Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразования Кокстера и геометрия матрицы данных, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 119–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:21:46

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

В. А. Колмыков

Преобразования Кокстера и геометрия матрицы данных

Вводится понятие кокстеровского сопряжения произвольного множества квадратных матриц, определяются давидовы матрицы. Доказывается, что кокстеровское сопряжение множества всех комплексных симметрических матриц совпадает с множеством всех комплексных давидовых матриц.

Библиография: 7 названий.

Введение. Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями (или даже псевдоотражениями) относительно некоторого набора гиперплоскостей. Правда, это – чересчур общая (и поэтому трудная для исследования) конструкция. Наиболее изученным и употребительным является случай, когда пространство n -мерно, а множество псевдоотражений n -элементно. Мы будем рассматривать именно такую ситуацию. Данные о системе псевдоотражений составляют некоторую $(n \times n)$ -матрицу, по которой определенным образом строится ассоциированное преобразование Кокстера.

Матрице данных можно сопоставить геометрический объект, состоящий из “точек” и “маркированных связей” (последние символизируют ненулевые внедиагональные элементы матрицы); графы Кокстера и схемы Дынкина [1; гл. V], [2; гл. I] являются частными случаями такой конструкции. Идея подобных сопоставлений весьма эффективна (из последних работ следует упомянуть [3], в которой матрице данных сопоставлен квазиколчан, что дало возможность усилить одно из утверждений из [1]).

В теории представлений колчанов (см. [4]–[7]) граф является исходным объектом, по его “оснащению” строится матрица данных, а затем – ассоциированное преобразование Кокстера. Оно (и, что очень важно, его спектр) зависит от нумерации вершин графа, другими словами, – от операции, состоящей в перестановке строк и такой же перестановке столбцов матрицы данных (такая операция называется *естественным действием группы S_n*).

Матрицу назовем универсальной, если характеристический многочлен ассоциированного преобразования Кокстера инвариантен относительно естественного действия группы S_n . Если $\mathcal{A}$ – некоторый класс матриц, то граф G можно назвать универсальным для $\mathcal{A}$, если универсальна любая матрица из $\mathcal{A}$, которой соответствует этот граф. Через $\mathcal{A}^c$ обозначим класс всех графов, универсальных для $\mathcal{A}$. Например, если $\mathcal{M}$ – множество всех комплексных квадратных матриц, то нетрудно доказать, что $\mathcal{M}^c$ – множество всех графов-лесов. В статье, в частности, показано, что если $\mathcal{S}$ – множество всех комплексных симметрических матриц, то $\mathcal{S}^c$ – множество всех графов-дельтоидов.

Универсальные для $\mathcal{A}$ графы символизируют структуру матриц из $\mathcal{A}$, наиболее доступных для исследования спектров соответствующих преобразований Кокстера. Изучать же матрицы, которым соответствуют графы из $\mathcal{A}^c$, следует в максимальной общности, т.е. рассматривать *все* (а не только из класса $\mathcal{A}$) универсаль-

ные матрицы, которым соответствуют графы из $\mathcal{A}^c$. Множество таких матриц обозначим $\mathcal{A}^{cc}$ и назовем кокстеровским сопряжением множества $\mathcal{A}$.

В статье введено понятие давидовых матриц и доказано, что кокстеровское сопряжение множества всех комплексных симметрических матриц совпадает с множеством всех комплексных давидовых матриц.

1. Преобразования Кокстера. Для комплексной $(n \times n)$ -матрицы A положим

$$C(A) = (I - A_{(1)})(I - A_{(2)}) \cdots (I - A_{(n)}),$$

где $A_{(i)}$ – матрица, получающаяся из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в i -м столбце. *Преобразованием Кокстера, ассоциированным с матрицей A* , называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$.

Через S_n будем обозначать группу всех подстановок множества $\{1, \dots, n\}$. Если $\sigma \in S_n$, то через $A * \sigma$ обозначим матрицу, получающуюся из A перестановкой строк, соответствующей подстановке σ , и такой же перестановкой столбцов. Как правило, интерес представляют все преобразования Кокстера $C(A * \sigma)$, где σ пробегает S_n . Если мы интересуемся спектральными свойствами преобразования Кокстера (а это – подавляющая часть соответствующей проблематики), то естественно приходим к следующему определению.

Квадратную матрицу назовем *универсальной*, если при любой перестановке строк и такой же перестановке столбцов характеристический многочлен ассоциированного преобразования Кокстера не изменится, т.е. $|\lambda I - C(A * \sigma)|$ не зависит от σ .

2. Кокстеровское сопряжение. С матрицей A удобно (см. [1; гл. V, §6, упр. 3]) связать граф¹ Γ_A следующим образом. Множество его вершин $V = \{1, \dots, n\}$, множество ребер состоит из тех двухэлементных подмножеств $\{i, j\}$ множества V , для которых $a_{ij} \neq 0$ либо $a_{ji} \neq 0$. Пусть G – некоторый граф. Будем говорить, что матрица *имеет тип G* , если Γ_A изоморфен G .

Если $\mathcal{A}$ – некоторое множество квадратных матриц, то *универсальным графом для этого множества* назовем всякий граф G такой, что любая матрица из $\mathcal{A}$, имеющая тип G , универсальна. Множество всех универсальных для $\mathcal{A}$ графов обозначим $\mathcal{A}^c$.

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторое множество графов. Определим множество $\mathcal{G}^c$ универсальных матриц следующим образом. Универсальная матрица принадлежит $\mathcal{G}^c$, если и только если ее тип принадлежит $\mathcal{G}$.

Отображение $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{cc}$ назовем *кокстеровским сопряжением*.

3. Давидовы матрицы. *Давидовой* назовем всякую квадратную матрицу, удовлетворяющую следующим двум условиям:

- 1) если в соответствующем графе есть простые циклы², то все они длины три;
- 2) если D – ее центральная подматрица (т.е. матрица, стоящая на пересечении нескольких строк и столбцов с теми же номерами) третьего порядка, то $d_{12}d_{23}d_{31} = d_{13}d_{32}d_{21}$.

¹В настоящей статье под словом “граф” понимается конечный граф без петель и кратных ребер. Иными словами, *граф* – это пара (V, U) , где V – конечное множество, а U – некоторое множество, состоящее из двухэлементных подмножеств V .

²*Простым циклом длины $k \geq 3$* графа (V, U) называется подмножество $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ такое, что $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\} \in U$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Произведения $d_{12}d_{23}d_{31}$ и $d_{13}d_{32}d_{21}$ являются слагаемыми определителя $|D|$. Если эти произведения изобразить треугольниками на матрице D , то получится фигура, в иудейско-христианской традиции известная как звезда Давида, а в индийской – как шаткона. Она принадлежит к небольшому списку простых, но символически глубоких знаков, выработанных древней культурой.

ТЕОРЕМА. *Кокстеровское сопряжение множества всех комплексных симметрических матриц совпадает с множеством всех комплексных давидовых матриц.*

4. Доказательство теоремы. В этом доказательстве слово “матрица” означает “комплексная квадратная матрица”. Через $\mathcal{S}$ обозначим множество всех симметрических матриц, а через $\mathcal{D}$ – множество всех давидовых матриц. Нам надо доказать, что $\mathcal{S}^{cc} = \mathcal{D}$. Для этого докажем несколько лемм.

Для комплексного λ и матрицы A через $\lambda * A$ обозначим матрицу, получающуюся из A прибавлением $\lambda - 1$ к каждому диагональному элементу и умножением на λ каждого элемента, стоящего выше главной диагонали. Для характеристического многочлена преобразования Кокстера существует формула [1; гл. V, §6, упр. 3]:

$$|\lambda I - C(A)| = |\lambda * A|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие универсальности матрицы A можно переписать в следующем виде: $|\lambda * (A * \sigma)| = |\lambda * A| \quad \forall \lambda, \sigma$. Или в более симметричной форме: $|\lambda * (A * \sigma)| = |(\lambda * A) * \sigma| \quad \forall \lambda, \sigma$.

ЛЕММА 1. *Всякая матрица первого или второго порядка универсальна. Для матрицы D третьего порядка следующие условия равносильны:*

- i) *матрица D универсальна,*
- ii) *матрица D давидова,*
- iii) *выполнено равенство $d_{12}d_{23}d_{31} = d_{13}d_{32}d_{21}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Универсальность матрицы A второго порядка видна из равенства $|\lambda I - C(A)| = |\lambda * A| = (\lambda - 1 + a_{11})(\lambda - 1 + a_{22}) - a_{12}a_{21}\lambda$. Для матрицы третьего порядка равносильность условий ii) и iii) очевидна. Докажем равносильность условий i) и iii). Имеем

$$\begin{aligned} |\lambda I - C(D)| = |\lambda * D| &= (\lambda - 1)^3 + (\lambda - 1)^2(d_{11} + d_{22} + d_{33}) \\ &\quad + (\lambda - 1)(d_{11}d_{22} + d_{22}d_{33} + d_{11}d_{33}) \\ &\quad - \lambda(\lambda - 1)(d_{13}d_{31} + d_{12}d_{21} + d_{23}d_{32}) \\ &\quad - \lambda(d_{11}d_{23}d_{32} + d_{22}d_{13}d_{31} + d_{33}d_{12}d_{21}) \\ &\quad + (d_{12}d_{23}d_{31}\lambda^2 + d_{13}d_{32}d_{21}\lambda) + d_{11}d_{22}d_{33}. \end{aligned}$$

Очевидно, что все слагаемые кроме $(d_{12}d_{23}d_{31}\lambda^2 + d_{13}d_{32}d_{21}\lambda)$ инвариантны относительно перестановки строк с той же перестановкой столбцов. Поэтому универсальность матрицы D равносильна инвариантности этого слагаемого относительно указанного действия. Инвариантность же этого слагаемого равносильна условию iii).

Прямой суммой матриц K и L называется матрица $K \oplus L = \begin{pmatrix} K & O \\ O & L \end{pmatrix}$.

Матрица A называется *разложимой*, если для некоторой подстановки σ имеем $A * \sigma = K \oplus L$. Если $A * \sigma = \bigoplus_{i=1}^m A_i$ и матрицы A_i неразложимы, то назовем

их компонентами разложимости матрицы A . Каждой компоненте связности графа Γ_A соответствует, вообще говоря, несколько компонент разложимости матрицы A . Все компоненты разложимости, соответствующие компоненте связности, получаются друг из друга перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов.

Пусть τ – транспозиция i и $i + 1$. Если i и $i + 1$ принадлежат различным компонентам связности графа Γ_A , то транспозицию τ назовем *транскомпонентной для A* . Пусть последовательность $\tau_1, \dots, \tau_m$ транспозиций такова, что τ_1 транскомпонентна для A , τ_2 транскомпонентна для $A * \tau_1$ и т. д. Если подстановку σ можно представить в виде суперпозиции $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ (эта запись означает, что сначала действует τ_1 , затем τ_2 и т. д.), то σ назовем подстановкой, *транскомпонентной для A* .

ЛЕММА 2. 1) Если σ транскомпонентна для A , то $|\lambda * (A * \sigma)| = |\lambda * A|$.

2) В графе Γ_A зафиксируем компоненту связности. Существует транскомпонентная для A подстановка σ такая, что $A * \sigma = K \oplus L$, где K – одна из компонент разложимости матрицы A , соответствующая зафиксированной компоненте связности графа.

3) Пусть θ – транспозиция i и j , вершины i и j принадлежат одной компоненте связности графа Γ_A и подстановка σ транскомпонентна для A . Тогда σ транскомпонентна для $A * \theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение достаточно доказать в случае, когда подстановка является транспозицией. Пусть τ – транспозиция i и $i + 1$. Если в матрице $\lambda * A$ элемент, стоящий на пересечении i -й строки и $(i + 1)$ -го столбца, и элемент, стоящий на пересечении $(i + 1)$ -й строки и i -го столбца, поменять местами, то получится матрица $(\lambda * (A * \tau)) * \tau$. Если i и $i + 1$ не инцидентны в графе Γ_A (т.е. $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 0$), то $|\lambda * (A * \tau)| = |(\lambda * (A * \tau)) * \tau| = |\lambda * A|$. В частности, если τ транскомпонентна для A , то $|\lambda * (A * \tau)| = |\lambda * A|$.

2) Вершины одной компоненты связности графа Γ_A окрасим одним цветом, вершины другой – другим цветом и т. д. Рядом с каждой строкой матрицы A поставим пометку – цвет номера строки. Транскомпонентность транспозиции i и $i + 1$ означает, что i и $(i + 1)$ -я строки помечены различными цветами. Переставляя строки, будем вслед за ними переставлять и цветные пометки. Существует транскомпонентная для A подстановка σ такая, что в матрице $A * \sigma$ несколько начальных строк и только они помечены цветом зафиксированной ранее компоненты связности.

3) Воспользуемся идеями окраски и пометок, описанными в предыдущем пункте доказательства леммы. Пометки около строк матрицы составляют “столбец цветных пометок”. Матрицы A и $A * \theta$ имеют одинаковые столбцы цветных пометок. Подстановка σ действует на этом столбце как последовательность перемен местами соседних пометок, причем транскомпонентность означает, что всякий раз две обменивающиеся местами пометки имеют различные цвета.

Пусть k и n – натуральные числа, причем $k \leq n$. Для подстановки $\sigma \in S_k$ определим подстановку $\bar{\sigma} \in S_n$ следующим образом: если $i \leq k$, то $\bar{\sigma}(i) = \sigma(i)$, а если $i > k$, то $\bar{\sigma}(i) = i$. Подстановка $\bar{\sigma}$ называется *продолжением подстановки σ* .

ЛЕММА 3. Для универсальности матрицы необходимо и достаточно, чтобы все ее компоненты разложимости были универсальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – универсальная матрица n -го порядка, K – одна из ее компонент разложимости, имеющая порядок k , и $A * \sigma_0 = K \oplus L$. Возьмем

произвольную подстановку $\sigma \in S_k$ и соответствующее продолжение $\bar{\sigma} \in S_n$. Тогда

$$|\lambda * (K * \sigma)| |\lambda * L| = |\lambda * ((K \oplus L) * \bar{\sigma})| = |\lambda * ((A * \sigma_0) * \bar{\sigma})| = |\lambda * A|,$$

поэтому $|\lambda * (K * \sigma)|$ не зависит от σ . Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть все компоненты разложимости матрицы A универсальны.

Покажем, что если i и $i + 1$ принадлежат одной компоненте связности графа Γ_A , т.е. их транспозиция τ не является транскомпонентной, то $|\lambda * (A * \tau)| = |\lambda * A|$. Обозначим эту компоненту Γ^0 , пусть она имеет k вершин. Подберем транскомпонентную для A подстановку σ так, что $A * \sigma = K \oplus L$, где K — одна из компонент разложимости матрицы A , соответствующая Γ^0 . Тогда числа $\sigma(i)$ и $\sigma(i + 1)$ меньше или равны k . Транспозицию $\sigma(i)$ и $\sigma(i + 1)$ обозначим τ_0 , тогда $\sigma \tau_0 \sigma^{-1} = \tau$. Подстановка σ^{-1} транскомпонентна для $K \oplus L$ и (по лемме 2) транскомпонентна для $(A * \sigma) * \tau$. Отсюда

$$\begin{aligned} |\lambda * (A * \tau)| &= |\lambda * (((K \oplus L) * \tau_0) * \sigma^{-1})| = |\lambda * ((K \oplus L) * \tau_0)| \\ &= |\lambda * ((K * \tau_1) \oplus L)| = |\lambda * (K * \tau_1)| |\lambda * L| = |\lambda * K| |\lambda * L| \\ &= |\lambda * (K \oplus L)| = |\lambda * ((K \oplus L) * \sigma^{-1})| = |\lambda * A|. \end{aligned}$$

Итак, если все компоненты разложимости матрицы A универсальны, то (учитывая лемму 2) заключаем, что для любого j транспозиция ρ чисел j и $j + 1$ обладает свойством $|\lambda * (A * \rho)| = |\lambda * A|$. Значит, $|\lambda * (A * \sigma)| = |\lambda * A|$ для любой подстановки σ .

Дельтоидом назовем всякий граф, удовлетворяющий следующему условию: если в графе есть простые циклы, то они имеют длину три. Например, всякий лес (т.е. граф без циклов) является дельтоидом. Множество всех дельтоидов обозначим Δ .

Вершина графа называется *разделяющей*, если при ее удалении число компонент связности увеличивается.

ЛЕММА 4. *В связном дельтоиде порядка больше или равного 4 имеется разделяющая вершина.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в связном дельтоиде нет циклов, то это — дерево, а во всяком дереве порядка больше или равного 3 есть разделяющая вершина. Рассмотрим дельтоид, в котором есть хотя бы один простой цикл. Пусть v_0 и v_1 — инцидентные друг другу вершины такие, что v_0 не принадлежит рассматриваемому циклу, а v_1 принадлежит. Пусть v_2 и v_3 — остальные вершины этого цикла. Вершина v_1 разделяющая (иначе в графе был бы простой путь, соединяющий v_0 и v_2 , не содержащий v_1 ; вместе с вершинами v_1 и v_2 этот путь составил бы простой цикл длины больше или равной 4).

Пусть v — некоторая вершина графа (V, U) . Разбиение $P \sqcup Q$ множества всех ребер, инцидентных вершине v , назовем *нормальным разбиением около v* , если из условия “ $\{v_1, v\} \in P$ и $\{v, v_2\} \in Q$ ” следует, что v_1 и v_2 лежат в разных компонентах связности графа, получающегося из (V, U) удалением вершины v . Если P или Q пусто, то такое разбиение назовем *тривиальным*. Вершина v является разделяющей, если и только если существует нетривиальное нормальное разбиение около v .

Пусть A — некоторая $(n \times n)$ -матрица а M — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$. Через A_M обозначим матрицу, в которой i, j -й элемент равен a_{ij} , если $\{i, j\} \notin M$, и равен нулю, если $\{i, j\} \in M$. Для $\sigma \in S_n$ положим $M * \sigma = \{\sigma(E)\}_{E \in M}$. Ясно, что $(A * \sigma)_{M * \sigma} = (A_M) * \sigma$.

ЛЕММА 5. Пусть A – некоторая матрица, $P \sqcup Q$ – нормальное разбиение около некоторой вершины i графа Γ_A . Тогда для матриц A , A_P , A_Q и $A_{P \sqcup Q}$ выполнено соотношение

$$|\lambda * A| = |\lambda * A_P| + |\lambda * A_Q| - |\lambda * A_{P \sqcup Q}|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть разбиение нетривиально. Вершину j назовем P -вершиной, если кратчайший путь, соединяющий j и i , содержит ребро из P . У множества вершин графа Γ_A имеется естественная нумерация. Рассмотрим новую нумерацию: сначала занумеруем P -вершины, затем – вершину i , затем – все остальные. Определим подстановку $\sigma \in S_n$, которая переводит k в номер вершины k в новой нумерации. Тогда

$$(\lambda * A) * \sigma = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & O \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ O & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix},$$

где M_{11} , M_{22} и M_{33} – квадратные матрицы и M_{22} – матрица первого порядка. Отсюда

$$\begin{aligned} |(\lambda * A) * \sigma| &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & O \\ O & M_{22} & M_{23} \\ O & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & O \\ M_{21} & M_{22} & O \\ O & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & O \\ O & M_{22} & O \\ O & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} M_{11} & O & O \\ O & M_{22} & M_{23} \\ O & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & O \\ M_{21} & M_{22} & O \\ O & O & M_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{11} & O & O \\ O & M_{22} & O \\ O & O & M_{33} \end{vmatrix} \\ &= |((\lambda * A) * \sigma)_{P * \sigma}| + |((\lambda * A) * \sigma)_{Q * \sigma}| - |((\lambda * A) * \sigma)_{(P \sqcup Q) * \sigma}| \\ &= |(\lambda * A)_P * \sigma| + |(\lambda * A)_Q * \sigma| - |(\lambda * A)_{P \sqcup Q} * \sigma|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Всякая давидова матрица универсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение об универсальности давидовой матрицы будем доказывать индукцией по числу ребер соответствующего графа. Граф давидовой матрицы является дельтоидом. Если в графе нет ребер, то матрица диагональна, поэтому $|\lambda * (A * \sigma)|$ не зависит от σ . Пусть в графе Γ_A есть ребра. Если в нем нет разделяющей вершины, то все его компоненты связности (по лемме 4) имеют порядок меньше или равный 3. Поэтому все компоненты разложимости матрицы A имеют порядок меньше или равный 3. По лемме 1 они универсальны. По лемме 3 и сама A универсальна. Если в Γ_A есть разделяющая вершина, то существует нетривиальное нормальное разбиение около этой вершины. По лемме 5 имеем

$$\begin{aligned} |\lambda * (A * \sigma)| &= |\lambda * (A * \sigma)_{P * \sigma}| + |\lambda * (A * \sigma)_{Q * \sigma}| - |\lambda * (A * \sigma)_{(P \sqcup Q) * \sigma}| \\ &= |\lambda * (A_P * \sigma)| + |\lambda * (A_Q * \sigma)| - |\lambda * (A_{P \sqcup Q} * \sigma)|. \end{aligned}$$

Последнее выражение по предположению индукции от σ не зависит.

Пусть F – некоторая $(n \times n)$ -матрица, i – вершина графа Γ_F , а $P \sqcup Q$ – нормальное разбиение около вершины i . Пусть, кроме того, M – некоторое множество двухэлементных подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$. Рассмотрим матрицу F_M , соответствующий ей граф Γ_{F_M} и разбиение $(P \cap M) \sqcup (Q \cap M)$ около вершины i этого графа. Очевидно, что это, действительно, разбиение около вершины. Оно является нормальным. Это разбиение будем называть *сужением разбиения* $P \sqcup Q$.

ЛЕММА 7. *Справедливо равенство $\Delta^c = \mathcal{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение, которое мы хотим доказать, можно переформулировать следующим образом: если Γ_A — дельтоид, то для универсальности A необходимо и достаточно, чтобы A была давидовой. Достаточность следует из леммы 6.

Докажем необходимость. Если порядок матрицы меньше или равен 3, то она давидова по лемме 1. Рассмотрим случай, когда порядок матрицы n больше или равен 4.

Пусть D — центральная подматрица матрицы A , имеющая порядок три. Если Γ_D — не цикл, то для некоторых $i \neq j$ имеем $d_{ij} = d_{ji} = 0$, поэтому $d_{12}d_{23}d_{31} = d_{13}d_{32}d_{21}$, т.е. D давидова.

Пусть Γ_D — цикл. Рассмотрим подстановку σ_0 такую, что матрица $B = A * \sigma_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} D & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. Матрица B универсальна.

Определим три нормальных разбиения около вершин 1, 2 и 3 графа Γ_B :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, & Q_1 &= \{\text{все ребра вида } \{1, i\}, \text{ где } i \neq 2, 3\}, \\ P_2 &= \{\{2, 1\}, \{2, 3\}\}, & Q_2 &= \{\text{все ребра вида } \{2, i\}, \text{ где } i \neq 1, 3\}, \\ P_3 &= \{\{3, 1\}, \{3, 2\}\}, & Q_3 &= \{\text{все ребра вида } \{3, i\}, \text{ где } i \neq 1, 2\}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma \in S_3$, а $\bar{\sigma} \in S_n$ — ее продолжение. К матрице $\lambda * (B * \bar{\sigma})$ и разбиению $(P_1 * \bar{\sigma}) \sqcup (Q_1 * \bar{\sigma})$ применим лемму 5. Получим, что $|\lambda * (B * \bar{\sigma})|$ равно линейной комбинации (с коэффициентами 1, 1 и -1) определителей трех матриц. К каждой из этих трех матриц и соответствующему сужению разбиения $(P_2 * \bar{\sigma}) \sqcup (Q_2 * \bar{\sigma})$ применим лемму 5. Получим, что $|\lambda * (B * \bar{\sigma})|$ равно линейной комбинации определителей девяти матриц. К каждой из этих девяти матриц и соответствующему сужению разбиения $(P_3 * \bar{\sigma}) \sqcup (Q_3 * \bar{\sigma})$ применим лемму 5. Получим, что $|\lambda * (B * \bar{\sigma})|$ равно линейной комбинации двадцати семи определителей. Каждый из этих двадцати семи определителей имеет вид $|\lambda * (D * \sigma)_M \oplus X|$, где M и X , вообще говоря, меняются от определителя к определителю. Для одного из этих двадцати семи определителей M пусто. В остальных двадцати шести определителях M непусто, поэтому $\Gamma_{(D * \sigma)_M}$ не является циклом, значит, матрица $(D * \sigma)_M$ давидова, по лемме 6 она универсальна, т.е. определитель $|\lambda * (D * \sigma)_M|$ не зависит от σ . Итак, $|\lambda * B| = |\lambda * (B * \bar{\sigma})| = |\lambda * (D * \sigma)_\emptyset| |X| + x$, где X и x не зависят от σ , причем $|X|$, если его рассматривать как многочлен от λ , не равен нулю. Поэтому $|\lambda * (D * \sigma)|$ не зависит от σ , т.е. D универсальна. По лемме 1 она давидова.

Итак, всякая центральная подматрица матрицы A , имеющая порядок три, давидова. Так как, кроме того, Γ_A — дельтоид, то A давидова.

Граф (V, U) называется *подграфом графа* $(\tilde{V}, \tilde{U})$, если $V \subseteq \tilde{V}$, $U \subseteq \tilde{U}$.

ЛЕММА 8. *Если H — подграф G и $G \in \mathcal{S}^c$, то $H \in \mathcal{S}^c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $G = (\tilde{V}, \tilde{U}) \in \mathcal{S}^c$ имеет порядок n и $H = (V, U)$ — подграф G , имеющий порядок k . Пусть A — симметрическая матрица типа H . Докажем ее универсальность.

Пусть μ — некоторый изоморфизм графа Γ_A на H , т.е. биекция $\{1, \dots, k\} \rightarrow V$ такая, что i и j инцидентны в Γ_A , если и только если $\mu(i)$ и $\mu(j)$ инцидентны в H . Этот изоморфизм является нумерацией вершин графа H числами $1, \dots, k$. Если $n \neq k$, то остальные вершины графа G занумеруем числами $k+1, \dots, n$.

Для $z \neq 0$ определим симметрическую матрицу $\tilde{A}$ типа G следующим образом:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } \{i, j\} \in U; \\ z, & \text{если } \{i, j\} \in \tilde{U} \setminus U; \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin \tilde{U}. \end{cases}$$

Рассмотрим произвольную подстановку $\sigma \in S_k$ и ее продолжение $\bar{\sigma} \in S_n$. В равенстве $|\lambda * (\tilde{A} * \bar{\sigma})| = |\lambda * \tilde{A}|$ перейдем к пределу при $z \rightarrow 0$. Получим $|\lambda * ((A * \sigma) \oplus O)| = |\lambda * (A \oplus O)|$, где слагаемое O отсутствует, если $n = k$.

Циклом длины k больше или равной 3 называется граф (V, U) , где

$$V = \{v_1, \dots, v_k\}, \quad U = \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\}.$$

ЛЕММА 9. *В $\mathcal{S}^c$ нет цикла длины больше или равной 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(n \times n)$ -матрицу A , в которой $a_{1n} = a_{n1} = 1$; $a_{i,i-1} = a_{ii} = a_{i,i+1} = 1$ для любого i ; остальные элементы нулевые. Если $n \geq 3$, то граф этой матрицы – цикл длины n .

Транспозицию 1 и 2 обозначим τ . Положим $f(\lambda) = |\lambda * A|$, $g(\lambda) = |\lambda * (A * \tau)|$. Докажем, что $f'(0) = (-1)^{n+1}$. Дифференцировать определитель будем по столбцам. Получим сумму из n определителей. Подставим $\lambda = 0$. Все определители, кроме последнего, равны нулю (так как у каждого последний столбец нулевой). Последний же определитель равен $(-1)^{n+1}$. Докажем, что если $n \geq 4$, то $g'(0) = 0$. Дифференцировать определитель будем по столбцам. Получим сумму из n определителей. Подставим $\lambda = 0$. Все определители, кроме последнего, равны нулю (так как у каждого последний столбец нулевой). Последний же определитель равен нулю, так как у него второй и предпоследний столбцы совпадают.

Итак, если $n \geq 4$, то A не универсальна.

ЛЕММА 10. *Справедливо равенство $\mathcal{S}^c = \Delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\mathcal{S}^c \subseteq \Delta$ следует из лемм 8 и 9. Докажем обратное включение. Пусть $G \in \Delta$. Если $A \in \mathcal{S}$ и $\Gamma_A \simeq G$, то A давидова. По лемме 6 она универсальна.

Теорема следует из лемм 7 и 10.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
2. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
3. Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и квазиколчаны // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №3. С. 472–473.
4. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. №2. С. 19–33.
5. Dlab V., Ringel C. M. Indecomposable representations of graphs and algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 173.)
6. Dlab V., Ringel C. M. On algebras of finite representation type // J. Algebra. 1978. V. 33. P. 306–394.
7. Ringel C. M. Representations of K-species and bimodules // J. Algebra. 1978. V. 41. P. 269–302.