Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Ефремова, Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косо́го произведения отображений интервала, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 6, 93–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:42:43

УДК 517.987.5

Л. С. Ефремова

Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала

Исследовано влияние дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω -предельных множеств. Построен пример отображения рассматриваемого класса с максимальными (в некотором подклассе) дифференциальными свойствами по переменной x , C^1 -гладкого по переменной y , имеющего одномерные ω -предельные множества. Доказаны теоремы, дающие необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств. Одна из них сформулирована в терминах расходимости ряда, составленного из значений функции переменной x , представляющей собой C^0 -норму отклонений сужений отображений в слоях на некоторый невырожденный отрезок от тождественного отображения на том же отрезке. Другая теорема сформулирована в терминах свойств частной производной по переменной x отображений в слоях. Дано полное описание ω -предельных множеств C^1 -гладких косых произведений выделенного класса, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: косое произведение, периодическая точка, ω -предельное множество, расходящийся ряд.

§ 1. Введение

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)) \text{ с фазовым пространством } I = I_1 \times I_2, \quad (1)$$

где I_1, I_2 – отрезки вещественной прямой. В силу (1) для каждого натурального n и произвольной точки $(x, y) \in I$ справедливо равенство

$$F^n(x, y) = (f^n(x), g_{x,n}(y)), \quad g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ g_{f(x)} \circ g_x.$$

Обозначим через $T^0(I)$ ($T^1(I)$) пространство всех непрерывных (C^1 -гладких) отображений вида (1).

Классические результаты о взаимосвязи свойства ограниченности вариации производной диффеоморфизма окружности со свойством топологической транзитивности принадлежат А. Данжуа (см. [1]–[3]). Влияние гладкости цилиндрического каскада (косого произведения над иррациональным поворотом окружности на цилиндре с отображениями в слоях вида $g_x(y) = y + \phi(x)$, $y \in \mathbb{R}^1$,

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2011 гг.; грант НК-13/9).

$x \in \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{R}^1$ – вещественная прямая, $\mathbb{S}^1$ – окружность) на структуру ω -предельных множеств изучено в [4]. Аналогичное исследование в классе простейших (т.е. имеющих замкнутое множество периодических точек) косых произведений отображений интервала начато в статье [5].

Обозначим через $\text{Per}(F)$ множество периодических точек, а через $\tau(F)$ – множество (наименьших) периодов периодических точек простейшего отображения $F \in T^0(I)$. Приведем характеристическое свойство ω -предельных множеств отображений вида (1) с ограниченным множеством $\tau(F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $F \in T^0(I)$, а множество $\tau(F)$ ограничено. Тогда для любой точки $(x, y) \in I$ ω -предельное множество $\omega_{FM}((x, y))$ ее траектории относительно отображения F^M (M – наибольший элемент множества $\tau(F)$) есть вертикальный отрезок (возможно, вырожденный).

Напомним, что если $\tau(F)$ – ограниченное множество, то $\tau(F) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^\mu\}$ при некотором $0 \leq \mu < +\infty$ (см. [6]), и $M = 2^\mu$. Обратим внимание на то, что неблуждающее множество $\Omega(F)$ простейшего (непрерывного) косого произведения отображений интервала совпадает с множеством $\text{Per}(F)$ (см. [5]). Поэтому если $\tau(F)$ – ограниченное множество, то ω -предельное множество $\omega_{FM}((x, y))$ F^M -траектории произвольной точки $(x, y) \in I$ состоит из неподвижных точек F^M .

Покажем, что свойство траектории иметь одномерное ω -предельное множество связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении. Этот подход, развитый в настоящей работе, по-видимому, следует рассматривать в контексте сформулированной Д. В. Аносовым в [7] глобальной задачи нахождения движений, занимающих (в некотором естественном смысле) промежуточное положение между квазипериодическими и гиперболическими движениями. Отметим, что в [7] в качестве начального этапа решения указанной задачи предлагается развить теорию расходящихся рядов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$. Тогда для произвольной точки $(x', y') \in I$ следующие утверждения эквивалентны:

(2.1) ω -предельное множество $\omega_{FM}((x', y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок;

(2.2) ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_{x', Mn}(y') \quad (2)$$

– расходящийся (знакопеременный); здесь $\phi_{x', Mn}(y') = g_{x', M(n+1)}(y') - g_{x', Mn}(y')$, $n \geq 1$.

В этой статье в терминах специальных расходящихся рядов, получающихся из (2), доказано также необходимое условие существования одномерных ω -предельных множеств у простейших отображений вида (1). Построен пример отображения рассматриваемого класса с максимальными (в некотором подклассе)

дифференциальными свойствами по переменной x , C^1 -гладкого по переменной y , имеющего одномерные ω -предельные множества. Доказаны и другие теоремы, дающие необходимые условия существования одномерных ω -предельных множеств. Одна из них сформулирована в терминах расходимости ряда, составленного из значений функции переменной x , представляющей собой C^0 -норму отклонений сужений отображений в слоях на некоторый невырожденный отрезок от тождественного отображения на том же отрезке. Другая теорема сформулирована в терминах свойств частной производной по переменной x отображений в слоях. Приведено полное описание ω -предельных множеств C^1 -гладкого простейшего косога произведения отображений интервала, удовлетворяющего некоторым естественным дополнительным условиям.

Нам потребуется приспособленный к рассматриваемому случаю вариант классической леммы Адамара для функции одной переменной (см. [8; гл. 6, п. 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $F \in T^0(I)$. Предположим, что найдутся точка $x_* \in I_1$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq I_2$, для которых выполнено равенство $g_{x_*}|_{[\alpha, \beta]} = \text{id}|_{[\alpha, \beta]}$, где $\text{id}|_{[\alpha, \beta]}$ – тождественное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$. Тогда функция $g_x(y)$ дифференцируемо по x в каждой точке (x_*, y) при $y \in [\alpha, \beta]$ в том и только том случае, когда существует непрерывная по переменной x на отрезке $\{x_*\} \times [\alpha, \beta]$ функция $\psi(x, y)$, определенная в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha, \beta]$, такая, что при всех $(x, y) \in I_1 \times [\alpha, \beta]$ справедливо равенство

$$g_x(y) = y + (x - x_*)\psi(x, y). \quad (3)$$

При этом для любого $y \in [\alpha, \beta]$ выполнено

$$\psi(x_*, y) = \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y). \quad (4)$$

Сохраним обозначения предложения 3 и сформулируем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $F \in T^0(I)$. Предположим, что в каждой точке I существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ и найдутся точка $x_* \in I_1$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq I_2$ такие, что $g_{x_*}|_{[\alpha, \beta]} = \text{id}|_{[\alpha, \beta]}$. Тогда функция $\psi(x, y)$ ограничена в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha, \beta]$, если в этом прямоугольнике ограничена частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$.

Выделим периодические точки факторотображения f простейшего отображения $F \in T^0(I)$, в слоях над которыми существуют невырожденные отрезки, заполненные периодическими точками F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $F \in T^0(I)$, $\text{Per}(F)$ – замкнутое множество. Периодическую точку x^0 факторотображения f ($x^0 \in \text{Per}(f)$) будем называть *исключительной периодической точкой факторотображения f отображения F* , если хотя бы одна связная компонента множества $(\text{Per}(F))(x^0)$ представляет собой невырожденный отрезок (здесь $(\text{Per}(F))(x^0)$ – срез множества $\text{Per}(F)$ слоем над x^0 , т.е. множество точек $\{y \in I_2 : (x^0, y) \in \text{Per}(F)\}$).

Обозначим через $\text{Per}_e(f)$ множество исключительных периодических точек факторотображения f отображения $F \in T^0(I)$. Символом $W^s(x^0, f^M)$, как обычно, будем обозначать устойчивое многообразие точки $x^0 \in \text{Per}(f)$ относительно отображения f^M , т.е. множество точек $\{x \in I_1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{Mn}(x) = x^0\}$.

В настоящей работе доказано следующее необходимое условие существования одномерных ω -предельных множеств у простейших непрерывных косых произведений отображений интервала.

ТЕОРЕМА А. Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$, а $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I .

Тогда если для некоторой точки $(x', y') \in I$ $\omega_{FM}((x', y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок, то существуют точка $x^0 \in \text{Per}_e(f)$, связная компонента $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) среза $(\text{Per}(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha, \beta]}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ такие, что $x' \in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ (здесь $f^{-Mn}(\cdot)$ – полный прообраз точки относительно отображения f^{Mn}),

$$N_{[\alpha, \beta]} = \{n \in \mathbb{N} : g_{x', Mn}(y'), g_{x', M(n+1)}(y') \in [\alpha, \beta]\}, \quad (5)$$

а ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha, \beta]}} (f^{Mk}(x') - x^0) \psi(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y')) \quad (6)$$

расходится (здесь функция ψ определена для отображений в слоях $g_{x, M}$ по отношению к точке $x_* = x^0$ (см. предложение 3)).

Отметим, что ряд (6) получается из ряда (2) при помощи формул (3) и (5). Утверждение теоремы А показывает, что в случае существования одномерного ω -предельного множества $\omega_{FM}((x', y'))$ важны лишь те члены ряда (2), которые соответствуют значениям $g_{x', Mn}(y')$ и $g_{x', M(n+1)}(y')$, содержащимся в отрезке $[\alpha, \beta]$.

Обозначим через $T_d(I)$ подпространство пространства $T^0(I)$, состоящее из отображений, каждое из которых имеет C^1 -гладкое на отрезке I_1 факторотображение f и отображения в слоях $g_x(y)$ со следующими свойствами:

- (i) частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$ непрерывна на I ;
- (ii) в каждой точке $(x, y) \in I$ существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, непрерывная всюду, за исключением, быть может, точек множества $\text{Per}_e(f) \times I_2$.

Перейдем к рассмотрению свойств отображений из множества $T_d(I)^1$.

СЛЕДСТВИЕ В. Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение; причем для некоторой точки

$$(x', y') \in (W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}) \times I_2,$$

¹Ограниченность множества $\tau(F)$ отображения $F \in T_d(I)$ с замкнутым множеством $\text{Per}(F)$ следует из результатов статьи [9].

где $x^0 \in \text{Per}_e(f)$, существуют связная компонента $[\alpha, \beta]$ среза $(\text{Per}(F))(x^0)$ (здесь $\alpha < \beta$) и подмножество $N_{[\alpha, \beta]}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию (5). Тогда если ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha, \beta]}} |\psi(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y'))| \quad (7)$$

сходится, то сходится и ряд (6). Если, кроме того, частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена на I , то сходимость ряда

$$\sum_{k \in N_{[\alpha, \beta]}} |f^{Mk}(x') - x^0| \quad (8)$$

влечет за собой сходимость и ряда (6).

Используя предложение 1, теорему A и следствие B, получаем следующие критерии различения простейших отображений из множества $T_d(I)$.

ТЕОРЕМА C. Пусть $F \in T_d(I)$, а $\text{Per}_e(f) = \emptyset$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(C.1) множество $\text{Per}(F)$ периодически точек F замкнуто;

(C.2) ω -предельное множество траектории произвольной точки из I есть периодическая орбита.

Отметим, что теорема C обобщает соответствующий критерий различения простейших косых произведений из $T^1(I)$ (см. [5]) таких, что композиции отображений в слоях над точками произвольной периодической орбиты факторотображения (взятые в циклическом порядке точек орбиты) имеют только притягивающие и отталкивающие (в частности, гиперболические) периодические точки.

Следующее утверждение показывает, что гиперболичность периодических точек факторотображения простейшего косого произведения из множества $T_d(I)$ (вместе с ограниченностью частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$) является весьма тонким и сильным свойством, определяющим структуру ω -предельных множеств.

ТЕОРЕМА D. Пусть $F \in T_d(I)$, факторотображение f имеет только гиперболические периодические точки, а частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена на I . Тогда утверждения (C.1) и (C.2) эквивалентны.

В настоящей статье дан положительный ответ на вопрос о существовании простейших отображений из множества $T_d(I)$, имеющих одномерные ω -предельные множества. В силу следствия B и теоремы D проблема существования отображений с указанными свойствами решается в классе простейших косых произведений в плоскости таких, что их факторотображения имеют негиперболические периодические точки, а каждый из рядов (6)–(8) расходится. Как будет показано далее (см. теорему E), при этом частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ не ограничена. Общий результат о неограниченности частной производной

$\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ у простейших косых произведений с одномерными ω -предельными множествами (удовлетворяющих некоторым естественным условиям, которым удовлетворяет и отображение, построенное в доказательстве теоремы Е) содержит теорема G. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение (теорему Е), укажем, что в современной математической литературе обсуждается вопрос о существовании и структуре нехаотического аттрактора у косоугольного произведения на цилиндре или торе над иррациональным поворотом окружности или над стандартным отображением окружности (см., например, статьи [10], [11], содержащие результаты численного эксперимента, и теоретические работы [12], [13]). Так, в [13] приведены аналитические достаточные условия, при выполнении которых срез странного нехаотического аттрактора косоугольного произведения над иррациональным поворотом окружности на компактном цилиндре по произвольному вертикальному слою является отрезком (ср. с предложением 1). Следует отметить, что в настоящее время отсутствует концептуальный подход к понятию “нехаотического” аттрактора. Здесь мы дадим определение нехаотического аттрактора, подчеркнув его взаимосвязь с классическим определением аттрактора (последнее можно найти, например, в [14; гл. 3, п. 3.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [15]). *Нехаотический аттрактор косоугольного произведения* $F \in T_d(I)$ – это замкнутое множество $A^* \subset I$, обладающее поглощающей окрестностью, т.е. окрестностью $U(A^*)$ со следующими свойствами:

$$F(\overline{U(A^*)}) \subset U(A^*), \quad A^* = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F^n(\overline{U(A^*)}),$$

и такое, что сужение $F|_{A^*}$ имеет нулевую топологическую энтропию (здесь $\overline{(\cdot)}$ – замыкание множества).

ТЕОРЕМА Е. *Существует отображение $F_a \in T_d(I)$, имеющее только неподвижные точки (не обладающее периодическими точками более высоких периодов) и содержащее глобальный нехаотический аттрактор A^* , представляющий собой невырожденный вертикальный отрезок, совпадающий с множеством неподвижных точек F_a , такой, что для траектории некоторой точки $(x', y') \notin A^*$ справедливо $\omega_{F_a}((x', y')) = A^*$.*

Отображение F_a , построенное в доказательстве теоремы Е (см. § 3), обладает указанными выше свойствами и имеет отображения в слоях $g_x(y)$, которые хотя и дифференцируемы по переменной x в каждой точке I , но не являются непрерывно дифференцируемыми по x лишь на аттракторе A^* : каждая точка A^* является точкой разрыва второго рода частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в соответствующем горизонтальном слое.

Перейдем к детальному рассмотрению свойств отображений в слоях простейших косых произведений с одномерными ω -предельными множествами. Как обычно, обозначим через $C^0(I_2)$ пространство непрерывных отображений отрезка I_2 в себя с C^0 -нормой, определяемой для произвольного непрерывного

отображения $\theta: I_2 \rightarrow I_2$ равенством

$$\|\theta\|_{C^0(I_2)} = \sup_{y \in I_2} |\theta(y)|. \quad (9)$$

Для произвольного простейшего отображения $F \in T_d(I)$ введем в рассмотрение функцию переменной x :

$$\chi(x) = \|g_{x,M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)},$$

действующую из I_1 в $\mathbb{R}^1$, где $[\alpha', \beta']$ – некоторый невырожденный отрезок в I_2 .

ТЕОРЕМА F. Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение такое, что для F^M -траектории некоторой точки (x', y') справедливо равенство

$$\omega_{FM}((x', y')) = \{x^0\} \times [\alpha', \beta'], \quad x^0 \in \text{Per}_e(F), \quad [\alpha', \beta'] \subseteq I_2, \quad \alpha' < \beta'.$$

Тогда числовой ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha', \beta']}} \chi(f^{Mk}(x')) \quad (10)$$

с неотрицательными членами расходится.

В множестве $T_d(I)$ выделим подмножество простейших отображений, удовлетворяющих следующему естественному дополнительному условию:

(iii) для любой точки $(\bar{x}, \bar{y}) \in I$ такой, что $\bar{x} \in J^* \setminus \text{Per}(f)$ для некоторого интервала $J^* \subset I_1$, а $\bar{y}$ – неподвижная точка отображения $g_{\bar{x}, M}: I_2 \rightarrow I_2$, существует окрестность $U_\delta((\bar{x}, \bar{y})) = U_{1,\delta}(\bar{x}) \times U_{2,\delta}(\bar{y})$, обладающая следующим свойством: для каждой точки $(x, y) \in U_\delta((\bar{x}, \bar{y}))$ верно

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \geq 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \leq 0 \right),$$

причем для любого $y \in U_{2,\delta}(\bar{y})$ промежуток $U_{1,\delta}(\bar{x}) \times \{y\}$ не содержит невырожденного подотрезка, на котором верно тождество $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \equiv 0$.

Отметим, что выполнение условия (iii) означает выполнение условий классической локальной теоремы существования неявной функции $x = x(y)$, удовлетворяющей уравнению $g_{x,M}(y) = y$ (см., например, [16; § 1]). Возможность применения указанной теоремы делает обозримой геометрическую структуру множества $\{(x, y) : g_{x,M}(y) = y\}$ (см. § 5).

Укажем также, что множество отображений, удовлетворяющих условию (iii), непусто: отображение F_a , построенное в доказательстве теоремы E, удовлетворяет условию (iii).

ТЕОРЕМА G. Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение, удовлетворяющее условию (iii), такое, что траектория некоторой точки (x', y') имеет одномерное ω -предельное множество, представляющее собой орбиту невырожденного вертикального периодического отрезка. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности множества $\omega_F((x', y'))$.

Из теоремы G следует, что если $F \in T_d(I)$ является простейшим отображением, удовлетворяющим условию (iii), а частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена в I , то ω -предельное множество произвольной траектории есть периодическая орбита. Таким образом, простейшие отображения из множества $T_d(I)$, удовлетворяющие условию (iii), обладают, в некотором естественном смысле, максимальными дифференциальными свойствами по переменной x среди простейших отображений вида (1), имеющих одномерные ω -предельные множества (и удовлетворяющих условию (iii)), т.е. причиной возможного существования одномерных ω -предельных множеств у простейших косых произведений является “низкая регулярность” такого рода отображений.

Приведем непосредственное следствие теоремы G, которое дает полное описание ω -предельных множеств простейших C^1 -гладких косых произведений отображений интервала, удовлетворяющих условию (iii).

ТЕОРЕМА Н. Пусть $F \in T^1(I)$ удовлетворяет условию (iii). Тогда утверждения (C.1) и (C.2) эквивалентны.

Таким образом, асимптотическое поведение траекторий C^1 -гладких (или более высокого класса гладкости!) простейших косых произведений отображений интервала, удовлетворяющих условию (iii), аналогично асимптотическому поведению траекторий непрерывных отображений с замкнутым множеством периодических точек, заданных на отрезке (ср. с [17]).

§ 2. Расходящиеся ряды и одномерные притягивающие множества

Этот параграф мы начнем с доказательства предложений 1 и 2, составляющих основу метода настоящей работы. Для этого нам потребуется

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ω -ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ (см. [18]). Пусть $F: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение локально компактного пространства X в себя, а Ω – произвольное ω -предельное множество. Если V – подмножество Ω , открытое в Ω и не совпадающее с Ω , то замыкание множества $F(V)$ не содержится в V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Предположим, что найдется точка $(x', y') \in I$ такая, что $\omega_{FM}((x', y'))$ не является вертикальным отрезком. Так как для некоторой точки $x^0 \in I_1$ выполнено $x^0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{Mn}(x')$ (см. [17]), то при сделанном предположении $\omega_{FM}((x', y'))$ – несвязное замкнутое подмножество слоя над точкой x^0 . Тогда существует множество $V \subset \omega_{FM}((x', y'))$, $V \neq \omega_{FM}((x', y'))$, открытое и замкнутое относительно $\omega_{FM}((x', y'))$, состоящее из неподвижных точек F^M , такое, что в силу компактности I справедливы равенства $F^M(\bar{V}) = \bar{F^M(V)} = V$. Последнее противоречит характеристическому свойству ω -предельных множеств. Таким образом, сделанное предположение неверно и ω -предельное множество $\omega_{FM}((x, y))$ траектории произвольной точки (x, y) относительно отображения F^M есть отрезок (возможно, вырожденный). Предложение 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. 1. Пусть (x', y') – произвольная точка прямоугольника I . Обозначим k -ю частичную сумму ряда (2) через S'_k . Имеем $S'_k = g_{x', M(k+1)}(y') - g_{x', M}(y')$. Так как при любых (x', y') и $k \geq 1$ выполнено $g_{x', M(k+1)}(y') \in I_2$, то последовательность $\{S'_k\}_{k \geq 0}$ частичных сумм ряда (2) ограничена. Поэтому если ряд (2) расходится, то он является знакопеременным.

2. Пусть имеет место свойство (2.1). В силу предложения 1 при некоторых $x^0 \in I_1$ и $[\alpha, \beta] \subset I_2$, где $\alpha < \beta$, справедливо $\omega_{FM}((x', y')) = \{x^0\} \times [\alpha, \beta]$. Тогда невырожденный отрезок $[\alpha, \beta]$ совпадает с множеством предельных точек последовательности $\{g_{x', M_n}(y')\}_{n \geq 1}$, а невырожденный отрезок $[\alpha - g_{x', M}(y'), \beta - g_{x', M}(y')]$ – с множеством предельных точек последовательности $\{S'_k\}_{k \geq 0}$. Таким образом, ряд (2) – расходящийся (знакопеременный) и F обладает свойством (2.2).

3. Обратно, пусть выполнено свойство (2.2). Тогда из ограниченности последовательности $\{S'_k\}_{k \geq 0}$ следует, что множество ее предельных точек содержит, по крайней мере, две различные точки. То же самое справедливо и для множества предельных точек последовательности $\{g_{x', M_n}(y')\}_{n \geq 1}$. Используя предложение 1, получаем, что $\omega_{FM}((x', y'))$ – невырожденный отрезок. Предложение 2 доказано.

Основное содержание § 2 составляет доказательство теоремы А, которому мы предположим

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Пусть y – произвольная точка отрезка $[\alpha, \beta]$.

1. Предположим, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в точке (x_*, y) . Тогда существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{g_x(y) - y}{x - x_*} = \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y),$$

а функция

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{g_x(y) - y}{x - x_*} & \text{при } x \neq x_*, \\ \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y) & \text{при } x = x_* \end{cases} \quad (11)$$

определена в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha, \beta]$, удовлетворяет равенству (3) и непрерывна по x в точке (x_*, y) . При этом в силу (11) верно (4).

2. Из (3) следует, что при любом $x \in I_1 \setminus \{x_*\}$ выполнено $\psi(x, y) = (g_x(y) - y)/(x - x_*)$. Непрерывность $\psi(x, y)$ по переменной x в точке (x_*, y) влечет за собой справедливость равенства $\psi(x_*, y) = \lim_{x \rightarrow x_*} (g_x(y) - y)/(x - x_*)$ для действительного числа $\psi(x_*, y)$. Последнее означает, что $g_x(y)$ дифференцируемо по x в точке (x_*, y) ; при этом выполнено равенство (4). Предложение 3 доказано.

Убедимся в справедливости следствия 4. Для этого возьмем произвольную точку $(x, y) \in I_1 \times [\alpha, \beta]$, $x \neq x_*$. Обозначим через J_y отрезок с граничными точками x_* и x , лежащий в горизонтальном слое $I_1 \times \{y\}$. Так как в каждой точке I существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, то функция

$g_x(y)$ на отрезке J_y удовлетворяет условиям классической теоремы Лагранжа для функции одной переменной (переменной x). Кроме того, в условиях следствия 4 выполнены и условия предложения 3. Поэтому последнее вместе с (11) влечет за собой существование числа $\theta \in (0, 1)$ такого, что верно равенство

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} g_{x_* + \theta(x - x_*)}(y) & \text{при } x \neq x_*, \\ \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y) & \text{при } x = x_*. \end{cases} \quad (12)$$

Справедливость следствия 4 вытекает из равенства (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. 1. Пусть отображение $F \in T^0(I)$ удовлетворяет условиям теоремы А, а траектория точки $(x', y') \in I$ относительно отображения F^M имеет одномерное ω -предельное множество. Так как $\omega_{F^M}((x', y'))$ состоит из неподвижных точек F^M , то найдутся точка $x^0 \in \text{Per}_e(f)$ и связная компонента $[\alpha, \beta]$ (где $\alpha < \beta$) среза $(\text{Per}(F))(x^0)$ такие, что

$$\omega_{F^M}((x', y')) \subseteq \{x^0\} \times [\alpha, \beta], \quad (13)$$

где $\omega_{F^M}((x', y')) = \{x^0\} \times [\alpha', \beta']$ при некоторых $\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta$. Тогда имеем $x' \in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ (см. [17]).

2. Убедимся в том, что существует счетное множество $N_{[\alpha, \beta]}$, удовлетворяющее условию (5). Для этого используем точку $y_c = (\beta' - \alpha')/2$.

Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon \leq (\beta' - \alpha')/16$ и из условия равномерной непрерывности F^M на I по числу ε найдем $\delta > 0$. Тогда для любых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f^M(x_1) - f^M(x_2)| < \varepsilon, \quad |g_{x_1, M}(y_1) - g_{x_2, M}(y_2)| < \varepsilon. \quad (14)$$

Используя компактность I , для окрестности

$$U_{\varepsilon, \delta}(\omega_{F^M}((x', y'))) = U_{1, \delta}(x^0) \times U_{2, \varepsilon}([\alpha', \beta'])$$

множества $\omega_{F^M}((x', y'))$ (здесь $U_{1, \delta}(x^0)$ и $U_{2, \varepsilon}([\alpha', \beta'])$ есть δ -окрестность точки x^0 в I_1 и ε -окрестность отрезка $[\alpha', \beta']$ в I_2 соответственно) укажем натуральное число n_* такое, чтобы при всех $n \geq n_*$ выполнялось

$$F^{Mn}(x', y') \in U_{\varepsilon, \delta}(\omega_{F^M}((x', y'))) \quad (15)$$

(см. [19; гл. 5, §3]). Так как $(x^0, y_c) \in \omega_{F^M}((x', y'))$, то для ε -окрестности $U_{2, \varepsilon}(y_c)$ точки y_c в I_2 найдется счетное множество $N' = \{n'_1, n'_2, \dots\}$ такое, что $n_* \leq n'_1 < n'_2 < \dots$ и при любом $n \in N'$ верно $g_{x', Mn}(y') \in U_{2, \varepsilon}(y_c)$. Заметим, что при любом $n \in N'$ выполнено $g_{x', M(n+1)}(y') \in [\alpha, \beta]$. Действительно, положим $y'_n = g_{x', Mn}(y')$. В силу (14) и (15) при любых $n \geq n_*$ имеем $|x^0 - f^{Mn}(x')| < \delta$ и справедливо неравенство

$$|y'_n - g_{x', M(n+1)}(y')| < \varepsilon \quad (16)$$

(в частности, (16) выполнено при любом $n \in N'$). Так как $y'_n \in U_{2,\varepsilon}(y_c)$, то из (16) следует, что

$$|y_c - g_{x',M(n+1)}(y')| < 2\varepsilon < \frac{\beta' - \alpha'}{8}, \quad g_{x',M(n+1)}(y') \in [\alpha', \beta'], \quad n \in N'.$$

Таким образом, $N' \subset N_{[\alpha,\beta]}$ и $N_{[\alpha,\beta]}$ – счетное множество.

3. Покажем, что ряд (6) расходится. В самом деле, если $\mathbb{N} \setminus N_{[\alpha,\beta]}$ – не более, чем конечное множество, то расходимость ряда (6) следует из предложения 2. Рассмотрим случай счетного множества $\mathbb{N} \setminus N_{[\alpha,\beta]}$. Нам потребуются следующие подмножества множества натуральных чисел (хотя бы одно из которых непусто):

$$N_\alpha = \{n : g_{x',Mn}(y') < \alpha\}, \quad N_\beta = \{n : g_{x',Mn}(y') > \beta\}.$$

При сделанном предположении хотя бы одно из множеств N_α или N_β счетно. Тогда из определения связной компоненты множества следует, что если N_α (N_β) – счетное множество, то α (β) – единственная предельная точка для $\{g_{x',Mn}(y')\}_{n \in N_\alpha}$ ($\{g_{x',Mn}(y')\}_{n \in N_\beta}$), при этом $\alpha' = \alpha$ ($\beta' = \beta$).

Используем далее точку $y'_c = (y_c - \alpha')/2$. Так как $(x^0, y'_c) \in \omega_{FM}((x', y'))$, то для окрестности $U_{2,\varepsilon}(y'_c)$ точки y'_c в I_2 найдется счетное подмножество $N'' = \{n''_1, n''_2, \dots\}$ множества $\mathbb{N}$ такое, что $n_* < n''_1 < n''_2 < \dots$, причем при любом $n \in N''$ верно $g_{x',Mn}(y') \in U_{2,\varepsilon}(y'_c)$. Элементы множества $N' \cup N'' \subset N_{[\alpha,\beta]}$, расположенные в порядке возрастания их численных значений, обозначим через $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots$ (таким образом, $\bar{n}_1 < \bar{n}_2 < \dots$). Пусть S'_m (S''_m) – это m -я частичная сумма ряда (2) (ряда (6)). Тогда

$$S'_{M\bar{n}_{i+j}} - S'_{M\bar{n}_i} = g_{x',M\bar{n}_{i+j}}(y') - g_{x',M\bar{n}_i}(y'), \quad i, j \geq 1$$

и из определения множеств N' и N'' следует, что последовательность $\{S'_{M\bar{n}_i}\}_{i \geq 1}$ не является фундаментальной.

Укажем нефундаментальную последовательность частичных сумм ряда (6). Для этого заметим, что счетность множества $N_\alpha \cup N_\beta$ влечет за собой существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{i_s\}_{s \geq 1}$, имеющей при всех $s \geq 1$ следующие свойства:

$$(3.1) \quad \bar{n}_{i_s}, \bar{n}_{i_{s+1}} \in N' \cup N'';$$

$$(3.2) \quad (\bar{n}_{i_s}, \bar{n}_{i_{s+1}}) \cap (N_\alpha \cup N_\beta) \neq \emptyset \text{ для интервала } (\bar{n}_{i_s}, \bar{n}_{i_{s+1}}).$$

Из свойств (3.1), (3.2) следует, что при любом $s \geq 1$ найдется натуральное число $\bar{n}(s) \in (\bar{n}_{i_s}, \bar{n}_{i_{s+1}})$ такое, что $g_{x',M\bar{n}(s)}(y') \in [\alpha, \beta]$, $(\bar{n}(s) + 1) \in N_\alpha \cup N_\beta$, причем $\mathbb{N} \cap [\bar{n}_{i_s}, \bar{n}(s) - 1] \subset N_{[\alpha,\beta]}$. Положим в (16) $n = \bar{n}(s)$. Имеем

$$|y'_{\bar{n}(s)} - g_{x',M(\bar{n}(s)+1)}(y')| < \varepsilon \leq \frac{\beta' - \alpha'}{16} \leq \frac{\beta - \alpha}{16}. \quad (17)$$

Используя определение чисел $\bar{n}(s)$ и неравенство (17), получаем, что при каждом $s \geq 1$ только одна из точек α или β содержится в промежутке, ограниченном точками $y'_{\bar{n}(s)}$ и $g_{x',M(\bar{n}(s)+1)}(y')$. Поэтому из (17) следует, что предельными

точками последовательности $\{g_{x', M\bar{n}(s)}(y')\}_{s \geq 1}$ могут являться лишь точки α или β (возможно, обе одновременно).

Рассмотрим множество $\{\bar{n}_{i_s}\}_{s \geq 1} \cup \{\bar{n}(s)\}_{s \geq 1}$. В силу предыдущего при любом $s \geq 1$ выполнены неравенства $\bar{n}_{i_s} < \bar{n}(s) < \bar{n}_{i_{s+1}}$. Положим $\underline{n}_{2s-1} = \bar{n}_{i_s}$, $\underline{n}_{2s} = \bar{n}(s)$, $s \geq 1$. Тогда справедливо включение $\mathbb{N} \cap [\underline{n}_{2s-1}, \underline{n}_{2s} - 1] \subset N_{[\alpha, \beta]}$ и

$$S''_{M\underline{n}_{2s}} - S''_{M\underline{n}_{2s-1}} = S'_{M\underline{n}_{2s}} - S'_{M\underline{n}_{2s-1}} = g_{x', M\underline{n}_{2s}}(y') - g_{x', M\underline{n}_{2s-1}}(y'), \quad s \geq 1.$$

Так как последовательность $\{g_{x', M\underline{n}_k}(y')\}_{k \geq 1}$ имеет не менее двух предельных точек, то последовательность частичных сумм $\{S''_{M\underline{n}_k}\}_{k \geq 1}$ ряда (6) нефундаментальна и ряд (6) расходится. Теорема А доказана.

Наряду с теоремой А в этой части работы доказаны следствие В и теорема D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ В. Убедимся сначала в том, что сходимость ряда (7) влечет за собой и сходимость ряда (6). Действительно, при $x' \in I_1$ и любых $k \geq 1$ выполнено неравенство $|f^{Mk}(x') - x^0| < l(I_1)$, где $l(I_1)$ – длина отрезка I_1 . Следовательно, выполнено и неравенство

$$|(f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y'))| < l(I_1)|\psi(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y'))|. \quad (18)$$

Сходимость ряда (6) следует из неравенства (18).

Пусть теперь частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена на I . Тогда тем же свойством обладает и частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_{x, M}(y)$, $M \geq 2$. В самом деле, для дифференциала DF^M отображения F^M , $M \geq 2$, в произвольной точке $(x, y) \in I$ справедливо следующее представление:

$$DF^M(x, y) = \prod_{i=0}^{M-1} \begin{pmatrix} a_{M-1-i} & 0 \\ b_{M-1-i} & c_{M-1-i} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 a_0 & 0 \\ b_1 a_0 + b_0 c_1 & c_1 c_0 \end{pmatrix}, & \text{если } M = 2, \\ \begin{pmatrix} \prod_{i=0}^{M-1} a_{M-1-i} & 0 \\ b_{M-1} \prod_{i=1}^{M-1} a_{M-1-i} + \sigma + b_0 \prod_{i=0}^{M-2} c_{M-1-i} & \prod_{i=0}^{M-1} c_{M-1-i} \end{pmatrix}, & \text{если } M > 2, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \sum_{j=1}^{M-2} \left(\prod_{i=0}^{j-1} c_{M-1-i} \right) b_{M-1-j} \left(\prod_{i=j+1}^{M-1} a_{M-1-i} \right), \quad (19)$$

и при всех $0 \leq i \leq M-1$ справедливы равенства

$$a_{M-1-i} = f'(f^{(M-1-i)}(x)), \quad b_{M-1-i} = \frac{\partial}{\partial x} g_{f^{M-1-i}(x)}(g_{x, M-1-i}(y)), \\ c_{M-1-i} = \frac{\partial}{\partial y} g_{f^{M-1-i}(x)}(g_{x, M-1-i}(y)).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x, M}(y) = b_{M-1} \prod_{i=1}^{M-1} a_{M-1-i} + \sigma + b_0 \prod_{i=0}^{M-2} c_{M-1-i}, \quad M > 2. \quad (20)$$

Так как $F \in T_d(I)$, то корректно определены неотрицательные числа

$$C_f = \sup_{x \in I_1} |f'(x)|, \quad C_{g,y} = \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{\partial}{\partial y} g_x(y) \right|.$$

Из ограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ на I следует, что существует число $C_{g,x} \geq 0$ такое, что при любых $(x, y) \in I$ справедливо неравенство $|\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)| \leq C_{g,x}$. Положим $C = \max\{1, C_f, C_{g,x}, C_{g,y}\}$. Используя формулы (19) и (20), получаем, что при всех $(x, y) \in I$ верно неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \right| \leq C^M (M + 1). \quad (21)$$

Пусть теперь (x, y) – произвольная точка прямоугольника $I_1 \times [\alpha, \beta]$, а функция $\psi(x, y)$ определена для отображений $g_{x,M}$ по отношению к слою над точкой x^0 . Тогда в силу следствия 4 и формулы (21) справедливо неравенство

$$|\psi(x, y)| \leq C^M (M + 1).$$

Учитывая, что при всех $k \in N_{[\alpha, \beta]}$ выполнено $(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y')) \in I_1 \times [\alpha, \beta]$, для $k \in N_{[\alpha, \beta]}$ получаем неравенство

$$|(f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'), g_{x', Mk}(y))| \leq C^M (M + 1) |f^{Mk}(x') - x^0|. \quad (22)$$

Из (22) следует, что сходимость ряда (8) влечет за собой сходимость ряда (6). Справедливость следствия В установлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ D. Проверим, что при выполнении условий теоремы D утверждение (C.1) влечет за собой справедливость утверждения (C.2). Предположим, что для некоторого простейшего отображения $F \in T_d(I)$ с ограниченной частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ и факторотображением, имеющим лишь гиперболические периодические точки, найдется точка (x', y') такая, что ее ω -предельное множество $\omega_{F^M}((x', y'))$ – невырожденный отрезок. При этом из теоремы A следует существование точки $x^0 \in \text{Per}_e(f)$, связной компоненты $[\alpha, \beta]$ среза $\text{Per}(F)(x^0)$ (здесь $\alpha < \beta$) и счетного множества $N_{[\alpha, \beta]} \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющего условию (5), таких, что $x' \in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ и ряд (6) расходится.

С другой стороны, условие гиперболичности точек множества $\text{Per}(f)$ вместе с неравенством $W^s(x^0, f^M) \neq \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ означает, что x^0 – сток факторотображения f . Тогда найдутся, во-первых, число $0 < q < 1$ и окрестность $U_1(x^0)$ точки x^0 в I_1 такие, что выполнено неравенство

$$\left| \frac{d}{dx} (f^M)(\bar{x}) \right| < q, \quad \bar{x} \in U_1(x^0), \quad (23)$$

и, во-вторых, натуральное число k_* такое, что $f^{Mk}(x') \in U_1(x^0)$, $k \geq k_*$. Используя классическую теорему Лагранжа и неравенство (23), получаем, что при всех $k \geq k_*$ верно

$$|f^{Mk}(x') - x^0| < q^{k-k_*} l(I_1). \quad (24)$$

Из (24) следует, что ряд $\sum_{k \in N_{[\alpha, \beta]}} |f^{Mk}(x') - x^0|$ сходится. Используя следствие В, получаем отсюда, что сходится и ряд (6). Полученное противоречие со сделанным предположением показывает, что утверждение (С.1) влечет за собой выполнение утверждения (С.2). Используя рассуждения, приведенные, например, в [20], убеждаемся в том, что из (С.2) следует (С.1). Теорема D доказана.

§ 3. Об одномерном нехаотическом аттракторе

В этой части работы построено отображение, дающее пример простейшего бесконечного нехаотического аттрактора (в смысле определения 6) у динамических систем класса косых произведений в плоскости, принадлежащих пространству $T_d(I)$. По-видимому, первые примеры непрерывных отображений вида (1) с замкнутым множеством периодических точек, имеющих траектории с одномерными ω -предельными множествами, намечены в статьях [21], [22]. В [23]², [24] указаны новые примеры непрерывных отображений такого рода и дано описание всех ω -предельных множеств построенных здесь косых произведений. Отображения, указанные в этих работах, имеют не только континуум точек, в которых отсутствует частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, но и континуум точек, в которых отсутствует частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$. В настоящей работе предложен новый (отличный от использованного в [21]–[24]) алгоритм построения простейшего отображения с указанными выше свойствами. В основе предложенного алгоритма лежит использование расходящихся рядов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Е. 1. Положим

$$F_a(x, y) = \left(x - \frac{x^2}{2}, y + x\psi(x, y) \right) \quad (25)$$

(см. предложение 3); здесь $F_a: [0, \alpha] \times [0, 1] \rightarrow [0, \alpha] \times [0, 1]$, где выбор числа $0 < \alpha \leq 1$ будет описан ниже.

Сначала будем считать, что $x \in [0, 1]$. Прежде чем определить функцию $\psi(x, y)$, убедимся в том, что при всех $n \geq 1$ для $x_n = f^n(x_0)$, где $x_0 = 1$, выполняется неравенство

$$\frac{2}{n} > x_n \geq \frac{1}{n+1}, \quad (26)$$

причем равенство в правой части (26) имеет место лишь при $n = 1$. Действительно, так как $x_1 = 1/2$, то (26) верно при $n = 1$. Предположим, что (26) выполнено для некоторого натурального числа n . Установим его справедливость для числа $n + 1$. Так как $f(x)$ – строго возрастающая на отрезке $[0, 1]$ функция, то в силу предположения индукции имеем

$$\frac{2}{n+1} > \frac{2(n-1)}{n^2} > x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)^2} > \frac{1}{n+2}.$$

²Обобщение конструкции примера из [23] дано в [25], где построено существенно непрерывное косое произведение в стандартном единичном кубе такое, что одна из граней куба состоит из неподвижных точек отображения и является ω -предельным множеством траектории любой точки, не принадлежащей этой грани.

Следовательно, при всех $n > 1$ доказано строгое неравенство (26). В силу (26) получаем $x_n = O(1/n)$, $n \rightarrow +\infty$, и числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ расходится³. Нам потребуется ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}. \quad (27)$$

Ряд (27) корректно определен, так как $x_n \in (0, 1]$, $n \geq 0$. Заметим, что ряд (27) расходится. В самом деле, воспользуемся правой частью неравенства (26), верной и при $n = 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\frac{x_n}{10 - \ln x_n} \geq \frac{1}{(n+1)(10 + \ln(n+1))}, \quad n \geq 0,$$

и расходимость минорантного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(10 + \ln(n+1))}$$

с положительными членами влечет за собой расходимость ряда (27).

В силу расходимости ряда (27) существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m \geq 0}$ такая, что $n_0 = 0$ и при всех $m \geq 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_1+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} &> 1 - y'_0 - \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{или} \\ \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} &> 1 - y'_{n_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}}, \quad \text{если } m \geq 1, \quad m - \text{ четное,} \\ \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} &> y'_{n_m+2} - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}}, \quad \text{если } m - \text{ нечетное;} \end{aligned} \quad (28)$$

здесь

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y'_{n_1+1} = y'_{n_1+2} = y'_0 + \sum_{n=0}^{n_1+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}, \\ y'_{n_{m+1}+2} &= y'_{n_{m+1}+1} = y'_{n_m+2} + (-1)^m \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Будем считать, что при любом $m \geq 0$ число $n_{m+1} + 2$ – наименьшее из натуральных чисел, для которых выполнены неравенства (28).

В дальнейшем нам потребуются промежутки

$$\begin{aligned} J_0 &= (x_{n_1}, 1], \quad J_m = (x_{n_{m+1}}, x_{n_{m+3}}], \\ J_m^{(1)} &= (x_{n_m+1}, x_{n_m}], \quad J_m^{(2)} = (x_{n_m+3}, x_{n_m+1}], \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

³Для сравнения укажем, что оценка скорости расходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{-n}$ для отображения $f(x) = x + \alpha x^2$ при $\alpha > c$ для некоторого $c > 0$ приведена в статьях [26], [27] (здесь x_{-n} – n -й прообраз на некотором отрезке точки $x_0 = 1$).

Для построения отображений в слоях косо го произведения (25) будем использовать (в качестве функции $|\psi(x, y)|$) C^1 -гладкие по y “шапочки” Урысона, длины горизонтальных участков и высоты которых зависят от $x \in (0, 1]$. Обозначим через $h(x)$ высоту “шапочки” Урысона в слое над $x \in (0, 1]$. Нам потребуются функции $y_1(x) = \sqrt{h(x)}$ и $y_2(x) = 1 - y_1(x)$.

При любом $x \in (0, 1]$ положим

$$|\psi(x, y)| = \begin{cases} h(x) \sin^2 \frac{\pi y}{2y_1(x)}, & \text{если } y \in [0, y_1(x)], \\ h(x), & \text{если } y \in (y_1(x), y_2(x)), \\ h(x) \sin^2 \frac{\pi(y-1)}{2y_1(x)}, & \text{если } y \in [y_2(x), 1]. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть $h_1(x) = 1/(10 - \ln x)$, $x \in (0, 1]$. Отметим, что $h_1(x)$ строго возрастает, выпукла вверх и положительна на промежутке $(0, 1]$. На множестве $J = \bigcup_{m=0}^{\infty} J_m$ определим функцию $h(x)$, полагая $h(x) = h_1|_J(x)$, где $h_1|_{(\cdot)}$ – сужение функции h_1 на это множество.

К определению функции $h(x)$ на промежутках $J_m^{(1)}$ и $J_m^{(2)}$ при всех $m \geq 1$ применим процедуру “простого сглаживания” (в отличие от процедуры сглаживания по С. Л. Соболеву, используемой в задачах математической физики, см. [28; гл. 3, п. 2.3]). На промежутках $J_m^{(1)}$ рассмотрим C^1 -гладкие линейные функции

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(x) &= \frac{1}{10 - \ln x_{n_m}} + \frac{x - x_{n_m}}{x_{n_m}(10 - \ln x_{n_m})^2}, \\ h_2(x) &= 2 \frac{x - x_{n_m+1}}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})^2}. \end{aligned}$$

Функция h_1 выпукла вверх, кроме того, $\bar{h}_1$ – касательная к графику h_1 в точке $C_m^1(x_{n_m}, h_1(x_{n_m}))$, h_2 – линейная функция, причем $h_1(x_{n_m+1}) > h_2(x_{n_m+1}) = 0$, $h_1(x_{n_m}) < h_2(x_{n_m})$. Поэтому графики h_1 и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m(c_m, h_2(c_m))$, $c_m \in (x_{n_m+1}, x_{n_m})$, без касания, а графики $\bar{h}_1$ и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m^2(c_m^2, h_2(c_m^2))$, где $c_m^2 \in (c_m, x_{n_m})$. На интервалах (C_m, C_m^2) и (C_m^2, C_m^1) укажем точки $C_m^3(c_m^3, h_2(c_m^3))$ и $C_m^4(c_m^4, \bar{h}_1(c_m^4))$ соответственно так, чтобы $l([C_m^3, C_m^2]) = l([C_m^2, C_m^4])$. При этом $h_2(c_m^3) < h_2(c_m^2) < \bar{h}_1(c_m^4)$. Тогда корректно определена C^1 -гладкая строго возрастающая, выпуклая вверх на промежутке $J_m^{(1)}$ функция $h(x)$ такая, что

$$h|_{(x_{n_m+1}, c_m^3]} = h_2|_{(x_{n_m+1}, c_m^3]}, \quad h|_{[c_m^4, x_{n_m}]} = \bar{h}_1|_{[c_m^4, x_{n_m}]},$$

а график $h|_{(c_m^3, c_m^4)}$ представляет собой дугу окружности, касающейся в точках C_m^3 и C_m^4 прямых h_2 и $\bar{h}_1$ соответственно.

Определим функцию $h(x)$ на промежутках $J_m^{(2)}$, $m \geq 1$. Здесь нам потребуются линейные функции

$$\begin{aligned} h_3(x) &= 2 \frac{x_{n_m+1} - x}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}, \\ h_4(x) &= \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+3}} + \frac{x - x_{n_m+3}}{x_{n_m+3}(10 - \ln x_{n_m+3})^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что прямая-график h_4 есть касательная к графику h_1 в точке с координатами $(x_{n_m+3}, h_1(x_{n_m+3}))$. Определим функцию h в точке x_{n_m+2} так, чтобы

$$h(x_{n_m+2}) = h_1(x_{n_m+2}), \quad h'(x_{n_m+2}) = 0.$$

В силу определения h_3 имеем $h_3(x_{n_m+2}) > h(x_{n_m+2})$ и $h(x_{n_m+2}) > h_3(x_{n_m+1}) = 0$. Поэтому горизонтальная касательная к графику h в точке $B_m(x_{n_m+2}, h(x_{n_m+2}))$ пересекается с прямой – графиком функции h_3 в некоторой точке B_m^1 , причем

$$l([B_m, B_m^1]) < x_{n_m+1} - x_{n_m+2} = \frac{x_{n_m+1}^2}{2}.$$

Пусть B_m^2 – точка с координатами $(x_{n_m+1}, 0)$. Имеем

$$\frac{l([B_m, B_m^1])}{l([B_m^1, B_m^2])} < \frac{x_{n_m+1} - x_{n_m+2}}{h(x_{n_m+2})} = \frac{x_{n_m+1}^2}{2}(10 - \ln x_{n_m+2}). \quad (31)$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_m+1}^2}{2}(10 - \ln x_{n_m+2}) = 0,$$

то из (31) следует, что найдется m_0 такое, что при всех $m \geq m_0$ верно неравенство $l([B_m, B_m^1]) < l([B_m^1, B_m^2])$. Поэтому при всех $m \geq m_0$ в интервале (B_m^1, B_m^2) существует точка $B_m^3(b_m^3, h_3(b_m^3))$ такая, что $l([B_m, B_m^1]) = l([B_m^1, B_m^3])$. Тогда на отрезке $[x_{n_m+2}, x_{n_m+1}]$ корректно определена положительная строго убывающая выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{[b_m^3, x_{n_m+1}]} = h_3|_{[b_m^3, x_{n_m+1}]}$; на промежутке $[x_{n_m+2}, b_m^3]$ график h_3 представляет собой дугу окружности, касательная к которой в точке B_m горизонтальна, а в точке B_m^3 совпадает с графиком функции h_3 .

Перейдем к определению функции h на интервале (x_{n_m+3}, x_{n_m+2}) . Так как h_1 – выпуклая вверх на $(0, 1]$ функция, а $h(x_{n_m+2}) = h_1(x_{n_m+2})$, то верно неравенство $h_4(x_{n_m+2}) > h(x_{n_m+2})$. Кроме того, из строгого возрастания функции h_1 на промежутке $(0, 1]$ следует, что $h(x_{n_m+2}) > h_4(x_{n_m+3})$. Поэтому найдется точка $A_m^1(a_m^1, h(x_{n_m+2}))$, в которой горизонтальная касательная к графику функции h в точке B_m пересекается с касательной h_4 к графику h в точке $A_m(x_{n_m+3}, h(x_{n_m+3}))$ (здесь $a_m^1 \in (x_{n_m+3}, x_{n_m+2})$). Сравним длины отрезков $[A_m, A_m^1]$ и $[A_m^1, B_m]$. Нам потребуется точка $A_m^2(x_{n_m+3}, h(x_{n_m+2}))$. Имеем

$$\frac{l([A_m, A_m^2])}{l([A_m^2, B_m])} = \frac{2(\ln x_{n_m+2} - \ln x_{n_m+3})}{x_{n_m+2}^2(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} < \frac{l([A_m, A_m^1])}{l([A_m^1, B_m])}. \quad (32)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2(\ln x_{n_m+2} - \ln x_{n_m+3})}{x_{n_m+2}^2(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n_m+2}(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} = +\infty, \end{aligned}$$

то в силу (32) найдется натуральное число $\bar{m}_0 \geq m_0$ такое, что при любом $m \geq \bar{m}_0$ выполнено неравенство $l([A_m, A_m^1]) > l([A_m^1, B_m])$. Поэтому при любых

$m \geq \bar{m}_0$ найдется точка $A_m^3(a_m^3, h_4(a_m^3)) \in (A_m, A_m^1)$ такая, что $l([A_m^3, A_m^1]) = l([A_m^1, B_m])$. Тогда в интервале (x_{n_m+3}, x_{n_m+2}) корректно определена строго возрастающая выпуклая вверх C^1 -гладкая функция h такая, что $h|_{(x_{n_m+3}, a_m^3)} = h_4|_{(x_{n_m+3}, a_m^3)}$, а на промежутке $[a_m^3, x_{n_m+2})$ графиком h служит дуга окружности, касающейся h_4 в точке A_m^3 и имеющей горизонтальную касательную в точке B_m . Наконец, положим $\alpha = x_{n_{\bar{m}_0}+1}$, $h(0) = 0$.

Из приведенного определения функции $h(x)$ следует, что $h(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \alpha]$, причем во всех точках полуинтервала $(0, \alpha]$, за исключением точек x_{n_m+1} , $m \geq \bar{m}_0$, существует конечная производная $h'(x)$; в каждой точке x_{n_m+1} существуют конечные односторонние производные, отличающиеся лишь знаком, а в нуле функция $h(x)$ не имеет производной. (В дальнейшем нам не потребуются дифференциальные свойства функции h).

При любых $m \geq \bar{m}_0$, $y \in [0, 1]$, определим $\psi(x, y)$, полагая

$$\psi(x, y) = \begin{cases} (-1)^m |\psi(x, y)|, & \text{если } x \in J_m \cup J_{m+1}^{(1)}, \\ (-1)^{m+1} |\psi(x, y)|, & \text{если } x \in J_{m+1}^{(2)}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (33)$$

2. Покажем, что $F_a \in T_d([0, \alpha] \times [0, 1])$. В силу формул (25), (30) и (33) достаточно убедиться в том, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I и частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ непрерывна в прямоугольнике $(0, \alpha] \times [0, 1]$. В самом деле, из формул (30), (33) и определения функции h следует, что функция $\psi(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $(0, \alpha] \times [0, 1]$. Заметим, что функция ψ непрерывна и на вертикальном отрезке $\{0\} \times [0, 1]$. Действительно, из (30) и (33) следует, что $|\psi(x, y)| \leq h(x)$ при любых $(x, y) \in [0, \alpha] \times [0, 1]$. Для $h(x)$ выполняются следующие неравенства:

$$h(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+3}}, & \text{если } x \in J_m, m \geq 1, \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n_m}}, & \text{если } x \in J_m^{(1)}, \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+2}}, & \text{если } x \in J_m^{(2)}. \end{cases} \quad (34)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +0} 1/(10 - \ln x) = 0$, то, используя (34), получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \psi(x, y) = \lim_{x \rightarrow +0} h(x) = 0 = h(0) = \psi(0, y), \quad y \in [0, 1].$$

Используя предложение 3 и равенство (25), получаем отсюда, что $g_x(y)$ дифференцируемо по x в каждой точке отрезка $\{0\} \times [0, 1]$, причем $\frac{\partial}{\partial x} g_0(y) = 0$.

Возьмем произвольное $m \geq \bar{m}_0$. Убедимся в дифференцируемости $g_x(y)$ по переменной x на отрезке $\{x_{n_m+1}\} \times [0, 1]$. В самом деле, пусть y – произвольная (но фиксированная) точка отрезка $[0, 1]$. Из равенства (25) и определения функции ψ (см. п. 1) следует, что $g_{x_{n_m+1}}(y) = \text{id}|_{[0,1]}$ и

$$\frac{g_x(y) - g_{x_{n_m+1}}(y)}{x - x_{n_m+1}} = \frac{x\psi(x, y)}{x - x_{n_m+1}},$$

причем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{n_m+1}} \frac{x\psi(x, y)}{x - x_{n_m+1}} &= \lim_{x \rightarrow x_{n_m+1}} \frac{2(-1)^{m-1}x}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})} \\ &= \frac{4(-1)^{m-1}}{x_{n_m+1}(10 - \ln x_{n_m})}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x_{n_m+1}}(y) = \frac{4(-1)^{m-1}}{x_{n_m+1}(10 - \ln x_{n_m})}, \quad m \geq \bar{m}_0, \quad y \in [0, 1]. \quad (35)$$

Из (35) следует, что, во-первых, отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в слое над каждой точкой x_{n_m+1} , $m \geq \bar{m}_0$, и, во-вторых, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности любой точки слоя $\{0\} \times [0, 1]$. Таким образом, каждая точка $(0, y)$, $y \in [0, 1]$, является точкой разрыва 2-го рода частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в горизонтальном слое $[0, \alpha] \times \{y\}$.

Заметим, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ непрерывна на отрезке $\{x_{n_m+1}\} \times [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$. Действительно, возьмем произвольное $y \in [0, 1]$. Используя непрерывность ψ , формулы (30) и (33), укажем окрестность $U_{1,\delta}(x_{n_m+1})$ точки x_{n_m+1} в I_1 такую, что при всех $x \in U_{1,\delta}(x_{n_m+1})$, $x \neq x_{n_m+1}$, выполнено

$$y \in (y_1(x), y_2(x)), \quad \psi(x, y) = \frac{2(-1)^{m-1}(x - x_{n_m+1})}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}.$$

Поэтому при любых $x \in U_{1,\delta}(x_{n_m+1})$, $x \neq x_{n_m+1}$, справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} g_x(y) = \frac{2(-1)^{m-1}(2x - x_{n_m+1})}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}. \quad (36)$$

Из равенств (35) и (36) следует непрерывность частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в произвольной точке слоя $\{x_{n_m+1}\} \times [0, 1]$. Проводя дальнейшие вычисления, убеждаемся в том, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в замкнутом прямоугольнике $[0, \alpha] \times [0, 1]$ (и непрерывно дифференцируемо по x в незамкнутом прямоугольнике $(0, \alpha] \times [0, 1]$), т.е. $F_a \in T_d([0, \alpha] \times [0, 1])$.

3. Пусть $A^* = \{0\} \times [0, 1]$. Тогда A^* удовлетворяет определению 6 и является одномерным нехаотическим аттрактором построенного отображения. Укажем точку $(x''_0, y''_0) \in [0, \alpha] \times [0, 1]$ такую, что $\omega_{F_a}((x''_0, y''_0)) = A^*$. Для этого возьмем произвольное четное число $m > \bar{m}_0$. Положим

$$x''_0 = x_{n_m+2} \quad (\text{т.е. } x''_0 \in J_m^{(2)} \text{ при четном } m), \quad y''_0 = y'_{n_m+2} \quad (\text{см. (29)}).$$

Определим натуральные числа $p_k = n_{m+k} - n_{m+k-1} - 1$, $k \geq 1$. Так как m — четное число, то в силу формул (28), (29) и (33) при $k = 1$ выполнено

$$(x''_{p_1}, y''_{p_1}) = F_a^{p_1}(x''_0, y''_0) = \left(x_{n_{m+1}+1}, y''_0 + \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} \right). \quad (37)$$

Тогда $(x''_{p_1+1}, y''_{p_1+1}) = (x_{n_{m+1}+2}, y''_{p_1})$, т.е. $y''_{p_1+1} = y''_{p_1}$. При всех $k \geq 2$ выполнено $y''_{p_1+\dots+p_k+k-1} = y''_{p_1+\dots+p_k}$ и, используя (28), имеем

$$(x''_{p_1+\dots+p_k+k-1}, y''_{p_1+\dots+p_k+k-1}) = F_a^{p_1+\dots+p_k+k-1}(x''_0, y''_0) \\ = \left(x_{n_{m+k}+1}, y''_{p_1+\dots+p_{k-1}} + (-1)^{k-1} \sum_{n=n_{m+k-1}+2}^{n_{m+k}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} \right). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что

$$g_{x''_0, p_1+\dots+p_k+k-1}(y''_0) = y''_0 + \sum_{i=1}^k \left((-1)^{i-1} \sum_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} \right). \quad (39)$$

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left((-1)^{i-1} \sum_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} \right). \quad (40)$$

Из (28) следует, что ряд (40) расходится (не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда). А так как все слагаемые вида

$$(-1)^{i-1} \sum_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}$$

(заключенные в (40) в одну скобку) имеют один и тот же знак, зависящий от четности натурального числа i , то ряд (40) расходится одновременно с рядом

$$\frac{x_{n_m+2}}{10 - \ln x_{n_m+2}} + \dots + \frac{x_{n_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+1}} \\ - \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} - \dots - \frac{x_{n_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n_{m+2}+1}} + \dots,$$

полученным из (40) опусканием скобок. Последнее вместе с предложением 2 означает, что $\omega_{F_a}((x''_0, y''_0))$ – невырожденный отрезок, содержащийся в A^* .

Покажем, что $\omega_{F_a}((x''_0, y''_0)) = A^*$. В самом деле, в силу выбора чисел $n_{m+1}+2$, $m \geq 0$, и формул (28), (29) при четных $m > 1$ имеем

$$1 - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}} - \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} < y'_{n_m+2} + \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} < 1, \quad (41)$$

а при всех нечетных m –

$$\frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}} + \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} > y'_{n_m+2} - \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} > 0. \quad (42)$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} = 0,$$

то в силу формул (38), (39), (41) и (42) $y = 0$ и $y = 1$ являются предельными точками последовательности $\{g_{x''_0, p_1+\dots+p_k+k-1}(y''_0)\}_{k \geq 1}$. Следовательно, $\omega_{F_a}((x''_0, y''_0)) = A^*$. Теорема E доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из равенства (35) и непрерывности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в каждой точке слоя $\{x_{n_{m+1}}\} \times [0, 1]$, $m \geq \bar{m}_0$, следует, что отображение F_a , построенное в доказательстве теоремы F, удовлетворяет условию (iii).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Заметим, что если по первой координате траектория точки (x''_0, y''_0) , указанной в доказательстве теоремы E, притягивается к f -неподвижной точке нуль, то по второй координате эта траектория проявляет черты сложного хаотического поведения: для любого $\hat{y} \in [0, 1]$ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_l\}_{l \geq 0}$ такая, что $\lim_{l \rightarrow +\infty} g_{x''_0, n_l}(y''_0) = \hat{y}$, причем последовательность разностей этих чисел $\{n_{l+1} - n_l\}_{l \geq 0}$ не ограничена. Таким образом, уже в простейших косых произведениях отображений интервала (принадлежащих пространству $T_d(I)$ и содержащих только лишь неподвижные точки) возможно существование траекторий (имеющих одномерные ω -предельные множества рассматриваемого вида), проявляющих по второй координате черты хаотического поведения.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Отметим и следующую функциональную особенность отображения, построенного в доказательстве теоремы E: в силу формулы (35) частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(\bar{y})$ не ограничена при любом $\bar{y} \in [0, 1]$ в произвольной окрестности точки $(0, \bar{y})$, которая является точкой разрыва второго рода $\frac{\partial}{\partial x} g_x(\bar{y})$ по переменной x в соответствующем горизонтальном слое (см. классическую теорему Дарбу для производной функции одного действительного переменного [8; гл. 7, п. 2]). Утверждение теоремы G показывает, что свойство неограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ выполнено для произвольного отображения из множества $T_d(I)$, удовлетворяющего условию (iii) и имеющего одномерные ω -предельные множества рассматриваемого вида (см. § 5).

§ 4. Еще об одном расходящемся ряде, связанном с одномерными ω -предельными множествами

Доказанная в этом параграфе теорема F дает характеристику простейших косых произведений в плоскости с одномерными ω -предельными множествами в терминах C^0 -нормы отклонений отображений в слоях от тождественного отображения на некотором невырожденном отрезке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ F. Пусть F^M -траектория некоторой точки (x', y') простейшего отображения $F \in T_d(I)$ имеет ω -предельное множество

$$\omega_{FM}((x', y')) = \{x^0\} \times [\alpha', \beta'], \quad x^0 \in \text{Per}_e(f), \quad [\alpha', \beta'] \subseteq I_2, \quad \alpha' < \beta'.$$

Тогда в силу теоремы A знакопеременный ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha', \beta']}} (x_{Mk} - x^0) \psi(x_{Mk}, y_{Mk})$$

расходится (напомним, что $x_{Mk} = f^{Mk}(x')$, $y_{Mk} = g_{x', Mk}(y')$, $k \geq 0$). Тогда расходится и ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha', \beta']}} |x_{Mk} - x^0| |\psi(x_{Mk}, y_{Mk})|.$$

с неотрицательными членами. Рассмотрим последовательность неотрицательных чисел

$$\left\{ \|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']} \|_{C^0(I_2)} \right\}_{k \in N_{[\alpha', \beta']}}.$$

Из определения C^0 -нормы (см. равенство (9)) следует, что

$$\|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']} \|_{C^0(I_2)} \geq |x_{Mk} - x^0| |\psi(x_{Mk}, y_{Mk})|, \quad k \in N_{[\alpha', \beta']}. \quad (43)$$

Поэтому ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha', \beta']}} \|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']} \|_{C^0(I_2)}$$

с неотрицательными членами расходится. Теорема F доказана.

Обратим внимание на следующее свойство отображений в слоях: так как $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{Mk} = x_0$ и условие " $F \in T_d(I)$ " влечет " $F \in T^0(I)$ ", то

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in N_{[\alpha', \beta']}}} \|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']} \|_{C^0(I_2)} = 0.$$

§ 5. Одномерные ω -предельные множества и частная производная по x отображений в слоях

Основное содержание этого параграфа составляет

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ G. 1. Пусть отображение $F \in T_d(I)$ имеет замкнутое множество $\text{Per}(F)$, а ω -предельное множество $\omega_{FM}((x', y'))$ F^M -траектории точки (x', y') – невырожденный отрезок. Тогда в силу теоремы A найдутся точка $x^0 \in \text{Per}_e(f)$, связная компонента $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, среза $(\text{Per}(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha, \beta]}$ множества натуральных чисел такие, что

$$\begin{aligned} x' &\in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}, \\ \omega_{FM}((x', y')) &= \{x^0\} \times [\alpha', \beta'], \quad \alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta, \end{aligned}$$

числа из множества $N_{[\alpha, \beta]}$ обладают свойством (5), а ряд (6) расходится. Следовательно, в силу следствия B расходятся ряды (7) и (8). Тогда из теоремы D получаем, что x^0 – негиперболическая f^M -неподвижная точка (неравенство $W^s(x^0, f^M) \neq \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ означает, что точка x^0 не является отталкивающей). Таким образом, верно равенство $|(f^M)'(x^0)| = 1$. Отметим, что если $(f^M)'(x^0) = -1$, то переход к отображению F^{2M} приводит к равенству $(f^{2M})'(x^0) = 1$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$(f^M)'(x^0) = 1. \quad (44)$$

Пусть $I_1 = [a_1, b_1]$. В силу (44) найдется окрестность $U_1(x^0)$ точки x^0 такая, что, во-первых, сужение $f^M|_{U_1(x^0)}$ – диффеоморфизм и, во-вторых, если $x^0 \neq b_1$, то при любых $x \in U_{1+}(x^0)$ выполнено $f^M(x) > x^0$, а если $x^0 \neq a_1$, то при всех $x \in U_{1-}(x^0)$ верно $f^M(x) < x^0$ (здесь $U_{1+}(x^0)$ ($U_{1-}(x^0)$) – правосторонняя

(левосторонняя) окрестность точки x^0 в I_1 , т.е. интервал вида $(x^0, x^0 + \delta)$ (вида $(x^0 - \delta, x^0)$) при некотором $\delta > 0$). Положим

$$U_1(x^0) = \begin{cases} U_{1+}(x^0), & \text{если } x^0 = a_1, \\ U_{1-}(x^0) \cup U_{1+}(x^0) \cup \{x^0\}, & \text{если } x^0 \in (a_1, b_1), \\ U_{1-}(x^0), & \text{если } x^0 = b_1. \end{cases}$$

Так как $x' \in W^s(x^0, f^M)$, то для окрестности $U_1(x^0)$ найдем натуральное число n'_0 такое, что при всех $n \geq n'_0$ верно $f^{Mn}(x') \in U_1(x^0)$. Так как $x' \notin \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$, то для определенности будем считать, что $f^{Mn'_0}(x') \in U_{1+}(x^0)$. Тогда в силу свойств окрестности $U_{1+}(x^0)$ справедливо $f^{Mn}(x') \in U_{1+}(x^0)$, $n \geq n'_0$, т.е. $x' \in W^s_+(x^0, f^M)$, где $W^s_+(x^0, f^M)$ – правостороннее устойчивое многообразие точки x^0 относительно отображения f^M .

2. Убедимся в том, что точка x^0 изолирована во множестве неподвижных точек отображения f^M справа. Действительно, предположив противное, в интервале $U_{1+}(x^0)$ найдем последовательность неподвижных точек f^M

$$x^0_1 > x^0_2 > \dots > x^0_k > \dots > x^0 \text{ такую, что } \lim_{k \rightarrow +\infty} x^0_k = x^0.$$

Для промежутка $(x^0, x^0_1] \subset U_{1+}(x^0)$ найдем натуральное число $n_0 \geq n'_0$ такое, что для любого $n \geq n_0$ выполняется $f^{Mn}(x') \in (x^0, x^0_1]$. Тогда в силу равенства $(x^0, x^0_1] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [x^0_{k+1}, x^0_k]$ для любого $n \geq n_0$ существует $k \geq 1$ такое, что

$$f^{Mn}(x') \in (x^0_{k+1}, x^0_k). \quad (45)$$

Возьмем произвольное $n \geq n_0$ и найдем $k \geq 1$ такое, что выполняется (45). Так как $f^{Mn}(x') \in W^s_+(x^0, f^M)$, то из (45) следует, что интервал (x^0_{k+1}, x^0_k) содержит точку x'' такую, что $f^M(x'') \notin (x^0_{k+1}, x^0_k)$. Тогда, используя классическую теорему Ролля, найдем точку $\tilde{x} \in (x^0_{k+1}, x^0_k)$ такую, что $(f^M)'(\tilde{x}) = 0$. Последнее противоречит тому, что $f^M|_{U_{1+}(x^0)}$ – диффеоморфизм.

3. В силу п. 2 найдется подокрестность окрестности $U_{1+}(x^0)$, не содержащая неподвижных точек f^M . Без ограничения общности будем считать, что весь интервал $U_{1+}(x^0)$ не содержит неподвижных точек f^M . Последнее вместе с условием $x' \in W^s_+(x^0, f^M)$ и тем, что $f^M|_{U_{1+}(x^0)}$ – диффеоморфизм, влечет за собой выполнение неравенства $f^M(x) < x$, $x \in U_{1+}(x^0)$. Используя (44), укажем непрерывную в точке x^0 функцию φ , определенную в замыкании $\bar{U}_{1+}(x^0)$ окрестности $U_{1+}(x^0)$, такую, что $\varphi(x^0) = 0$, при всех $x \in \bar{U}_{1+}(x^0)$, $x \neq x^0$, справедливо $\varphi(x) > 0$ и

$$f^M(x) = x - \varphi(x)(x - x^0). \quad (46)$$

4. Отображение $g_{x^0, M}(y)$ содержит только неподвижные точки и не обладает периодическими точками других периодов. Если среди неподвижных точек $g_{x^0, M}$ есть точки с неположительными собственными числами, то переход к отображению F^{2M} (с отображениями в слоях $g_{x, 2M}$ при всех $x \in I_1$) приводит к отображению $g_{x^0, 2M}$, все неподвижные точки которого имеют неотрицательные собственные числа. Поэтому без ограничения общности будем

предполагать далее, что собственные числа всех неподвижных точек отображения $g_{x^0, M}$ неотрицательны. Покажем, что при сделанном предположении существует подокрестность $U'_{1+}(x^0)$ окрестности $U_{1+}(x^0)$ такая, что при любом $x \in U'_{1+}(x^0)$ отображение $g_{x, M}(y)$ имеет только лишь неподвижные точки и не содержит периодических точек других периодов.

Действительно, в силу результатов [29] найдется окрестность $B^1(g_{x^0, M})$ отображения $g_{x^0, M}$ в пространстве C^1 -гладких отображений отрезка I_2 в себя такая, что произвольное отображение из $B^1(g_{x^0, M})$ содержит лишь неподвижные точки; возможно, периодические точки периода два и не имеет периодических точек более высоких периодов. (Существование в произвольной окрестности $B^1(g_{x^0, M})$ отображения $g_{x^0, M}$ отображений в слоях $g_{x, M}$ с периодическими точками периода два возможно лишь в том случае, если $[\alpha, \beta] \neq I_2$.) Обозначим через ρ_M отображение отрезка I_1 на семейство отображений в слоях $\{g_{x, M}\}_{x \in I_1}$ косоугольного произведения F^M . Так как $F \in T_d(I)$, то ρ_M непрерывно на I_1 и, в частности, непрерывно в точке x^0 . Тогда для окрестности $B^1_{F^M}(g_{x^0, M})$ отображения $g_{x^0, M}$ в семействе отображений в слоях косоугольного произведения F^M найдется окрестность $U'_{1+}(x^0)$ точки x^0 , содержащаяся в $U_{1+}(x^0)$, такая, что $g_{x, M} \in B^1(g_{x^0, M})$, $x \in U'_{1+}(x^0)$.

Предположим, что существует последовательность точек $\{x'_l\}_{l \geq 0} \subset U'_{1+}(x^0)$, сходящаяся к x^0 , такая, что $g_{x'_l, M}$ при любом $l \geq 0$ содержит периодические точки периода два. Возьмем произвольное $l' \geq 0$. Сужению $F^M_{[[x^0, x'_{l'}] \times I_2]}$ на F^M -инвариантный прямоугольник $[x^0, x'_{l'}] \times I_2$ (см. п. 3) сопоставим отображение $G_*(x, y) = (x, g_{x, M}(y))$, определенное на G_* -инвариантном прямоугольнике $[x^0, x'_{l'}] \times I_2$. Тогда G_* имеет лишь неподвижные точки, периодические точки периода два и не содержит периодических точек более высоких периодов. Отсюда следует, что множество $\text{Per}(G_*)$ периодических точек G_* замкнуто.

Обозначим через y'_l , $l \geq 0$, периодическую точку периода два отображения $g_{x'_l, M}$. Из последовательности точек $\{(x'_l, y'_l)\}_{l \geq 0} \subset \text{Per}(G_*)$ выделим сходящуюся к некоторой точке (x^0, y_*) подпоследовательность $\{(x'_{l_p}, y'_{l_p})\}_{p \geq 0}$. В силу замкнутости множества $\text{Per}(G_*)$ выполнено $(x^0, y_*) \in \text{Per}(G_*)$ и y_* – неподвижная точка $g_{x^0, M}$. Но тогда непрерывность G_* влечет за собой сходимость последовательности точек периода два вида $\{g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p})\}_{p \geq 0}$ к точке y_* . Пусть для определенности при любом $p \geq 0$ выполнено неравенство $y'_{l_p} < g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p})$ (последнего в случае необходимости можно добиться соответствующим переобозначением точек). Так как отображения $g_{x'_{l_p}, M}(y)$ являются C^1 -гладкими по y , то, применяя классическую теорему Лагранжа для функции одной переменной к отображению $g_{x'_{l_p}, M}(y)$, $p \geq 0$, на отрезке $[y'_{l_p}, g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p})]$, укажем точку $c_p \in [y'_{l_p}, g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p})]$ такую, что

$$\frac{\partial}{\partial y} g_{x'_{l_p}, M}(c_p) = \frac{g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p}) - g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p})}{g_{x'_{l_p}, M}(y'_{l_p}) - y'_{l_p}} = -1.$$

Используя условие “ $F \in T_d(I)$ ” и равенство $\lim_{p \rightarrow +\infty} c_p = y_*$, получаем отсюда, что $\frac{\partial}{\partial y} g_{x^0, M}(y_*) = -1$. Последнее противоречит предположению о неотрица-

тельности собственных чисел неподвижных точек отображения $g_{x^0, M}$. Следовательно, найдется окрестность $U''_{1+}(x^0)$ точки x^0 , содержащаяся в $U'_{1+}(x^0)$, такая, что при каждом $x \in U''_{1+}(x^0)$ отображение $g_{x, M}$ имеет лишь неподвижные точки и не содержит периодических точек более высоких периодов.

Так как $g_{x^0, M}|_{[\alpha, \beta]} = \text{id}|_{[\alpha, \beta]}$, то существует (открытая в I) окрестность U отрезка $\{x^0\} \times [\alpha, \beta]$ такая, что при каждом $x \in \text{pr}_x(U)$ отображение $g_{x, M}|_{U(x)}$ – возрастающий диффеоморфизм по y ; здесь $\text{pr}_x(\cdot)$ – проекция множества на ось абсцисс, $U(x)$ – срез окрестности U слоем над x . Без ограничения общности будем считать, что $\text{pr}_x(U) = U''_{1+}(x^0)$.

Так как $x' \in W_+^s(x^0, f^M)$, то для некоторого натурального числа $n''_0 \geq 1$ выполнено $f^{Mn}(x') \in U''_{1+}(x^0)$, $n \geq n''_0$ (см. п. 1).

Возьмем произвольное $\bar{n} \geq n''_0$ такое, что $g_{x', M\bar{n}}(y') \in (\alpha', \beta')$. Переобозначим полученные точки, полагая $f^{M\bar{n}}(x') = x_0$, $g_{x', M\bar{n}}(y') = y_0$. Так как F^M -траектория $\{F^{Mn}(x_0, y_0)\}_{n \geq 0}$ точки (x_0, y_0) является подтраекторией F^M -траектории точки (x', y') и отличается от последней отсутствием конечного множества точек $\{(x', y'), F^M(x', y'), \dots, F^{M(\bar{n}-1)}(x', y')\}$, то $\{F^{Mn}(x_0, y_0)\}_{n \geq 0}$ обладает теми же асимптотическими свойствами, что и $\{F^{Mn}(x', y')\}_{n \geq 0}$.

5. Наша цель в пп. 5–7 – описать геометрическую структуру множества

$$\{(x, y) : g_{x, M}(y) = y\}, \quad (x, y) \in U''_{1+}(x^0) \times [\alpha', \beta'].$$

В силу предложения 3 в условиях теоремы G существует непрерывная по x на отрезке $\{x^0\} \times [\alpha, \beta]$ функция $\psi(x, y)$, определенная в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha, \beta]$, такая, что в указанном прямоугольнике справедливо представление

$$g_{x, M}(y) = y + (x - x^0)\psi(x, y). \quad (47)$$

Положим

$$Z^+ = \{z(x, y) : g_{x, M}(y) - y > 0\}, \quad Z^- = \{z(x, y) : g_{x, M}(y) - y < 0\}, \\ x \in U''_{1+}(x^0)$$

В силу теоремы A каждое из множеств Z^+ и Z^- непусто. Последнее вместе с непрерывностью $g_{x, M}$ на I означает, что Z^+ и Z^- – открытые множества.

Покажем, что для любого $y \in (\alpha', \beta')$ горизонтальный промежуток $U''_{1+}(x^0) \times \{y\}$ содержит последовательность

$$x_M^+(y) > x_M^-(y) > x_{2M}^+(y) > x_{2M}^-(y) > \dots > x_{Mj}^+(y) > x_{Mj}^-(y) > \dots, \quad (48)$$

сходящуюся по j к x^0 (здесь $(x_{Mj}^+(y), y)$ ($(x_{Mj}^-(y), y)$) – точки множества Z^+ (Z^-)). Действительно, предположим, что при некотором $\bar{y} \in (\alpha', \beta')$ в некоторой подокрестности $V_{1+}(x^0)$ окрестности $U''_{1+}(x^0)$ верно неравенство

$$g_{x, M}(\bar{y}) - \bar{y} \geq 0 \quad (g_{x, M}(\bar{y}) - \bar{y} \leq 0). \quad (49)$$

Положим $U' = V_{1+}(x^0) \times \text{pr}_y U$, где $\text{pr}_y(\cdot)$ – проекция множества на ось ординат. Из определения окрестности U' следует, что, во-первых, сужение

$F^M|_{\overline{U'}}$ отображения F^M на замыкание множества U' – диффеоморфизм, и, во-вторых, найдется $\bar{n}_0 \geq 1$ такое, что

$$F^{Mn}(x_0, y_0) \in U', \quad n \geq \bar{n}_0 \quad (50)$$

(см. [19; гл. 5, § 3]). Горизонтальный промежуток $V_{1+}(x^0) \times \{\bar{y}\}$ разбивает открытое множество U' на два прямоугольника

$$P_1 = V_{1+}(x^0) \times [\bar{y}, \beta(\text{pr}_y U')], \quad U' \setminus P_1,$$

где $\beta(\text{pr}_y U')$ – правая граничная точка интервала $\text{pr}_y U'$.

Предположим для определенности, что верно первое из неравенств (49) и рассмотрим диффеоморфизм $F^M|_{P_1} : P_1 \rightarrow F^M(P_1)$. Тогда $F^M(V_{1+}(x^0) \times \{\bar{y}\}) \subset P_1$ и для любой точки $(x, y) \in P_1$ справедливо неравенство

$$g_{x,M}(y) \geq \bar{y} \quad (51)$$

(см. [30; гл. 1, § 13]). Так как $\omega_{FM}((x_0, y_0)) = \{x^0\} \times [\alpha', \beta']$, то найдется натуральное число $n_* \geq \bar{n}_0$ такое, что $g_{x_0, Mn_*}(y_0) \in (\bar{y}, \beta']$. Используя (50), (51), получаем отсюда, что при всех $n \geq n_*$ выполнено

$$g_{x_0, Mn}(y_0) \geq \bar{y}.$$

Последнее противоречит тому, что $\omega_{FM}((x_0, y_0)) = \{x^0\} \times [\alpha', \beta']$. Следовательно, сделанное предположение неверно и произвольный промежуток $U''_{1+}(x^0) \times \{y\}$, где $y \in (\alpha', \beta')$, содержит последовательность (48), сходящуюся по j к точке x^0 .

Отсюда получаем, что $Z^+(y) \neq \emptyset$ ($Z^-(y) \neq \emptyset$) и срез $Z^+(y)$ (срез $Z^-(y)$) открыт в промежутке I_1 . Так как выполнено условие (iii), то для множеств $Z^+(y)$ и $Z^-(y)$ верно одно из двух следующих строгих неравенств:

$$\sup Z^+(y) > \sup Z^-(y), \quad \sup Z^+(y) < \sup Z^-(y).$$

Действительно, допустим, что $\sup Z^+(y) = \sup Z^-(y) = C^*$. Тогда в любой окрестности $U_{1,\delta}(C^*)$ точки C^* найдутся как точки $x' \in Z^+(y)$, так и точки $x'' \in Z^-(y)$. Поэтому $g_{C^*, M}(y) = y$, а отображение $g_{x,M}(y) - y$ не является монотонным по переменной x (даже в широком смысле) в промежутке $U_{1,\delta}(C^*) \times \{y\}$. Последнее противоречит условию (iii). Таким образом, сделанное предположение неверно и $\sup Z^+(y) \neq \sup Z^-(y)$.

6. Зафиксируем $y \in (\alpha', \beta')$. Предположим, что $\sup Z^+(y) > \sup Z^-(y)$. Так как множество $Z^+(y)$ ($Z^-(y)$) открыто на I_1 , то оно представимо в виде объединения не более чем счетного семейства попарно непересекающихся составляющих интервалов, граничные точки которых принадлежат множеству нулей функции $g_{x,M}(y) - y$. Возможно также существование не более чем двух полуинтервалов, одна из граничных точек каждого из которых является и граничной точкой отрезка I_1 (см. [31; гл. 2, § 5]). Поэтому при сделанном предположении корректно определен промежуток

$$Z_1^+(y) = \{x \in Z^+(y) : x > \sup Z^-(y)\}$$

такой, что множество $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)$ непусто и открыто в I_1 . Последнее вместе с тем, что $Z^-(y)$ открыто на отрезке I_1 , и условием (iii) влечет за собой выполнение неравенства $\sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)) < \sup Z^-(y)$. Тогда корректно определен интервал

$$Z_1^-(y) = \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)) < x < \sup Z^-(y)\}$$

такой, что $Z^-(y) \setminus Z_1^-(y)$ непусто и открыто на отрезке I_1 . Из определения $Z_1^+(y)$ и $Z_1^-(y)$ следует, что $Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y)$ (т.е. для любых $x' \in Z_1^+(y)$, $x'' \in Z_1^-(y)$ верно неравенство $x' > x''$).

Предположим, что сделано $j \geq 1$ шагов, в результате которых на отрезке I_1 найдены интервалы

$$Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y) \succ \dots \succ Z_j^+(y) \succ Z_j^-(y)$$

такие, что при любом $2 \leq p \leq j$ выполнено

$$\begin{aligned} Z_p^+(y) &= \{x \in Z^+(y) : \sup(Z^-(y) \setminus \dots \setminus Z_{p-1}^-(y)) \\ &< x < \sup(Z^+(y) \setminus \dots \setminus Z_{p-1}^+(y))\}, \end{aligned}$$

и $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \dots \setminus Z_p^+(y)$ – непустое открытое на I_1 множество,

$$\begin{aligned} Z_p^-(y) &= \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus \dots \setminus Z_p^+(y)) \\ &< x < \sup(Z^-(y) \setminus \dots \setminus Z_{p-1}^-(y))\}, \end{aligned}$$

а множество $Z^-(y) \setminus Z_1^-(y) \setminus \dots \setminus Z_p^-(y)$ непусто и открыто на I_1 .

Опишем $(j+1)$ -й шаг. Из результатов п. 5 следует, что найдется $x \in Z^+(y)$ такое, что $Z_j^-(y) \succ x$ (т.е. $x' > x$ при любом $x' \in Z_j^-(y)$). Используя определение интервала $Z_j^-(y)$, получаем отсюда, что для всех таких x верно неравенство

$$x < \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y)) = C_*$$

и в произвольной левосторонней окрестности $U_{1,\delta}^-(C_*)$ точки C_* существуют точки множества $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y)$. В силу условия (iii) множество $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y)$ содержит левостороннюю окрестность $U_{1,\delta_*}^-(C_*)$ точки C_* при некотором $\delta_* > 0$. Поэтому

$$\sup(Z^-(y) \setminus Z_1^-(y) \setminus \dots \setminus Z_j^-(y)) < \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y))$$

и корректно определен интервал

$$\begin{aligned} Z_{j+1}^+(y) &= \{x \in Z^+(y) : \sup(Z^-(y) \setminus \dots \setminus Z_j^-(y)) \\ &< x < \sup(Z^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y))\} \end{aligned}$$

такой, что $Z^+(y) \setminus \dots \setminus Z_j^+(y) \setminus Z_{j+1}^+(y)$ открыто.

Аналогично определим интервал

$$\begin{aligned} Z_{j+1}^-(y) &= \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus \dots \setminus Z_{j+1}^+(y)) \\ &< x < \sup(Z^-(y) \setminus \dots \setminus Z_j^-(y))\} \end{aligned}$$

такой, что $Z^-(y) \setminus \dots \setminus Z_j^-(y) \setminus Z_{j+1}^-(y)$ открыто и т.д.

Продолжая приведенную индуктивную процедуру, в промежутке I_1 укажем последовательность интервалов

$$Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y) \succ \dots \succ Z_j^+(y) \succ Z_j^-(y) \succ \dots$$

В силу условия (iii) при каждом $j \geq 1$ на промежутке I_1 найдется по одной единственной точке $x_{j,1}(y)$ и $x_{j,2}(y)$ такой, что

$$\begin{aligned} Z_j^+(y) \succ x_{j,1}(y) \succ Z_j^-(y), & \quad g_{x_{j,1}(y),M}(y) - y = 0, \\ Z_j^-(y) \succ x_{j,2}(y) \succ Z_{j+1}^+(y), & \quad g_{x_{j,2}(y),M}(y) - y = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

7. Убедимся в том, что при любом $j \geq 1$ существуют непрерывные функции $x = x_j^1(y)$ и $x = x_j^2(y)$, определенные на $[\alpha', \beta']$ такие, что

$$x_j^1(y) = x_{j,1}(y), \quad x_j^2(y) = x_{j,2}(y), \quad y \in (\alpha', \beta'),$$

а при $y = \alpha'$ ($y = \beta'$) выполнено

$$\begin{aligned} x_j^1(\alpha') &= \lim_{y \rightarrow \alpha'} x_j^1(y), & x_j^2(\alpha') &= \lim_{y \rightarrow \alpha'} x_j^2(y), \\ (x_j^1(\beta') &= \lim_{y \rightarrow \beta'} x_j^1(y), & x_j^2(\beta') &= \lim_{y \rightarrow \beta'} x_j^2(y)). \end{aligned}$$

Действительно, возьмем произвольное $j \geq 1$. Для определенности последующие рассуждения проведем для функции $x = x_j^1(y)$. Пусть $\bar{y}$ – произвольная точка интервала (α', β') . В силу условия (iii) и соотношений (52) для каждой точки $(x_j^1(\bar{y}), \bar{y})$ найдется окрестность

$$U_\delta((x_j^1(\bar{y}), \bar{y})) = U_{\delta,1}(x_j^1(\bar{y})) \times U_{\delta,2}(\bar{y}), \quad \delta = \delta((x_j^1(\bar{y}), \bar{y})),$$

такая, что соотношение $g_{x,M}(y) - y = 0$ в интервале $U_{\delta,2}(\bar{y})$ определяет единственную локальную непрерывную неявную функцию $x = x_j^{1,\text{loc}}(y)$ со значениями в интервале $U_{\delta,1}(x_j^1(\bar{y}))$. Положим

$$U_{\delta,2}(\bar{y}) = (c^1, d^1), \quad x_j^{1,\text{loc}}(c^1) = \lim_{y \rightarrow c^1} x_j^{1,\text{loc}}(y), \quad x_j^{1,\text{loc}}(d^1) = \lim_{y \rightarrow d^1} x_j^{1,\text{loc}}(y).$$

Тогда в силу замкнутости множества неподвижных точек отображения $g_{x,M}: I_2 \rightarrow I_2$ справедливы равенства

$$g_{x_j^{1,\text{loc}}(c^1),M}(c^1) = c^1, \quad g_{x_j^{1,\text{loc}}(d^1),M}(d^1) = d^1,$$

и непрерывная функция $x = x_j^{1,\text{loc}}(y)$ определена на отрезке $[c^1, d^1]$. В том случае, когда $[c^1, d^1] \neq [\alpha', \beta']$, используя условие (iii) либо для точки $(x_j^{1,\text{loc}}(c^1), c^1)$ (если $c^1 \neq \alpha'$), либо для точки $(x_j^{1,\text{loc}}(d^1), d^1)$ (если $d^1 \neq \beta'$), либо для обеих точек одновременно (если выполнены оба неравенства), построим единственное непрерывное расширение функции $x = x_j^{1,\text{loc}}(y)$ на некоторый отрезок $[c^2, d^2] \supset [c^1, d^1]$. Полученную функцию обозначим через $x = x_{j,2}^1(y)$. Тогда при любом $y \in [c^2, d^2]$ верно $g_{x_{j,2}^1(y),M}(y) = y$. Предположим, что сделано n шагов и построены отрезки $[c^1, d^1] \subset [c^2, d^2] \subset \dots \subset [c^n, d^n]$, на каждом из которых определена единственная непрерывная функция $x = x_{j,n}^1(y)$ (здесь $n \geq 1$, $x_{j,1}^1(y) = x_j^{1,\text{loc}}(y)$) со следующими свойствами:

$$(7.1) \quad g_{x_{j,n}^1(y),M}(y) \equiv y \text{ на отрезке } [c^n, d^n];$$

$$(7.2) \quad x_{j,n}^1(y)|_{[c^{n-1}, d^{n-1}]} = x_{j,n-1}^1(y).$$

Если $[c^n, d^n] \neq [\alpha', \beta']$, то, применяя условие (iii) к точкам $(x_{j,n}^1(c^n), c^n)$ и $(x_{j,n}^1(d^n), d^n)$ так, как это было сделано при $n = 1$, на $(n + 1)$ -ом шаге построим единственное непрерывное расширение функции $x = x_{j,n}^1(y)$ на некоторый отрезок $[c^{n+1}, d^{n+1}]$, где $[c^{n+1}, d^{n+1}] \supset [c^n, d^n]$. Получим функцию $x = x_{j,n+1}^1(y)$ такую, что на отрезке $[c^{n+1}, d^{n+1}]$ справедливо $g_{x_{j,n+1}^1(y),M}(y) \equiv y$ и т.д. Продолжая описанную индуктивную процедуру, построим упорядоченную по включению систему отрезков

$$[c^1, d^1] \subset [c^2, d^2] \subset \dots \subset [c^n, d^n] \subset [c^{n+1}, d^{n+1}] \subset \dots, \quad (53)$$

на каждом из которых определена единственная непрерывная функция $x = x_{j,n}^1(y)$, обладающая свойствами (7.1) и (7.2). В силу теоремы Бэра–Хаусдорфа (см. [32; гл. 4, § 7]) существует трансфинит λ не выше второго класса, начиная с которого отрезки системы (53) совпадают, т.е.

$$[c^\lambda, d^\lambda] = [c^{\lambda+1}, d^{\lambda+1}] = \dots. \quad (54)$$

Тогда $[c^\lambda, d^\lambda] = [\alpha', \beta']$, поскольку в противном случае, применяя условие (iii) к точкам $(x_{j,\lambda}^1(c^\lambda), c^\lambda)$ и $(x_{j,\lambda}^1(d^\lambda), d^\lambda)$ так, как это было сделано выше, можно было бы построить непрерывное расширение $x = x_{j,\lambda+1}^1(y)$ функции $x = x_{j,\lambda}^1(y)$ на отрезок $[c^{\lambda+1}, d^{\lambda+1}]$, содержащий $[c^\lambda, d^\lambda]$ в качестве собственного подмножества. Последнее противоречит (54). Таким образом, на $[\alpha', \beta']$ определена единственная непрерывная функция $x = x_j^1(y)$, где $x_j^1(y) \equiv x_{j,\lambda}^1(y)$, такая, что $g_{x_j^1(y),M}(y) \equiv y$ на $[\alpha', \beta']$.

Обозначим через Γ_j^1 (Γ_j^2), $j \geq 1$, график непрерывной на отрезке $[\alpha', \beta']$ функции $x = x_j^1$ ($x = x_j^2$). Из результатов пп. 6, 7 следует, что при всех $j \geq 1$ графики Γ_j^1 , Γ_j^2 и Γ_{j+1}^1 упорядочены следующим образом: $\Gamma_j^1 \succ \Gamma_j^2 \succ \Gamma_{j+1}^1$, т.е. для любого $y \in [\alpha', \beta']$ для точек $x_1 = x_j^1(y)$, $x_2 = x_j^2(y)$, $x_3 = x_{j+1}^1(y)$ верны неравенства $x_1 > x_2 > x_3$. Следовательно, непрерывные кривые Γ_j^1 и Γ_j^2 , $j \geq 1$, разбивают прямоугольник $U_{1+}''(x^0) \times [\alpha', \beta']$ на области (криволинейные трапеции относительно оси ординат) так, что если для абсциссы точки $(x, y) \in U_{1+}''(x^0) \times [\alpha', \beta']$ выполнено $x_j^2(y) \succ x \succ x_{j+1}^1(y)$, то $g_{x,M}(y) - y > 0$; если же $x_j^1(y) \succ x \succ x_j^2(y)$, то $g_{x,M}(y) - y < 0$. Каждая точка (x, y) , удовлетворяющая соотношению $g_{x,M}(y) - y = 0$, принадлежит либо Γ_j^1 , либо Γ_j^2 при некотором $j \geq 1$.

8. Докажем теперь неограниченность частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y)$. Положим

$$N'_{[\alpha', \beta']} = \{k \in N_{[\alpha', \beta']} : \psi(x_{Mk}, y_{Mk}) \neq 0\},$$

где $x_{Mk} = f^{Mk}(x_0)$, $y_{Mk} = g_{x_0, Mk}(y_0)$ (см. п. 4). Используя предложение 2 и теорему А, получаем, что расходятся ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |y_{M(k+1)} - y_{Mk}| \quad (55)$$

с неотрицательными членами и ряд

$$\sum_{k \in N'_{[\alpha', \beta']}} (x_{Mk} - x^0) |\psi(x_{Mk}, y_{Mk})| \quad (56)$$

с положительными членами соответственно.

В силу теоремы F расходится следующий ряд с положительными членами:

$$\sum_{k \in N'_{[\alpha', \beta']}} \|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}. \quad (57)$$

Пусть $l_{Mk} = l([x_{Mk}, x_{M(k-1)}])$, $k \geq 1$, где $l(\cdot)$ – длина отрезка. Ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} l_{Mk}, \quad \sum_{k \in N'_{[\alpha', \beta']}} l_{Mk} \quad (58)$$

с положительными членами сходятся. Сравнивая расходящийся ряд (56) со вторым из сходящихся рядов (58), заключаем, что последовательность положительных чисел

$$\left\{ \frac{(x_{Mk} - x^0) |\psi(x_{Mk}, y_{Mk})|}{l_{Mk}} \right\}_{k \in N'_{[\alpha', \beta']}} \quad (59)$$

не ограничена сверху. Возможны следующие случаи:

- (8.1) последовательность (59) – бесконечно большая;
- (8.2) множество частичных пределов (59) содержит и неотрицательные числа (при этом точка $+\infty$ может быть как изолированной, так и предельной точкой множества частичных пределов последовательности (59)).

Рассмотрим случай (8.1). В силу (43) при любом $k \in N'_{[\alpha', \beta']}$ выполнено

$$\frac{(x_{Mk} - x^0) |\psi(x_{Mk}, y_{Mk})|}{l_{Mk}} \leq \frac{\|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}}{l_{Mk}}.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in N'_{[\alpha', \beta']}}} \frac{\|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta']} - \text{id}|_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}}{l_{Mk}} = +\infty. \quad (60)$$

Используя непрерывность функции $(g_{x, M} - \text{id})|_{[\alpha', \beta']}$, компактность отрезка $[\alpha', \beta]$ и равенство (9), при любом $k \in N'_{[\alpha', \beta]}$ найдем точку $y_k^* \in [\alpha', \beta]$ такую, что

$$\|g_{x_{Mk}, M}|_{[\alpha', \beta]} - \text{id}|_{[\alpha', \beta]}\|_{C^0(I_2)} = |g_{x_{Mk}, M}(y_k^*) - y_k^*| > 0.$$

Из результатов п. 7 и определения множества $N'_{[\alpha', \beta]}$ следует, что для любого $k \in N'_{[\alpha', \beta]}$ найдется $j = j(k)$ такое, что

$$x_j^1(y_{Mk}) \succ x_{Mk} \succ x_j^2(y_{Mk}) \quad \text{или} \quad x_j^2(y_{Mk}) \succ x_{Mk} \succ x_{j+1}^1(y_{Mk}). \quad (61)$$

Пусть (x_k^{1*}, y_k^*) и (x_k^{2*}, y_k^*) – точки пересечения промежутка $U_{1+}''(x^0) \times \{y_k^*\}$, $k \in N'_{[\alpha', \beta']}$, с графиками $\Gamma_{j(k)}^1$ и $\Gamma_{j(k)}^2$ соответственно, если верно первое из соотношений (61), и графиками $\Gamma_{j(k)+1}^1$ и $\Gamma_{j(k)}^2$ соответственно, если верно второе из соотношений (61). Тогда найдется последовательность отрезков

$$\{[x_{Mk_s}, x_{M(k_s-1)}]\}_{s \geq 1}, \quad 1 < k_1 < k_2 < \dots < k_s < \dots,$$

таких, что

(8.1.1) либо $k_s \in N'_{[\alpha', \beta']}$, либо $k_s - 1 \in N'_{[\alpha', \beta']}$;

(8.1.2) отрезки $\{[x_{Mk_s}, x_{M(k_s-1)}]\}_{s \geq 1}$ покрывают множество $\{x_k^{1*}, x_k^{2*}\}_{k \in N'_{[\alpha', \beta]}}$;

(8.1.3) при любом $s \geq 1$ верно $[x_{Mk_s}, x_{M(k_s-1)}] \cap \{x_k^{1*}, x_k^{2*}\}_{k \in N'_{[\alpha', \beta]}} \neq \emptyset$.

Из последовательности

$$\{\|g_{x_{Mk}, M} - \text{id}_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}\}_{k \in N'_{[\alpha', \beta]}}$$

выделим подпоследовательность $\{a_{k_s}\}_{s \geq 1}$, где

$$a_{k_s} = \|g_{x_{Mk_s}, M} - \text{id}_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}, \quad \text{если } k_s \in N'_{[\alpha', \beta]},$$

$$a_{k_s} = \|g_{x_{M(k_s-1)}, M} - \text{id}_{[\alpha', \beta']}\|_{C^0(I_2)}, \quad \text{если } k_s \notin N'_{[\alpha', \beta]}.$$

Отметим, что в силу (8.1.1) во втором случае $k_s - 1 \in N'_{[\alpha', \beta]}$. При любом $k \geq 1$ для некоторого $c_{k-1} \in (x_{M(k-1)}, x_{M(k-2)})$ имеем

$$l_{Mk} = (f^M)'(c_{k-1})l_{M(k-1)} \quad (62)$$

и, в частности, (62) справедливо для $k = k_s$. Используя равенство (44) и C^1 -гладкость f , найдем $s_0 \geq 1$ такое, что $0 < (f^M)'(c_{k_s-1}) < 3/2$, $s \geq s_0$. Поэтому при $k_s - 1 \in N'_{[\alpha', \beta]}$ верно

$$\frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}} > \frac{2a_{k_s}}{3l_{M(k_s-1)}}$$

и из равенства (60) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}} = +\infty. \quad (63)$$

Так как $y_{k_s}^* = g_{x_{k_s}^{1*}}(y_{k_s}^*)$ или $y_{k_s}^* = g_{x_{k_s}^{2*}}(y_{k_s}^*)$ (для определенности будем считать, что выполнено первое равенство), то, используя классическую теорему Лагранжа для функции одного переменного, найдем точку $\xi_s \in (x_{Mk_s}, x_{k_s}^{1*})$, если $k_s \in N'_{[\alpha', \beta]}$, и $\xi_s \in (x_{k_s}^{1*}, x_{M(k_s-1)})$, если $k_s \notin N'_{[\alpha', \beta]}$ такую, что в первом случае

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\xi_s, M}(y_{k_s}^*) \right| = \frac{|g_{x_{Mk_s}, M}(y_{k_s}^*) - g_{x_{k_s}^{1*}, M}(y_{k_s}^*)|}{x_{k_s}^{1*} - x_{Mk_s}} > \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}},$$

а во втором –

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\xi_s, M}(y_{k_s}^*) \right| = \frac{|g_{x_{M(k_s-1)}, M}(y_{k_s}^*) - g_{x_{k_s}^{1*}, M}(y_{k_s}^*)|}{x_{M(k_s-1)} - x_{k_s}^{1*}} > \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}}.$$

Последнее вместе с (63) влечет за собой неограниченность частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y)$ в произвольной окрестности ω -предельного множества $\omega_{FM}((x', y'))$, если выполнено свойство (8.1).

Перейдем к рассмотрению случая (8.2). Так как ряд (56) содержит члены ряда (55) только лишь с номерами из множества $N'_{[\alpha', \beta']}$, то последовательность (59) является подпоследовательностью последовательности

$$\left\{ \frac{|y_{M(k+1)} - y_{Mk}|}{l_{Mk}} \right\}_{k \geq 0}. \quad (64)$$

Поэтому множество частичных пределов неограниченной последовательности (64) содержит и неотрицательные числа. Покажем, что существует последовательность натуральных чисел $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_i < \dots$ такая, что существуют

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} = +\infty, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{M(k'_i-1)}} \neq \infty. \quad (65)$$

Предположим противное и в последовательности (64) найдем бесконечно большую подпоследовательность

$$\left\{ \frac{|y_{M(k_i+1)} - y_{Mk_i}|}{l_{Mk_i}} \right\}_{i \geq 0}.$$

Положим $K_0 = \{k_i\}_{i \geq 1}$. Тогда $\mathbb{N} \setminus K_0$ – счетное подмножество $\mathbb{N}$. Поэтому существует последовательность интервалов $\{(k_j^{0,1}, k_j^{0,2})\}_{j \geq 1}$ таких, что

$$(8.2.1) \quad k_j^{0,1}, k_j^{0,2} \in K_0 \text{ при любом } j \geq 1, \text{ причем } k_j^{0,1} < k_j^{0,2} \leq k_{j+1}^{0,1};$$

$$(8.2.2) \quad \mathbb{N} \setminus K_0 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} ((k_j^{0,1}, k_j^{0,2}) \cap \mathbb{N}).$$

Из (8.2.1), (8.2.2) следует, что $k_1^{0,2} < k_2^{0,2} < \dots < k_j^{0,2} < \dots$ и последовательность $\{k_j^{0,2}\}_{j \geq 1}$ является подпоследовательностью $\{k_i\}_{i \geq 0}$, причем $k_j^{0,2} - 1 \in \mathbb{N} \setminus K_0$, $j \geq 1$. Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{|y_{M(k_j^{0,2}+1)} - y_{Mk_j^{0,2}}|}{l_{Mk_j^{0,2}}} = +\infty.$$

Из $\{k_j^{0,2}\}_{j \geq 1}$ извлечем произвольную подпоследовательность $\{k_{j_r}^{0,2}\}_{r \geq 1}$. При сделанном предположении

$$\left\{ \frac{|y_{Mk_{j_r}^{0,2}} - y_{M(k_{j_r}^{0,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{0,2}-1)}} \right\}_{r \geq 1} \quad (66)$$

– расходящаяся последовательность. Если предположить, что (66) содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\left\{ \frac{|y_{Mk_{j_r(p)}^{0,2}} - y_{M(k_{j_r(p)}^{0,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r(p)}^{0,2}-1)}} \right\}_{p \geq 1},$$

то, выбирая из $\{k_j^{0,2}\}_{j \geq 1}$ подпоследовательность $\{k_{j_{r(p)}}^{0,2}\}_{p \geq 1}$, получаем противоречие со сделанным предположением. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk_{j_r}^{0,2}} - y_{M(k_{j_r}^{0,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{0,2}-1)}} = +\infty. \quad (67)$$

Положим $K_1 = K_0 \cup \{k_{j_r}^{0,2} - 1\}_{r \geq 1}$. Тогда все элементы множества K_1 попарно различны. Расположим их в порядке возрастания численных значений: $k_1^1 < k_2^1 < \dots < k_i^1 < \dots$. Из определения множеств K_0 , K_1 и равенства (67) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{M(k_i^1+1)} - y_{Mk_i^1}|}{l_{Mk_i^1}} = +\infty.$$

Так как в случае (8.2) множество частичных пределов последовательности (64), кроме $+\infty$, содержит и действительные числа, то $\mathbb{N} \setminus K_1 \neq \emptyset$. Повторяя предыдущие рассуждения, из последовательности $\{k_i^1\}_{i \geq 1}$ выделим подпоследовательность

$$1 < k_1^{1,2} < k_2^{1,2} < \dots < k_j^{1,2} < \dots$$

такую, что $k_j^{1,2} - 1 \in \mathbb{N} \setminus K_1$, $j \geq 1$, а из $\{k_j^{1,2}\}_{j \geq 1}$ выделим подпоследовательность $\{k_{j_r}^{1,2}\}_{r \geq 1}$ так, что при сделанном предположении справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk_{j_r}^{1,2}} - y_{M(k_{j_r}^{1,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{1,2}-1)}} = +\infty.$$

Определим множество K_2 , полагая $K_2 = K_1 \cup \{k_{j_r}^{1,2} - 1\}_{r \geq 1}$ и т.д. Предположим, что сделано n шагов, в результате которых найдена строго возрастающая по включению совокупность подмножеств множества натуральных чисел

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n, \quad K_n = K_{n-1} \cup \{k_{j_r}^{n-1,2} - 1\}_{r \geq 1},$$

причем K_n состоит из попарно различных элементов $k_1^n < k_2^n < \dots < k_i^n < \dots$. В силу определения K_n справедливо равенство

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{M(k_i^n+1)} - y_{Mk_i^n}|}{l_{Mk_i^n}} = +\infty. \quad (68)$$

Опишем $(n+1)$ -й шаг. Из (68) следует, что в рассматриваемом случае $\mathbb{N} \setminus K_n$ — счетное множество. Тогда в K_n найдутся натуральные числа

$$k_1^{n,1} < k_1^{n,2} \leq k_2^{n,1} < k_2^{n,2} \leq \dots \leq k_j^{n,1} < k_j^{n,2} \leq k_{j+1}^{n,1} < k_{j+1}^{n,2} \leq \dots$$

такие, что

$$\mathbb{N} \cap [k_j^{n,2}, k_{j+1}^{n,1}] \subset K_n, \quad \mathbb{N} \cap (k_j^{n,1}, k_j^{n,2}) \subset \mathbb{N} \setminus K_n, \quad j \geq 1.$$

Отсюда получаем, что $\{k_j^{n,2}\}_{j \geq 1}$ есть подпоследовательность последовательности $\{k_i^n\}_{i \geq 1}$ и $k_j^{n,2} - 1 \in \mathbb{N} \setminus K_n$. Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{|y_{M(k_j^{n,2}+1)} - y_{Mk_j^{n,2}}|}{l_{Mk_j^{n,2}}} = +\infty.$$

Пусть $\{k_{j_r}^{n,2}\}_{r \geq 1}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{k_j^{n,2}\}_{j \geq 1}$. Тогда при сделанном предположении

$$\left\{ \frac{|y_{Mk_{j_r}^{n,2}} - y_{M(k_{j_r}^{n,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{n,2}-1)}} \right\}_{r \geq 1}$$

– расходящаяся последовательность, причем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk_{j_r}^{n,2}} - y_{M(k_{j_r}^{n,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{n,2}-1)}} = +\infty.$$

Множество K_{n+1} определим равенством $K_{n+1} = K_n \cup \{k_{j_r}^{n,2} - 1\}_{r \geq 1}$ и т.д. Продолжая описанную индуктивную процедуру, построим строго возрастающую по включению последовательность подмножеств в $\mathbb{N}$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

Для такой системы подмножеств в $\mathbb{N}$ найдется трансфинит γ не выше второго класса, для которого справедливо равенство

$$K_\gamma = K_{\gamma+1} = \dots \quad (69)$$

(см. [32; гл. 4, § 7]). Заметим, что $K_\gamma = \mathbb{N}$. Действительно, в противном случае при выполнении (8.2) $\mathbb{N} \setminus K_\gamma$ – счетное множество. Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что $K_{\gamma+1}$ содержит K_γ в качестве собственного подмножества. Полученное противоречие с (69) означает, что $K_\gamma = \mathbb{N}$. Но тогда последовательность (64) – бесконечно большая. Последнее невозможно, так как множество частичных пределов (64) содержит и неотрицательные числа. Следовательно, сделанное выше предположение неверно, и для некоторой последовательности натуральных чисел $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_i < \dots$ справедливо (65).

Используем полученные результаты для доказательства неограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y)$, если имеет место свойство (8.2). Пусть последовательность $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_i < \dots$ такова, что выполнено (65), причем

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{M(k'_i-1)}} = A \neq \infty. \quad (70)$$

Имеем

$$|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}| = |g_{x_{Mk'_i}, M}(y_{Mk'_i}) - g_{x_{M(k'_i-1)}, M}(y_{M(k'_i-1)})|.$$

Будем рассматривать далее функцию $g_{x,M}(y)$ только на отрезке $[B_{k'_{i-1}}, B_{k'_i}]$ с граничными точками $B_{k'_{i-1}}(x_{M(k'_i-1)}, y_{M(k'_i-1)})$ и $B_{k'_i}(x_{Mk'_i}, y_{Mk'_i})$ ($i \geq i_0$, где i_0 выбрано так, что $x_{M(k'_i-1)} \in U''_{1+}(x^0)$, $i \geq i_0$). В силу выбора окрестности $U''_{1+}(x^0)$ (см. пп. 3, 4) ни один из отрезков $[B_{k'_{i-1}}, B_{k'_i}]$ не содержит точек множества $\text{Per}_e(f) \times I_2$. Поэтому условие “ $F \in T_d(I)$ ” влечет за собой дифференцируемость $g_{x,M}(y)$ как функции двух переменных на каждом отрезке $[B_{k'_{i-1}}, B_{k'_i}]$

при любом $i \geq i_0$. Тогда, используя классическую теорему Лагранжа для вещественнозначной функции нескольких переменных (см. [33; гл. 8, § 4]), найдем точку $\zeta(\zeta_{k'_i}^1, \zeta_{k'_i}^2) \in (B_{k'_{i-1}}, B_{k'_i})$ такую, что

$$|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}| = \left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) l_{Mk'_i} + \frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) (y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}) \right|.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} \leq \left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}}. \quad (71)$$

Так как частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_{x, M}(y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике I , то существует число $L > 0$ такое, что верно неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| \leq L, \quad i \geq i_0. \quad (72)$$

Воспользуемся равенством (62) для $k = k'_i$. Имеем

$$\frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} = \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{(f^M)'(c_{k'_i-1}) l_{M(k'_i-1)}}.$$

Так как $\lim_{i \rightarrow +\infty} (f^M)'(c_{k'_i-1}) = 1$, то, используя (70), получаем отсюда

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} = A.$$

Тогда найдется $i_1 \geq i_0$ такое, что справедливо

$$0 \leq \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} < A + 1, \quad i \geq i_1. \quad (73)$$

Пусть $E > 0$ – произвольное число. Используя первое из соотношений (65), найдем натуральное число $i_2 \geq i_1$ такое, что верно неравенство

$$\frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} > E + L(A + 1), \quad i \geq i_2. \quad (74)$$

Из неравенств (71)–(74) следует, что выполнено

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| \geq \frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} - \left| \frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} > E, \\ i \geq i_2,$$

т.е.

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta_{k'_i}^1, M}(\zeta_{k'_i}^2) \right| = +\infty.$$

Последнее означает, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y)$ не ограничена в произвольной окрестности множества $\omega_{FM}((x', y'))$, если имеет место свойство (8.2). Так как $F \in T_d(I)$, то в силу (21), как в случае (8.1), так и в случае (8.2), частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности ω -предельного множества $\omega_F((x', y'))$. Теорема G доказана.

Пусть $F \in T^1(I)$. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ непрерывна на I и, следовательно, ограничена. Отсюда, используя предыдущую теорему, получаем, что ω -предельное множество произвольной траектории отображения $F \in T^1(I)$, отображения в слоях которого удовлетворяют условию (iii), есть периодическая орбита. Таким образом, теорема H является непосредственным следствием теоремы G. Теорема H доказана.

Список литературы

- [1] A. Denjoy, “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **11**:4, (1932), 333–375.
- [2] A. Denjoy, “Les trajectoires à la surface du tore”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **223**, (1946), 5–8.
- [3] A. Denjoy, “Sur les caractéristiques à la surface du tore”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194**, (1932), 830–833.
- [4] А. Б. Крыгин, “Об ω -предельных множествах гладких цилиндрических каскадов”, *Матем. заметки*, **23**:6, (1978), 873–884; англ. пер.: A. B. Krygin, “ ω -Limit sets of smooth cylindrical cascades”, *Math. Notes*, **23**:6, (1978), 479–485.
- [5] Л. С. Ефремова, “О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе”, *Динамические системы и нелинейные явления*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1990, 15–25.
- [6] P. E. Kloeden, “On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **20**:2, (1979), 171–177.
- [7] Д. В. Аносов, “Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция”, *Математические события XX века*, Фазис, М., 2003, 1–18; англ. пер.: D. V. Anosov, “Dynamical systems in the 1960s: the hyperbolic revolution”, *Mathematical events of the twentieth century*, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 1–17.
- [8] Д. А. Райков, *Одномерный математический анализ*, Высшая школа, М., 1982.
- [9] В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский, “Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек”, *Исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1980, 137–145.
- [10] M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, “Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: from quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic”, *Phys. Rev. A*, **39**:5, (1989), 2593–2598.
- [11] A. S. Pikovsky, U. Feudel, “Characterizing strange nonchaotic attractors”, *Chaos*, **5**:1, (1995), 253–260.
- [12] З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, “Об одном примере “странного нехаотического аттрактора””, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:4, (1996), 1–9; англ. пер.: Z. I. Bezhaeva, V. I. Oseledets, “An example of a strange nonchaotic attractor”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:4, (1996), 223–229.
- [13] T. H. Jäger, “On the structure of strange non-chaotic attractors in pinched skew products”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **27**:2, (2007), 493–510.

- [14] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999; пер. с англ.: А. Katok, В. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [15] Л. С. Ефремова, "Attracting sets and smoothness of a simplest skew product of interval maps", *Book of abstracts*, Intern. Conf. "Differential equations and related topics" (Moscow, 2007), Moscow Univ. Press, Moscow, 2007, 85–86.
- [16] Н. П. Еругин, *Неявные функции*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1956.
- [17] А. Н. Шарковский, "О циклах и структуре непрерывного отображения", *Укр. матем. журн.*, **17**:3, (1965), 104–111.
- [18] А. Н. Шарковский, "О притягивающих и притягивающихся множествах", *Докл. АН СССР*, **160**:5, (1965), 1036–1038; англ. пер.: А. N. Sharkovskii, "Attracting and attracted sets", *Soviet Math. Dokl.*, **6**, (1965), 268–270.
- [19] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, 2-е изд., РХД, М.–Ижевск, 2004; англ. пер. 1-го изд.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.
- [20] Е. В. Блинова, Л. С. Ефремова, "Об Ω -взрывах в простейших C^1 -гладких косых произведениях отображений интервала", *Труды международной конференции по динамическим системам и дифференциальным уравнениям* (Суздаль, 2006), Современная мат-ка и ее прилож., **53**, АН Грузии. Ин-т кибернетики, Тбилиси, 2008, 71–81; англ. пер.: E. V. Blinova, L. S. Efremova, "On Ω -blow-ups in the simplest C^1 -smooth skew products of interval mappings", *J. Math. Sci.*, **157**:3, (2009), 456–465.
- [21] S. F. Kolyada, "On dynamics of triangular maps of the square", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**:4, (1992), 749–768.
- [22] Z. Kočan, "The problem of classification of triangular maps with zero topological entropy", *Ann. Math. Sil.*, **13**, (1999), 181–192.
- [23] F. Balibrea, J. L. Garcia Guirao, J. I. Muñoz Casado, "Description of ω -limit sets of a triangular map on I^2 ", *Far East J. Dyn. Syst.*, **3**:1, (2001), 87–101.
- [24] F. Balibrea, J. L. Garcia Guirao, J. I. Muñoz Casado, "A triangular map on I^2 whose ω -limit sets are all compact intervals of $\{0\} \times I$ ", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **8**:4, (2002), 983–994.
- [25] F. B. Gallego, J. L. Garcia Guirao, J. I. Muñoz Casado, "On ω -limit sets of triangular maps on the unit cube", *J. Difference Equ. Appl.*, **9**:3–4, (2003), 289–304.
- [26] Ш. И. Ахалая, А. М. Степин, "Об инвариантных мерах несжимающих отображений", *Сообщ. АН ГССР*, **100**:3, (1980), 549–552.
- [27] Ш. И. Ахалая, А. М. Степин, "Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности", *Динамические системы и смежные вопросы геометрии*, Тр. МИАН, **244**, Наука, М., 2004, 23–34; англ. пер.: Sh. I. Akhalaya, A. M. Stepin, "On absolutely continuous invariant measures of noncontracting transformations of a circle", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **244**, (2004), 18–28.
- [28] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер. 1-го изд.: V. P. Mikhaĭlov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [29] M. Misiurewicz, "Structure of mappings of an interval with zero entropy", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **53**:1, (1981), 5–16.
- [30] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: К. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1968.
- [31] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 2-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Ungar Publ., New York, 1955.

- [32] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.
- [33] В. А. Зорич, *Математический анализ*, т. 1, Наука, М., 1981; англ. пер.: V. A. Zorich, *Mathematical analysis*, Universitext, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

Л. С. Ефремова (L. S. Efremova)

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского

E-mail: lef@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию

09.03.2009 и 12.07.2009