Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Пример множественности лакун в спектре периодического волновода, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 4, 99–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:16:58

УДК 517.956.227+517.958+631.372.8

С. А. Назаров

Пример множественности лакун в спектре периодического волновода

Построен периодический волновод с формой, зависящей от малого параметра $h > 0$, в котором существенный спектр операторов краевых задач (Дирихле, Неймана и смешанной при некоторых ограничениях) для формально самосопряженной эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка приобретает любое наперед заданное количество лакун. Геометрическую форму волновода можно интерпретировать как бесконечный периодический набор бусин, соединенных тонкими и короткими перемычками. Доказательство появления лакун основано на применении максиминимального принципа и весового неравенства Корна.

Библиография: 43 названия.

Ключевые слова: лакуны в существенном спектре, формально самосопряженная эллиптическая система дифференциальных уравнений с полиномиальным свойством.

§ 1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1.1. Спектральные задачи. Введем бесконечную периодическую вдоль оси $z = x_n$ область

$$\Pi_h = \Omega_h \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \varpi_j \quad (1.1)$$

(см. рис. 1), состоящую из тонкой “спицы”

$$\Omega_h = \omega_h \times \mathbb{R} \quad (1.2)$$

и нанизанных на нее вплотную “бусин” (см. рис. 2 и рис. 3, b))

$$\varpi_j = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : (y, z - j) \in \varpi\}. \quad (1.3)$$

Здесь h – малый положительный параметр, ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$,

$$\omega_h = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}) : \eta := h^{-1}y \in \omega\},$$

ϖ – область в $\mathbb{R}^n$, причем граница $\partial\varpi$ липшицева, замыкание $\bar{\varpi}$ компактно и

$$\varpi \subset \left\{x : y \in \mathbb{R}^{n-1}, |z| < \frac{1}{2}\right\}, \quad \mathcal{O}^0 = (0, \dots, 0, 0), \quad \mathcal{O}^1 = (0, \dots, 0, 1) \in \partial\varpi. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09–01–00759).

Ячейка периодичности множества (1.1) (см. рис. 3, а))

$$\varpi_h = \{x \in \Pi_h : z \in (0, 1)\} = \varpi \cup (\omega_h \times (0, 1))$$

имеет боковую поверхность $\gamma_h = \partial\varpi_h \setminus (\overline{\omega_h^0} \cup \overline{\omega_h^1})$ и торцы

$$\omega_h^0 = \omega_h \times \{0\}, \quad \omega_h^1 = \omega_h \times \{1\}. \quad (1.5)$$

Зафиксируем радиусы R_ϖ и R_ω так, чтобы $\Pi_h \subset \mathcal{Q}_{R_\varpi} = \{x : |y| < R_\varpi, z \in \mathbb{R}\}$ и $\Omega_h \subset \mathcal{Q}_{hR_\omega}$ при $h \in (0, 1]$.

Рис. 1. Периодический волновод

Рис. 2. Предельное периодическое множество – распавшиеся ячейки

Рис. 3. Ячейка (тонирующая перемычка утолщена) и предельное множество

В квазицилиндре (1.1) рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)u^h(x) = \lambda^h u^h(x), \quad x \in \Pi_h, \quad (1.6)$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi_h, \quad (1.7)$$

в которой $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)^\top$ – градиент, $u^h = (u_1^h, \dots, u_k^h)^\top$ – вектор-функция, интерпретируемая как столбец, т.е. $\top$ – знак транспонирования, $\lambda^h \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $\mathcal{L}$ – $(k \times k)$ -матрица дифференциальных

операторов второго порядка с 1-периодическими относительно переменной z коэффициентами,

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x) = \overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^\top \mathcal{A}(x) \mathcal{D}(\nabla_x). \quad (1.8)$$

Более точно, в формуле (1.8) под $\mathcal{D}(\nabla_x)$ подразумеваем $(N \times k)$ -матрицу дифференциальных операторов первого порядка с постоянными, вообще говоря, комплексными коэффициентами; черта обозначает комплексное сопряжение, а значит, $\overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^\top$ – формально сопряженный для $\mathcal{D}(\nabla_x)$ дифференциальный оператор. Кроме того, $\mathcal{A}$ – эрмитова положительно определенная матрица-функция с 1-периодическими по z элементами, измеримыми и равномерно ограниченными,

$$c_{\mathcal{A}} |\eta| \leq \overline{\eta}^\top \mathcal{A}(x) \eta \leq C_{\mathcal{A}} |\eta|^2 \quad \text{при } \eta \in \mathbb{C}^N \text{ и почти всех } x \in \varpi_h, \quad (1.9)$$

причем $c_{\mathcal{A}}$ и $C_{\mathcal{A}}$ – положительные постоянные.

Помимо краевых условий Дирихле (1.7) рассмотрим условия Неймана

$$\mathcal{N}(x, \nabla_x) u^h(x) := \overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^\top \mathcal{A}(x) \mathcal{D}(\nabla_x) u^h(x) = 0, \quad x \in \partial \Pi_h, \quad (1.10)$$

где ν – единичный вектор (столбец) внешней нормали, определенный почти всюду на липшицевой поверхности $\partial \Pi_h$. Другие краевые условия обсуждаются в п. 4.1.

Из-за недостаточной гладкости коэффициентов задачам (1.6), (1.7) и (1.6), (1.10) следует придать вариационную формулировку, апеллирующую к интегральному тождеству (см. [1]):

$$a(u^h, v^h; \Pi_h) := (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u^h, \mathcal{D}(\nabla_x) v^h)_{\Pi_h} = \lambda(u^h, v^h)_{\Pi_h}, \quad v^h \in \mathcal{H}^h, \quad (1.11)$$

где пробные “функции” v^h берутся из пространства Соболева $H^1(\Pi_h)^k$ в случае условий Неймана и из подпространства $\mathring{H}^1(\Pi_h; \partial \Pi_h)^k$ в случае условий Дирихле. При этом символ $\circ$ означает выполнение условий (1.7), а индекс k указывает размеры вектор-функций, однако он не пишется в обозначениях скалярных произведений и норм. Так, $(\cdot, \cdot)_{\Pi_h}$ – естественное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Pi_h)^m$ при любом натуральном $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$.

Предъявим к $\mathcal{D}(\nabla_x)$ дополнительные требования, обеспечивающие, в частности, эллиптичность и формальную положительность оператора (1.8). Предположим, что матрица $\mathcal{D}(\xi)$ алгебраически комплектна (см. [2]), т.е. при каком-то $\tau_{\mathcal{D}} \in \mathbb{N}$ для любой строки $P = (P_1, \dots, P_k)$ однородных полиномов степени $\tau \geq \tau_{\mathcal{D}}$ найдется полиномиальная строка $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$, удовлетворяющая тождеству

$$P(\xi) = Q(\xi) \mathcal{D}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Такое требование влечет за собой полиномиальное свойство (см. [3], [4]) полуторалинейной формы a из левой части (1.11):

$$u \in H^1(\Xi)^k, \quad a(u, u; \Xi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{P}|_{\Xi}; \quad (1.13)$$

здесь Ξ – произвольная подобласть в Π_h , а $\mathcal{P}$ – конечномерное линейное пространство векторных полиномов. Согласно [3], [4] в пространстве

$$\mathcal{P} = \{p = (p_1, \dots, p_k)^\top : \mathcal{D}(\nabla_x) p(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.14)$$

степени скалярных полиномов p_j не превосходят $\tau_{\mathcal{D}} - 1$.

В случае гладких коэффициентов соотношения (1.12) и (1.13) гарантируют эллиптичность матричного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ и условия Шапиро–Лопатинского для пар $\{\mathcal{L}, \mathcal{N}|_{\partial\Xi}\}$ и $\{\mathcal{L}, \mathbb{I}|_{\partial\Xi}\}$ на гладкой поверхности $\partial\Xi$ (см. [2]–[4]). Кроме того, в любой области Ξ с липшицевой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\bar{\Xi} = \Xi \cup \partial\Xi$ справедливо следующее обобщенное неравенство Корна:

$$\|u; H^1(\Xi)\|^2 \leq c_{\Xi} (\|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L_2(\Xi)\|^2 + \|u; L_2(\Xi)\|^2), \quad u \in H^1(\Xi)^k, \quad (1.15)$$

в которой множитель c_{Ξ} зависит от Ξ , вообще говоря, неизвестным образом (см. [2; теорема 7.3.6, с. 191]).

В обзоре [4] приведено много примеров конкретных задач математической физики, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям.

1.2. Оператор задачи и его спектр. Полуторалинейная форма a из левой части тождества (1.11) положительна и замкнута в $H^1(\Pi_h)^k$, а значит, теория Бирмана–Вишика–Крейна (ср. [5] и см., например, [6; гл. 10]) ставит в соответствие задачам (1.6), (1.7) и (1.6), (1.10) (или (1.11) при надлежащем выборе энергетического класса $\mathcal{H}$) неограниченные положительные самосопряженные операторы A_D^h и A_N^h с областями $\text{dom}(A_D^h)$ и $\text{dom}(A_N^h)$ соответственно. Далее пишем A^h и т.п., если безразлично, об операторе какой задачи идет речь.

Поскольку вложение $H^1(\Pi_h) \subset L_2(\Pi_h)$ не может быть компактным ввиду неограниченности области Π_h , спектр $\sigma(A^h)$ оператора A^h , расположенный на замкнутой положительной вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, имеет нетривиальную существенную компоненту $\sigma_{\text{ess}}(A^h)$ (см. [6; теорема 10.1.5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Можно усложнить постановку задачи, заменив систему дифференциальных уравнений (1.6) такой:

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)u^h(x) = \lambda^h \mathcal{B}(x)u^h(x), \quad x \in \Pi_h; \quad (1.16)$$

при этом $\mathcal{B}$ – эрмитова положительно определенная матрица размером $k \times k$ с измеримыми ограниченными элементами. В этом случае удобно ввести специфическое скалярное произведение

$$\langle u^h, v^h \rangle = (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x)u^h, \mathcal{D}(\nabla_x)v^h)_{\Pi_h} + (\mathcal{B}u^h, v^h)_{\Pi_h}$$

в гильбертовом пространстве $H^1(\Pi_h)^k$ и перейти к абстрактному уравнению

$$T^h u^h = \mu^h u^h \in \mathcal{H}^h$$

с новым спектральным параметром $\mu^h = (1 + \lambda^h)^{-1}$ и ограниченным положительным самосопряженным оператором, заданным формулой

$$\langle T^h u^h, v^h \rangle = (\mathcal{B}u^h, v^h)_{\Pi_h}, \quad u^h, v^h \in \mathcal{H}^h.$$

Спектр оператора T^h расположен на сегменте $[0, 1] \subset \bar{\mathbb{R}}_+$, а точка $\mu = 0$ заведомо принадлежит существенному спектру $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{T}^h)$ (см. [6; теорема 9.2.1]). Намеченная интерпретация краевых задач для системы (1.16) с произвольной матрицей $\mathcal{B}$ подробно изложена в [7], и мы всюду далее ограничиваемся случаем единичной $(k \times k)$ -матрицы $\mathbb{I}_k = \mathcal{B}$.

Известно (см., например, [8], [9] и др.), что дискретный спектр у оператора отсутствует, а существенный спектр имеет чересполосную структуру (band-gap structure):

$$\sigma(A^h) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Upsilon_p^h. \quad (1.17)$$

Здесь Υ_p^h – некоторые замкнутые ограниченные сегменты (см. п. 1.3). Структура (1.17) допускает существование лакун, т.е. интервалов на полуоси $\mathbb{R}_+$, свободных от точек спектра, но имеющих концы на существенном спектре. Установление лакун в спектрах операторов A_D^h и A_N^h является основной целью настоящей статьи. Подчеркнем, что лакуны открыты не всегда: в принципе сегменты $\Upsilon_1^h, \Upsilon_2^h, \dots$ могут покрывать всю полуось $\overline{\mathbb{R}}_+$ или целый луч на ней.

1.3. Преобразование Гельфанда и модельная задача на ячейке периодичности. Преобразование

$$v(y, z) \mapsto \widehat{v}(y, z; \eta) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(-i\eta(j+z))v(y, j+z) \quad (1.18)$$

(см. [10]–[12] и др.) устанавливает изометрический изоморфизм

$$L_2(\Pi_h) \cong L_2(0, 2\pi; L_2(\varpi_h)),$$

причем $L_2(0, 2\pi; \mathfrak{V})$ – пространство Лебега абстрактных функций со значением в банаховом пространстве $\mathfrak{V}$ и нормой

$$\|V; L_2(0, 2\pi; \mathfrak{V})\| = \left(\int_0^{2\pi} \|V(\eta); \mathfrak{V}\|^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Подчеркнем, что $(y, z) \in \Pi_h^0$ в левой части (1.18), но $(y, z) \in \varpi_h$ в правой. Нетрудно убедиться в том, что для гладкой на множестве Π_h функции v с компактным носителем верны соотношения

$$\widehat{v}(y, z \pm 1; \eta) = \widehat{v}(y, z; \eta), \quad \partial_z \widehat{v}(y, z; \eta) = \widehat{\partial_z v}(y, z; \eta) - i\eta \widehat{v}(y, z; \eta),$$

где $\partial_z = \partial/\partial z$. Таким образом, преобразование Гельфанда (1.18) (дискретное преобразование Фурье) при любом $l \in \mathbb{N}$ устанавливает изоморфизм

$$H^l(\Pi_h) \approx L_2(0, 2\pi; H_{\text{per}}^l(\varpi_h)),$$

в котором $H_{\text{per}}^l(\varpi_h) \subset H^l(\varpi_h)$ – подпространство, сооруженное из 1-периодических относительно переменной z функций.

Приведенные известные факты объясняют появление модельной задачи на ячейке периодичности, составленной из системы дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta)U^h(y, z; \eta) = \Lambda(\eta)U^h(y, z; \eta), \quad (y, z) \in \varpi_h, \quad (1.19)$$

краевых условий Дирихле или Неймана

$$U^h(y, z; \eta) = 0, \quad (y, z) \in \gamma_h = \partial\varpi_h \setminus (\overline{\omega_h^0} \cup \overline{\omega_h^1}), \quad (1.20)$$

$$\mathcal{N}(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta)U^h(y, z; \eta) = 0, \quad (y, z) \in \gamma_h, \quad (1.21)$$

на боковой поверхности ячейки и следующих условий периодичности на ее торцах (1.5):

$$U^h(y, 0; \eta) = U^h(y, 1; \eta), \quad \partial_z U^h(y, 0; \eta) = \partial_z U^h(y, 1; \eta), \quad y \in \omega_h. \quad (1.22)$$

Вариационная постановка задачи

$$a_\eta(U^h, V^h; \varpi_h) = \Lambda^h(U^h, V^h)_{\varpi_h}, \quad V^h \in \mathcal{H}_{\text{per}}^h, \quad (1.23)$$

необходимая при ослабленных дифференциальных свойствах коэффициентов, осуществляется на пространстве $\mathcal{H}_{\text{per}}^h = \mathcal{H}_{D\text{per}}^h = \dot{H}_{\text{per}}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$ в случае условий Дирихле и пространстве $\mathcal{H}_{\text{per}}^h = \mathcal{H}_{N\text{per}}^h = H_{\text{per}}^1(\varpi_h)^k$ в случае условий Неймана, а в левой части интегрального тождества (1.23) фигурирует форма

$$a_\eta(U^h, V^h; \varpi_h) = (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta) U^h, \mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta) V^h)_{\varpi_h},$$

наследующая замкнутость, а при вещественном η эрмитовость и положительность от формы a в левой части (1.11). Таким образом, уже применявшаяся теория Бирмана–Вишика–Крейна ставит в соответствие задаче¹ (1.23) неограниченный самосопряженный положительный оператор $A^h(\eta)$ в пространстве $L_2(\varpi_h)^k$. В силу компактности вложения $H_{\text{per}}^1(\varpi_h) \subset L_2(\varpi_h)$ (теперь область ϖ_h ограничена) спектр $\sigma(A^h(\eta))$ оператора $A^h(\eta)$ является дискретным и формирует бесконечно большую последовательность собственных чисел, указанных в списке с учетом их кратностей:

$$0 \leq \Lambda_1^h(\eta) \leq \Lambda_2^h(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_p^h(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.24)$$

(см. [6; теоремы 10.1.5 и 10.2.2]). Соответствующие собственные вектор-функции $U_{(p)}^h$ можно подчинить следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$(U_{(p)}^h, U_{(q)}^h)_{\varpi_h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}; \quad (1.25)$$

здесь $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера.

Элементы последовательности (1.24) вычисляются при помощи максиминимального принципа² (см., например, [6; теорема 10.2.2]):

$$\Lambda_j^h(\eta) = \max_{\mathcal{E}_j^h} \inf_{\mathcal{U}^h \in \mathcal{E}_j^h \setminus \{0\}} \frac{a_\eta(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \varpi_h)}{\|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi_h)\|^2}; \quad (1.26)$$

здесь $\mathcal{E}_j^h$ – произвольное подпространство в $\mathcal{H}_{\text{per}}^h$ с коразмерностью $j - 1$, т.е. $\dim\{\mathcal{H}_{\text{per}}^h \ominus \mathcal{E}_j^h\} = j - 1$ и, в частности, $\mathcal{E}_1^h = \mathcal{H}_{\text{per}}^h$.

Посредством различных подходов и в разных, дифференциальной или вариационной, постановках задачи получен (см. [13; §8.16], [14], [12; гл. 3], а также [8], [11] и др.) следующий результат: при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор задачи (1.11), рассматриваемый как отображение $\mathcal{H}^h \rightarrow (\mathcal{H}^h)^*$, является фредгольмовым³ в том и только том случае, когда число λ не совпадает ни

¹Более правильно говорить о семействах задач и операторов с параметром $\eta \in [0, 2\pi)$.

²Обращаем внимание на еще одно удобство применяемой теории: в (1.26) фигурирует не область определения оператора $A^h(\eta)$, а сам энергетический класс $\mathcal{H}_{\text{per}}^h$.

³На самом деле, отображение – изоморфизм, а значит, $\mathbb{C} \setminus \bigcup \gamma_p^h$ – резольвентное множество оператора A^h .

с одним собственным числом в последовательности (1.24) при всех $\eta \in [0, 2\pi)$. Именно из этого утверждения вытекает известная формула (1.17) для спектра оператора A^h , в которой

$$\Upsilon_p^h = \{\lambda = \Lambda_p^h(\eta) \mid \eta \in [0, 2\pi)\}. \quad (1.27)$$

Множества (1.27) – (замкнутые) сегменты потому, что функции $\eta \mapsto \Lambda_p^h(\eta)$ непрерывны (см., например, [15; гл. 9]) и 2π -периодичны (по понятной причине).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Автор не знает, возможна ли такая ситуация:

$$\Lambda_p^h(\eta) = \Lambda_{p_0}^h = \text{const}, \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1) \subset [0, 2\pi), \quad \eta_0 < \eta_1. \quad (1.28)$$

При условии (1.28) у оператора A^h имеется собственное число $\lambda = \Lambda_{p_0}^h$ бесконечной кратности. Если же ситуация (1.28) не реализуется ни при каком $p \in \mathbb{N}$, то спектр $\sigma(A^h)$ целиком непрерывный, так как ядро оператора задачи (1.11) оказывается конечномерным (см. [14] и [12; замечание 4.1.3]). Отметим, что согласно [16; теорема 1.5.1] при выполнении условия (1.28) в нем можно положить $\eta_0 = 0$ и $\eta_1 = 2\pi$.

1.4. О раскрытии лакун. Появление лакун в существенном спектре волнового уравнения запрещает прохождение волн в соответствующем частотном диапазоне. В связи с этим во многих прикладных дисциплинах возникает интерес к обнаружению лакун, которые, с одной стороны, могут приводить к катастрофическим последствиям (“запирание” волны с последующим накоплением энергии в конечном объеме провоцирует разрушение), но с другой стороны, могут быть использованы в инженерной практике для проектирования волновых фильтров и демпферов (для этого требуется научиться образовывать лакуны в заданном частотном интервале).

Известно множество примеров открытых лакун для скалярных операторов и системы уравнений Максвелла в периодических средах, бесконечных во всех направлениях (см. статьи [17]–[22] обзор [23] и др.). Для периодических волноводов с неограниченной протяженностью лишь вдоль одной оси примеров лакун меньше: упомянем работы [24], [25] для скалярных задач, [26]–[29] для задач теории упругости и [30] для общих самосопряженных систем. Прием, использованный в [30] и основанный на асимптотически точном неравенстве Корна, обеспечивает лишь одну лакуну в спектре задачи Неймана (1.6), (1.10) на множестве (1.1), расположенную между сегментами $\Upsilon_{\dim \mathcal{D}}^h$ и $\Upsilon_{\dim \mathcal{D}+1}^h$. В настоящей статье разработан иной подход, пригодный для обеих задач, как Дирихле (1.6), (1.7), так и Неймана (1.6), (1.10), а также для смешанных задач, причем доказываются существование любого наперед заданного количества лакун при достаточно малом геометрическом параметре $h > 0$ (см. п. 4.3).

Второй и третий параграфы работы посвящены исследованию спектров задач (1.19), (1.20), (1.22) и (1.19), (1.21), (1.22) соответственно, а результаты о раскрытии лакун формулируются в теоремах 2.1 и 3.1. Подчеркнем, что способы вывода оценок для применения максиминимального принципа, устанавливающего положения сегментов существенного спектра, различаются при разных краевых условиях и, в частности, граница может быть в значительной степени любого качества в случае условий Дирихле, но гладкой хотя бы

в окрестностях точек $\mathcal{O}^0$ и $\mathcal{O}^1$ в случае условий Неймана (см. формулу (1.4) и далее лемму 3.1). В § 4 обсуждаются некоторые обобщения полученных результатов, а также объясняется множественность лакун, о которой шла речь выше.

§ 2. Лакуны в спектре задачи Дирихле

2.1. Предельная задача. При $h = 0$ цилиндр Ω_h исчезает и множество Π_0 распадается на разъединенные области (1.3) (см. формулы (1.1), (1.2) и ср. рис. 1 с рис. 2). При этом модельная задача (1.19), (1.20), (1.22), изначально поставленная как спектральная задача в области с сингулярно возмущенной границей (см. монографию [31; гл. 9, 10]), в пределе при $h = 0$ теряет условия периодичности и принимает вид

$$\mathcal{L}(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta)U^0(y, z; \eta) = \mu^0(\eta)U^0(y, z; \eta), \quad (y, z) \in \varpi, \quad (2.1)$$

$$U^0(y, z; \eta) = 0, \quad (y, z) \in \partial\varpi. \quad (2.2)$$

При помощи замены

$$U^0(y, z; \eta) \mapsto V(y, z) = \exp(i\eta z)U^0(y, z; \eta) \quad (2.3)$$

задача (2.1), (2.2) сводится к обычной (без параметра $\eta \in [0, 2\pi)$) спектральной задаче Дирихле

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)V(x) = \mu V(x), \quad x \in \varpi, \quad V(x) = 0, \quad x \in \partial\varpi, \quad (2.4)$$

вариационная формулировка которой выглядит так:

$$a(V, W; \varpi) = \mu(V, W)_{\varpi}, \quad W \in \mathcal{H}^0; \quad (2.5)$$

здесь $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_D^0 = \dot{H}^1(\varpi; \partial\varpi)^k$. Спектр у задачи (2.5) дискретный; он образует бесконечно большую последовательность

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (2.6)$$

собственных чисел, указанных в списке (2.6) с учетом их кратностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. 1) В задаче Дирихле (2.4) собственные числа μ_j положительны, так как для вектор-функции $u \in \dot{H}^1(\varpi; \partial\varpi)^k$ обобщенное неравенство Корна (1.15) принимает вид

$$\|u; H^1(\varpi)\|^2 \leq c_{\varpi}^0 \|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \quad (2.7)$$

2) Неравенство (2.7) следует из более общего факта, известного “как теорема об эквивалентных нормировках”. Так как это утверждение в разных вариантах применяется в статье несколько раз, то для удобства читателя приведем его формулировку и доказательство. Пусть Ξ – область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей и компактным замыканием, а $\mathcal{F}$ – столбец функционалов на пространстве Соболева $H^1(\Xi)^k$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(tu) &= t\mathcal{F}(u), \quad t > 0, \\ u^m \rightarrow u \text{ слабо в } H^1(\Xi)^k &\implies \mathcal{F}(u^m) \rightarrow \mathcal{F}(u) \text{ при } m \rightarrow \infty, \\ \mathcal{F}(p) = 0 \text{ при некотором } p \in \mathcal{P} &\implies p = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда справедлива оценка⁴

$$\|u; H^1(\Xi)\|^2 \leq c_{\Xi, \mathcal{F}} (\|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L_2(\Xi)\|^2 + |\mathcal{F}(u)|^2), \quad u \in H^1(\Xi)^k. \quad (2.9)$$

Ввиду самого неравенства (1.15) достаточно убедиться в том, что

$$\|u; L_2(\Xi)\|^2 \leq c_L (\|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L_2(\Xi)\|^2 + |\mathcal{F}(u)|^2). \quad (2.10)$$

Пусть формула (2.10) неверна, т.е. нашлась такая последовательность $\{u^p\}$, что при $p \rightarrow \infty$

$$\|u^p; L_2(\Xi)\| = 1, \quad \|\mathcal{D}(\nabla_x)u^p; L_2(\Xi)\| \rightarrow 0, \quad \mathcal{F}(u^p) \rightarrow 0.$$

В силу (1.15) нормы $\|u^p; L_2(\Xi)\|$ равномерно ограничены, а значит, имеется подпоследовательность $\{u^{p_q}\}$, сходящаяся к u^∞ слабо в $H^1(\Xi)^k$ и сильно в $L_2(\Xi)^k$. Поскольку $\mathcal{D}(\nabla_x)u^p \rightarrow 0$ сильно в $L_2(\Xi)^N$, $\mathcal{D}(\nabla_x)u^\infty = 0$ и $u^\infty \in \mathcal{P}$ в силу формулы (1.14). Вместе с тем $\mathcal{F}(u^{p_q}) \rightarrow 0$ и $\mathcal{F}(u^\infty) = 0$, $u^\infty = 0$, в соответствии с требованиями (2.8). Этот вывод противоречит условию $\|u^{p_q}; L_2(\Xi)\| = 1$, т.е. нужное неравенство действительно имеет место.

Собственные числа (2.6) могут быть вычислены при помощи максиминимального принципа (см. [6; теорема 10.2.2]), т.е.

$$\mu_j = \max_{\mathcal{E}_j^0} \inf_{\mathcal{V} \in \mathcal{E}_j^0 \setminus \{0\}} \frac{a(\mathcal{V}, \mathcal{V}; \varpi)}{\|\mathcal{V}; L_2(\varpi)\|^2}; \quad (2.11)$$

при этом $\mathcal{E}_1^0 = \dot{H}^1(\varpi; \partial\varpi)^k$, а остальные обозначения аналогичны использованному в (1.26), в частности, $\dim(\dot{H}^1(\varpi; \partial\varpi)^k \ominus \mathcal{E}_j^0) = j - 1$. Соответствующие собственные вектор-функции подчиним следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$(V_{(p)}, V_{(q)})_\varpi = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что спектральные пары $\{\mu_p^0(\eta), U_{(p)}^0(\cdot; \eta)\}$ задачи (2.1), (2.2) выглядят следующим образом:

$$\mu_p^0(\eta) = \mu_p, \quad U_{(p)}^0(x; \eta) = \exp(-i\eta z) V_{(p)}(x). \quad (2.13)$$

Здесь уместно вспомнить замечание 1.2: предельное собственное число $\mu_p^0(\eta)$ в (2.13) не зависит от параметра η .

2.2. Оценка сверху. Продолжим вектор-функцию $V_{(p)}^0(\cdot; \eta)$, введенную в (2.13), нулем на ϖ_h и сохраним за продолжением прежнее обозначение. Поскольку торцы ω_h^0 и ω_h^1 ячейки ϖ_h лежат вне ϖ , $V_{(p)}^0(\cdot; \eta) \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Всякое подпространство $\mathcal{H}_j^h \subset \dot{H}_{\text{per}}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$ коразмерности j содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$\mathcal{U}(x; \eta) = \sum_{p=1}^j b_p V_{(p)}^0(x; \eta) =: \exp(-i\eta z) \mathcal{V}^0(x), \quad \sum_{p=1}^j |b_p|^2 = 1. \quad (2.14)$$

⁴Теперь для проверки соотношения (2.7) нужно положить $\mathcal{F}(u) = \|u; L_2(\partial\varpi)\|$.

Следовательно,

$$\Lambda_j^h(\eta) \leq \max_{\mathcal{H}_j^h} \frac{a_\eta(\mathcal{U}, \mathcal{U}; \varpi_h)}{\|\mathcal{U}; L_2(\varpi_h)\|^2} = \max_{\mathcal{H}_j^h} \frac{a(\mathcal{V}^0, \mathcal{V}^0; \varpi)}{\|\mathcal{V}^0; L_2(\varpi)\|^2} = \max_{\mathcal{H}_j^h} \frac{\sum_{p=1}^j \mu_p |b_p|^2}{\sum_{p=1}^j |b_p|^2} \leq \mu_j. \quad (2.15)$$

Здесь применено последнее соотношение в (2.14), условие (2.12), а также вытекающее из тождества (2.5) равенство

$$a(V_{(p)}, V_{(q)}; \varpi) = \mu_p \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

2.3. Оценка снизу. Сначала установим соотношение

$$\|R_h^{-1}u; L_2(\varpi_h)\|^2 \leq c_k a(u, u; \varpi_h) \quad (2.17)$$

с постоянной c , не зависящей от геометрического параметра $h \in (0, 1]$ и вектор-функции $u \in \mathring{H}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$. Весовой множитель в левой части (2.17) – положительная непрерывная кусочно гладкая функция на ячейке ϖ_h , определенная формулой (см. схематичный рис. 4)

$$R_h(x) = \begin{cases} c_R h & \text{при } \min |x - \mathcal{O}^i| < c_R h, \\ |x - \mathcal{O}^i| & \text{при } c_R h \leq \min |x - \mathcal{O}^i| \leq C_R, \\ C_R & \text{при } \min |x - \mathcal{O}^i| \geq C_R, \end{cases} \quad (2.18)$$

причем $i = 0, 1$, а положительные величины c_R и C_R подобраны надлежащим образом (см. рис. 5, а), на котором тонирована область роста весовой функции).

Рис. 4. График весовой функции, схематически соотнесенный с ячейкой

ЛЕММА 2.1. Для вектор-функции $u \in \mathring{H}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$ выполнено неравенство (2.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала применим неравенство Корна (2.7) и укажем, что в силу полиномиального свойства (1.13) и условия (1.9) верно соотношение

$$\|u; H^1(\varpi)\|^2 \leq c_\varpi \|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2 \leq c_\varpi C_{\mathcal{A}}^{-1} a(u, u; \varpi). \quad (2.19)$$

Продолжим вектор-функцию u нулем на шаровой полуслой

$$\Sigma_h^0 = \{x : |x| \in (c_R h, C_R), z > 0\} \quad (2.20)$$

Рис. 5. Сферические полуслои и области изменяемости срезающей функции

(см. требования (1.4)), воспользуемся неравенством Фридрикса на полусфере $\{x : |x| = r, z > 0\}$, проинтегрированным по радиальной переменной $r \in (c_R h, C_R)$, и найдем, что

$$\| |x|^{-1} u; L_2(\Sigma_h^0) \|^2 \leq c \| \nabla_x u; L_2(\Sigma_h^0) \|^2. \quad (2.21)$$

Теперь получаем формулы

$$\begin{aligned} h^{-2} \| u; L_2(\omega_h \times (c_R h, 2c_R h)) \|^2 &\leq c_0 \| |x|^{-1} u; L_2(\Sigma_h^0) \|^2, \\ h^{-2} \| u; L_2(\omega_h \times (0, c_R h)) \|^2 &\leq c_1 (\| \mathcal{D}(\nabla_x) u; L_2(\omega_h \times (0, 2c_R h)) \|^2 \\ &\quad + h^{-2} \| u; L_2(\omega_h \times (c_R h, 2c_R h)) \|^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

В первой формуле учтено соотношение $|x|^{-1} \geq c_R^{-1} h^{-1}$ при $x \in \Sigma_h^0$. Вторая – следствие неравенства Корна (1.15) в цилиндре $\Xi = \omega \times (0, 2c_R)$: достаточно сделать растяжение координат $x \mapsto h^{-1} x$, присоединяющее к квадратам L_2 -норм множители h^{-2} , и еще раз вспомнить теорему об эквивалентных нормировках (замечание 2.1), которая позволяет убрать из правой части составляющую $h^{-2} \| u; L_2(\omega_h \times (0, c_R h)) \|^2$ (в растянутых координатах функционал $\mathcal{F}(u)$ из формулы (2.9) берется равным $\| u; L_2(\omega_1 \times (c_R, 2c_R)) \|$).

Аналогичные (2.21) и (2.22) неравенства можно вывести около точки $\mathcal{O}^1$, заменив (2.20) множеством

$$\Sigma_h^1 = \{x : (|y|^2 + (z-1)^2)^{1/2} \in (c_R h, C_R), z-1 < 0\}$$

(см. тонированные зоны на рис. 5, а)). Сравнивая определение (2.18) с весовыми множителями, появившимися в приведенных неравенствах, а также принимая во внимание оценку (2.19) для обслуживания подобласти $\{x \in \varpi : \min |x - \mathcal{O}^i| > C_R\}$, заканчиваем доказательство леммы.

Обозначим через $\chi_h \in C^\infty(\overline{\varpi_h})$ срезающую функцию, равную нулю при $\min |x - \mathcal{O}^i| \leq c_R h$ и единице при $\min |x - \mathcal{O}^i| \geq 2c_R h$, причем $0 \leq \chi_h \leq 1$ (см. рис. 5, б), на котором области изменяемости срезки тонированы). Если $U_{(p)}^h$ – собственная вектор-функция задачи (1.11), то в силу аналогичной (2.16) формуле и условию нормировки (1.25) при $q = p$ соотношение (2.17), в котором $u = \exp(i\eta z) U_{(p)}^h$, обеспечивает оценку

$$\| (1 - \chi_h) U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h) \|^2 \leq 4c_R^2 c_k h^2 \Lambda_p^h(\eta). \quad (2.23)$$

Подчеркнем, что $R(x)^{-1} \geq (2c_R h)^{-1}$ на носителе функции $1 - \chi_h$ (ср. определение (2.18)). Понятно, что произведение $\chi_h U_{(p)}^h$ обращается в нуль всюду на поверхности $\partial\varpi$ и поэтому попадает в подпространство $\mathring{H}^1(\varpi; \partial\varpi)^k$.

Зафиксируем натуральное число $j \in \mathbb{N}$ и положим

$$h_j = H(j\mu_j)^{-1/2} > 0, \quad (2.24)$$

где $H = (2c_R)^{-1}(2c_K)^{-1/2}$. Если $h \in (0, h_j]$, то формулы (2.23) и (2.15) показывают, что при $p = 1, \dots, j$ выполнены неравенства

$$\|(1 - \chi_h)U_{(p)}^h; L_2(\varpi)\|^2 \leq \frac{1}{2}(j\mu_j)^{-1}\Lambda_p^h(\eta) \leq \frac{1}{2}(j\mu_j)^{-1}\mu_p \leq \frac{1}{2j}.$$

Отсюда вытекает, что вектор-функции $\chi_h U_{(1)}^h, \dots, \chi_h U_{(j)}^h$ линейно независимы в пространстве $L_2(\varpi)^k$. В самом деле, для любой линейной комбинации

$$\mathcal{U}^h = \sum_{p=1}^j b_p \chi_h U_{(p)}^h, \quad \sum_{p=1}^j |b_p|^2 = 1, \quad (2.25)$$

справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi)\|^2 &= \sum_{p,q=1}^j b_p \overline{b_q} (U_{(p)}^h, \chi_h^2 U_{(q)}^h)_{\varpi_h} = \sum_{p,q=1}^j b_p \overline{b_q} (\delta_{p,q} + (U_{(p)}^h, (1 - \chi_h^2) U_{(q)}^h)_{\varpi_h}) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^j (|b_p|^2 + |b_q|^2) \|U_{(p)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\| \|U_{(q)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\| \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} 2j(2j)^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в том, что величина $a(\chi_h U_{(p)}^h, \chi_h U_{(q)}^h; \varpi)$ мало отличается от собственного числа $\Lambda_{(p)}^h$, докажем вспомогательную весовую оценку, используя прием из [32].

ЛЕММА 2.2. *Существует такое число $\beta_0 \in (0, 1]$, что при $\beta \in (0, \beta_0)$ собственная вектор-функция $U_{(p)}^h$ задачи (1.23), подчиненная условию нормировки (1.25), удовлетворяет неравенству*

$$\|R_h^{-\beta} \nabla_x U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 + \|R_h^{-1-\beta} U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 \leq c(\beta) \Lambda_p^h(\eta)^2, \quad (2.26)$$

в котором R_h – весовая функция (2.18), а множитель $c(\beta)$ зависит от показателя β (вообще говоря, $c(\beta) \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \beta_0 - 0$), но не зависит от номера $p \in \mathbb{N}$ и параметра $h \in (0, h_0]$, $h_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция (2.18) кусочно гладкая и постоянная на перемычке $\varpi_h \setminus \varpi$, произведение $R_h^{-2\beta} U_{(p)}^h$ принадлежит подпространству $\mathring{H}_{\text{per}}^1(\varpi_h; \gamma_h)^k$ и может быть взято в качестве пробной функции в интегральном

тождестве (1.23). Несложные преобразования показывают, что

$$\begin{aligned}
 a_\eta(U_{(p)}^h, R_h^{-2\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) &= (\mathcal{A}R_h^{-\beta}\mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)U_{(p)}^h, \mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)R_h^{-\beta}U_{(p)}^h)_{\varpi_h} \\
 &\quad + (\mathcal{A}R_h^{-\beta}\mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)U_{(p)}^h, [\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h)_{\varpi_h} \\
 &= a_\eta(R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) - (\mathcal{A}[\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h, \mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)R_h^{-\beta}U_{(p)}^h)_{\varpi_h} \\
 &\quad + (\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, [\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h)_{\varpi_h} \\
 &\quad - (\mathcal{A}[\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h, [\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h)_{\varpi_h}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь $[\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]$ – коммутатор дифференциального оператора $\mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z + i\eta)$ и оператора умножения на $R_h(x)^{-\beta}$, т.е. матрица-функция

$$\mathcal{D}(\nabla_x)R_h^{-\beta} = -\beta R_h^{-1-\beta}\mathcal{D}(\nabla_x)R_h,$$

отличающаяся от нуля только на затемненных на рис. 5, а) участках ячейки ϖ_h (ср. определение (2.18)) и допускающая оценку

$$|R_h(x)^\beta[\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}](x)| \leq c_{\mathcal{D}}\beta R_h(x)^{-1}. \tag{2.28}$$

Отделяя вещественные части в формуле (2.27) и принимая во внимание неравенства (2.17), (2.28), обрабатываем интегральное тождество (1.23) с $U^h = U_{(p)}^h$, $V^h = R_h^{-2\beta}U_{(p)}^h$ и $\Lambda^h = \Lambda_p^h(\eta)$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned}
 (U_{(p)}^h, R_h^{-2\beta}U_{(p)}^h)_{\varpi_h} &\leq C_R^{2(1-\beta)}\|R_h^{-1}\exp(-i\eta z)U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 \\
 &\leq c_K C_R^{2(1-\beta)}a(U_{(p)}^h, U_{(p)}^h; \varpi_h) = c_K C_R^{2(1-\beta)}\Lambda_p^h(\eta), \\
 \operatorname{Re}(a_\eta(R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) - a_\eta(U_{(p)}^h, R_h^{-2\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h)) \\
 &= (\mathcal{A}[\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h, [\mathcal{D}(\nabla_x), R_h^{-\beta}]U_{(p)}^h)_{\varpi_h} \\
 &\leq C_{\mathcal{A}}c_{\mathcal{D}}^2\beta^2\|R_h^{-1-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2, \\
 a_\eta(R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) &= a(\exp(i\eta z)R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, \exp(i\eta z)R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) \\
 &\geq c_k^{-1}\|R_h^{-1-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2.
 \end{aligned}$$

В результате находим такое $\beta_0 > 0$, что при $|\beta| < \beta_0$ верна формула

$$\begin{aligned}
 \Lambda_p^h(\eta)^2 &\geq C(a_\eta(R_h^{-\beta}U_{(p)}^h, R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; \varpi_h) - c\beta^2\|R_h^{-1-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2) \\
 &\geq C(\beta)(\|\nabla_x R_h^{-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 + \|R_h^{-1-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2),
 \end{aligned}$$

из которой получить проверяемое утверждение не составляет труда.

Неравенство (2.26) приводит к оценке

$$\begin{aligned}
 |\Lambda_p^h(\eta) - a_\eta(\chi_h U_{(p)}^h, \chi_h U_{(p)}^h; \varpi)| \\
 \leq c(\|\mathcal{D}(\nabla_x)U_{(p)}^h; L_2(\operatorname{supp}(1 - \chi_h))\|^2 + h^{-2}\|U_{(p)}^h; L_2(\operatorname{supp}(1 - \chi_h))\|^2) \\
 \leq ch^{2\beta}(\|R_h^{-\beta}\nabla_x U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 + \|R_h^{-1-\beta}U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h)\|^2) \leq Ch^{2\beta}\Lambda_p^h(\eta)^2.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

В силу линейной независимости вектор-функций $\chi_h U_{(1)}^h, \dots, \chi_h U_{(j)}^h$ каждое подпространство $\mathcal{E}_j^0$ в максиминимальном принципе (2.11) содержит элемент $\mathcal{V}^h = \exp(i\eta z)\mathcal{U}^h$, где $\mathcal{U}^h$ – линейная комбинация из (2.25). Заметим, что в соответствии с неравенствами (2.23) и (2.29) верны соотношения

$$\begin{aligned}
 a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi) &= \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q a_\eta(\chi_h U_{(p)}^h, \chi_h U_{(q)}^h; \varpi) \\
 &= \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q (a_\eta(U_{(p)}^h, U_{(q)}^h; \varpi_h) \\
 &\quad - a_\eta((1 - \chi_h)U_{(p)}^h, U_{(q)}^h; \varpi_h) - a_\eta(\chi_h U_{(p)}^h, (1 - \chi_h)U_{(q)}^h; \varpi_h)) \\
 &\leq \sum_{p=1}^j |b_p|^2 \Lambda_p^h(\eta) + C \sum_{p,q=1}^j (|b_p|^2 + |b_q|^2) \\
 &\quad \times (\|\nabla_x U_{(p)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\| + h^{-1} \|U_{(p)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\|) \\
 &\quad \times (\|\nabla_x U_{(q)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\| + h^{-1} \|U_{(q)}^h; L_2(\text{supp}(1 - \chi_h))\|) \\
 &\leq \Lambda_j^h(\eta) + C j h^{2\beta} \Lambda_j^h(\eta)^2,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\|\mathcal{V}^h; L_2(\varpi)\|^2 = \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q (\delta_{p,q} - ((1 - \chi_h^2)U_{(p)}^h, U_{(q)}^h)_{\varpi_h}) \geq 1 - 4c_R^2 c_K j h^2 \Lambda_j^h(\eta).$$

Кроме того, согласно формулам (2.15) и (2.24) имеем

$$\begin{aligned}
 h \leq h_j &\implies 4c_R^2 c_K j h^2 \Lambda_j^h(\eta) \leq \frac{1}{2} \\
 \implies (1 - 4c_R^2 c_K j h^2 \Lambda_j^h(\eta))^{-1} &\leq 1 + 8c_R^2 c_K j h^2 \Lambda_j^h(\eta).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Применяя теперь максиминимальный принцип (2.11) и учитывая соотношения (2.30), (2.31), а также неравенства $h \leq 1$ и $\beta \leq 1$, находим

$$\mu_j \leq \max_{\mathcal{E}_j^0} \frac{a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi)}{\|\mathcal{V}^h; L_2(\varpi)\|^2} \leq \frac{\Lambda_j^h(\eta) + C j h^{2\beta} \Lambda_j^h(\eta)^2}{1 - 4c_R^2 c_K j h^2 \Lambda_j^h(\eta)} \leq \Lambda_j^h(\eta) + c_0 j h^{2\beta} \Lambda_j^h(\eta)^2, \tag{2.32}$$

$$c_0 = 2C + 8c_R^2 c_K. \tag{2.33}$$

2.4. Раскрытие лакун. Предположим, что $\mu_j^0 < \mu_{j+1}^0$ (оба собственных числа из последовательности (2.6) могут быть и кратными). Если параметр h не превосходит величины (2.24), то при учете соотношений (2.32) и (2.15) обнаруживаем, что сегменты $\Upsilon_1^h, \dots, \Upsilon_j^h$ существенного спектра (1.17) расположены на множестве $[0, \mu_j(1 + c_0 j h^{2\beta} \mu_j)]$, а сегменты $\Upsilon_{j+1}^h, \Upsilon_{j+2}^h, \dots$ – на множестве $[\mu_{j+1}^0, +\infty)$. Иными словами, в случае

$$h^{2\beta} < \frac{1}{c_0 j \mu_{j+1}} \left(1 - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right) \tag{2.34}$$

между сегментами Υ_j^h и Υ_{j+1}^h заведомо открыта лакуна. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mu_j < \mu_{j+1}$ в последовательности (2.6), $h \in (0, h_j]$ и справедливо условие (2.34). Тогда в спектре оператора A_D^h задачи (1.6), (1.7) имеется лакуна, содержащая интервал

$$(\mu_j(1 + c_0 j h^{2\beta} \mu_j), \mu_{j+1}), \quad (2.35)$$

причем величины h_j и c_0 взяты из формул (2.24) и (2.33), а показатель $\beta \in (0, \beta_0)$ предписан леммой 2.2.

§ 3. Лакуны в спектре задачи Неймана

3.1. Предельная задача. Как и в п. 2.1, предельной ($h = 0$) задачей для модельной задачи (1.19), (1.21), (1.22) на ячейке ϖ_h или, что то же самое, вариационной задачи (1.23) при $\mathcal{H}_{\text{per}}^h = \mathcal{H}_{N\text{per}}^h = H_{\text{per}}^1(\varpi_h)^k$, служит спектральная задача на области ϖ , составленная из системы (2.1) и краевого условия Неймана

$$\mathcal{N}(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta)U^0(y, z; \eta) = 0, \quad (y, z) \in \partial\varpi,$$

и превращающаяся после замены (2.3) в задачу

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)V(x) = \mu V(x), \quad x \in \partial\varpi, \quad \mathcal{N}(x, \nabla_x)V(x) = 0, \quad x \in \partial\varpi. \quad (3.1)$$

Вариационная формулировка последней апеллирует к интегральному тождеству (2.5) на пространстве $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_N^0 = H^1(\varpi)^k$. Собственные числа образуют последовательность (2.6), причем в отличие от задачи Дирихле (замечание 2.1) справедлива формула

$$0 = \mu_1 = \dots = \mu_d < \mu_{1+d},$$

где d – размерность полиномиального подпространства (1.14). В максиминимальном принципе (2.11) фигурирует пространство $\mathcal{E}_1^0 = H^1(\varpi)^k$. Собственные вектор-функции $V_{(p)}$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки (2.12), а первые d из них принадлежат линейному пространству $\mathcal{P}$.

Как уже упоминалось в п. 1.4, в настоящем параграфе будем считать поверхность $\partial\varpi$ гладкой. Это нужно для выполнения следующего неравенства, востребованного в оценках (3.10) и (3.12).

ЛЕММА 3.1. Собственная вектор-функция $V_{(j)}$ задачи (3.1), нормированная условием (2.12) при $q = p = j$, подчинена соотношению

$$|V_{(j)}(x)| + (1 + \mu_j)^{-1/2} |\nabla_x V_{(j)}(x)| \leq c_V (1 + \mu_j)^{n/2}, \quad (3.2)$$

а постоянная c_V не зависит от точки $x \in \overline{\varpi}$ и номера $j \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оценки [33] решений эллиптических краевых задач

$$\|V_{(j)}; H^{l+1}(\varpi)\| \leq c_p (\|f_{(j)}; H^{l-1}(\varpi)\| + \|V_{(j)}; L_2(\varpi)\|), \quad l \in \mathbb{N},$$

и считая, что $f_{(j)} = \mu_j V_{(j)}$, по индукции получаем неравенство

$$\sum_{p=0}^{l+1} (1 + \mu_j)^{-p/2} \|\nabla_x^p V_{(j)}; L_2(\varpi)\| \leq C_l.$$

Отсюда при помощи теоремы Соболева о вложении $H^{l+1} \subset C^q$, примененной после растяжения координат в $(1 + \mu_j)^{1/2}$ раз, выводим неравенство (3.2).

3.2. Оценка снизу. Понятно, что сужение на область ϖ собственной вектор-функции $U_{(p)}^h$ задачи (1.19), (1.21), (1.22) (или (1.23)) попадает в пространство $H^1(\varpi)^k$ (напоминаем, что $\varpi \subset \varpi_h$), и поэтому для применения максиминимального принципа (2.11) достаточно оценить норму $\|U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h \setminus \varpi)\|$. Это будет сделано в очередной лемме при помощи метода “шлифовки поверхностей”, разработанного в [34; § 2] для задач теории упругости. Поскольку случай $n = 2$ несколько отличается от случая $n \geq 3$, удобно ввести функцию

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \ell_n(t) = \begin{cases} 1 + |\ln t| & \text{при } n = 2, \\ 1 & \text{при } n \geq 3. \end{cases}$$

ЛЕММА 3.2. *Справедливо соотношение*

$$\|u; L_2(\varpi_h \setminus \varpi)\|^2 \leq c_K h^2 \ell_n(h)^2 (a(u, u; \varpi_h) + \|u; L_2(\varpi_h)\|^2), \quad (3.3)$$

в котором постоянная c_K не зависит ни от вектор-функции $u \in H^1(\varpi_h)^k$, ни от параметра $h \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала воспользуемся обобщенным неравенством Корна (1.15) в фиксированной области ϖ , а также весовой оценкой

$$\| |x - \mathcal{O}^i|^{-1} \ell_n(|x - \mathcal{O}^i|)^{-1} u; L_2(\varpi) \| \leq c \|u; H^1(\varpi) \|,$$

которая обеспечена следующими вариантами одномерного неравенства Харди:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{n-3} |W(r)|^2 dr &\leq \frac{4}{(n-2)^2} \int_0^\infty r^{n-1} \left| \frac{dW}{dr}(r) \right|^2 dr, & W \in C_c^1[0, +\infty), \quad n \geq 3; \\ \int_0^1 r^{-1} |\ln r|^{-2} |W(r)|^2 dr &\leq 4 \int_0^1 r \left| \frac{dW}{dr}(r) \right|^2 dr, & W \in C_c^1[0, 1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подчеркнем, что эти неравенства применяются после спрямления (гладкой) границы в окрестностях точек $\mathcal{O}^i$, перехода к сферическим (полярным для $n = 2$) координатам (r, φ) и умножения поля на подходящую срезающую функцию. Последнее действие обеспечивает затребованные в (3.4) условия ($W = 0$ около точки $r = 1$ при $n = 2$ и носитель функции W компактен при $n \geq 3$), а замена непрерывно дифференцируемых функций функциями из соболевского класса производится при помощи замыкания.

В случае $n = 3$ осталось применить неравенства (2.22), для выполнения которых условия Дирихле на γ_h , фигурировавшие в § 2, не нужны. Если же $n = 2$, то первое из упомянутых неравенств принимает вид

$$h^{-2} (1 + |\ln h|)^{-2} \|u; L_2(\omega_h \times (c_R h, 2c_R h))\|^2 \leq c_0 \| |x|^{-1} (1 + |\ln |x||)^{-1} u; L_2(\varpi) \|^2,$$

а второе перед использованием нужно умножить на величину $(1 + |\ln h|)^{-2}$, не превосходящую единицы.

Пусть верхняя граница $h_j > 0$ изменения параметра h такова, что

$$c_K h^2 \ell_n(h)^2 j (1 + \Lambda_j^h(\eta)) \leq \frac{1}{2}, \quad h \in (0, h_j], \quad \eta \in [0, 2\pi). \quad (3.5)$$

Тогда для линейной комбинации собственных вектор-функций задачи (1.23),

$$\mathcal{U}^h = \sum_{p=1}^j b_p U_{(p)}^h, \quad \sum_{p=1}^j |b_p|^2 = 1, \quad (3.6)$$

выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi)\|^2 &= \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q ((U_{(p)}^h, U_{(q)}^h)_{\varpi_h} - (U_{(p)}^h, U_{(q)}^h)_{\varpi_h \setminus \varpi}) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^j (|b_p|^2 + |b_q|^2) \|U_{(p)}^h; L_2(\varpi_h \setminus \varpi)\| \|U_{(q)}^h; L_2(\varpi_h \setminus \varpi)\| \\ &\geq 1 - j c_K h^2 \ell_n(h) (1 + \Lambda_j^h(\eta)) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

гарантирующее линейную независимость элементов $U_{(1)}^h, \dots, U_{(j)}^h$ пространства $L_2(\varpi)^k$ (напоминаем, что условия ортогональности и нормировки (1.25) назначены в более широкой области ϖ_h). Следовательно, в формуле (2.11) каждое подпространство $\mathcal{E}_j^0$ коразмерности $j - 1$ содержит элемент $\mathcal{V}^h = \exp(i\eta z) \mathcal{U}^h$ с множителем из (3.6). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu_j &\leq \max_{\mathcal{E}_j^0} \frac{a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi)}{\|\mathcal{V}^h; L_2(\varpi)\|^2} = \max_{\mathcal{E}_j^0} \frac{a_\eta(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \varpi)}{\|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi)\|^2} \\ &\leq \max_{\mathcal{E}_j^0} \frac{a_\eta(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \varpi)}{\|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 - \|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi_h \setminus \varpi)\|^2} \\ &\leq \max_{\mathcal{E}_j^0} \frac{\sum_{p=1}^j \Lambda_p^h(h) |b_p|^2}{1 - c_K h^2 \ell_n(h) \sum_{p,q=1}^j |b_p| |b_q| (1 + \Lambda_p^h(\eta))^{1/2} (1 + \Lambda_q^h(\eta))^{1/2}} \\ &\leq \frac{\Lambda_j^h(\eta)}{1 - c_K h^2 \ell_n(h) j (1 + \Lambda_j^h(\eta))} \leq \Lambda_j^h(\eta) (1 + 2c_K h^2 \ell_n(h) j (1 + \Lambda_j^h(\eta))). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Здесь помимо неравенства (3.3) и аналогичной (2.16) формулы для спектральных пар $\{\Lambda_p^h(\eta), U_{(p)}^h\}$ было использовано соотношение $(1 - t)^{-1} \leq 1 + 2t$, верное при $t \in [0, 1/2]$ (ср. требование (3.5)).

Из цепочки (3.7) выводим также, что

$$\begin{aligned} \Lambda_j^h(\eta) &\geq \mu_j (1 - c_K h^2 \ell_n(h) j (1 + \Lambda_j^h(\eta))) \\ \implies 1 + \Lambda_j^h(\eta) &\geq (1 + \mu_j) (1 + c_K h^2 \ell_n(h) j \mu_j)^{-1} \geq (1 + \mu_j) (1 - c_K h^2 \ell_n(h) j \mu_j) \\ \implies \Lambda_j^h(\eta) &\geq \mu_j (1 - c_K h^2 \ell_n(h) j (1 + \mu_j)). \quad (3.8) \end{aligned}$$

3.3. Оценка сверху. Пусть сначала $n \geq 3$. Зафиксируем индекс $j \in \mathbb{N}$ и рассмотрим линейную комбинацию

$$\mathcal{V}^h = \sum_{p=1}^j b_p \chi_h V_{(p)}, \quad \sum_{p=1}^j |b_p|^2 = 1, \quad (3.9)$$

χ_h – та же срезающая функция, что и в формуле (2.25), а $V_{(1)}, \dots, V_{(j)}$ – собственные вектор-функции задачи (3.1), удовлетворяющие соотношениям (2.12) и (3.2). Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 &= \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q (\delta_{p,q} - ((1 - \chi_h^2)V_{(p)}, V_{(q)})\varpi) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} c_V \text{mes}_n(\varpi \cap \text{supp}(1 - \chi_h^2)) \sum_{p,q=1}^j (|b_p|^2 + |b_q|^2)(1 + \mu_p)^{n/2}(1 + \mu_q)^{n/2} \\ &\geq 1 - C_V h^n j(1 + \mu_j)^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поэтому при $h \in (0, h_j]$ и

$$C_V h_j^n j(1 + \mu_j)^n \leq \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

вектор-функции $\chi_h V_{(1)}, \dots, \chi_h V_{(j)}$ остаются линейно независимыми. Кроме того, они обращаются в нуль на перемычке $\varpi_h \setminus \varpi$, а значит, оказываются 1-периодическими по переменной z даже после умножения на экспоненту $\exp(-i\eta z)$. Теперь для применения максиминимального принципа (1.26) нужно обработать форму $a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi)$.

Поскольку $|\nabla_x \chi_h(x)| \leq c_\chi h^{-1}$, производя дифференцирование внутри сомножителей в форме и применяя оценку (3.2), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi) &= \sum_{p,q=1}^j b_p \bar{b}_q (\mathcal{A}(\mathcal{D}(\nabla_x)V_{(p)} - (1 - \chi_h)\mathcal{D}(\nabla_x)V_{(p)} \\ &\quad + [\mathcal{D}(\nabla_x), \chi_h]V_{(p)}), \mathcal{D}(\nabla_x)V_{(q)} - (1 - \chi_h)\mathcal{D}(\nabla_x)V_{(q)} + [\mathcal{D}(\nabla_x), \chi_h]V_{(q)})\varpi \\ &\leq \sum_{p,q=1}^3 (b_p \bar{b}_q \mu_p \delta_{p,q} + \frac{1}{2} c_a (|b_p|^2 + |b_q|^2) h^n ((1 + \mu_p)^{(1+n)/2} + h^{-1}(1 + \mu_p)^{n/2}) \\ &\quad \times ((1 + \mu_q)^{(1+n)/2} + h^{-1}(1 + \mu_q)^{n/2})) \\ &\leq \mu_j + c_a h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n (1 + h(1 + \mu_j)^{1/2})^2 \leq \mu_j + C_a h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

(по поводу обозначения $[\mathcal{D}, \chi_h]$ см. комментарий к формуле (2.27)). Подчеркнем, что в силу требования (3.11) множитель $1 + h(1 + \mu_j)^{1/2}$ ограничен равномерно относительно h и j .

В любом подпространстве $\mathcal{E}_j^h$ из правой части (1.21) содержится элемент $\mathcal{U}^h = \exp(-i\eta z)\mathcal{V}^h$, где $\mathcal{V}^h$ – некоторая линейная комбинация в (3.9) (напомним, что $\dim(\mathcal{H}_{\text{per}}^h \ominus \mathcal{E}_j^h) = j - 1$). Поэтому в случае $n \geq 3$ верна оценка

$$\begin{aligned} \Lambda_j^h(\eta) &\leq \max_{\mathcal{E}_j^h} \frac{a_\eta(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \varpi_h)}{\|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi_h)\|^2} = \max_{\mathcal{E}_j^h} \frac{a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi)}{\|\mathcal{V}^h; L_2(\varpi)\|^2} \\ &\leq \frac{\mu_j + C_a h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n}{1 - C_V h^n j(1 + \mu_j)^n} \leq (\mu_j + C_a h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n)(1 + 2C_V h^n j(1 + \mu_j)^n) \\ &\leq \mu_j + 2C_V h^2 j(1 + \mu_j)^{1+n} + 2C_a h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n \leq \mu_j + C_\Lambda h^{n-2} j(1 + \mu_j)^n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь было использовано соотношение $(1-t)^{-1} \leq 1+2t$ при $t \in (0, 1/2]$, а также условие (3.11), влекущее за собой формулу $h^2\mu_j \leq \text{const}$.

Итак, в случае $n \geq 3$ положим

$$h_j = H j^{-2/3} (1 + \mu_j)^{-1}, \quad (3.14)$$

а множитель $H \in (0, 1]$ зафиксируем настолько малым, чтобы одновременно выполнялись требования (3.5) при $n \geq 3$ и (3.11). Первое из них обеспечено проверенным неравенством (3.13) и следующей выкладкой:

$$\begin{aligned} c_K h^2 j (1 + \Lambda_j^h(\eta)) &\leq c_K h^2 j (1 + \mu_j + C_\Lambda h^{n-2} j (1 + \mu_j)^n) \\ &\leq c_K H^2 j^{-1/3} (1 + \mu_j)^{-1} + c_K C_\Lambda H^n j^{2(1-n/3)} \leq c_K (1 + C_\Lambda) H^2. \end{aligned}$$

Иными словами, можно взять $H = (2c_K(1 + C_\Lambda))^{-1/2}$.

Теперь рассмотрим плоский волновод Π_h , т.е. $n = 2$. Пусть $h \leq 1/2$. Повторим предшествующие выкладки с новой срезающей функцией

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \chi_0([\ln(c_R^2 h)]^{-1} \ln |x - \mathcal{O}^i|) & \text{при } |x - \mathcal{O}^i| \leq c_R^{1/2} h^{1/2}, \\ 1 & \text{при } \min |x - \mathcal{O}^i| \geq c_R^{1/2} h^{1/2}, \end{cases} \quad (3.15)$$

где χ_0 – эталонная срезка, а именно, $\chi_0(t) = 0$ при $t \leq 1/2$ и $\chi_0(t) = 1$ при $t \geq 1$; $0 \leq \chi_0 \leq 1$. Функция (3.15) обращается в нуль при $\min |x - \mathcal{O}^i| \leq c_R h$ и поэтому, как и ранее, гладко продолжается нулем на перемычку $\varpi_h \setminus \varpi$. Таким образом, $\exp(i\eta z) \chi_h V_{(p)}$ – периодические вектор-функции переменной z при любом значении параметра η .

Поскольку носитель разности $1 - \chi_h$ расположен в объединении замкнутых кругов с центрами $\mathcal{O}^i$, $i = 0, 1$, и радиусом $c_R^{1/2} h^{1/2}$, формула (3.10) заменяется такой:

$$\|\mathcal{U}^h; L_2(\varpi_h)\|^2 \leq 1 - C_V h_j (1 + \mu_j)^2.$$

В результате при $h \in (0, h_j]$, где

$$h_j = H j^{-1} (1 + \mu_j)^{-2} \quad (3.16)$$

и $H = (2C_V)^{-1}$, произведения $\chi_h V_{(1)}, \dots, \chi_h V_{(j)}$ оказываются линейно независимыми в пространстве $L_2(\varpi_h)^k$.

Для внесения необходимых изменений в соотношение (3.12) заметим, что $|\nabla_x \chi_h(x)| \leq c |\ln h|^{-1} r^{-1}$ и

$$\int_{\{x \in \varpi: c_R^2 h \leq |x| \leq c_R h^{1/2}\}} |\nabla_x \chi_h(x)|^2 dx \leq c |\ln h|^{-2} \int_{c_R^2 h}^{c_R h^{1/2}} r^{-2} r dr \leq C |\ln h|^{-1}.$$

Следовательно, при помощи оценки (3.2) выводим, что

$$a(\mathcal{V}^h, \mathcal{V}^h; \varpi) \leq \mu_j + c_a j (h(1 + \mu_j)^3 + |\ln h|^{-1} (1 + \mu_j)^2).$$

В результате вместо (3.13) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \Lambda_j^h(\eta) &\leq \frac{\mu_j + c_a j (|\ln h|^{-1} + h(1 + \mu_j)) (1 + \mu_j)^2}{1 - C_V h_j (1 + \mu_j)^2} \\ &\leq \mu_j + c_\Lambda j (|\ln h|^{-1} + h(1 + \mu_j)) (1 + \mu_j)^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя вытекающую из (3.17) оценку для $1 + \Lambda_j^h(\eta)$ в ограничение (3.5) при $n = 2$, обнаруживаем, что это ограничение выполнено, если несколько ужесточить требование (3.16):

$$h_j = H j^{-1} (1 + \ln j)^{-1/2} (1 + \mu_j)^{-2}. \quad (3.18)$$

Действительно, выкладки в предыдущем пункте опирались на соотношение

$$c_K h^2 (1 + |\ln h|)^2 j (1 + \Lambda_j^h(\eta)) \leq \frac{1}{2},$$

а значит, согласно (3.17) в оценках нуждаются выражения

$$h_j^2 (1 + |\ln h_j|)^2 j (1 + \mu_j), \quad h_j^2 (1 + |\ln h_j|) j^2 (1 + \mu_j)^2, \quad h_j^3 (1 + |\ln h_j|)^2 j^2 (1 + \mu_j)^3.$$

В силу (3.18) самое большое из них, второе, не превосходит

$$\begin{aligned} & H^2 j^{-2} (1 + \ln j)^{-1} (1 + \mu_j)^{-4} \\ & \times \left(1 + \left| \ln H - \ln j - \frac{1}{2} \ln(1 + \ln j) - 2 \ln(1 + \mu_j) \right| \right) j^2 (1 + \mu_j)^2 \\ & \leq c H^2 \frac{1 + |\ln H| + |\ln j| + \ln(1 + \mu_j)}{(1 + \ln j)(1 + \mu_j)^2} \leq C H^2 (1 + |\ln H|). \end{aligned}$$

Итак, достаточно взять малым множитель $H > 0$.

При условии (3.18) неравенство (3.17) преобразуется к виду

$$\Lambda_j^h(\eta) \leq \mu_j + C_\Lambda j (1 + |\ln h|)^{-1} (1 + \mu_j)^2. \quad (3.19)$$

Подчеркнем, что теперь введенное ранее ограничение $h \leq 1/2$ не нужно – вполне достаточно ограничения (3.18). Все подготовлено для того, чтобы сформулировать в п. 3.4 основное утверждение настоящего параграфа.

3.4. Раскрытие лакун. При помощи тех же рассуждений, что и в п. 2.4, сводим проверенные неравенства (3.5) и (3.13), (3.19) в следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что $\mu_j < \mu_{j+1}$ в последовательности (2.6) собственных чисел задачи Неймана (3.1).*

1) Пусть $n \geq 3$ и параметр $h \in (0, h_j]$, где h_j – величина (3.14), мал настолько, что выполнено неравенство

$$c_K h^2 (j+1) (1 + \mu_{j+1})^2 + c_\Lambda h^{n-2} j (1 + \mu_j)^n < \mu_{j+1} - \mu_j. \quad (3.20)$$

Тогда в спектре $\sigma(A_N^h)$ оператора задачи Неймана (1.6), (1.10) открыта лакуна между сегментами Υ_j^h и Υ_{j+1}^h .

2) Пусть $n = 2$ и параметр $h \in (0, h_j]$, где h_j – величина (3.18), мал настолько, что

$$c_K h^2 (1 + |\ln h|)^2 (j+1) (1 + \mu_{j+1})^2 + C_\Lambda j (1 + |\ln h|)^{-1} (1 + \mu_j)^2 < \mu_{j+1} - \mu_j. \quad (3.21)$$

Тогда в спектре $\sigma(A_N^h)$ оператора задачи Неймана (1.6), (1.2) открыта лакуна между сегментами Υ_j^h и Υ_{j+1}^h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условий (3.20) и (3.21) вытекает из формул (3.8), (3.13) и (3.8), (3.19) соответственно, обеспечивающих неравенства $\Lambda_j^h(\eta) < \Lambda_{j+1}^h(\zeta)$ при всех $\eta, \zeta \in [0, 2\pi)$.

§ 4. Следствия и обобщения результатов

4.1. Краевые условия. Приемы, использованные в § 2 и § 3 для обнаружения лакун, годятся и при иных краевых условиях

$$\mathcal{T}(x, \nabla_x)u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi_h. \quad (4.1)$$

Следуя [35], составим матрицу $\mathcal{T}$ в левой части (4.1) из строк $\mathcal{T}_{(q)}$, выбранных одним из следующих двух способов, своим для каждого $q = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(q)}(x, \nabla_x)u^h(x) &= (\mathcal{S}(x)\mathcal{N}(x, \nabla_x))_{(q)}u^h(x) \\ &\text{или} \\ \mathcal{T}_{(q)}(x, \nabla_x)u^h(x) &= \mathcal{S}_{(q)}(x)u^h(x), \\ &x \in \partial\Pi_h. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{S}$ – унитарная матрица-функция с измеримыми 1-периодическими по переменной z коэффициентами. Конкретная конструкция матрицы $\mathcal{T}$ может различаться на разных участках границы, но требуется соблюсти одно из двух следующих условий:

- i) граница $\partial\varpi$ и матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ гладкие в окрестностях точек $\mathcal{O}^0$ и $\mathcal{O}^1$, а способ (4.2) отбора строк оператора краевых условий (4.1) зафиксирован в каждой из упомянутых окрестностей;
- ii) найдутся такие секторы двугранных углов

$$\mathbb{D}^0(c_R h, C_R) = \mathbb{K}^0(c_R h, C_R) \times (0, \delta), \quad \mathbb{D}^1(c_R h, C_R) = \mathbb{K}^1(c_R h, C_R) \times (1 - \delta, 1),$$

что на поверхностях $\partial\varpi \cap \mathbb{D}^i(c_R h, C_R)$ назначены условия Дирихле (1.7), причем $\mathbb{K}^i(c_R h, C_R) = \{y \in \mathbb{K}^i : c_R h < |y| < C_R\}$ и $\mathbb{K}^i$ – непустой $(n-1)$ -мерный конус с вершиной в точке $y = 0$.

Рис. 6. Предписанная зона условий Дирихле высветлена

В первом случае можно применить оценки, указанные в § 3, а во втором случае условия Дирихле на $\partial\varpi \cap \mathbb{D}^i(c_R h, C_R)$ (см. рис. 6) дают возможность доказать аналоги лемм 2.1 и 2.2. Обращаем внимание на то, что гладкость границы нужна разве лишь в окрестностях точек $\mathcal{O}^0$ и $\mathcal{O}^1$.

4.2. Перемычки. Теоремы 2.1, 3.1 и способы их проверки остаются без изменений и в том случае, если бусины (1.3) соединены одна с другой несколькими тонкими и короткими перемычками (рис. 7, а)). Количество перемычек между бусинами может периодически изменяться (рис. 7, б), где ячейка периодичности глубоко тонирована). В этом случае модельная задача вида (2.1), (2.2) (или (2.4)) ставится не на области (по определению связном множестве), а на объединении областей. Геометрическое строение волновода можно усложнить (рис. 8). Последовательность (2.6) “предельных” собственных чисел μ_j получается объединением последовательностей собственных чисел задач на компонентах связности множества ϖ . Если области, составляющие предельную ячейку ϖ , одинаковы и матрица $\mathcal{A}$ постоянна, то каждое собственное число в объединенной последовательности (2.6) заведомо кратное.

Рис. 7. Несколько соединительных перемычек

Малозначительные изменения в оценках, обеспечивающих раскрытие лакун, нужны в том случае, когда бусины касаются одна другой вдоль d -мерных подмногообразий ($0 < d < n - 2$) и соединены тонкими кольцевыми перемычками. Сечение периодического тела вращения в пространстве $\mathbb{R}^3$ представлено на рис. 9, а) (штрих-пунктирная линия – ось вращения). На рис. 9, б), изображено сечение осесимметричного волновода в предельной ситуации: круговые цилиндры $\varpi_j \in \mathbb{R}^3$ спаяны вдоль тонких колец.

Рис. 8. Предельная ячейка имеет три компоненты связности

Рис. 9. Сечения трехмерных тел вращения

4.3. О множественности лакун. Оценки для границ сегментов Υ_p^h , полученные в теоремах 2.1 и 3.1, позволяют сделать такой вывод: при уменьшении толщины перемычек в спектре (1.7) операторов задач (1.6), (1.7) и (1.6), (1.10) открывается все большее число лакун, неограниченно возрастающее при $h \rightarrow +0$. В отличие от величин (2.24) и (3.16), (3.18) верхние грани для параметра h в условиях (2.34) и (3.20), (3.21) не являются монотонными функциями индекса j (из-за присутствия разности $\mu_{j+1} - \mu_j$). Поэтому лакуны открываются, вообще говоря, не в порядке очереди.

Для $\varkappa_j$ -кратного собственного числа μ_j в последовательности (2.6),

$$\mu_{j-1} < \mu_j = \dots = \mu_{j+\varkappa_j-1} < \mu_{j+\varkappa_j}, \quad (4.3)$$

предложенный в статье подход не позволяет обнаружить лакуны между сегментами $\Upsilon_j^h, \dots, \Upsilon_{j+\varkappa_j-1}^h$. Отметим, что в статье [29], посвященной задаче Неймана для системы уравнений теории упругости, для которой формула (4.3) имеет место при $j = 1$ и $\varkappa_1 = 6$ (шесть – размерность линейала жестких смещений), при помощи асимптотического анализа установлено, что в случае осевой симметрии и при малом $h > 0$ множества $\Upsilon_1^h, \dots, \Upsilon_6^h$ покрывают целый сегмент.

4.4. О точности оценок. Если границы $\partial\varpi$ и $\partial\omega$ гладкие, а элементы матрицы $\mathcal{A}$ – гладкие функции в объемлющем цилиндре $\mathcal{Q}_{R_{\Pi}}$, то метод, разработанный в книге [31] (см. также [36]–[38] и др.), позволяет построить асимптотику собственных чисел (1.24) задач (1.19), (1.20), (1.22) и (1.19), (1.21), (1.22) при $h \rightarrow +0$. К тому же при помощи метода прямого и обратного сведения, предложенного в книге [39] (см. также [40]–[42]), можно в оценках асимптотических остатков выделить явную зависимость мажоранты от номера j собственного числа μ_j кратности $\varkappa_j$ (см. (2.6) и (4.3)) и величины

$$\min \left\{ 1 - \frac{\mu_j}{\mu_{j+\varkappa_j}}, \frac{\mu_j}{\mu_{j-1}} - 1 \right\}.$$

Все это позволяет уточнить положение сегментов Υ_p^h , однако требует несоразмерно большего объема выкладок и значительного технического усложнения доказательств.

В формулах (2.32) и (2.34), (2.35) фигурирует число $\beta \in (0, \beta_0)$, которое неявно определено в лемме 2.2, обслуживающей задачу Дирихле (2.4). Если граница $\partial\varpi$ и коэффициенты дифференциального оператора (1.8) гладкие, можно рассчитывать на то, что $\beta_0 = 1$ (см. [43], [31; гл. 4] и др., где получены асимптотически точные весовые оценки решений краевых задач в областях с сингулярными возмущениями границы). Вместе с тем, для смешанной краевой задачи или угловой точки $\mathcal{O}^i$ (см. п. 4.1) грань β_0 может уменьшиться. Так, например, $\beta_0 = 1/2$ для полосы ($n = 2$) с трещинами на рис. 9, б) в случае постановки условий Дирихле на внешней части границы и Неймана на внутренней или наоборот (см. п. 4.1, ii) и ср. с [4; предложение 2.22]).

Список литературы

- [1] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., 49, Springer–Verlag, New York, 1985.

- [2] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Paris; Academia, Prague, 1967.
- [3] С. А. Назаров, “Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы”, *Проблемы мат. анализа*, **16** (1997), 167–192; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Self-adjoint elliptic boundary-value problems. The polynomial property and formally positive operators”, *J. Math. Sci. (New York)*, **92**:6 (1998), 4338–4353.
- [4] С. А. Назаров, “Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов”, *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 947–1014.
- [5] A. Alonso, B. Simon, “The Birman–Krein–Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators”, *J. Operator Theory*, **4**:2 (1980), 251–270.
- [6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [7] С. А. Назаров, “О существенном спектре краевых задач для систем дифференциальных уравнений в ограниченной области с пиком”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:1 (2009), 55–67; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The essential spectrum of boundary value problems for systems of differential equations in a bounded domain with a cusp”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:1 (2009), 44–54.
- [8] П. А. Кучмент, “Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных”, *УМН*, **37**:4 (1982), 3–52; англ. пер.: P. A. Kuchment, “Floquet theory for partial differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **37**:4 (1982), 1–60.
- [9] S. Nazarov, “Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains”, *Sobolev spaces in mathematics. II*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **9**, Springer-Verlag, New York, 2009, 261–309.
- [10] И. М. Гельфанд, “Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **73**:6 (1950), 1117–1120.
- [11] P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations*, Oper. Theory Adv. Appl., **60**, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [12] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
- [14] С. А. Назаров, “Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 101–112; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Elliptic boundary value problems with periodic coefficients in a cylinder”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 89–98.
- [15] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [16] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопрояженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

- [17] A. Figotin, P. Kuchment, “Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media”, I. Scalar model, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:1 (1996), 68–88; II. Two-dimensional photonic crystals, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:6 (1996), 1561–1620.
- [18] E. L. Green, “Spectral theory of Laplace–Beltrami operators with periodic metrics”, *J. Differential Equations*, **133**:1 (1997), 15–29.
- [19] R. Hempel, K. Lienau, “Spectral properties of periodic media in the large coupling limit”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:7–8 (2000), 1445–1470.
- [20] L. Friedlander, “On the density of states of periodic media in the large coupling limit”, *Comm. Partial Differential Equations*, **27**:1–2 (2002), 355–380.
- [21] В. В. Жиков, “О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами”, *Алгебра и анализ*, **16**:5 (2004), 34–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On spectrum gaps of some divergent elliptic operators with periodic coefficients”, *St. Petersburg Math. J.*, **16** (2005), 773–790.
- [22] N. Filonov, “Gaps in the spectrum of the Maxwell operator with periodic coefficients”, *Comm. Math. Phys.*, **240**:1–2 (2003), 161–170.
- [23] P. Kuchment, “The mathematics of photonic crystals”, *Mathematical modeling in optical science* (Stanford Univ., Palo Alto, CA, USA, 1997), *Frontiers Appl. Math.*, **22**, SIAM, Philadelphia, PA, 2001, 207–272.
- [24] L. Friedlander, M. Solomyak, “On the spectrum of narrow periodic waveguides”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 238–242.
- [25] С. А. Назаров, “Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода”, *Матем. заметки*, **87**:5 (2010), 773–795.
- [26] S. A. Nazarov, “A gap in the continuous spectrum of an elastic waveguide”, *C. R. Mecanique.*, **336**:10 (2008), 751–756.
- [27] С. А. Назаров, “Волны Рэлея для упругого полуслоя с частично заземленной периодической границей”, *Докл. РАН*, **423**:1 (2008), 56–61; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Rayleigh waves in an elastic half-layer with partly jammed periodic boundary”, *Dokl. Math.*, **53**:11 (2008), 600–604.
- [28] С. А. Назаров, “Раскрытие лакуны на существенном спектре задачи теории упругости в периодическом полуслое”, *Алгебра и анализ*, **21**:2 (2009), 166–202; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Gap opening in the essential spectrum of the elasticity theory problem in a periodic half-layer”, *St. Petersburg Math. J.*, **21** (2010), 281–307.
- [29] С. А. Назаров, “Открытие лакуны в спектре упругого периодического волновода со свободной поверхностью”, *ЖВМ и МФ*, **49**:2 (2009), 332–343; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Gap detection in the spectrum of an elastic periodic waveguide with a free surface”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **49**:2 (2009), 323–333.
- [30] С. А. Назаров, “Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:3 (2009), 92–95; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Gap in the essential spectrum of the Neumann problem for an elliptic system in a periodic domain”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:3 (2009), 239–241.
- [31] W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. I, *Math. Lehrbücher und Monogr.*, **82**, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [32] С. А. Назаров, “Асимптотика по малому параметру решения эллиптической по Аграновичу–Вишику краевой задачи в области с конической точкой”, *Проблемы мат. анализа*, **7** (1979), 146–167.
- [33] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**:1 (1964), 35–92.
- [34] С. А. Назаров, “Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней”, *УМН*, **63**:1 (2008), 37–110; англ. пер.: S. A. Nazarov,

- “Korn inequalities for elastic junctions of massive bodies, thin plates, and rods”, *Russian Math. Surveys*, **63**:1 (2008), 35–107.
- [35] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [36] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса”, *Матем. сб.*, **122(164)**:4(12) (1983), 435–457; англ. пер.: V. G. Maz’ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “On the singularities of solutions of the Dirichlet problem in the exterior of a slender cone”, *Math. USSR-Sb.*, **50**:2 (1985), 415–437.
- [37] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 347–371; англ. пер.: V. G. Maz’ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 321–345.
- [38] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов”, Труды С.-Петерб. матем. об-ва, **6**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 151–212; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “Spectral problems in singularly perturbed domains and selfadjoint extensions of differential operators”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. VI*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **199**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 127–181.
- [39] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [40] С. А. Назаров, “Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины”, *Проблемы мат. анализа*, **25** (2003), 99–188; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Uniform estimates of remainders in asymptotic expansions of solutions to the problem on eigenoscillations of a piezoelectric plate”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **114**:5 (2003), 1657–1725.
- [41] M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, “Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues”, *IMA J. Appl. Math.*, **70**:3 (2005), 419–458.
- [42] D. Gómez, M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Pérez, “Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands: Asymptotic and uniform estimates for eigenvalues”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **85**:4 (2006), 598–632.
- [43] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области”, *Проблемы мат. анализа*, **8** (1981), 72–153.

С. А. Назаров (S. A. Nazarov)
Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию
04.03.2009