi_1, \dots, \xi_l)r_1, \dots, -q_n(\xi_1, \dots, \xi_l)r_n) \\ & \quad \wedge \dots \wedge (r'_n = p_n^-(-q_1(\xi_1, \dots, \xi_l)r_1, \dots, -q_n(\xi_1, \dots, \xi_l)r_n) \\ & \quad \wedge (s'_1 = p_1^+(-s_n, \dots, -s_1)) \wedge \dots \wedge s'_n \\ & = p_n^+(-s_n, \dots, -s_1) \end{aligned}$$

истинна тогда и только тогда, когда $x' = x^{-1}$.

Значит, искомая формула $\psi^{(=)}(\cdot)$, истинная тогда и только тогда, когда $x = x'$, имеет вид

$$\begin{aligned} & \psi^{(=)}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \\ & \quad t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n) \\ & = \exists t''_1, \dots, t''_n, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, r''_1, \dots, r''_n, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, s''_1, \dots, s''_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n \in R \\ & \quad \exists \xi''_1, \dots, \xi''_l, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l \in R^* \\ & \psi^{(-1)}(t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \\ & \quad t''_1, \dots, t''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n) \\ & \quad \wedge \psi^{\oplus}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, \\ & \quad \quad r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \\ & \quad \wedge \psi^{(1)}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим формулу для п. (ii).

Теперь мы можем написать формулу для п. (iii):

$$\begin{aligned} & \psi^{(\otimes)}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, \\ & \quad r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \\ & = \exists t''_1, \dots, t''_n, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n \in R \quad \exists \xi''_1, \dots, \xi''_l \in R^* \\ & \psi^{\otimes}(t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_l, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t'_1, \dots, t'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_l, \\ & \quad r'_1, \dots, r'_n, s'_1, \dots, s'_n, t''_1, \dots, t''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n) \\ & \quad \wedge \psi^{(=)}(t''_1, \dots, t''_n, \xi''_1, \dots, \xi''_l, r''_1, \dots, r''_n, s''_1, \dots, s''_n, \\ & \quad \quad \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_l, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n). \end{aligned}$$

Предложение 4 доказано.

§ 6. Элементарная эквивалентность базисных колец

Предположим, что мы имеем две элементарно эквивалентные элементарные присоединенные группы Шевалле E и E' одного и того же типа Φ (ранга, большего единицы) над локальными кольцами R и R' с обратимой двойкой (если $\Phi = G_2$, то еще и с обратимой тройкой).

Из работ [25], [10], [11] следует, что если две такие группы изоморфны, то кольца R и R' изоморфны.

Если группы E и E' элементарно эквивалентны, то по теореме Кейслера–Шелаха (см. [1]) существует такой ультрафильтр D , что

$$\prod_D E \cong \prod_D E'.$$

Из предложения 4 следует, что

$$\prod_D E_{\text{ad}}(\Phi, R) \cong E_{\text{ad}}\left(\Phi, \prod_D R\right).$$

Таким образом,

$$E_{\text{ad}}\left(\Phi, \prod_D R\right) \cong E_{\text{ad}}\left(\Phi, \prod_D R'\right).$$

Значит,

$$\prod_D R \cong \prod_D R',$$

откуда следует, что

$$R \equiv R'.$$

§ 7. Заключение

Теперь соберем воедино все, что мы доказали, и получим тем самым доказательство основной теоремы.

- Обратная импликация теоремы полностью доказана в § 2 (и даже для более общего, чем сформулировано, класса колец).

Пусть теперь у нас имеются две элементарно эквивалентных группы Шевалле, удовлетворяющие всем перечисленным в основной теореме условиям.

- То, что в этом случае системы корней изоморфны, доказано в § 4.
- То, что в этом случае базисные кольца элементарно эквивалентны, доказано в § 6.
- Изоморфизм весовых решеток следует из того, что по нашим группам над локальными кольцами мы с помощью факторизации по наибольшей нормальной подгруппе можем получить группы Шевалле над вычетными полями с теми же самыми весовыми решетками, что и изначальные группы. Тогда нужный нам результат будет следовать из аналогичного результата работы [9].

Основная теорема полностью доказана.

Список литературы

- [1] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, *Теория моделей*, Мир, М., 1977; англ. пер.: С. С. Chang, H. J. Keisler, *Model theory*, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1973.
- [2] А. И. Мальцев, “Об элементарных свойствах линейных групп”, *Некоторые проблемы математики и механики*, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961, 110–132.

- [3] C. I. Beidar, A. V. Mikhalev, “On Mal’cev’s theorem on elementary equivalence of linear groups”, *Proceedings of the International Conference on Algebra* (Novosibirsk, 1989), *Contemp. Math.*, **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 29–35.
- [4] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами”, *УМН*, **53:2** (1998), 137–138; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary equivalence of unitary linear groups over rings and skew fields”, *Russian Math. Surveys*, **53:2** (1998), 374–376.
- [5] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность групп Шевалле”, *УМН*, **56:1** (2001), 157–158; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary equivalence of Chevalley groups”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 152–153.
- [6] E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, “Combinatorial and logical aspects of linear groups and Chevalley groups”, *Acta Appl. Math.*, **85:1–3** (2005), 57–74.
- [7] Е. И. Бунина, “Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства”, *УМН*, **59:5** (2004), 141–142; англ. пер.: E. I. Bunina, “Chevalley groups over fields and their elementary properties”, *Russian Math. Surveys*, **59:5** (2004), 952–953.
- [8] Е. И. Бунина, “Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами”, *УМН*, **61:2** (2006), 157–158; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary properties of Chevalley groups over local rings”, *Russian Math. Surveys*, **61:2** (2006), 349–350.
- [9] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12:8** (2006), 29–77; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary equivalence of Chevalley groups over fields”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **152:2** (2008), 155–190.
- [10] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами”, *УМН*, **62:5** (2007), 143–144; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of some types over local rings”, *Russian Math. Surveys*, **62:5** (2007), 983–984.
- [11] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13:4** (2007), 3–29; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of types B_2 and G_2 over local rings”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **155:6** (2008), 795–814.
- [12] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, *Grad. Texts in Math.*, **9**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978.
- [13] Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли*. Гл. 4–6: *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, **1337**, Hermann, Paris, 1968.
- [14] Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, CT, 1968.
- [15] C. Chevalley, “Certains schémas de groupes semi-simples”, *Séminaire Bourbaki: Vol. 1960/1961, Exposés 205–222*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1966, 1–16.
- [16] N. Vavilov, E. Plotkin, “Chevalley groups over commutative rings: I. Elementary calculations”, *Acta Appl. Math.*, **45:1** (1996), 73–113.
- [17] H. Matsumoto, “Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **2** (1969), 1–62.
- [18] E. Abe, “Chevalley groups over local rings”, *Tohoku Math. J. (2)*, **21:3** (1969), 474–494.
- [19] M. R. Stein, “Surjective stability in dimension 0 for K^2 and related functors”, *Trans. Amer. Soc.*, **178** (1973), 165–191.

- [20] E. Abe, K. Suzuki, “On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings”, *Tohoku Math. J.* (2), **28**:2 (1976), 185–198.
- [21] P. M. Cohn, “On the structure of the GL_2 of a ring”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **30** (1966), 365–413.
- [22] R. G. Swan, “Generators and relations for certain special linear groups”, *Advances in Math.*, **6**:1 (1971), 1–77.
- [23] А. А. Суслин, “Об одной теореме Кона”, *Кольца и модули*, Записки науч. сем. ЛОМИ, **64**, Наука, Л., 1976, 127–130; англ. пер.: A. A. Suslin, “One theorem of Cohn”, *J. Sov. Math.*, **17**:2 (1981), 1801–1803.
- [24] E. Abe, “Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings”, *Algebraic K-theory and algebraic number theory* (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 1–17.
- [25] Э. Абе, “Аutomorphisms групп Шевалле над коммутативными кольцами”, *Алгебра и анализ*, **5**:2 (1993), 74–90; англ. пер.: E. Abe, “Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings”, *St. Petersburg Math. J.*, **5**:2 (1993), 287–300.

Е. И. Бунина (E. I. Bunina)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: helenbunina@yandex.ru

Поступила в редакцию

18.02.2009