Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков, Оснащенные функции Морса на поверхностях, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 4, 33–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 02:19:15

УДК 515.164.174+515.164.22+515.122.55

Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков

Оснащенные функции Морса на поверхностях

Пусть M – гладкая, компактная, не обязательно неориентируемая поверхность с краем (возможно, пустым), F – пространство функций Морса на M , постоянных на каждой компоненте края и не имеющих критических точек на крае. Введено понятие оснащения для функции Морса $f \in F$. В случае ориентированной поверхности M это – замкнутая 1-форма α на поверхности M с выколотыми критическими точками локальных минимумов и локальных максимумов функции f такая, что вблизи любой критической точки пара (f, α) имеет канонический вид в подходящих локальных координатах и 2-форма $df \wedge \alpha \neq 0$ всюду на M с выколотыми критическими точками и задает там положительную ориентацию. Доказано, что любая функция Морса на M имеет оснащение и пространство F , снабженное C^∞ -топологией, гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{F}$ оснащенных функций Морса. Полученные результаты позволяют свести задачу нахождения гомотопического типа пространства F к более простой задаче нахождения гомотопического типа пространства $\mathbb{F}$. В качестве решения последней задачи сформулирован аналог параметрического h -принципа для пространства $\mathbb{F}$.

Библиография: 41 название.

Ключевые слова: функции Морса, оснащенные функции Морса, эквивалентность функций, компактная поверхность, C^∞ -топология.

§ 1. Введение

Задача изучения гладких функций с “умеренными” особенностями на гладком многообразии M является классической. Изучение топологии пространства таких функций обычно состоит из двух этапов:

- 1) сведение к комбинаторной задаче, т.е. нахождение комбинаторного объекта (например, конечномерного полиэдра), гомотопически эквивалентного изучаемому пространству функций;
- 2) решение полученной комбинаторной задачи (изучение топологии построенного полиэдра).

Один из таких подходов основан на (параметрическом) h -принципе М. Громова [1]. Если M – открытое многообразие или максимальная коразмерность допускаемых особенностей (в соответствующем многообразии струй на M) больше размерности многообразия M (например, при допущении неморсовских особенностей), то верен параметрический h -принцип: естественное вложение пространства таких функций в пространство сечений соответствующего расслоения

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00648, 05-01-22002 НЦНИ, 08-01-91300-ИНД а), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-660.2008.1) и Программы “Национальные научные проекты” (грант № 2.1.1.7988).

© Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков, 2010

допустимых струй на M является слабой гомотопической эквивалентностью (М. Громов [1], К. Игуза [2], В. А. Васильев [3]). Кольцо когомологий последнего пространства сечений можно находить при помощи спектральных последовательностей, построенных В. А. Васильевым [3]. Гомотопический тип (группы гомотопий и гомотопий) пространств функций с умеренными особенностями (с допущением неморсовских особенностей) на окружности изучался В. И. Арнольдом [4]. Связные компоненты пространств гладких функций без критических точек на открытых поверхностях описаны Ю. М. Бурманом [5], [6].

Для пространства функций Морса на компактном многообразии M выполнен “скорректированный” h -принцип: в соответствующем расслоении допустимых 2-струй на M рассматриваются лишь такие сечения $s: M \rightarrow J^2(M)$, для которых набор чисел $m_0(s), \dots, m_n(s)$ реализуется функциями Морса [7; следствия 2.5 и 3.2], где $(-1)^\lambda m_\lambda(s)$ равно сумме индексов тех нулей 1-формы $\pi \circ \tilde{s}$, в которых квадратичная форма $\tilde{s}$ имеет индекс λ (здесь $\pi: J^2(M) \rightarrow J^1(M)$ – проекция, а сечение $\tilde{s}$ получено из сечения s малым возмущением таким, что $\pi \circ \tilde{s}$ имеет лишь конечное число нулей), $0 \leq \lambda \leq n = \dim M$. Отметим, что реализуемость набора $m_0, \dots, m_n$ равносильна выполнению неравенств Морса, если $\dim M \geq 6$ и $\pi_1(M) = 0$ (см. [8; теорема 2.3]) или $\dim M \leq 2$.

Однако параметрический (и даже 1-параметрический) скорректированный h -принцип не верен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях M (например, при $\dim M \geq 6$, $\pi_1(M) \neq 0$ и $M = N \times [0, 1]$; см. [9], [7]). Авторам неизвестно, верен ли параметрический скорректированный h -принцип для функций Морса на окружности или на компактной поверхности.

Другой подход (аналогичный параметрическому h -принципу, но альтернативный ему) состоит в изучении “пространства модулей” – факторпространства рассматриваемого пространства функций (или гомотопически эквивалентного ему пространства) по некоторому отношению эквивалентности. Если проекция пространства функций на пространство модулей обладает “правым обратным”, а классы эквивалентности выпуклы или являются орбитами свободного действия некоторой топологической группы, то пространство функций гомотопически эквивалентно пространству модулей или его прямому произведению на группу. Такой подход эффективен, когда пространство модулей является конечномерным полиэдром, как часто бывает в маломерной топологии. Этот подход использовался, например, при изучении топологии группы диффеоморфизмов замкнутой поверхности, гомотопных тождественному, путем рассмотрения действия этой группы на (стягиваемом) пространстве римановых метрик на поверхности. Он также успешно применим при изучении топологии пространства функций Морса на окружности $M = S^1$, где каждой функции Морса на M сопоставляется (вместо сечения расслоения допустимых 2-струй на M , как в h -принципе) множество ее критических точек локальных минимумов, т.е. некоторая конфигурация точек на M . С помощью этого сопоставления нетрудно показать, что при любом $r \in \mathbb{N}$ пространство функций Морса с ровно $2r$ критическими точками на S^1 имеет гомотопический тип пространства r -точечных конфигураций на S^1 , и поэтому оно гомотопически эквивалентно S^1 . Наша цель – дать аналог этого подхода для пространства функций Морса на компактной поверхности. Предлагаемый нами подход состоит в сопоставлении каждой функции Морса f на замкнутом многообразии M ее множества кри-

тических точек с указанием индекса каждой критической точки и значения функции f в этой точке, и одного из следующих подмножеств M : либо объединения критических уровней функции f (следуя идее А. Т. Фоменко [10]), либо сепаратрисной диаграммы функции f , состоящей из нижних сепаратрисных дисков соответствующего градиентного векторного поля относительно фиксированной римановой метрики на M (следуя идее С. В. Матвеева [11]). Другими словами, в последнем случае каждой “правильной” функции Морса на M сопоставляется клеточное разбиение (т.е. “разрез”) многообразия M , отвечающее этой функции (см. [12]), а другим функциям Морса сопоставляются “параметрические бифуркации” клеточных разбиений (разрезов). Рассматривая эти два сопоставления с точностью до гладкой изотопии на M и вводя C^∞ -топологию на пространстве $F(M)$ функций Морса на M , мы получаем комбинаторный объект $\tilde{K} = \tilde{K}_{p,q,r}(M)$ и топологическое пространство $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p,q,r}(M)$ с канонической сюръекцией $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ (см. [13]). С помощью [14; утверждение 1.1 и § 3] и [15; лемма 1 и теорема 2] нетрудно показать, что $\tilde{K}$ – это конечномерный клеточный “комплекс функций Морса” на M , являющийся полиэдром и состоящий из клеток – выпуклых многогранников. В случае поверхности ($\dim M = 2$) пространство $\tilde{\mathbb{K}}$ тоже конечномерно, является “утолщенным комплексом функций Морса” на M и состоит из “многогранно-цилиндрических ручек” (Матвеев в [11] рассматривал лишь простейшие – 1-параметрические – бифуркации клеточных разбиений, что приводит к “графу разрезов” $\Gamma = \Gamma_{p,q,r}(M)$).

В настоящей работе и в ее продолжении [13] мы сводим изучение топологии пространства $F(M)$ функций Морса к комбинаторной задаче – изучению топологии комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ (теоремы 1.7 и 2.9) и тем самым доказываем аналог параметрического h -принципа для пространства $F(M)$. (В случае $M = S^1$ аналогичные комплексы $\tilde{K}$ и $\tilde{\mathbb{K}}$ состоят из одной точки.) Рассматриваемые нами комплексы $\tilde{K}$ и $\tilde{\mathbb{K}}$ функций Морса аналогичны известным (абстрактным симплициальным флаговым) комплексам, возникающим при изучении группы классов отображений поверхности M (см. [16]): комплекс $C(M)$ кривых (см. [17]–[19]), двумерный комплекс $C_P(M)$ разбиений на штаны (см. [20]) и его одномерный остов – граф $C_P^1(M)$ разбиений на штаны (см. [21]), граф $\Gamma_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ разрезов (см. [11]) и граф $\Gamma_{p,q,r}^*(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ оснащенных разрезов (см. [11]), комплекс $C_s(M)$ разбивающих кривых и комплекс Торелли $\mathcal{T}(M)$ (см. [16]), кубические комплексы (см. [22]).

С. В. Матвеев [11] (1997) и Х. Цишанг (устное сообщение; см. замечание 1.3 и [23]; 1998), а затем В. В. Шарко [24] (1998) и С. И. Максименко [25] (2005) доказали разными методами линейную связность пространства функций Морса с фиксированным числом точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек на замкнутой поверхности (см. теорему 1.2 и замечание 1.5). М. Басманова и Е. А. Кудрявцева [26] дали описание компонент связности пространства функций Морса с закрепленными критическими точками на замкнутой поверхности в терминах конечного клеточного комплекса K , аналогичного комплексу $\tilde{\mathbb{K}}$ из теоремы 2.9, (Б) настоящей работы. Е. В. Кулинич [27] вычислил количество классов эквивалентности простых функций Морса на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \leq 6$, имеющих ровно одну точку локального минимума и ровно одну точку локального максимума. При наличии седловых критических точек С. И. Максименко [28] доказал стягиваемость компонент связности стабилизатора любой функции Морса на замкнутой поверхности при

действию группы диффеоморфизмов поверхности, а также доказал асферичность любой орбиты этого действия и нашел ее фундаментальную группу.

Функции Морса на поверхностях изучались А. Т. Фоменко и Х. Цишангом [29], А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко [30], [31] в связи с задачей (лиувиллевой, орбитальной) классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Фоменко и Цишанг [29] построили полный инвариант лиувиллевой эквивалентности таких систем, а Фоменко и Болсинов [30], [31] построили полный инвариант орбитальной эквивалентности таких систем. Важным инструментом обеих теорий является описание классов эквивалентности функций Морса на замкнутых поверхностях, рассматриваемых с точностью до гомеоморфизма (или диффеоморфизма) поверхности, в терминах комбинаторного объекта – “молекулы” функции Морса. Разбиение пространства функций Морса на классы эквивалентности является стратификацией, где страты отвечают “молекулам”. Инварианты орбитальной эквивалентности гамильтоновых систем определялись по-разному на разных стратах – классах лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем, отвечающих классам эквивалентности функций Морса на поверхностях. Кудрявцевой [14] изучался вопрос об описании “устойчивых” инвариантов, т.е. инвариантов, определенных и непрерывных в пространстве всех невырожденных гамильтоновых систем, а не только на отдельном страте.

Перейдем к точным формулировкам полученных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть M – гладкая (т.е. класса C^∞) компактная связная поверхность (край которой может быть как пустым, так и непустым), $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$, где $\partial^+ M$ – объединение некоторых граничных окружностей M .

(А) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M . Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все ее критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\text{int } M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M , что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем $f|_U = f(x)$ при $x \in \partial^- M$ и $f|_U = f(x)$ при $x \in \partial^+ M$.

(Б) Функцию f на M назовем *функцией Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$* , если $f \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и все ее критические точки невырождены (т.е. квадратичная форма в $T_x M$, заданная матрицей вторых частных производных f в критической точке x , невырождена). Пусть

$$F := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса f на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно $p + q + r$ критических точек, из которых p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Пусть d^+ и $d^- \geq 0$ – числа граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства Морса:

$$\chi(M) = p - q + r, \quad p + d^- > 0, \quad r + d^+ > 0, \quad (1)$$

так как в противном случае $F = \emptyset$. Пространство F мы наделим C^∞ -топологией, см. § 4, (а), и назовем его *пространством функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$* . Обозначим через $F^1 \subset F$ подпространство в F , состоящее из таких функций Морса $f \in F$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

(В) Обозначим через F^{num} (соответственно $F^{1,\text{num}}$) пространство, полученное из пространства F (соответственно F^1) введением нумерации у всех критических точек функций Морса $f \in F$ (соответственно $f \in F^1$). Наделим его C^∞ -топологией как в п. 4.1, (а). Имеем $(p!q!r!)$ -листные накрытия $F^{\text{num}} \rightarrow F$ и $F^{1,\text{num}} \rightarrow F^1$.

Следующая теорема доказывает 1-параметрический скорректированный h -принцип, относящийся к непрерывным отображениям отрезка в пространство F функций Морса. Отметим, что в доказательствах следующей теоремы, приведенном в [11] и сообщенном Цишангом, содержится пробел, восполняемый теоремой 1.7 настоящей работы и теоремой 2.9 работы [13] (см. замечание 1.5 ниже).

ТЕОРЕМА 1.2 (Матвеев [11] и Цишанг; см. [23] и замечания 1.3, 1.5). Пусть M – связная компактная (не обязательно ориентируемая) поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности, и пусть (p, q, r) – тройка неотрицательных целых чисел. Рассмотрим пространство $F = F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Тогда пространство F , снабженное C^∞ -топологией, линейно связно.

В работе [11] из теоремы 1.2 выведено ее обобщение, а именно, доказана линейная связность пространства $F^{\text{num}} = F_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса с занумерованными критическими точками (см. определение 1.1, (В)).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В 1997 году Матвеев передал Кудрявцевой доказательство теоремы 1.2, которая была включена (со ссылкой на Матвеева) в статью Кудрявцевой [11], принятую к печати в 1997 году. Доказательство Матвеева основано на методе спайнов, применяемом в трехмерной топологии. В июне 1998 года Цишанг сообщил свое доказательство этой теоремы Кудрявцевой и Шарко. Доказательство Цишанга основано на методе Я. Нильсена и не было опубликовано. Позднее Шарко [24] опубликовал доказательство этой теоремы Матвеева–Цишанга, тоже основанное на методе Нильсена. Недавно Максименко [25] опубликовал еще одно доказательство этой теоремы (и ее обобщения для морсовских отображений $M \rightarrow S^1$), основанное на том, что группа классов отображений поверхности порождена скручиваниями Дэна [32] и что скручивания Дэна сохраняют некоторые функции Морса.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.4. Пусть $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M)$ – группа всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M . Пространство $\mathcal{D}^\pm$ наделим C^∞ -топологией (см. § 4, (б)). Пусть $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – подгруппа, состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе непрерывных отображений пары $(M, \partial M)$ в себя, т.е. таких, для которых существует такое непрерывное отображение $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$, что

$$H|_{M \times \{0\}} = h, \quad H|_{M \times \{1\}} = \text{id}_M, \quad H((\partial M) \times [0, 1]) = \partial M.$$

Другими словами, $\mathcal{D}_0$ совпадает (как множество, но не как топологическое пространство) с пересечением $\mathcal{D}^\pm$ и компоненты связности id_M в пространстве $C((M, \partial M), (M, \partial M))$, снабженном C^0 -топологией.

Из результатов [33], [34] К. Дж. Эрля и Дж. Иллса (мл.) следует, что $\mathcal{D}_0$ линейно связно и, следовательно, совпадает с компонентой линейной связности id_M в $\mathcal{D}^\pm$, см. формулу (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В работе [11] приведено доказательство Матвеева теоремы 1.2 Матвеева–Цишанга и ее обобщения для пространства F^{num} (см. выше). Однако каждое из доказательств теоремы 1.2 в [11] и устном сообщении Цишанга не является полным, а доказывают лишь “комбинаторное” утверждение, равносильное связности некоторого графа $\Gamma = \Gamma_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, строящегося по пространству F . Доказательство теоремы 1.2 должно было бы состоять из двух этапов:

- 1) сведение задачи вычисления $\pi_0(F)$ к комбинаторной задаче вычисления $\pi_0(\Gamma)$ (которое было опущено в [11] и устном сообщении Цишанга);
- 2) решение комбинаторной задачи вычисления $\pi_0(\Gamma)$ (Матвеев решал эту задачу методом спайнов [11], а Цишанг – методом Нильсена).

В настоящей работе (и в ее продолжении [13]) мы вводим более общее пространство функций Морса $F = F_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 2.1) и решаем для него (в большинстве случаев) параметрический аналог первой задачи: строим комплексы $\tilde{K}$ и $\tilde{K}^{\text{num}}$ функций Морса из F и F^{num} соответственно, “утолщенные” комплексы $\tilde{\mathbb{K}}$ и $\tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}}$, и доказываем гомотопическую эквивалентность $F^{\text{num}} \sim \mathcal{D}_0 \times \tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}}$ (аналог параметрического h -принципа, см. теоремы 1.7 и 2.9), откуда $\pi_0(F^{\text{num}}) = \pi_0(\tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}})$. Можно показать, что граф Γ (соответственно Γ^{num}) из второй задачи двойствен в некотором смысле комплексу $\tilde{\mathbb{K}}$ (соответственно $\tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}}$), откуда $\pi_0(\tilde{\mathbb{K}}) = \pi_0(\Gamma)$ и $\pi_0(\tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}}) = \pi_0(\Gamma^{\text{num}})$. В работе [11] также фактически доказано, что при канонической проекции соответствующих графов $\Gamma^{\text{num}} \rightarrow \Gamma$ прообраз любой компоненты связности графа Γ в Γ^{num} связан. Поэтому из связности графа Γ (доказанной Матвеевым и Цишангом) получаем связность графа Γ^{num} . Так как $\pi_0(F^{\text{num}}) = \pi_0(\tilde{\mathbb{K}}^{\text{num}}) = \pi_0(\Gamma^{\text{num}}) = 0$, то пространство F линейно связно. Тем самым теоремы 1.7 и 2.9 настоящей работы восполняют пробел в доказательствах теоремы 1.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. (А) Две функции Морса $f, g \in F$ назовем *эквивалентными*, если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ и h_1 сохраняет нумерацию критических точек.

(Б) Две функции Морса f и g назовем *изотопными*, если они эквивалентны и $h_1 \in \mathcal{D}_0$ (т.е. диффеоморфизм h_1 изотопен тождественному). В этом случае будем писать так: $f \sim_{\text{isot}} g$. Множество всех функций из F , изотопных функции f , обозначим через $[f]_{\text{isot}}$.

Классификация функций Морса из F с точностью до эквивалентности легко получается из классификации функций Морса с точностью до послойной эквивалентности (см. [31; гл. 2, теоремы 4 и 8]). Напомним, что полным инвариантом послойной эквивалентности является сопоставление любой функции Морса f комбинаторного объекта – “молекулы” (см. [31]). Молекула функции f – это ориентированный граф Кронрода–Реба (см. [35]) функции f , каждой вершине которого сопоставлен “ориентированный атом”, т.е. топологическая пара (P, G) , состоящая из ориентированной поверхности P с краем и вложенного в нее связного графа G – компоненты критического уровня функции f (являющегося деформационным ретрактом P), см. [31; гл. 2, определения 4, 6,

9, 10]. Для классификации функций Морса из F с точностью до эквивалентности к этому инварианту нужно добавить “оснащение” – нумерацию на множестве всех вершин всех атомов (отвечающую нумерации критических точек) и отношение частичного порядка на множестве атомов (отвечающее отношению частичного порядка на множестве критических значений). В работе [14; утверждение 1.1 и §3] доказаны критерии (последовательной) эквивалентности (соответственно изотопности) пары “возмущенных” функций Морса $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, полученных малыми возмущениями из пары (последовательно) эквивалентных (соответственно изотопных) функций Морса $f, g \in F$. В работе [15; лемма 1 и теорема 2] дана классификация функций Морса с точностью до изотопности (лемма 5.1).

В настоящей работе (и в ее продолжении [13]) рассматривается более общее пространство функций Морса $F = F_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ на компактной поверхности M (см. определение 2.1) и исследуется более общая задача – описание гомотопического типа пространства F , а не только его компонент связности (как в теореме 1.2). В работе [13] на основе результатов настоящей статьи мы сводим задачу к комбинаторной (т.е. доказываем аналог параметрического h -принципа). В частности, мы устраняем пробел, который имеется в доказательствах теоремы 1.2 в [11] и устном сообщении Цишанга (см. замечание 1.5 ниже).

Основная идея нашего подхода состоит в введении оснащенных функций Морса на компактной поверхности M (определение 9.1). Если поверхность M ориентирована, то оснащенной функцией Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ называется пара (f, α) , где $f \in F$, α – замкнутая 1-форма на поверхности M с выколотыми точками локальных минимумов и максимумов, имеющая каноническое поведение в окрестностях критических точек и такая, что 2-форма $df \wedge \alpha$ отлична от нуля всюду на M с выколотыми критическими точками и задает положительную ориентацию M . Пусть $\mathbb{F}$ – пространство оснащенных функций Морса, и пусть подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ состоит из оснащенных функций Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ таких, что $f \in F^1$.

Настоящая работа посвящена доказательству гомотопической эквивалентности $F \sim \mathbb{F}$ пространства F функций Морса и пространства $\mathbb{F}$ оснащенных функций Морса на M , а именно, в ней доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.7. *Имеются гомотопические эквивалентности*

$$F \sim F^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}$$

пространств функций Морса и пространств оснащенных функций Морса. Более того,

(А) *подпространство $F^1 \subset F$ (соответственно $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$) является строгим деформационным ретрактом пространства F (соответственно $\mathbb{F}$);*

(Б) *“забывающее” отображение $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow F$ (соответственно $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$), переводящее любую оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ в функцию Морса $f \in F$, сюръективно и является гомотопической эквивалентностью.*

В частности, любая функция Морса $f \in F$ имеет оснащение. Мы также доказываем аналог теоремы 1.7 для пространств F^{num} и $\mathbb{F}^{\text{num}}$ и для ограниченных указанных гомотопических эквивалентностей на классы изотопности $[f]_{\text{isot}}$ (теорема 2.5). Последнее дает положительный ответ на вопрос, поставленный В. И. Арнольдом.

В работе [13] мы изучаем комбинаторное описание пространства $\mathbb{F}$ оснащенных функций Морса и, в частности, доказываем гомотопическую эквивалентность $\mathbb{F}^{\text{num}} \sim \mathcal{D}_0 \times \mathbb{K}^{\text{num}}$ (аналог параметрического h -принципа, см. теорему 2.9), где $\mathbb{K}^{\text{num}}$ – “утолщенный” комплекс функций Морса на M (см. замечание 1.5). Таким образом, мы сводим задачу изучения топологии пространства F^{num} к комбинаторной задаче изучения топологии полиэдра $\mathbb{K}^{\text{num}}$. В частности, мы восполняем пробел, допущенный в доказательствах теоремы 1.2 в [11] и устном сообщении Цишанга (см. замечание 1.5).

Статья имеет следующую структуру. В § 2 определяется более общее пространство функций Морса и формулируется основной результат настоящей работы (теорема 2.5 и замечание 2.7), обобщающий теорему 1.7, и их некоторые приложения (замечание 2.6 и теорема 2.9). В § 3 дается план доказательства теорем 1.7 и 2.5. В § 4 определяется C^∞ -топология на пространствах F , $\mathbb{F}$ и $\mathcal{D}^\pm$, а также на некоторых других пространствах, которые используются в доказательстве. В § 5 сформулирована классификация из [15] функций Морса $f \in F$ с точностью до изотопности. В § 6 и § 7 доказаны гомотопические эквивалентности $F \sim F^1 \sim F^1 \times \mu$ и теорема 2.5, (А). В § 8 завершено доказательство результата из [15] о “равномерных” $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантных локальных координатах в классической лемме Морса (лемма 8.2), а в § 11 доказаны леммы 11.1 и 11.2 о “равномерных” $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантных локальных координатах для оснащенных функций Морса. В § 9 определены пространства $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ оснащенных функций Морса, построено отображение $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$ и доказана сюръективность в теоремах 1.7, (Б) и 2.5, (Б). Непрерывность отображения p_2 доказана в § 10. В § 12 построено отображение $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$, а его непрерывность доказана в § 13. В § 14 доказано, что отображения i_2 и p_2 являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями, и завершено доказательство теорем 2.5 и 1.7.

Авторы выражают благодарность В. И. Арнольду, А. А. Ошемкову, С. Ю. Немовскому, А. Т. Фоменко и Х. Цишангу за внимание к работе и полезные замечания. Первый автор выражает особую благодарность своему учителю, соавтору и другу Х. Цишангу и посвящает настоящую работу его памяти.

§ 2. Точные формулировки основных результатов

Следующее пространство является обобщением пространств $F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $F_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и состоит из функций Морса, у которых некоторые критические точки закреплены, а некоторые пронумерованы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. (А) Пусть $p_1, p'_2, p''_2, q_1, q'_2, q''_2, r_1, r'_2, r''_2$ – неотрицательные целые числа. Положим $p_2 = p'_2 + p''_2$, $q_2 = q'_2 + q''_2$, $r_2 = r'_2 + r''_2$, $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$, $r = r_1 + r_2$. Пусть

$$F := F_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса f на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 1.1, (Б)) с множеством критических точек

$$\begin{aligned} & \{w_1(f), \dots, w_{p+q+r}(f)\} \\ & = \{x_1(f), \dots, x_p(f), y_1(f), \dots, y_q(f), z_1(f), \dots, z_r(f)\} \subset \text{int } M, \end{aligned}$$

среди которых p точек $x_1(f), \dots, x_p(f)$ – точки локальных минимумов, q точек $y_1(f), \dots, y_q(f)$ – седловые и r точек $z_1(f), \dots, z_r(f)$ – точки локальных максимумов, причем $p_1 + q_1 + r_1$ критических точек

$$x_1(f), \dots, x_{p_1}(f), y_1(f), \dots, y_{q_1}(f), z_1(f), \dots, z_{r_1}(f)$$

закреплены на поверхности (т.е. одни и те же для всех функций $f \in F$), а $p'_2 + q'_2 + r'_2$ точек

$$x_{p_1+1}(f), \dots, x_{p_1+p'_2}(f), y_{q_1+1}(f), \dots, y_{q_1+q'_2}(f), z_{r_1+1}(f), \dots, z_{r_1+r'_2}(f)$$

пронумерованы и не закреплены (“плавающие” пронумерованные точки). Остальные $p''_2 + q''_2 + r''_2$ критических точек

$$x_{p_1+p'_2+1}(f), \dots, x_p(f), y_{q_1+q'_2+1}(f), \dots, y_q(f), z_{r_1+r'_2+1}(f), \dots, z_r(f)$$

не пронумерованы и не закреплены (“плавающие” непронумерованные точки). Таким образом, точки $x_{p_1+1}(f), \dots, x_p(f), y_{q_1+1}(f), \dots, y_q(f), z_{r_1+1}(f), \dots, z_r(f)$ зависят, вообще говоря, от функции $f \in F$. Как выше, будем предполагать, что выполнено (1), так как в противном случае $F = \emptyset$. Пространство F мы наделим C^∞ -топологией (см. п. 4.1) и назовем его *обобщенным пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Обозначим через $F^1 \subset F$ подпространство в F , состоящее из таких функций Морса $f \in F$, что все локальные минимумы равны $f(x_i) = f(\partial^- M) = -1$, $1 \leq i \leq p$, а все локальные максимумы равны $f(z_k) = f(\partial^+ M) = 1$, $1 \leq k \leq r$.

(Б) Обозначим через F^{num} (соответственно $F^{1,\text{num}}$) пространство, полученное из пространства F (соответственно F^1) введением нумерации у всех непронумерованных критических точек функций Морса $f \in F$ (соответственно $f \in F^1$). Наделим его C^∞ -топологией как в п. 4.1. Имеем $(p_2''! q_2''! r_2''!)$ -листные накрытия $F^{\text{num}} \rightarrow F$ и $F^{1,\text{num}} \rightarrow F^1$.

Пространство F из теоремы 1.2 имеет такой вид:

$$F = F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M) = F_{0,0,p;0,0,q;0,0,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M).$$

Из теоремы 1.2 и ее обобщения в [11] для пространства F^{num} получаем следующее ее обобщение (см. замечание 1.5 выше): любое обобщенное пространство $F = F_{p_1,p'_2,p''_2;0,q'_2,q''_2;r_1,r'_2,r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса без закрепленных седловых точек (т.е. при $q_1 = 0$) линейно связно.

В точности как для обычных функций Морса определяется *оснащение обобщенной функции Морса* $f \in F$, а также пространства

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p_1,p'_2,p''_2;0,q'_2,q''_2;r_1,r'_2,r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

и $\mathbb{F}^1$ оснащенных обобщенных функций Морса.

Всюду далее в статье мы предполагаем, что поверхность M ориентирована. Случай неориентируемой поверхности M рассмотрен в замечании 2.7 ниже.

Следующие группы диффеоморфизмов обобщают группы $\mathcal{D}^\pm$ и $\mathcal{D}_0$, определенные в обозначении 1.4 выше. Мы их вводим для изучения обобщенного пространства F функций Морса (и по-прежнему обозначаем их через $\mathcal{D}^\pm$ и $\mathcal{D}_0$).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.2. Обозначим

$$N_0 := \{x_1, \dots, x_{p_1}\}, \quad N_1 := \{y_1, \dots, y_{q_1}\}, \quad N_2 := \{z_1, \dots, z_{r_1}\},$$

$N := N_0 \cup N_1 \cup N_2 \subset \text{int } M$ – множество закрепленных критических точек. Пусть $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, N_0, N_1, N_2)$ – группа всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество N_λ в себя, $0 \leq \lambda \leq 2$. Пространство $\mathcal{D}^\pm$ тоже наделим C^∞ -топологией, см. § 4, (6). Если M ориентируема, обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ подгруппу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов (с индуцированной топологией). Пусть $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – подгруппа (с индуцированной топологией), состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе непрерывных отображений пары $(M, N \cup \partial M)$ в себя (т.е. для которых существует такое непрерывное отображение $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$, что $H|_{M \times \{0\}} = h$, $H|_{M \times \{1\}} = \text{id}_M$ и $H((N \cup \partial M) \times [0, 1]) = N \cup \partial M$). Другими словами, $\mathcal{D}_0$ совпадает (как множество, но не как топологическое пространство) с пересечением $\mathcal{D}^\pm$ и компоненты связности id_M в пространстве $C((M, N \cup \partial M), (M, N \cup \partial M))$, снабженном C^0 -топологией.

Из результатов работ [33], [34] К. Дж. Эрля и Дж. Иллса (мл.) следует, что имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{D}_0 \sim R_{\mathcal{D}_0}, \quad (2)$$

где $R_{\mathcal{D}_0}$ – одно из четырех многообразий $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, $SO(2) = S^1$, $T^2 = S^1 \times S^1$ и точка, определяемое парой $(M, p_1 + q_1 + r_1)$ (см., например, [36], [33], [13]). Кроме того, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, если $p_1 + q_1 + r_1 + d^- + d^+ \leq 3$ и M гомеоморфно двумерной сфере с $d^- + d^+$ дырками. В частности, $\mathcal{D}_0$ линейно связно и, следовательно, совпадает с компонентой линейной связности id_M в $\mathcal{D}^\pm$.

Отметим, что равенство $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ выполняется только в указанном выше случае, т.е. когда $p_1 + q_1 + r_1 + d^- + d^+ \leq 3$ и M гомеоморфно двумерной сфере с $d^- + d^+$ дырками. Действительно, в противном случае имеется диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}$ (скручивание Дэна [32]), индуцирующий нетривиальный автоморфизм группы гомологий $H_1(M, N; \mathbb{Z})$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.3. (А) Для любой римановой метрики ds_0^2 на M обозначим через $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2) := \text{Iso}^\pm(M, N_0, N_1, N_2; ds_0^2)$ подгруппу группы $\mathcal{D}^\pm$ (см. обозначение 2.2), состоящую из всех изометрий римановой поверхности (M, ds_0^2) , принадлежащих $\mathcal{D}^\pm$.

(Б) Если M ориентирована, рассмотрим правые действия группы $\mathcal{D}^\pm$ на пространствах F и $\mathbb{F}$:

$$(h, g) \mapsto g \circ h, \quad (h, f, \alpha) \mapsto h^\#(f, \alpha) := (f \circ h, \text{sgn}(h)h^*\alpha), \\ h \in \mathcal{D}^\pm, \quad g \in F, \quad (f, \alpha) \in \mathbb{F},$$

где $\text{sgn}: \mathcal{D}^\pm \rightarrow \{1, -1\}$ – гомоморфизм (ориентирующий характер), значение которого $\text{sgn}(h)$ на любом диффеоморфизме $h \in \mathcal{D}^\pm$ показывает, сохраняет ли h ориентацию поверхности M . Рассмотрим индуцированные действия группы $\mathcal{D}^\pm$ и ее подгрупп $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ на подпространствах $F^1 \subset F$ и $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть Φ – группа и $\rho_X: \Phi \rightarrow \text{Homeo}(X)$ и $\rho_Y: \Phi \rightarrow \text{Homeo}(Y)$ – гомоморфизмы, т.е. правые действия группы Φ на топологических пространствах X и Y , и пусть $a: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение a является Φ -эквивариантным, если $a \circ \rho_X(\phi) = \rho_Y(\phi) \circ a$ для любого $\phi \in \Phi$. Предположим, что пространства X

и Y гомотопически эквивалентны. Будем говорить, что гомотопическая эквивалентность $X \sim Y$ является *сильно Φ -эquivариантной*, если существуют такие Φ -эquivариантные непрерывные отображения $a: X \rightarrow Y$ и $b: Y \rightarrow X$, такая гомотопия $h_X: X \times [0, 1] \rightarrow X$ между отображениями $h_X|_{X \times \{0\}} = b \circ a$ и $h_X|_{X \times \{1\}} = \text{id}_X$ и такая гомотопия $h_Y: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ между отображениями $h_Y|_{Y \times \{0\}} = a \circ b$ и $h_Y|_{Y \times \{1\}} = \text{id}_Y$, что для любого $t \in [0, 1]$ отображения $h_X|_{X \times \{t\}}$ и $h_Y|_{Y \times \{t\}}$ являются Φ -эquivариантными. Аналогично определяется *сильно Φ -эquivариантная* строгая деформационная ретракция $X \rightarrow Y \subset X$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема о гомотопической эквивалентности пространств F , F^1 функций Морса и пространств $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^1$ оснащенных функций Морса. Стимулом для получения этого результата послужила приведенная ниже теорема 2.9, описывающая топологию пространства $\mathbb{F}^1$ оснащенных функций Морса.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть M – связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности, и пусть набор чисел $(p_1, p'_2, p''_2, q_1, q'_2, q''_2, r_1, r'_2, r''_2)$ удовлетворяет условиям из определения 2.1. Рассмотрим обобщенные пространства $F = F_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $F^1 \subset F$ функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть пронумерованные критические точки и закреплённые критические точки (см. определение 2.1). Рассмотрим пространства $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ оснащенных функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Тогда имеются гомотопические эквивалентности

$$F \sim F^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}.$$

Более того, справедливы следующие утверждения.

(А) Имеется сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантная строгая деформационная ретракция $p_0: F \rightarrow F^1$ (см. обозначение 2.2 и определение 2.4), сохраняющая разбиение поверхности M на связные компоненты линий уровня функции, а также отношение частичного порядка на множестве седловых критических точек по значениям функции в этих точках. Ретракция p_0 переводит изотопные функции Морса в изотопные, а ее ограничение

$$p_0|_{[f]_{\text{isot}}} : [f]_{\text{isot}} \xrightarrow{\sim} [p_0(f)]_{\text{isot}} \cap F^1$$

на любой класс изотопности является сильно $\mathcal{D}_0$ -эquivариантной гомотопической эквивалентностью классов изотопности.

(Б) Забывающие отображения $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow F$ и $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ сюръективны и являются гомотопическими эквивалентностями. Более того, для любой римановой метрики ds_0^2 на M эти гомотопические эквивалентности являются сильно $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эquivариантными (см. обозначение 2.3 и определение 2.4). Ограничение отображения $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1)$ класса изотопности $[f]_{\text{isot}} \cap F^1$ любой функции Морса $f \in F^1$ является гомотопической эквивалентностью на этот класс изотопности. Ограничение отображения $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow F$ на прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}})$ класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ любой функции Морса $f \in F$ является гомотопической эквивалентностью на этот класс изотопности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Нетрудно показать, используя построения, аналогичные построениям из доказательства утверждения 6.2, (А), что в случае $\partial M = \emptyset$ пространство $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}_{p,q,r}^1(M)$ оснащенных функций Морса гомеоморфно пространству $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{p,q,r}(M)$ “полуточных абелевых дифференциалов” на поверхности M . Здесь через $\mathbb{A}$ обозначено пространство всех пар $(J, \alpha_{\mathbb{C}})$, где J – гладкая комплексная структура на поверхности M , согласованная с ориентацией на M , а $\alpha_{\mathbb{C}}$ – такая мероморфная 1-форма на (M, J) , имеющая ровно q нулей и $p + r$ полюсов, что все нули и полюсы простые, а вычет формы $\alpha_{\mathbb{C}}$ в каждом полюсе вещественный и положительный (соответственно отрицательный) в p (соответственно r) полюсах. Таким образом, из теоремы 2.5 следует гомотопическая эквивалентность $F \sim F^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Теорема 2.5 легко обобщается на случай, когда поверхность M неориентируема. Для этого рассмотрим двулистное ориентируемое накрытие $\pi: \widehat{M} \rightarrow M$ с римановой метрикой $\pi^*(ds_0^2)$ и изометрией

$$h_0 \in \text{Iso}^{\pm}(\widehat{M}, \pi^*(ds_0^2)),$$

переставляющей листы накрытия над каждой точкой $x \in M$. Фиксируем ориентацию на $\widehat{M}$. Оснащенной функцией Морса на неориентируемой поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ назовем такую пару (f, α) , что $f \in F$, $(f \circ \pi, \alpha)$ – оснащенная функция Морса на $(\widehat{M}, \pi^{-1}(\partial^+ M), \pi^{-1}(\partial^- M))$ и $h_0^{\#}(f \circ \pi, \alpha) = (f \circ \pi, \alpha)$ (см. обозначение 2.3 и определение 9.1). Пусть $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ – пространства оснащенных функций Морса на M . Ограничивая сильно $\text{Iso}^{\pm}(\widehat{M}, \pi^*(ds_0^2))$ -эквивариантные гомотопические эквивалентности из теоремы 2.5, примененной к пространствам функций Морса на $\widehat{M}$, на подпространства h_0 -инвариантных функций Морса $f \circ \pi$ и оснащенных функций Морса $(f \circ \pi, \alpha) = h_0^{\#}(f \circ \pi, \alpha)$, получаем сильно $\text{Iso}^{\pm}(M, ds_0^2)$ -эквивариантные гомотопические эквивалентности $F \sim F^1 \sim \mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}$ для неориентируемой поверхности M .

В качестве еще одного приложения теоремы 2.5 сформулируем результат работы [13]. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ – число граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.8. Для любой функции Морса $f \in F$ рассмотрим граф G_f в поверхности $\text{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}\{f(y_1(f)), \dots, f(y_q(f))\}$ удалением всех компонент связности, не содержащих седловых критических точек. Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y_1(f), \dots, y_q(f)$), степени всех вершин равны четырем и поэтому в графе $2q$ ребер. Если поверхность M ориентирована, то на ребрах графа G_f имеется естественная ориентация такая, что в любой (внутренней) точке ребра репер, составленный из положительно ориентированного касательного вектора к ребру и вектора $\text{grad } f$ (по отношению к какой-нибудь фиксированной римановой метрике), задает положительную ориентацию поверхности. Аналогично вводится ориентация на любой связной компоненте линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f , не содержащей критическую точку, $a \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2.9 (см. [13]). Пусть выполнены предположения теоремы 2.5, $p_2'' = r_2'' = 0$ (т.е. все критические точки локальных минимумов и локальных максимумов пронумерованы) и $q > 0$. Рассмотрим пространство

$$\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}_{p_1, p_2, 0; q_1, q_2', q_2'', r_1, r_2, 0}^1(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

оснащенных функций Морса (см. определение 9.1). Справедливы следующие утверждения.

(А) Пространство $\mathbb{F}^1$ гомотопически эквивалентно прямому произведению группы $\mathcal{D}_0$ (а значит, и многообразия $R_{\mathcal{D}_0}$, см. (2)) на некоторый счетный (или конечный) полиэдр $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p_1+d^-, p_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1+d^+, r_2}$ размерности $\dim \tilde{\mathbb{K}} = 3q - 2$ при $q \geq 2$ и $\dim \tilde{\mathbb{K}} = 0$ при $q = 1$:

$$\mathbb{F}^1 \sim \mathcal{D}_0 \times \tilde{\mathbb{K}} \quad (\sim R_{\mathcal{D}_0} \times \tilde{\mathbb{K}}).$$

(Б) Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ является объединением подполиэдров $\sigma_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ (называемых “многогранно-цилиндрическими ручками”), находящиеся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности $[f]_{\text{isot}}$ функций Морса $f \in F^1$. Каждая многогранно-цилиндрическая ручка $\sigma_{[f]_{\text{isot}}}$ гомеоморфна прямому произведению

$$\sigma_{[f]_{\text{isot}}} \approx D_{[f]_{\text{isot}}}^k \times (P_{[f]_{\text{isot}}} \times C_{[f]_{\text{isot}}}),$$

где $D_{[f]_{\text{isot}}}^k$ – некоторый выпуклый k -мерный многогранник, $P_{[f]_{\text{isot}}}$ – выпуклый многогранник, $T^d := (S^1)^d$, $C_{[f]_{\text{isot}}} = \mathbb{R}^c \times T^d$ – цилиндр, $k, c, d \in \mathbb{Z}$, $k, c, d \geq 0$. При этом число $k = k([f])$ (называемое “индексом” ручки $\sigma_{[f]_{\text{isot}}}$) имеет вид $k = q - s$, где $s = s([f])$ – количество седловых значений функции f , а подмножество $(\partial D_{[f]_{\text{isot}}}^k) \times (P_{[f]_{\text{isot}}} \times C_{[f]_{\text{isot}}}) \subset \sigma_{[f]_{\text{isot}}}$ (называемое “подошвой” ручки $\sigma_{[f]_{\text{isot}}}$) содержится в объединении конечного числа ручек, индексы которых меньше k . Для размерности $d = d([f])$ тора T^d верны равенство $d = \text{rank}(\pi_0(\text{stab}_{\mathcal{D}_0} f))$ и оценка $d \leq \min\{p_2 + r_2, t - 1\}$, где $t = t([f]) \leq q$ – количество связанных компонент графа G_f , см. обозначение 2.8. Если число закрепленных критических точек $p_1 + q_1 + r_1 \leq \chi(M) + 1$, то $d = t - 1$, а при $t = q$ выполнено $d = p_2 + r_2$.

(В) Прообраз $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1)$ класса изотопности $[f]_{\text{isot}} \cap F^1$ любой функции Морса $f \in F^1$ при проекции $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ гомотопически эквивалентен прямому произведению группы $\mathcal{D}_0$ на соответствующую ручку $\sigma_{[f]_{\text{isot}}}$, а также прямому произведению группы $\mathcal{D}_0$ на соответствующий тор T^d :

$$\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \sim \mathcal{D}_0 \times \sigma_{[f]_{\text{isot}}} \sim \mathcal{D}_0 \times T^d \quad (\sim R_{\mathcal{D}_0} \times T^d).$$

(Г) Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ обладает конечнолистным накрытием, которое является накрытием некоторого конечного полиэдра $\mathbb{K}^*$, допускающего разбиение на “многогранно-торические ручки”, аналогичное разбиению в (Б). Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ конечен, если $p_1 + q_1 + r_1 + d^- + d^+ \leq 3$ и $\chi(M) + d^- + d^+ = 2$ (т.е. когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$).

(Д) Полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ является “утолщением” некоторого полиэдра

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{p_1+d^-, p_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1+d^+, r_2}$$

размерности $\dim \tilde{K} = q - 1$, т.е. имеется эпиморфизм полиэдров $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$, при котором каждая многогранно-цилиндрическая ручка $\sigma_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ индекса k является полным прообразом k -мерной замкнутой клетки-многогранника $D_{[f]_{\text{isot}}}^k \subset \tilde{K}$. Эпиморфизм $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $q(q-1)(p_2+r_2)(p_2+q_2+r_2-1) = 0$ (последнее условие выполнено, например, когда все критические точки локальных минимумов и максимумов закреплены).

Как было указано в замечании 1.5, теоремы 1.7 и 2.9 восполняют пробел в доказательстве теоремы 1.2 о линейной связности пространства F (и ее обобщения для F^{num}) в случае $q_1 = 0$.

Полиэдр $\tilde{K}$ вместе с его разбиением на замкнутые клетки-многогранники $D_{[f]_{\text{isot}}}^k$ назовем *комплексом функций Морса*, а полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ вместе с его разбиением на многогранно-цилиндрические ручки $\sigma_{[f]_{\text{isot}}}$ – *утолщенным комплексом функций Морса*. В некоторых случаях комплекс функций Морса $\tilde{\mathbb{K}}$ может быть построен вручную. Свойства и примеры комплексов $\tilde{\mathbb{K}}$ и $\tilde{K}$ приведены в работе [13].

§ 3. Схема доказательств основных теорем 1.7 и 2.5

Мы докажем (см. § 6), что пространство F имеет своим строгим деформационным ретрактом подпространство $F^1 \subset F$, которое состоит из функций Морса, все локальные максимумы которых равны 1, а все локальные минимумы равны -1 . Чтобы доказать гомотопическую эквивалентность $F^1 \sim \mathbb{F}^1$, введем “промежуточное пространство” $F^1 \times \mu$ и последовательно покажем гомотопическую эквивалентность этих трех пространств (§§ 7, 9, 10, 12–14). У нас получится следующая диаграмма пространств и естественных отображений:

$$\mathbb{F}^1 \xrightarrow{i_2} F^1 \times \mu \xrightarrow{p_1} F^1 \xrightarrow{i_0} F. \quad (3)$$

Для каждого отображения i_0, p_1, i_2 этой диаграммы будет построено (в §§ 6, 7, 9) его “гомотопически обратное” отображение p_0, i_1, p_2 , т.е. такое отображение, что композиции $i_k \circ p_k$ и $p_k \circ i_k$ гомотопны тождественным отображениям, $k = 0, 1, 2$ (здесь отображение p_1 не имеет никакого отношения к количеству закрепленных критических точек локальных минимумов в определении 2.1, (А)). Здесь μ – это пространство C^∞ -гладких римановых метрик на M , снабженное C^∞ -топологией (см. § 4, (в)). Пространство $\mathbb{F}$ – это пространство C^∞ -гладких оснащенных функций Морса, т.е. пар (f, α) , где $f \in F$, α – замкнутая 1-форма (на поверхности M с выколотыми точками локальных минимумов и максимумов) с некоторыми свойствами (см. определение 9.1), снабженное C^∞ -топологией (см. п. 4.2). Пространство $\mathbb{F}^1$ – подпространство в $\mathbb{F}$, состоящее из пар $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$, $f \in F^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Всюду в формулировках утверждений настоящей статьи рассматриваются произвольные обобщенные пространства

$$F = F_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

(соответственно $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$), состоящие из функций Морса (соответственно оснащенных функций Морса), у которых могут быть как пронумерованные, так и непронумерованные критические точки. Однако всюду в доказательствах будем считать, что $F = F^{\text{num}}$ и $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^{1, \text{num}}$ (см. определение 2.1), т.е. что все критические точки функций Морса $f \in F$ пронумерованы. Это не ограничивает общности, так как все отображения, построенные в настоящей статье, согласованы с перенумерациями критических точек (т.е. $(\Sigma_{p'_2} \times \Sigma_{q'_2} \times \Sigma_{r'_2})$ -эквивариантны относительно действия группы $\Sigma_{p'_2} \times \Sigma_{q'_2} \times \Sigma_{r'_2}$ на пространствах F^{num} и $\mathbb{F}^{\text{num}}$ перенумерациями критических точек (см. определение 2.4)). Обозначим через

$$\{w_1, \dots, w_{p+q+r}\} := \{x_1(f), \dots, x_p(f), y_1(f), \dots, y_q(f), z_1(f), \dots, z_r(f)\}$$

множество всех критических точек функции $f \in F$, а через

$$\begin{aligned}\{x_i\} &:= \{x_1(f), \dots, x_p(f)\}, & \{y_j\} &:= \{y_1(f), \dots, y_q(f)\}, \\ \{z_k\} &:= \{z_1(f), \dots, z_r(f)\}\end{aligned}$$

– множества критических точек локальных минимумов, седловых критических точек и точек локальных максимумов функции $f \in F$ соответственно.

§ 4. Введение C^∞ -топологии на пространствах F , F^{num} , $\mathcal{D}^\pm$, μ , $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^{\text{num}}$

Напомним сначала определение слабой C^∞ -топологии Уитни на пространстве $C^\infty(M, N)$, где M , N – гладкие многообразия (см. [37; гл. 2, § 4], [38]). Эта топология обладает счетной базой и совпадает с топологией равномерной сходимости со всеми частными производными (струями) на компактных подмножествах многообразия M .

(а) Определим C^∞ -топологию на пространстве $C^\infty(M)$. Пусть $J^n(M)$ – многообразие n -струй на многообразии M , $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Рассмотрим каноническое включение

$$j_n: C^\infty(M) \hookrightarrow C(M, J^n(M))$$

и компактно-открытую (т.е. слабую) топологию на пространстве $C(M, J^n(M))$. Напомним, что предбазой компактно-открытой топологии на $C(X, Y)$ для топологических пространств X и Y являются множества вида $C_{K,U} \subset C(X, Y)$, где $K \subset X$ – компактное подпространство, $U \subset Y$ – открытое подпространство, и $C_{K,U} \subset C(X, Y)$ состоит из всех отображений, переводящих K в U . Рассмотрим топологию на $C^\infty(M)$, базой которой являются прообразы $j_n^{-1}(C)$ открытых подмножеств $C \subset C(M, J^n(M))$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(б) Аналогично определяется C^∞ -топология на пространстве $C^\infty(M, N)$, где M , N – многообразия. Для этого рассматривается каноническое включение

$$C^\infty(M, N) \hookrightarrow C(M, J^n(M, N)),$$

где $J^n(M, N)$ – многообразие, состоящее из n -струй отображений $M \rightarrow N$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(в) Аналогично определяется также C^∞ -топология на пространстве $T_p^q(M)$ тензорных полей типа (p, q) на поверхности M для любых неотрицательных $p, q \in \mathbb{Z}$. Для этого рассматривается каноническое включение

$$T_p^q(M) \hookrightarrow C(M, (J_p^q)^n(M)),$$

где $(J_p^q)^n(M)$ – многообразие, состоящее из n -струй тензорных полей типа (p, q) на M , $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

(г) Пусть $G(M)$ – одно из пространств $C^\infty(M)$, $C^\infty(M, N)$ или $T_p^q(M)$ из пп. (а)–(в) выше. Определим более общее пространство $OG(M) \supset G(M)$, состоящее из элементов $g \in G(U_g)$, заданных на некотором непустом открытом подмножестве $U_g \subset M$, зависящем, вообще говоря, от g . Для любого компакта $K \subset M$ обозначим через $OG_K(M) \subset OG(M)$ множество таких элементов $g \in OG(M)$, что $K \subset U_g$. Определим слабую топологию на $OG(M)$, базой которой являются прообразы $p_K^{-1}(\mathbb{U})$ открытых подмножеств $\mathbb{U} \subset G(K)$, где

$K \subset M$ – непустое компактное подмногообразие (с краем) максимальной размерности $\dim K = \dim M$ и $p_K: OG_K(M) \rightarrow G(K)$ – каноническая проекция. Примеры пространств $OG(M)$ даны в п. 4.2, (а) и § 10.

(д) Пусть $G(M)$ и $OG(M)$ – пространства из п. (г) выше. Определим пространство ростков $CG(M) = \bigsqcup_{K \subset M} G(M, K)$, состоящее из ростков $t = [g]_K \in G(M, K)$ элементов $g \in OG_K(M) \subset OG(M)$ в некотором непустом компакте $K = K_t \subset U_g \subset M$, зависящем, вообще говоря, от ростка t . Напомним, что *ростком* $t \in G(M, K)$ на M в непустом компакте $K \subset M$ называется класс эквивалентности элементов $g \in OG(M)$ со свойством $K \subset U_g$, где два таких элемента $g_1, g_2 \in OG(M)$ называются *эквивалентными*, если существует такая окрестность U компакта K в M , что $U \subset U_{g_1}$, $U \subset U_{g_2}$ и $g_1|_U = g_2|_U$. Определим слабую топологию на $CG(M)$, базой которой являются объединения $\bigcup_{K_0 \subset K} p_{K, K_0}(\mathbb{U})$, где $K \subset M$ – непустой компакт в M , $\mathbb{U}$ – открытое подмножество в $OG_K(M) \subset OG(M)$ с индуцированной топологией, $K_0 \subset K$ – непустой компакт в K , $p_{K, K_0}: OG_K(M) \rightarrow G(M, K_0) \subset CG(M)$ – каноническая проекция. Примеры пространств $CG(M)$ даны в п. 4.2, (а) и § 10.

C^∞ -топология на пространствах функций Морса $F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$, диффеоморфизмов $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}^\pm \subset C^\infty(M, M)$ и римановых метрик $\mu \in T_0^2(M)$ определяется как индуцированная топология на подпространствах соответствующих пространств из (а)–(в).

4.1. Топология на пространстве F^{num} функций Морса с занумерованными критическими точками. (а) На пространстве

$$F^{\text{num}} := F_{p,q,r}^{\text{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

функций Морса с занумерованными критическими точками на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 1.1, (В)) мы построим такую топологию, что каноническая проекция $F^{\text{num}} \rightarrow F := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ является конечнолистным накрытием (т.е. локально тривиальным расслоением с конечным дискретным слоем), а каноническое отображение $F^{\text{num}} \rightarrow M^{p+q+r}$, сопоставляющее любой функции Морса $f \in F^{\text{num}}$ ее упорядоченный набор критических точек, непрерывно.

Напомним определение пространства F^{num} . Обозначим через $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ пространство всех троек (x, y, z) таких, что $x, y, z \subset \text{int } M$ – попарно непересекающиеся подмножества, состоящие из $|x| = p$, $|y| = q$ и $|z| = r$ точек соответственно. Пространство $Q_{p,q,r}(\text{int } M)$ имеет естественную структуру многообразия размерности $\dim(Q_{p,q,r}(\text{int } M)) = (p + q + r) \dim M = 2(p + q + r)$. Имеется $(p! q! r!)$ -листное накрытие

$$\text{Pr}: (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M),$$

$$\text{Pr}: (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r) \mapsto (\{x_1, \dots, x_p\}, \{y_1, \dots, y_q\}, \{z_1, \dots, z_r\}),$$

где $\Delta_{ij} := \{(w_1, \dots, w_{p+q+r}) \in (\text{int } M)^{p+q+r} \mid w_i = w_j\}$, $\Delta := \bigcup_{1 \leq i < j \leq p+q+r} \Delta_{ij}$ – “диагональ” пространства $(\text{int } M)^{p+q+r}$. Рассмотрим отображение

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}): F \rightarrow Q_{p,q,r}(\text{int } M),$$

сопоставляющее любой функции Морса $f \in F$ тройку множеств

$$(\hat{x}(f), \hat{y}(f), \hat{z}(f)) \in Q_{p,q,r}(\text{int } M)$$

ее критических точек локальных минимумов, седловых точек и точек локальных максимумов соответственно. Из теоремы о неявных функциях следует, что отображение $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ непрерывно. Имеем каноническое включение

$$F^{\text{num}} \subset F \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta),$$

$$F^{\text{num}} = \{(f, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in F \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta) \mid (\hat{x}(f), \hat{y}(f), \hat{z}(f)) = \text{Pr}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\}.$$

Снабдим пространство $F \times ((\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta)$ топологией прямого произведения, а его подпространство F^{num} – индуцированной топологией.

Другими словами, топологическое пространство F^{num} вместе с канонической проекцией $\text{Pr}' : F^{\text{num}} \rightarrow F$ – это в точности $(p!q!r!)$ -листное накрытие $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^* \text{Pr}$, индуцированное $(p!q!r!)$ -листным накрытием Pr посредством непрерывного отображения $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, см. [39; гл. 1, § 9, п. 2] или [40; 9.7.2, с. 68]. Действительно, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F^{\text{num}} & \longrightarrow & (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta \\ \text{Pr}' \downarrow & & \downarrow \text{Pr} \\ F & \xrightarrow{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} & Q_{p,q,r}(\text{int } M) \end{array}$$

показывает, что пространство F^{num} является “обратным образом” (pullback) непрерывного отображения $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ и накрытия Pr .

Таким образом, для определенной выше топологии на F^{num} каноническая проекция $F^{\text{num}} \rightarrow F$ является $(p!q!r!)$ -листным накрытием, а каноническое отображение $F^{\text{num}} \rightarrow (\text{int } M)^{p+q+r} \setminus \Delta$ непрерывно. Эта топология – слабая среди всех топологий на F^{num} с этими свойствами.

(б) На пространстве функций Морса

$$F := F_{0,p_1+p'_2,p'_2';0,q_1+q'_2,q'_2';0,r_1+r'_2,r'_2'}(M, \partial^+ M, \partial^- M),$$

у которых пронумерованы лишь некоторые из критических точек, топология определяется аналогично.

(в) На произвольном обобщенном пространстве функций Морса

$$\begin{aligned} F &:= F_{p_1,p'_2,p'_2';q_1,q'_2,q'_2';r_1,r'_2,r'_2'}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \\ &\subset F_{0,p_1+p'_2,p'_2';0,q_1+q'_2,q'_2';0,r_1+r'_2,r'_2'}(M, \partial^+ M, \partial^- M) \end{aligned}$$

и на его подпространстве $F^1 \subset F$ вводится индуцированная топология. Как в (а), доказываем, что канонические проекции $\text{Pr}' : F^{\text{num}} \rightarrow F$ и $\text{Pr}'|_{F^{1,\text{num}}} : F^{1,\text{num}} \rightarrow F^1$ являются $(p_2'!q_2'!r_2'!)$ -листными накрытиями.

4.2. Топология на пространствах $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^{\text{num}}$ оснащенных функций

Морса. (а) Пусть для определенности поверхность M ориентируема, $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Из определения 9.1 оснащенной функции Морса следует, что для любой оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ и любой критической точки $w \in M$ функции f существуют вещественное число $r > 0$ и гладкое вложение $h \in \text{Emb}(D_r, M)$ открытого круга $D_r := \{u^2 + v^2 < r\} \subset \mathbb{R}^2$ радиуса $r > 0$ в поверхность M , задающее в окрестности $h(D_r) \subset M$ точки $w = h(0, 0)$ регулярные координаты u, v со свойствами из определения 9.1. В § 11 мы покажем, что росток $[h]_{\{(0,0)\}} \in C \text{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ вложения h в нуле (см. § 4, (б), (д)) определен либо с точностью до поворотов $R_\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos \varphi - v \sin \varphi, u \sin \varphi + v \cos \varphi)$,

$\varphi \in \mathbb{R}$, если w – критическая точка локального минимума или максимума (см. лемму 11.1), либо с точностью до центральной симметрии $R_\pi: (u, v) \mapsto (-u, -v)$, если w – седловая критическая точка (см. лемму 11.2, (Б)). Поэтому множество $H_{(f,\alpha),w} \subset C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ всех таких ростков $[h]_{\{(0,0)\}}$ (для данной оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ и данной критической точки $w = h(0, 0)$ индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$) гомеоморфно либо окружности (при $\lambda = 0, 2$), либо двухточечному множеству (при $\lambda = 1$).

Пусть

$$A := C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M)/S^1, \quad B := C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M)/\{\pm \operatorname{id}\}$$

– факторпространства пространства $C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ по действию группы всех поворотов R_φ и подгруппы $\{R_0, R_\pi\} = \{\pm \operatorname{id}\}$ соответственно (см. выше). Пусть

$$\operatorname{Pr}_A: C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow A, \quad \operatorname{Pr}_B: C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow B$$

– канонические проекции. Для любого топологического пространства X и любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $Q_n(X) := X^n/\Sigma_n$ пространство всех n -элементных подмножеств (т.е. n -точечных конфигураций) пространства X с естественной топологией, где группа перестановок Σ_n действует на X^n перестановками сомножителей. Имеем каноническое включение

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &\subset F \times O\Lambda^1(M) \times Q_p(A) \times Q_q(B) \times Q_r(A) =: X, \\ (f, \alpha) &\mapsto (f, \alpha, \{\operatorname{Pr}_A(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \hat{x}(f)}, \{\operatorname{Pr}_B(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \hat{y}(f)}, \\ &\quad \{\operatorname{Pr}_A(H_{(f,\alpha),w})\}_{w \in \hat{z}(f)}), \end{aligned}$$

где

$$F := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M).$$

Снабдим пространства F , $O\Lambda^1(M)$ и $C \operatorname{Emb}(\mathbb{R}^2, M)$ слабой C^∞ -топологией как в § 4 (а), § 4 (в), (г), § 4 (б), (д) соответственно, пространства A и B – фактортопологией, пространства $Q_p(A)$, $Q_q(B)$, $Q_r(A)$ – топологией конфигурационных пространств, пространство X – топологией прямого произведения, а его подпространство $\mathbb{F}$ – индуцированной топологией.

(б) На пространстве $\mathbb{F}_{p,q,r}^{\operatorname{num}}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и на любом обобщенном пространстве оснащенных функций Морса

$$\mathbb{F} := \mathbb{F}_{p_1, p'_2, p''_2; q_1, q'_2, q''_2; r_1, r'_2, r''_2}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

топология определяется аналогично п. 4.1, (б), (в). Подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ снабжается индуцированной топологией. Как в п. 4.1, (а), доказывается, что канонические проекции $\mathbb{F}^{\operatorname{num}} \rightarrow \mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^{1, \operatorname{num}} \rightarrow \mathbb{F}^1$ являются $(p_2''! q_2''! r_2''!)$ -листными накрытиями.

§ 5. Критерий изотопности функций Морса

Для проверки $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантности отображений и изотопности функций в доказательствах теоремы 2.5 и утверждения 6.2, (Б) (используемого при доказательстве теоремы 2.5, (А)) нам понадобится следующая лемма из [15].

ЛЕММА 5.1 (см. [15; лемма 1]). *Пусть M – (не обязательно ориентируемая) компактная поверхность и функции Морса $f, f_1 \in F$ имеют один и тот же набор критических точек, один и тот же граф $G_f = G_{f_1}$ (см. обозначение 2.8) и одни и те же значения в критических точках и точках края*

поверхности M . Тогда

$$f_1 = f \circ h \quad (4)$$

для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathcal{D}_0$, переводящего каждую вершину и каждое ребро графа G_f в себя, причем ограничение h на любое ребро (как диффеоморфизм одномерного связного многообразия в себя) сохраняет локальную ориентацию ребра.

В действительности, для доказательства утверждения 6.2, (Б) нам понадобится лишь более слабый вариант леммы 5.1 – когда функции f , f_1 имеют одинаковые наборы всех (а не только критических) связных компонент линий уровня (см. доказательство утверждения 6.2, (Б), шаги 3 и 4). В [15; теорема 2] на основе леммы 5.1 получена классификация функций Морса с точностью до изотопности.

§ 6. Гомотопическая эквивалентность $F \sim F^1$

Здесь строится сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантная “строгая деформационная” ретракция $\rho_0: F \rightarrow F^1$ и доказывается теорема 2.5, (А).

Снабдим пространство F обобщенных функций Морса C^∞ -топологией, см. п. 4.1. Введем промежуточное пространство $\tilde{F}$, $F^1 \subset \tilde{F} \subset F$, и покажем, что F^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\tilde{F}$, а $\tilde{F}$ – строгим деформационным ретрактом пространства F .

Пусть пространство $\tilde{F}$ состоит из функций Морса $\tilde{f} \in F$, для которых $\min \tilde{f} = -1$, $\max \tilde{f} = 1$. По функции Морса $f \in F$ построим функцию Морса

$$\tilde{f} := \frac{2f - (\max f + \min f)}{\max f - \min f} \in \tilde{F}.$$

Рассмотрев отображение

$$\rho_1: F \rightarrow \tilde{F}, \quad f \mapsto \tilde{f} = \frac{2f - (\max f + \min f)}{\max f - \min f}, \quad (5)$$

и гомотопию $f \mapsto (1-t)\tilde{f} + tf$, $0 \leq t \leq 1$, между ним и тождественным отображением id_F (метод “соединение отрезком”), получаем, что $\tilde{F}$ является строгим деформационным ретрактом пространства F . При этом мы используем то, что значения функции $\tilde{f}$ и гомотопии строятся по значениям функции f , а значит, отображение и гомотопия не выводят из пространства F .

С помощью построенной гомотопии легко доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. (А) Строгая деформационная ретракция $\rho_1: F \rightarrow \tilde{F}$, $f \mapsto \tilde{f}$, является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной (см. обозначение 2.2 и определение 2.4) и переводит любую функцию Морса $f \in F$ в изотопную ей функцию (см. определение 1.6). В частности, $\rho_1([f]_{\text{isot}}) = [f]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$, пересечение $[f]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$ линейно связано и ретракция ρ_1 индуцирует биекцию между классами изотопности $[f]_{\text{isot}} \in F / \sim_{\text{isot}}$ и $[f]_{\text{isot}} \cap \tilde{F} \in \tilde{F} / \sim_{\text{isot}}$.

(Б) Ограничение деформационной ретракции ρ_1 на класс эквивалентности $[f]$ любой функции $f \in F$ является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной строгой деформационной ретракцией

$$\rho_1|_{[f]}: [f] \xrightarrow{\sim} [f] \cap \tilde{F}, \quad f \in F,$$

и поэтому является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантной гомотопической эквивалентностью. В частности, ограничение $\rho_1|_{[f]_{\text{isot}}} : [f]_{\text{isot}} \xrightarrow{\sim} [f]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$ является сильно $\mathcal{D}_0$ -эquivариантной строгой деформационной ретракцией, $f \in F$.

Покажем теперь, что F^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\tilde{F}$. Если $q = 0$, то все линии уровня функции $f \in \tilde{F}$ связны. Поэтому $F^1 = \tilde{F}$ и все доказано.

Пусть $q > 0$ и $\tilde{f} \in \tilde{F}$ – функция Морса с седловыми критическими значениями $c_1, \dots, c_q$. Будем считать, что все критические точки функций Морса из F пронумерованы числами $1, \dots, p + q + r$ (см. замечание 3.1), а все граничные компоненты M пронумерованы числами $p + q + r + 1, \dots, p + q + r + d^+ + d^-$.

Каждой критической точке $w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}$ минимума или максимума сопоставим такую седловую точку $\hat{y} = \hat{y}(w_\ell) \in \{y_j(\tilde{f})\}$, а каждой компоненте связности δ_ℓ края поверхности M – такую седловую точку $\hat{y} = \hat{y}(\delta_\ell) \in \{y_j(\tilde{f})\}$, что существует путь в M с началом в точке w_ℓ (соответственно на окружности δ_ℓ) и концом в точке $\hat{y}$, не пересекающий никакую другую компоненту связности линии уровня, содержащую седловую точку. Определим число

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\tilde{f}) := \min \left\{ \min_{w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}} |\tilde{f}(w_\ell) - \tilde{f}(\hat{y}(w_\ell))|, \min_{\delta_\ell \subset \partial M} |\tilde{f}(\delta_\ell) - \tilde{f}(\hat{y}(\delta_\ell))| \right\}.$$

Для каждой точки $w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}$ обозначим через $C_\ell = C_\ell(\tilde{f})$ компоненту связности w_ℓ в множестве $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(w_\ell) - \varepsilon_1, \tilde{f}(w_\ell) + \varepsilon_1) \subset M$. Для каждой граничной окружности $\delta_\ell \subset \partial M$ обозначим через $C_\ell = C_\ell(\tilde{f})$ компоненту связности δ_ℓ в множестве $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\delta_\ell) - \varepsilon_1, \tilde{f}(\delta_\ell) + \varepsilon_1) \subset M$. Тогда открытые множества $C_\ell \subset M$ – попарно не пересекающиеся открытые диски и “полукоткрытые цилиндры” (гомеоморфные $S^1 \times [0, 1)$).

По функции Морса $\tilde{f} \in \tilde{F}$ построим функцию $f_1 \in C^\infty(M)$, совпадающую с $\tilde{f}$ на

$$\left(M \setminus \bigcup_{w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}} C_\ell \right) \setminus \bigcup_{\delta_\ell \subset \partial M} C_\ell,$$

а на каждом C_ℓ определим ее следующим образом. Пусть для определенности множество C_ℓ отвечает либо точке $w_\ell \in \{z_k(\tilde{f})\}$ локального максимума, либо окружности $\delta_\ell \subset \partial^+ M$ (в случаях локального минимума и $\delta_\ell \subset \partial^- M$ функция $f_1|_{C_\ell}$ строится аналогично). Обозначим $m_\ell = m_\ell(\tilde{f}) := \tilde{f}(w_\ell)$, соответственно $m_\ell = m_\ell(\tilde{f}) := \tilde{f}(\delta_\ell)$. Положим при $a < b$

$$I_{a,b}(u) := \begin{cases} 0, & u \leq \frac{2a+b}{3}, \\ 1, & u \geq \frac{a+2b}{3}, \\ \frac{\int_{(2a+b)/3}^u \exp\left(\frac{3}{3t-(a+2b)} - \frac{3}{3t-(2a+b)}\right) dt}{\int_{(2a+b)/3}^{(a+2b)/3} \exp\left(\frac{3}{3t-(a+2b)} - \frac{3}{3t-(2a+b)}\right) dt}, & \frac{2a+b}{3} < u < \frac{a+2b}{3}. \end{cases} \quad (6)$$

Функция $I_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ является C^∞ -гладкой. Ее график изображен на рис. 1.

Рис. 1. График функции $I_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

Зададим функцию $f_1|_{C_\ell}$ формулой

$$f_1|_{C_\ell}(x) := \tilde{f}(x) + (1 - m_\ell)I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(\tilde{f}(x)), \quad x \in C_\ell, \quad w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}.$$

Функция $I_{m-\varepsilon, m} = I_{m-\varepsilon, m}(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R})$ при любых $m, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Получаем отображение $\rho_2: \tilde{F} \rightarrow C^\infty(M)$, $\tilde{f} \mapsto f_1$. Заметим, что $m_\ell \leq 1$, и при $m_\ell = 1$ получаем $f_1|_{C_\ell} = \tilde{f}|_{C_\ell}$. Поэтому в случае $\tilde{f} \in F^1$ имеем $f_1 = \tilde{f}$.

Определим гомотопию (методом “соединение отрезком”):

$$\tilde{f} \mapsto (1 - t)f_1 + t\tilde{f}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Гладкая функция $I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell} = I_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(u)$ тождественно равна нулю при $u < m_\ell - 2\varepsilon_1/3$ и $I'_{m_\ell - \varepsilon_1, m_\ell}(u) \geq 0$ для любого $u \in \mathbb{R}$, поэтому функция f_1 локально (т.е. в достаточно малой окрестности любой точки на M) является гладкой возрастающей функцией от $\tilde{f}$. Следовательно, f_1 является функцией Морса с теми же критическими точками, что и $\tilde{f}$, и гомотопия также не выводит из пространства $\tilde{F}$. У функции Морса f_1 все локальные минимумы равны -1 , локальные максимумы равны 1 , а значит, $f_1 \in F^1$. Поэтому построена “строгая деформационная” ретракция

$$\rho_2: \tilde{F} \rightarrow F^1, \quad \tilde{f} \mapsto f_1. \quad (7)$$

Определим отображения

$$p_0 = \rho_2 \circ \rho_1: F \rightarrow F^1, \quad f \mapsto f_1, \quad i_0: F^1 \rightarrow F, \quad f_1 \mapsto f.$$

По доказанному выше p_0 – “строгая деформационная” ретракция и, в частности, $p_0 \circ i_0 = \text{id}_{F^1}$, $i_0 \circ p_0$ гомотопна id_F .

Утверждение 6.1 и следующее утверждение доказывают теорему 2.5, (А).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. (А) Строгая деформационная ретракция $\rho_2: \tilde{F} \rightarrow F^1$, $\tilde{f} \mapsto f_1$, является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантной (см. обозначение 2.2 и определение 2.4) и сохраняет отношение изотопности функций Морса (т.е. переводит изотопные функции Морса в изотопные, см. определение 1.6). В частности, $\rho_2([\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}) \subset [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$, и ретракция ρ_2 индуцирует сюръекцию множества классов $[\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F} \in \tilde{F}/\sim_{\text{isot}}$ на множество классов $[f_1]_{\text{isot}} \cap F^1 \in F^1/\sim_{\text{isot}}$.

(Б) Для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{F}$ ограничение ретракции ρ_2 на класс эквивалентности $[\tilde{f}] \cap \tilde{F}$ функции $\tilde{f}$ в $\tilde{F}$ (см. обозначение 2.2 и определение 2.4)

является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантной гомотопической эквивалентностью

$$\rho_2|_{[\tilde{f}] \cap \tilde{F}}: [\tilde{f}] \cap \tilde{F} \xrightarrow{\sim} [f_1] \cap F^1, \quad \tilde{f} \in \tilde{F}, \quad f_1 = \rho_2(\tilde{f}) \in F^1.$$

В частности, отображение $\rho_2|_{[\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}}: [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F} \xrightarrow{\sim} [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$ является сильно $\mathcal{D}_0$ -эquivариантной гомотопической эквивалентностью, $\tilde{f} \in \tilde{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Сильная $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантность строгой деформационной ретракции ρ_2 очевидно следует из построения ретракции ρ_2 и гомотопии между ней и $\text{id}_{\tilde{F}}$. При этом используется то, что значения функции f_1 и гомотопии строятся по значениям функции $\tilde{f}$.

Пусть функции $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{F}$ изотопны, т.е. $\tilde{g} = h_2 \circ \tilde{f} \circ h_1$ для некоторых диффеоморфизмов $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$ и $h_1 \in \mathcal{D}_0$. В силу $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}^\pm$ и $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантности ρ_2 имеем $\rho_2(\tilde{g}) = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f} \circ h_1) = (\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})) \circ h_1$ и поэтому достаточно доказать изотопность функций Морса $\rho_2(\tilde{f}) = f_1$ и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$. Мы докажем существование такого диффеоморфизма $h_3 \in \mathcal{D}_0$, что

$$(h_2 \circ f_1) \circ h_3 = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f}). \quad (8)$$

Обозначим

$$Z_\ell = Z_\ell(\tilde{f}, h_2) := C_\ell(\tilde{f}) \cup C_\ell(h_2 \circ \tilde{f}) \subset M$$

для каждой точки $w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}$ и для каждой граничной окружности $\partial_\ell \subset \partial M$.

Заметим, что у функций Морса f_1 и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ те же критические точки, что и у функции $\tilde{f}$, причем локально на M функции f_1 и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ являются функциями от $\tilde{f}$. Кроме того, всюду на множестве

$$M' := M \setminus \left(\bigcup_{w_\ell \in \{x_i(\tilde{f})\} \cup \{z_k(\tilde{f})\}} Z_\ell(\tilde{f}, h_2) \cup \bigcup_{\partial_\ell \subset \partial M} Z_\ell(\tilde{f}, h_2) \right)$$

(и даже в некоторой окрестности множества M' в M) выполнено $h_2 \circ f_1 = h_2 \circ \tilde{f} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$. Поэтому на M' можно положить $h_3|_{M'} := \text{id}_{M'}$ для выполнения (8) в M' .

Осталось определить h_3 на подмножествах $Z_\ell = Z_\ell(\tilde{f}, h_2)$. Эти подмножества попарно не пересекаются и являются открытыми кругами и “полуоткрытыми цилиндрами” (см. выше), а их замыкания $\bar{Z}_\ell$ – замкнутыми кругами и цилиндрами. На каждом $\bar{Z}_\ell \subset M$ функции $f_2 := h_2 \circ f_1$ и $\rho_2(h_2 \circ \tilde{f})$ являются гладкими возрастающими функциями от $\tilde{f}$ с всюду положительной производной, имеют один и тот же минимум и один и тот же максимум и совпадают с $h_2 \circ \tilde{f}$ в достаточно малой окрестности граничной окружности $\bar{Z}_\ell \cap M'$ в $\bar{Z}_\ell$. Поэтому имеется диффеоморфизм $\hat{h}_\ell$ отрезка $[\min(f_2|_{\bar{Z}_\ell}), \max(f_2|_{\bar{Z}_\ell})]$ в себя, оставляющий неподвижными концы отрезка и однозначно определяемый условием

$$\hat{h}_\ell \circ f_2|_{\bar{Z}_\ell} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})|_{\bar{Z}_\ell},$$

причем $\hat{h}_\ell$ совпадает с тождественным диффеоморфизмом в достаточно малой окрестности конца отрезка, отличного от ± 1 (обозначим этот конец через b_ℓ).

Пусть для определенности $\bar{Z}_\ell$ либо является замкнутым кругом и содержит точку $w_\ell \in \{z_k\}$ локального максимума, либо является цилиндром и содержит

граничную окружность $\delta_\ell \subset \partial^+ M$. Имеем $f_2(\overline{Z}_\ell) = [b_\ell, 1]$ и $b_\ell = f_2(\partial \overline{Z}_\ell) \in (-1, 1)$. Отметим, что $\hat{h}_\ell(1) = 1$ и $\hat{h}'_\ell > 0$ на $[b_\ell, 1]$, поэтому имеется всюду положительная гладкая функция $\tilde{h}_\ell$ на $[0, 1 - b_\ell]$ такая, что

$$\hat{h}_\ell(1 - t) = 1 - t\tilde{h}_\ell(t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Отметим, что $\tilde{h}_\ell \equiv 1$ в некоторой окрестности точки $1 - b_\ell$ в отрезке $[0, 1 - b_\ell]$. Пусть для определенности $\overline{Z}_\ell$ является кругом. Из леммы Морса [12] следует, что имеется координатный диффеоморфизм

$$(u_\ell, v_\ell): \overline{Z}_\ell \rightarrow \{u^2 + v^2 \leq 1 - b_\ell\} \subset \mathbb{R}^2$$

круга $\overline{Z}_\ell$ в стандартный круг радиуса $\sqrt{1 - b_\ell}$ такой, что $f_2|_{\overline{Z}_\ell} = 1 - u_\ell^2 - v_\ell^2$. Рассмотрим в круге полярные координаты $r_\ell \in [0, \sqrt{1 - b_\ell}]$, $\varphi_\ell \pmod{2\pi} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, такие, что $u_\ell = r_\ell \cos \varphi_\ell$, $v_\ell = r_\ell \sin \varphi_\ell$. В этих координатах

$$f_2|_{\overline{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2, \quad \hat{h}_\ell \circ f_2|_{\overline{Z}_\ell} = \hat{h}_\ell(1 - r_\ell^2) = 1 - r_\ell^2 \tilde{h}_\ell(r_\ell^2).$$

Определим диффеоморфизм $h_3|_{\overline{Z}_\ell}$ круга $\overline{Z}_\ell$ в себя следующей формулой в полярных координатах $r_\ell, \varphi_\ell \pmod{2\pi}$:

$$h_3|_{\overline{Z}_\ell}: (r_\ell, \varphi_\ell \pmod{2\pi}) \mapsto \left(r_\ell \sqrt{\tilde{h}_\ell(r_\ell^2)}, \varphi_\ell \pmod{2\pi} \right).$$

Эта формула определяет диффеоморфизм круга в себя, так как $\tilde{h}_\ell$ – положительная гладкая функция, и $\tilde{h}_\ell(r_\ell^2) \equiv 1$ в некоторой окрестности границы круга. Тогда в круге $\overline{Z}_\ell$ выполнено

$$f_2 \circ h_3|_{\overline{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2 \tilde{h}_\ell(r_\ell^2) = \hat{h}_\ell \circ f_2|_{\overline{Z}_\ell} = \rho_2(h_2 \circ \tilde{f})|_{\overline{Z}_\ell}$$

и в достаточно малой окрестности граничной окружности круга $\overline{Z}_\ell$ выполнено $h_3|_{\overline{Z}_\ell} = \text{id}$. Если $\overline{Z}_\ell$ является цилиндром, то диффеоморфизм $h_3|_{\overline{Z}_\ell}$ определяется аналогично, при помощи координатного диффеоморфизма

$$(r_\ell, \varphi_\ell \pmod{2\pi}): \overline{Z}_\ell \rightarrow [0, b_\ell] \times S^1$$

такого, что $f_2|_{\overline{Z}_\ell} = 1 - r_\ell^2$. При этом функции $f_2|_{\overline{Z}_\ell}$, $\hat{h}_\ell \circ f_2|_{\overline{Z}_\ell}$ и диффеоморфизм $h_3|_{\overline{Z}_\ell}$ имеют такой же вид в координатах $r_\ell, \varphi_\ell \pmod{2\pi}$, как в случае круга, см. выше.

Если $\overline{Z}_\ell$ либо является замкнутым кругом, содержащим точку $w_\ell \in \{x_i\}$ локального минимума, либо является цилиндром, содержащим граничную окружность $\delta_\ell \subset \partial^- M$, то построение диффеоморфизма $h_3|_{\overline{Z}_\ell}$ проводится аналогично.

Поскольку для каждого круга или цилиндра $\overline{Z}_\ell$ выполнено $h_3|_{\overline{Z}_\ell} = \text{id}$ в достаточно малой окрестности его границы $\partial \overline{Z}_\ell = \overline{Z}_\ell \cap M'$ в M , то отображение h_3 корректно определено, является диффеоморфизмом поверхности M и обладает требуемым свойством (8).

(Б) Покажем теперь, что для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{F}$ отображение

$$\rho_2|_{[\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}}: [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F} \rightarrow [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$$

является гомотопической эквивалентностью, где $f_1 = \rho_2(\tilde{f})$, см. (7). Отметим, что при $\tilde{f} \notin F^1$ рассматриваемое отображение не является ретракцией, так как $[f_1]_{\text{isot}} \cap [f]_{\text{isot}} = \emptyset$.

Шаг 1. Для любых вещественных чисел $a, b > 0$ определим диффеоморфизм отрезков $h_{a,b}: [0, a] \rightarrow [0, b]$ правилом

$$\begin{aligned} h_{a,b}(x) &:= x + (b - a)I_{0,a}(x), & 0 \leq x \leq a, & \quad a \leq b, \\ h_{a,b}(x) &:= h_{b,a}^{-1}(x), & 0 \leq x \leq a, & \quad a \geq b. \end{aligned} \quad (9)$$

При тех $a, b > 0$, для которых диффеоморфизм $h_{a,b}$ определен обеими из приведенных формул (а именно, при $a = b$), эти определения совпадают. При этом для любого $x \in [0, a]$ из некоторой окрестности нуля, зависящей от чисел a и b , выполнено $h_{a,b}(x) = x$, а для любого $x \in [0, a]$ из некоторой окрестности числа a выполнено $h_{a,b}(x) = x + b - a$.

Шаг 2. Для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{F}$ построим отображение

$$\rho_{\tilde{f}}: [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1 \rightarrow [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}.$$

По любой функции Морса $f'_1 \in [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$ будем строить функцию $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \in [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$. Пусть $\tilde{c}_1(f'_1) < \dots < \tilde{c}_N(f'_1)$ – все седловые критические значения функции f'_1 , а $\tilde{c}_1(\tilde{f}) < \dots < \tilde{c}_N(\tilde{f})$ – все седловые критические значения функции $\tilde{f}$. Положим также $\tilde{c}_0(f'_1) = \tilde{c}_0(\tilde{f}) := -1$ и $\tilde{c}_{N+1}(f'_1) = \tilde{c}_{N+1}(\tilde{f}) := 1$. Определим диффеоморфизм $h = h_{f'_1}: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, переводящий $\tilde{c}_m(f'_1) \mapsto \tilde{c}_m(\tilde{f})$, $0 \leq m \leq N + 1$, по следующему правилу:

$$h(x) = \tilde{c}_m(\tilde{f}) + h_{\tilde{c}_{m+1}(f'_1) - \tilde{c}_m(f'_1), \tilde{c}_{m+1}(\tilde{f}) - \tilde{c}_m(\tilde{f})}(x - \tilde{c}_m(f'_1)), \quad x \in [\tilde{c}_m(f'_1), \tilde{c}_{m+1}(f'_1)],$$

$$0 \leq m \leq N. \text{ В некоторой окрестности точки } \tilde{c}_m(f'_1), \quad 0 \leq m \leq N + 1, \text{ выполнено}$$

$$h(x) = x + \tilde{c}_m(\tilde{f}) - \tilde{c}_m(f'_1).$$

Для каждой точки $w_\ell(f'_1) \in \{x_i(f'_1)\} \cup \{z_k(f'_1)\}$ локального минимума или максимума функции f'_1 обозначим через $Q_\ell \ni w_\ell(f'_1)$ такой открытый диск в M , что его граница содержится в графе $G_{f'_1}$ (см. обозначение 2.8) и сам диск не пересекается с графом $G_{f'_1}$. Для каждой компоненты связности δ_ℓ края поверхности M обозначим через $\hat{Q}_\ell \supset \delta_\ell$ такой полуоткрытый цилиндр в M , что его отличная от δ_ℓ граничная окружность содержится в графе $G_{f'_1}$ и сам цилиндр не пересекается с графом $G_{f'_1}$. На множестве

$$M \setminus \left\{ \bigcup_{w_\ell \in \{x_i(f'_1)\} \cup \{z_k(f'_1)\}} Q_\ell \cup \bigcup_{\delta_\ell \subset \partial M} \hat{Q}_\ell \right\}$$

определим функцию Морса $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ совпадающей с $h \circ f'_1$, а на каждом диске Q_ℓ и цилиндре $\hat{Q}_\ell$ определим ее следующим образом. Рассмотрим диск Q_ℓ , содержащий критическую точку $w_\ell(f'_1) \in \{z_k(f'_1)\}$ локального максимума. Определим функцию $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ на диске $Q_\ell \ni w_\ell(f'_1)$ формулой

$$\rho_{\tilde{f}}(f'_1)|_{Q_\ell} = h \circ f'_1(\partial Q_\ell) + h_{1 - h \circ f'_1(\partial Q_\ell), \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f})) - h \circ f'_1(\partial Q_\ell)}(h \circ f'_1|_{Q_\ell} - h \circ f'_1(\partial Q_\ell)),$$

а на дисках Q_ℓ , содержащих критические точки $w_\ell(f'_1) \in \{x_k(f'_1)\}$ локального минимума, формулой

$$\rho_{\tilde{f}}(f'_1)|_{Q_\ell} = \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f})) + h_{h \circ f'_1(\partial Q_\ell) + 1, h \circ f'_1(\partial Q_\ell) - \tilde{f}(w_\ell(\tilde{f}))}(h \circ f'_1|_{Q_\ell} + 1).$$

Так определенная функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)|_{Q_\ell}$ имеет единственную критическую точку $w_\ell(f'_1)$ и совпадает с функциями $h \circ f'_1|_{Q_\ell}$ и $f'_1|_{Q_\ell}$ в некоторой окрестности границы диска Q_ℓ , а в окрестности точки $w_\ell(f'_1)$ совпадает с $f'_1|_{Q_\ell} + \tilde{f}(w_\ell(f)) - f'_1(w_\ell(f'_1))$. Аналогичными формулами определяется функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)|_{\tilde{Q}_\ell}$ на каждом цилиндре $\tilde{Q}_\ell$.

Шаг 3. Покажем, что $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \in [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$. Построенная функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ является функцией Морса с тем же набором связных компонент линий уровня, что и у f'_1 , и в окрестностях всех критических точек и точек края поверхности M она отличается от f'_1 на аддитивную локальную константу. Кроме того, функция $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ имеет тот же набор значений в критических точках и в точках края поверхности M , что и функция $\tilde{f}$ (точнее, $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)(w_\ell(\rho_{\tilde{f}}(f'_1))) = \tilde{f}(w_\ell(f))$), $1 \leq \ell \leq p + q + r$, и $(\rho_{\tilde{f}}(f'_1))|_{\partial M} = \tilde{f}|_{\partial M}$. В частности, $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \in \tilde{F}$.

Покажем, что $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \sim_{\text{isot}} \tilde{f}$. Поскольку $f'_1 \sim_{\text{isot}} f_1$, то $f_1 = h_2 \circ f'_1 \circ h_1$ для некоторых диффеоморфизмов $h_1 \in \mathcal{D}_0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+([-1, 1])$. В силу $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантности отображения $\rho_{\tilde{f}}$ и перечисленных выше свойств функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ функция $(\rho_{\tilde{f}}(f'_1)) \circ h_1 = \rho_{\tilde{f}}(f'_1 \circ h_1)$ является функцией Морса с тем же набором связных компонент линий уровня, что и у $f'_1 \circ h_1 = h_2^{-1} \circ f_1$, которые такие же, как у f_1 , и поэтому такие же, как у $\tilde{f}$. Кроме того, значения функции $(\rho_{\tilde{f}}(f'_1)) \circ h_1$ в критических точках и точках края поверхности M такие же, как у $\tilde{f}$. Отсюда по лемме 5.1 имеем $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \in \tilde{F}\mathcal{D}_0$, поэтому $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \sim_{\text{isot}} \tilde{f}$. Значит, $\rho_{\tilde{f}}(f'_1) \in [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$.

Так как значения функции $\rho_{\tilde{f}}(f'_1)$ строились по значениям функции f'_1 , то $\rho_{\tilde{f}}(f'_1 \circ h_1) = (\rho_{\tilde{f}}(f'_1)) \circ h_1$ для любого $h_1 \in \mathcal{D}_0$, т.е. отображение $\rho_{\tilde{f}}: [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1 \rightarrow [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$ является $\mathcal{D}_0$ -эквивариантным. Аналогично показывается корректность и $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантность отображения

$$\rho_{[\tilde{f}]}: [f_1] \cap F^1 \rightarrow [\tilde{f}] \cap \tilde{F},$$

определенного условием $\rho_{[\tilde{f}]}|_{[\tilde{f} \circ h_1]_{\text{isot}}} = \rho_{\tilde{f} \circ h_1}$ для любого $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$.

Шаг 4. Зададим гомотопию между отображениями $\rho_{\tilde{f}} \circ \rho_2: [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F} \rightarrow [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}$ и $\text{id}_{[\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}}$ формулой

$$\tilde{g} \mapsto \tilde{g}_t := (1-t)\tilde{g} + t\rho_{\tilde{f}} \circ \rho_2(\tilde{g}) = (1-t)\tilde{g} + t\rho_{\tilde{f}}(g_1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \tilde{g} \in [\tilde{f}]_{\text{isot}} \cap \tilde{F}.$$

Все функции $\tilde{g}_t$ в процессе гомотопии являются функциями Морса и принадлежат $\tilde{F}$, так как $\tilde{g}, \rho_{\tilde{f}}(g_1) \in \tilde{F}$, функция $\rho_{\tilde{f}}(g_1)$ локально на поверхности M является гладкой функцией с положительной производной от функции g_1 (а потому и от $\tilde{g}$) и в некоторых окрестностях критических точек функция $\rho_{\tilde{f}}(g_1)$ отличается от g_1 (а потому и от $\tilde{g}$) на аддитивную локальную константу.

Покажем, что все функции $\tilde{g}_t$ в процессе указанной гомотопии изотопны исходной функции $\tilde{g}$. Действительно, функции $\tilde{g}$ и $\rho_{\tilde{f}}(g_1)$ имеют одни и те же критические точки и связные компоненты линий уровня, отличаются на аддитивную локальную константу в окрестности каждой критической точки,

а разность значений функции $\rho_{\tilde{f}}(g_1)$ в любых двух точках, являющихся критическими точками или точками края поверхности M , имеет тот же знак (соответственно равна нулю), что и разность значений функции $\tilde{g}$ в этих точках. Поэтому таким же условиям удовлетворяет и пара функций $\tilde{g}_t$ и $\tilde{g}$ для любого $t \in [0, 1]$. Согласно лемме 5.1 отсюда следует, что $\tilde{g}_t \in \tilde{g}\mathcal{D}_0$. Следовательно, $\tilde{g}_t \sim_{\text{isot}} \tilde{g}$, $0 \leq t \leq 1$.

Шаг 5. Зададим гомотопию между отображением $\rho_2 \circ \rho_{\tilde{f}}: [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1 \rightarrow [f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$ и $\text{id}_{[f_1]_{\text{isot}} \cap F^1}$, используя метод “соединение отрезком”:

$$f'_1 \mapsto (1-t)f'_1 + t\rho_2 \circ \rho_{\tilde{f}}(f'_1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Эта гомотопия задает путь в пространстве $[f_1]_{\text{isot}} \cap F^1$, что доказывается так же, как и для предыдущей гомотопии. Утверждение 6.2 доказано.

§ 7. Гомотопическая эквивалентность $F^1 \sim F^1 \times \mu$

Здесь строятся $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эквивариантные отображения $p_1: F^1 \times \mu \rightarrow F^1$ и $i_1: F^1 \rightarrow F^1 \times \mu$.

Рассмотрим пространство μ римановых метрик на M , снабженное C^∞ -топологией, см. § 4, (в). Снабдим каждое пространство $F \times \mu$ и $F^1 \times \mu$ топологией прямого произведения.

Пусть $ds_0^2 \in \mu$ – фиксированная (произвольным образом) риманова метрика на M . Рассмотрим естественную проекцию $p_1: F \times \mu \rightarrow F$ и вложение $i_1: F \rightarrow F \times \mu$, $f \mapsto (f, ds_0^2)$. Имеем $p_1 \circ i_1 = \text{id}_F$. Для доказательства гомотопической эквивалентности $F \sim F \times \mu$ осталось устроить гомотопию между отображениями $i_1 \circ p_1: (f, ds^2) \mapsto (f, ds_0^2)$ и $\text{id}_{F \times \mu}$. Ее можно задать формулой $(f, ds^2) \mapsto (f, (1-t)ds_0^2 + tds^2)$, $0 \leq t \leq 1$ (метод “соединение отрезком”). Мы также показали, что подпространство $i_1(F) = F \times \{ds_0^2\}$, гомеоморфное пространству F , является строгим деформационным ретрактом пространства $F \times \mu$.

Ограничивая построенные отображения и гомотопии на F^1 и $F^1 \times \mu$, получаем также гомотопическую эквивалентность $F^1 \sim F^1 \times \mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Непосредственно проверяется, что оба построенные выше отображения p_1 и i_1 , осуществляющие гомотопическую эквивалентность $F^1 \sim F^1 \times \mu$, а также соответствующие гомотопии являются $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эквивариантными (см. обозначение 2.3 и определение 2.4). Например, для любых $h \in \text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ и $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ выполнено

$$\begin{aligned} i_1(h^*(f)) &= i_1(f \circ h) = (f \circ h, ds_0^2) = (f \circ h, h^*(ds_0^2)) = h^*(f, ds_0^2) = h^*(i_1(f)), \\ p_1(h^*(f, ds^2)) &= p_1(f \circ h, h^*(ds^2)) = f \circ h = h^*f = h^*(p_1(f, ds^2)). \end{aligned}$$

§ 8. Равномерная $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантная лемма Морса

Здесь мы напомним формулировки (лемма 8.2) и завершим доказательство результатов из [15; теорема 3, лемма 2 и следствие], а именно, докажем следствие 8.3 и непрерывность $\mathcal{D}^\pm$ -инвариантных функций $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(f, ds^2)$ и $r'_0 = r'_0(f, ds^2)$ и набора $p + q + r$ $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантных отображений

$$F \times \mu \rightarrow \text{Emb}(\overline{D}, M), \quad (f, ds^2) \mapsto \phi_\ell \circ \mu_{\sqrt{\varepsilon_2}}, \quad 1 \leq \ell \leq p + q + r$$

(см. § 10, пп. 1)–12)). Здесь $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ – стандартный замкнутый единичный двумерный диск, $\mu_\theta: \overline{D} \rightarrow \theta\overline{D}$, $\mu_\theta(x, y) := (\theta x, \theta y)$, $(x, y) \in \overline{D}$. Результаты § 8 будут использованы в § 9 при построении отображения $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$. В этом параграфе мы предполагаем, что число $p + q + r$ критических точек функций Морса положительно, а поверхность M не обязательно ориентируема.

Здесь мы построим по любой паре $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ и по любому набору ξ одномерных подпространств $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ касательных пространств $T_{w_\ell}M$ в критических точках $w_\ell = w_\ell(f)$ локальных минимумов и максимумов функции f следующие объекты: вещественное число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(f, ds^2) > 0$, попарно не пересекающиеся замкнутые окрестности $\overline{U}_\ell \ni w_\ell$ критических точек и локальные координаты u, v в каждой из этих окрестностей, $\overline{U}_\ell = \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_2\}$, в которых выполнено утверждение леммы Морса [12], т.е.

$$f|_{U_\ell} = \pm u^2 \pm v^2 + f(w_\ell), \quad (10)$$

$1 \leq \ell \leq p + q + r$, причем седловой критической точке w_ℓ отвечает пара знаков $(+, -)$, а точке w_ℓ локального минимума (максимума) – пара $(+, +)$ (соответственно $(-, -)$). Другими словами, мы построим такой набор гладких вложений ϕ_ℓ круга $V = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$ в M , $1 \leq \ell \leq p + q + r$, что $\phi_\ell(0, 0) = w_\ell$, замыкания образов $U_\ell = \phi_\ell(V)$ попарно не пересекаются и

$$f \circ \phi_\ell = \pm u^2 \pm v^2 + f(w_\ell).$$

При этом число ε_2 (соответственно вложение ϕ_ℓ) будет непрерывно и $\mathcal{D}^\pm$ -инвариантно (соответственно $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантно) зависеть от тройки (f, ds^2, ξ) по отношению к C^∞ -топологии на пространстве $F \times \mu$ (см. § 4, (а), (в)) и обычной топологии на проективизованном касательном расслоении PTM поверхности M (соответственно по отношению к правому действию группы $\mathcal{D}^\pm$ на пространствах $F \times \mu \times (PTM)^{p+r}$ и $C^\infty(\overline{V}, M)$, см. [15; теорема 3(B)]). В классической лемме Морса [12] доказывается существование аналогичных локальных координат для отдельной функции Морса f вблизи критической точки, без оценок радиуса координатной окрестности. Основываясь на доказательстве леммы Морса, мы получим нижнюю оценку для этого радиуса, позволяющую построить координатные окрестности для всех функций Морса одновременно, непрерывным и $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантным образом зависящие от функции Морса и римановой метрики.

Пусть $f \in F^{\text{num}}$ – функция Морса и $ds^2 \in \mu$ – риманова метрика на поверхности M . Определим q вещественных чисел: пусть $L_j = L_j(f, ds^2) > 0$ – нижняя грань длин замкнутых нестягиваемых кривых в метрике ds^2 на проколотовой поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ с началом и концом в седловой критической точке $y_j = y_j(f)$, $1 \leq j \leq q$. Положим $H = H(ds^2) := \max\{0, \max K\} \geq 0$, где $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ – гауссова кривизна в метрике ds^2 . Положим

$$r'_0 = r'_0(f, ds^2) := \min \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{H}}, \frac{1}{3} \min_j L_j, \frac{1}{3} \min_{\ell_1 \neq \ell_2} \rho(w_{\ell_1}, w_{\ell_2}), \frac{1}{2} \min_{\ell=1}^{p+q+r} \rho(w_\ell, \partial M) \right\} > 0, \quad (11)$$

где $\rho(X, Y)$ – длина кратчайшего пути между подмножествами $X, Y \subset M$ в метрике ds^2 .

В касательной плоскости $T_{w_\ell}M$ каждой критической точки $w_\ell = w_\ell(f)$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, рассмотрим открытый круг $V'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ радиуса r'_0 в смысле метрики $ds^2|_{w_\ell}$. На замыкании этого круга определено экспоненциальное отображение

$$\beta'_\ell: \bar{V}'_\ell \rightarrow M, \quad (12)$$

т.е. отображение, переводящее каждый вектор круга в конец геодезической, выпущенной из w_ℓ с начальным вектором скорости, равным исходному вектору. Это отображение является регулярным погружением, так как $\pi/(2\sqrt{H})$ – радиус инъективности M , см. [41; § 11.8, теорема 11]. Образы $\beta'_\ell(\bar{V}'_\ell)$ этих погружений отстоят друг от друга и от ∂M на расстояния большие либо равные r'_0 , а потому содержатся в $\text{int } M$ и попарно не пересекаются.

Рассмотрим любой набор ξ одномерных подпространств $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ касательных пространств $T_{w_\ell}M$ в критических точках $w_\ell = w_\ell(f) \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ локальных минимумов и максимумов функции f . Для каждой критической точки $w_\ell = w_\ell(f)$ функции f , $1 \leq \ell \leq p + q + r$, выполним следующие построения.

(а) Пусть $(e_1, e_2) = (e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ – положительно ориентированный базис в $T_{w_\ell}M$ (относительно какой-либо локальной ориентации поверхности M в точке w_ℓ), обладающий следующими свойствами. Если w_ℓ – седловая точка, то базис ортогонален в метрике $ds^2|_{w_\ell}$ на $T_{w_\ell}M$, а матрица квадратичной формы $(1/2)d^2f|_{w_\ell}$ в этом базисе является диагональной матрицей $\text{diag}(1, -1)$. Если w_ℓ – точка локального минимума (максимума), то $e_1 \in \xi_\ell$ и базис является ортонормированным в метрике, задаваемой положительно определенной квадратичной формой $(1/2)d^2f|_{w_\ell}$ (соответственно $-(1/2)d^2f|_{w_\ell}$) на $T_{w_\ell}M$. При фиксированном наборе прямых ξ эти условия определяют базис с точностью до замены (e_1, e_2) на $(-e_1, -e_2)$, а при смене локальной ориентации эта пара базисов заменяется на $(e_1, -e_2)$ и $(-e_1, e_2)$. Ниже (см. замечания 8.1, 8.4, 9.5, 9.7, 9.8) будет показано, что такой произвол в выборе базиса несуществен для однозначного построения замкнутой 1-формы $\alpha = \alpha(f, ds^2, \xi)$ – “оснащения” функции Морса $f \in F^1$, и для однозначного построения оснащенной функции Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, где $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2)$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2)$.

(б) Обозначим через x, y координаты в $T_{w_\ell}M$ по отношению к базису (e_1, e_2) . В этих координатах круг $\bar{V}'_\ell$ является эллипсом

$$\{\langle e_1, e_1 \rangle x^2 + 2\langle e_1, e_2 \rangle xy + \langle e_2, e_2 \rangle y^2 \leq r_0'^2\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в метрике $ds^2|_{w_\ell}$ на $T_{w_\ell}M$. Полуоси этого эллипса равны $r'_0/\sqrt{\lambda_{\ell,+}}$ и $r'_0/\sqrt{\lambda_{\ell,-}}$, где

$$\lambda_{\ell,\pm} := \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \right),$$

$$a_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle, \quad a_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad a_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle.$$

(в) Рассмотрим в эллипсе $\bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ с координатами x, y гладкую функцию

$$\hat{f} := f \circ \beta'_\ell. \quad (13)$$

Положим

$$C := \max_{\ell, \xi_\ell, (x, y) \in \bar{V}'_\ell, 0 \leq k \leq 3} \left| \frac{\partial^3 \hat{f}(x, y)}{\partial x^k \partial y^{3-k}} \right| \geq 0, \quad r_0 := \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}C}, \min_{\ell, \xi_\ell} \frac{r'_0}{\sqrt{\lambda_{\ell,+}}} \right\} > 0, \quad (14)$$

где в определении числа C (соответственно r_0) максимум (соответственно минимум) берется по всем четверкам $(\ell, \xi_\ell, (x, y), k)$ (соответственно парам (ℓ, ξ_ℓ)), где $0 \leq k \leq 3$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, $w_\ell = w_\ell(f)$ – критическая точка функции f , $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ – любое одномерное подпространство касательного пространства в этой точке, которое в случае седловой критической точки w_ℓ однозначно определим условием $e_{\ell,1} \in \xi_\ell$, и (x, y) – координаты любой точки круга $\bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ в базисе $e_{\ell,1}, e_{\ell,2} \in T_{w_\ell}M$ (отвечающем прямой ξ_ℓ в случае критической точки локального минимума или максимума).

(г) Следуя доказательству леммы Морса (см. [12]), определим в круге

$$\bar{V}_\ell := \{x^2 + y^2 \leq r_0^2\} \subset \bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$$

с координатами x, y новые локальные координаты u, v следующим образом. Определим в круге $\bar{V}_\ell$ функции

$$\begin{aligned} a(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{xx}(tux, tuy) dt du, & b(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{xy}(tux, tuy) dt du, \\ c(x, y) &:= \int_0^1 \int_0^1 t \hat{f}_{yy}(tux, tuy) dt du, & (x, y) &\in \bar{V}_\ell \subset T_{w_\ell}M. \end{aligned}$$

Тогда $\hat{f}(x, y) = a(x, y)x^2 + 2b(x, y)xy + c(x, y)y^2 + f(w_\ell)$. Поэтому при выполнении неравенства $a(x, y) \neq 0$ (которое будет доказано чуть ниже, см. лемму 8.2) выполнено

$$\hat{f}|_{\bar{V}_\ell}(x, y) = a(x, y) \left(x + \frac{b(x, y)}{a(x, y)} y \right)^2 + \left(c(x, y) - \frac{b(x, y)^2}{a(x, y)} \right) y^2 + f(w_\ell). \quad (15)$$

Определим в круге $\bar{V}_\ell$ функции

$$u = u(x, y) := |a(x, y)|^{1/2} \left(x + \frac{b(x, y)}{a(x, y)} y \right), \quad v = v(x, y) := \left| c(x, y) - \frac{b(x, y)^2}{a(x, y)} \right|^{1/2} y. \quad (16)$$

Согласно (15) и (16) имеем $\hat{f}|_{\bar{V}_\ell}(x, y) = f(w_\ell) \pm u(x, y)^2 \pm v(x, y)^2$, $(x, y) \in \bar{V}_\ell$, квадратичная форма (10) зависит от функций u, v .

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Нетрудно видеть, что при замене базиса (e_1, e_2) на базис $(\theta_1 e_1, \theta_2 e_2)$ (для $\theta_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, 2$) константы H , r'_0 , C , r_0 и круг $\bar{V}_\ell$ не изменятся, а для любой точки круга $\bar{V}_\ell$ координаты (x, y) этой точки заменятся на $(\theta_1 x, \theta_2 y)$ и поэтому значения функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в этой точке заменятся на $\theta_1 u(x, y)$, $\theta_2 v(x, y)$.

ЛЕММА 8.2 (О локальных координатах в лемме Морса; см. [15; лемма 2]). Пусть M – (не обязательно ориентируемая) компактная двумерная поверхность, $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$, w_ℓ – критическая точка функции Морса f . Пусть $\bar{V}_\ell \subset \bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ – круги радиусов r_0 и r'_0 (см. (11) и (14)) с центром в нуле в смысле координат x, y и римановой метрики $ds^2|_{w_\ell}$ соответственно. Тогда в любой точке $(x, y) \in \bar{V}_\ell$ справедливы следующие неравенства:

- (а) $a(x, y) \neq 0$, $a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 \neq 0$;
 (б) $xu(x, y) + yv(x, y) \geq (4/5)(x^2 + y^2)$;
 (в) якобиан отображения $h_\ell: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ положителен, т.е. $u_x(x, y)v_y(x, y) - v_x(x, y)u_y(x, y) > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. В условиях леммы 8.2 положим $\varepsilon_2 := (4r_0/5)^2$. Тогда для любой точки (u_0, v_0) круга $\bar{V} := \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$ существует ровно одна точка (x_0, y_0) в круге $\bar{V}_\ell \subset T_{w_\ell}M$ со свойством $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$. Сопоставление $(u_0, v_0) \mapsto (x_0, y_0)$ задает гладкое вложение кругов $\beta_\ell: \bar{V} \rightarrow \bar{V}_\ell$, причем погружение

$$\phi_\ell := \beta'_\ell \circ \beta_\ell: \bar{V} \rightarrow M$$

является вложением и обладает свойством $f \circ \phi_\ell = f(w_\ell) + u^2 - v^2$ в случае седловой точки w_ℓ и $f \circ \phi_\ell = f(w_\ell) \pm (u^2 + v^2)$ в случае точки w_ℓ локального минимума или максимума. В частности, погружение $\beta'_\ell|_{\beta_\ell(\bar{V})}: \beta_\ell(\bar{V}) \rightarrow M$ является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Рассмотрим отображение $h_\ell: \bar{V}_\ell \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Оно гладкое в силу (16) и леммы 8.2, (а). Рассмотрим произвольную точку $(u_0, v_0) \in \bar{V}$. Из леммы 8.2, (б) следует, что либо точка (u_0, v_0) не принадлежит петле $h_\ell|_{\partial\bar{V}_\ell}$ и ее индекс относительно этой петли равен 1, либо эта точка принадлежит $\partial\bar{V}$ и имеет единственный прообраз $h_\ell^{-1}(u_0, v_0) = \{(5/4)(u_0, v_0)\} \subset \partial\bar{V}_\ell$. В первом случае индекс точки относительно петли $h_\ell|_{\partial\bar{V}_\ell}$ равен сумме индексов точек прообраза точки (u_0, v_0) при отображении h_ℓ . (Это следует из теоремы о сумме индексов нулей векторного поля в ограниченной области на плоскости, примененной к векторному полю $\xi(x, y) = (u(x, y) - u_0, v(x, y) - v_0)$.) По лемме 8.2, (в) все точки прообраза невырождены и якобианы в них положительны, поэтому индекс каждой точки прообраза равен +1. Таким образом, у точки (u_0, v_0) имеется единственный прообраз $h_\ell^{-1}(u_0, v_0)$, причем он невырожден с положительным якобианом. Следовательно, $\beta_\ell := h_\ell^{-1}|_{\bar{V}}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}_\ell$ является гладким вложением кругов.

Так как $\beta'_\ell: \bar{V}_\ell \rightarrow M$ – погружение (см. (12)) то композиция $\phi_\ell = \beta'_\ell \circ \beta_\ell: \bar{V} \rightarrow M$ является погружением.

Шаг 2. Докажем предпоследнее утверждение следствия. Из определения функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в круге $\bar{V}_\ell$, см. (15), (16), имеем

$$f \circ \beta'_\ell|_{\bar{V}_\ell} = \hat{f}|_{\bar{V}_\ell} = (f(w_\ell) \pm u^2 \pm v^2) \circ h_\ell.$$

Так как $h_\ell \circ \beta_\ell = h_\ell \circ h_\ell^{-1}|_{\bar{V}} = \text{id}_{\bar{V}}$, то в круге $\bar{V}$ выполнено тождество

$$f \circ \phi_\ell = f \circ \beta'_\ell \circ \beta_\ell = (f(w_\ell) \pm u^2 \pm v^2) \circ h_\ell \circ \beta_\ell = f(w_\ell) \pm u^2 \pm v^2.$$

Шаг 3. Покажем, что погружение $\phi_\ell: \bar{V} \rightarrow M$ инъективно, т.е. является вложением. Предположим противное. Тогда найдется число $R \in (0, \varepsilon_2]$ – минимальное число такое, что ограничение ϕ_ℓ на круг $\bar{D} = \bar{D}_R := \{u^2 + v^2 \leq R\} \subset \bar{V}$ не инъективно, т.е. в этом круге существуют две различные точки $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ со свойством $\phi_\ell(u_1, v_1) = \phi_\ell(u_2, v_2)$. Из минимальности R и того, что ϕ_ℓ – погружение (см. шаг 1), следует, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \partial\bar{D}$, т.е. $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2 = R$. Рассмотрим столь малые непересекающиеся окрестности $W_\eta := \bar{D} \cap \{(u - u_\eta)^2 + (v - v_\eta)^2 < \varepsilon\} \ni (u_\eta, v_\eta)$ этих точек в $\bar{D}$, что

$\phi_{\ell,\eta} := \phi_\ell|_{W_\eta} : W_\eta \rightarrow \phi_\ell(W_\eta)$ являются диффеоморфизмами, $\eta = 1, 2$. Тогда многообразия с краем $\phi_\ell(W_1), \phi_\ell(W_2) \subset M$ имеют общую краевую точку $z := \phi_\ell(u_1, v_1) = \phi_\ell(u_2, v_2) \in \phi_\ell(\partial W_1) \cap \phi_\ell(\partial W_2)$ и любая их общая точка принадлежит их краям. Следовательно, внешние нормали к этим многообразиям в точке z имеют противоположные направления. Значит, для некоторого числа $\lambda > 0$

$$(\phi_{\ell,1}^{-1})^* d(u^2 + v^2)|_z = -\lambda(\phi_{\ell,2}^{-1})^* d(u^2 + v^2)|_z. \quad (17)$$

Шаг 3а. Если w_ℓ – точка локального минимума, то

$$(u^2 + v^2) \circ \phi_{\ell,\eta}^{-1} = (f + 1)|_{\phi_\ell(W_\eta)}.$$

Поэтому

$$(\phi_{\ell,\eta}^{-1})^* d(u^2 + v^2) = d(f + 1)|_{\phi_\ell(W_\eta)} = df|_{\phi_\ell(W_\eta)}, \quad \eta = 1, 2.$$

Отсюда и из (17) имеем $df|_z = -\lambda df|_z$. Поэтому $df|_z = 0$, откуда следует, что $z = w_\ell$. Получаем противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда w_ℓ – точка локального максимума.

Шаг 3б. Пусть $w_\ell = y_j$ – седловая точка. Тогда

$$(u^2 - v^2) \circ \phi_{\ell,\eta}^{-1} = (f - c_j)|_{\phi_\ell(W_\eta)},$$

где $c_j = f(y_j)$, $1 \leq j \leq q$. Кроме того, для функций

$$g_{\ell,\eta} := (2uv) \circ \phi_{\ell,\eta}^{-1} : \phi_\ell(W_\eta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta = 1, 2,$$

имеем

$$(u^2 + v^2) \circ \phi_{\ell,\eta}^{-1} = \sqrt{(f - c_j)^2 + g_{\ell,\eta}^2}|_{\phi_\ell(W_\eta)}.$$

Отсюда и из тождества $d(u^2 - v^2) \wedge d(u^2 + v^2) = 8uv \, du \wedge dv$ имеем тождества

$$\begin{aligned} (\phi_{\ell,\eta}^{-1})^* d(u^2 + v^2) &= d\sqrt{(f - c_j)^2 + g_{\ell,\eta}^2}|_{\phi_\ell(W_\eta)} = \frac{(f - c_j)df + g_{\ell,\eta}dg_{\ell,\eta}}{\sqrt{(f - c_j)^2 + g_{\ell,\eta}^2}}|_{\phi_\ell(W_\eta)}, \\ df|_{\phi_\ell(W_\eta)} \wedge (\phi_{\ell,\eta}^{-1})^* d(u^2 + v^2) &= 4g_{\ell,\eta} \cdot (\phi_{\ell,\eta}^{-1})^* (du \wedge dv), \quad \eta = 1, 2. \end{aligned}$$

Из этих четырех тождеств и из соотношения (17) получаем следующие два соотношения:

$$\frac{(f(z) - c_j)df + g_{\ell,1}(z)dg_{\ell,1}}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_{\ell,1}^2(z)}}|_z = -\lambda \frac{(f(z) - c_j)df + g_{\ell,2}(z)dg_{\ell,2}}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_{\ell,2}^2(z)}}|_z, \quad (18)$$

$$g_{\ell,1}(z) \cdot (\phi_{\ell,1}^{-1})^* (du \wedge dv)|_z = -\lambda g_{\ell,2}(z) \cdot (\phi_{\ell,2}^{-1})^* (du \wedge dv)|_z. \quad (19)$$

Из точки $w_\ell = y_j$ в точку $z = \phi_\ell(u_1, v_1) = \phi_\ell(u_2, v_2)$ ведут два различных отрезка геодезических $\gamma_\eta(t) := \beta'_\ell(t\beta_\ell(u_\eta, v_\eta))$, $0 \leq t \leq 1$, $\eta = 1, 2$, в $\phi_\ell(\bar{D}) \subset \beta'_\ell(\bar{V}_\ell) \subset \beta'_\ell(\bar{V}'_\ell)$. Покажем, что образованная ими петля $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ в $\beta'_\ell(\bar{V}'_\ell)$ не стягиваема в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$.

Если петля $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ меняет локальную ориентацию поверхности M , то она автоматически не стягиваема в M , а потому и в $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Пусть петля $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ сохраняет локальную ориентацию поверхности M . Отсюда и из того, что ϕ_ℓ является погружением, имеем $0 \neq (\phi_{\ell,1}^{-1})^* (du \wedge dv)|_z = \mu(\phi_{\ell,2}^{-1})^* (du \wedge dv)|_z$

для некоторого $\mu > 0$. Отсюда и из соотношения (19) получаем два случая: либо $g_{\ell,1}(z) = g_{\ell,2}(z) = 0$, либо $g_{\ell,1}(z)g_{\ell,2}(z) < 0$. Первый случай невозможен, так как из $g_{\ell,1}(z) = g_{\ell,2}(z) = 0$ и из соотношения (18) следует $f(z) = c_j$, откуда $u_1^2 - v_1^2 = 2u_1v_1 = 0$, т.е. $z = w_\ell$ и мы получаем противоречие. Поэтому $g_{\ell,1}(z)g_{\ell,2}(z) < 0$ и, следовательно, точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) лежат во внутренних соседних квадрантах. Рассмотрим регулярную кривую $\gamma'_\eta: [0, 1] \rightarrow \overline{D} \cap \{u^2 - v^2 = f(z) - c_j\}$ из точки $(u_\eta, v_\eta) = \gamma'_\eta(0)$ до некоторой точки $(u'_\eta, v'_\eta) = \gamma'_\eta(1)$ на координатной оси, $\eta = 1, 2$. Тогда радиус-векторы $\gamma'_1(1), \gamma'_2(1)$ либо одновременно равны нулю (если $f(z) = c_j$), либо коллинеарны, откуда $\gamma'_1(1) = \pm \gamma'_2(1)$ в силу $(u'_1)^2 - (v'_1)^2 = (u'_2)^2 - (v'_2)^2$.

Случай 1: $\gamma'_1(1) = \gamma'_2(1)$. Тогда петля $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ в $\phi_\ell(\overline{D}) \subset \beta'_\ell(\overline{V}'_\ell)$ является либо регулярной компонентой линии уровня $f^{-1}(f(z))$ функции f , либо петлей на графе $f^{-1}(f(z))$. Поэтому петля $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ не стягиваема в $M \setminus \{x_i, z_k\}$ (так как в противном случае она ограничивала бы круг в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$, на границе которого функция $f|_{M \setminus \{x_i, z_k\}}$ постоянна, а потому внутри круга функция имела бы критическую точку локального минимума или максимума, что невозможно для функции $f|_{M \setminus \{x_i, z_k\}}$).

Случай 2. $\gamma'_1(1) = -\gamma'_2(1)$. Проведем в круге D отрезок $\gamma'(t) = (1-t)(u'_1, v'_1) + t(u'_2, v'_2)$, $0 \leq t \leq 1$. Предположим, что петля $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ стягиваема в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Тогда она ограничивает круг $\overline{B}$ в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$, а функция $f|_{\overline{B}}$ на внутренности круга не имеет локальных минимумов и локальных максимумов и поэтому достигает минимум и максимум на границе круга $\overline{B}$, т.е. на петле $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$. Поэтому функция $f|_{\overline{B}}$ принимает значения в отрезке от $f(z)$ до $f(w_\ell)$. Но это противоречит тому, что в сколь угодно малой окрестности кривой $\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2$ в $\overline{D} \subset \overline{V}$ по любую сторону от этой кривой функция $f \circ \phi_\ell = u^2 - v^2 + f(w_\ell)$ принимает значения вне указанного отрезка. Поэтому петля $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ не стягиваема в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$.

Так как петля $\gamma_1^{-1} \gamma_2$ гомотопна в $\phi_\ell(\overline{D}) \subset \beta'_\ell(\overline{V}'_\ell)$ петле $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ (в первом случае) или петле $\phi_\ell \circ (\gamma'_1 \gamma'^{-1}_2)$ (во втором случае), то она тоже не стягиваема в $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Так как длины отрезков геодезических γ_1, γ_2 не превосходят радиуса r'_0 круга $\beta'_\ell(\overline{V}'_\ell)$, то длина петли $\gamma_1^{-1} \gamma_2$ не превосходит $2r'_0$. Поэтому нестягиваемость петли $\gamma_1^{-1} \gamma_2$ в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ противоречит определению (11) радиуса r'_0 круга $\beta'_\ell(\overline{V}'_\ell)$.

Шаг 4. Так как β_ℓ и $\phi_\ell = \beta'_\ell \circ \beta_\ell: \overline{V} \rightarrow M$ – вложения, то $\beta'_\ell|_{\beta_\ell(\overline{V})}$ – тоже вложение. Следствие 8.3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. При замене базиса (e_1, e_2) на базис $(\theta_1 e_1, \theta_2 e_2)$ (для $\theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}$) вложение круга $\phi_\ell: \overline{V} \rightarrow M$ заменится на $\phi_\ell \circ J_{\theta_1, \theta_2}$, где диффеоморфизм $J_{\theta_1, \theta_2}: \overline{V} \rightarrow \overline{V}$ определяется формулой $J_{\theta_1, \theta_2}(u, v) := (\theta_1 u, \theta_2 v)$, $(u, v) \in \overline{V}$. Поэтому образ $\overline{U}_\ell := \phi_\ell(\overline{V})$ не изменится, а возникающие на нем координаты $(u, v): \overline{U}_\ell \rightarrow \overline{V}$ заменятся на $(\theta_1 u, \theta_2 v)$.

§ 9. Пространство $\mathbb{F}^1$ оснащенных функций Морса и построение оснащения для любой функции Морса

Здесь определяются пространства $\mathbb{F} \supset \mathbb{F}^1$, доказывается сюръективность в теоремах 1.7, (Б) и 2.5, (Б) и строится отображение $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$, $(f, ds^2) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. *Оснащенной функцией Морса на ориентированной поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ назовем пару (f, α) , где $f \in F$ – функция Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, α – замкнутая 1-форма на $M \setminus \{x_i(f), z_j(f)\}$ такие, что*

- 1) в любой точке $x \in M \setminus \{x_i(f), y_j(f), z_k(f)\}$ ковекторы $df|_x, \alpha|_x$ линейно независимы и образованный ими базис кокасательного пространства в точке x к M положительно ориентирован;
- 2) в окрестности любой седловой критической точки $x = y_j$ существуют положительно ориентированные локальные координаты u, v , в которых $f = u^2 - v^2 + c_j$, $\alpha = d(2uv)$, где $c_j = f(y_j) = \text{const}$;
- 3) в окрестности любой критической точки $x = w_\ell$ локального минимума или локального максимума существуют положительно ориентированные локальные координаты u, v , в которых $f = \pm(u^2 + v^2) + c_\ell$, $\alpha = \varkappa_\ell(udu - vdu)/u^2 + v^2$, где $c_\ell = f(w_\ell) = \text{const}$, причем $\varkappa_\ell = \text{const} > 0$ в случае локального минимума и $\varkappa_\ell = \text{const} < 0$ в случае локального максимума.

Пространство оснащенных функций Морса обозначим через $\mathbb{F}$. Обозначим через $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ подпространство, состоящее из оснащенных функций Морса (f, α) , для которых $f \in F^1$ (см. определение 2.1). Наделим пространство $\mathbb{F}$ C^∞ -топологией (см. п. 4.2), а подпространство $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ – индуцированной топологией.

9.1. Построение $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантного отображения $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$. Здесь строится $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантное отображение $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$, $(f, ds^2) \mapsto (f, \tilde{\alpha})$.

Для любой пары $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ мы построим оснащенную функцию Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$. Мы также построим по паре (f, ds^2) и любому набору ξ (касательных прямых в точках локальных минимумов и максимумов функции f , см. выше) замкнутую 1-форму α со свойствами из определения 9.1 (см. шаг 6 ниже). При этом поверхность M ориентирована, 2-формы $d\tilde{f} \wedge \tilde{\alpha}$ и $df \wedge \alpha$ задают положительную ориентацию поверхности M и при смене ее ориентации пара $(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ заменится на $(\tilde{f}, -\tilde{\alpha})$, а 1-форма α заменится на $-\alpha$.

Проведем построение пары $(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ за пять шагов. На 6-ом шаге будет построена 1-форма α .

Шаг 1. Построим трехпараметрическое семейство функций $I_{a,b,v}$, аналогичное двухпараметрическому семейству функций $I_{a,b}$ из (6). Положим

$$\begin{aligned} I_{0,1,v}(t) &:= \frac{v+1}{2} \int_0^t (I_{0,(v-1)/(v+1)}(u) - I_{2/(v+1),1}(u)) du, \quad v, t \in \mathbb{R}, \quad 1 < v \leq 3, \\ I_{0,1,v}(t) &:= I_{0,1,3}(t), \quad 3 < v \leq \infty, \\ I_{a,b,v}(t) &:= I_{0,1,v}\left(\frac{t-a}{b-a}\right), \quad a, b, v, t \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad 1 < v \leq \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как при $1 < v \leq 3$ имеем $(v-1)/(v+1) \leq 1/2 \leq 2/(v+1) < 1$, то подынтегральная функция из выражения для $I_{0,1,v}$ всюду неотрицательна и не превосходит единицы, а потому всюду $0 \leq I'_{0,1,v}(t) \leq (v+1)/2 < v$. Значит,

$$0 \leq I'_{a,b,v}(t) < \frac{v}{b-a}, \quad a < b, \quad 1 < v \leq \infty. \quad (21)$$

Кроме того, для любого $v \in (1, 3]$ имеем

$$\begin{cases} I_{0,1,v}(t) \equiv 0 & \text{при } t \leq \frac{v-1}{3(v+1)}, \\ I_{0,1,v}(t) \equiv 1 & \text{при } t \geq 1 - \frac{v-1}{3(v+1)}, \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} I_{a,b,v}(t) \equiv 0 & \text{при } t \leq a + \frac{(v-1)(b-a)}{3(v+1)}, \\ I_{0,1,v}(t) \equiv 1 & \text{при } t \geq b - \frac{(v-1)(b-a)}{3(v+1)}. \end{cases}$$

Шаг 2. На этом шаге мы построим по паре $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ пару $(\tilde{f}, d\tilde{s}^2) \in F^1 \times \mu$, отличающуюся от (f, ds^2) только в малых окрестностях критических точек функции f , причем $\tilde{f}$ имеет те же критические точки, что и f (в частности, при $p+q+r=0$ положим $(\tilde{f}, d\tilde{s}^2) := (f, ds^2)$). Эти окрестности критических точек строятся так.

(а) Пусть $w_\ell \in \{x_i, y_j, z_k\}$ – любая критическая точка функции f . Обозначим

$$U_\ell := \phi_\ell(V), \quad (22)$$

где число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(f, ds^2) > 0$, открытый круг $V \subset \mathbb{R}^2$ радиуса $\sqrt{\varepsilon_2}$ и его вложение ϕ_ℓ в M определены по паре (f, ds^2) (а также по касательной прямой $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ в случае точки w_ℓ локального минимума или максимума, см. выше) как в следствии 8.3. Перенесением при помощи ϕ_ℓ стандартных координат из плоскости $\mathbb{R}^2$ получаем координаты u, v в U_ℓ , в которых

$$U_\ell = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\}, \quad f|_{U_\ell} = f(w_\ell) \pm u^2 \pm v^2. \quad (23)$$

В частности, все седловые критические значения f содержатся в отрезке $[-1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2]$.

(б) Пусть $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ – точка локального минимума или максимума функции f . Рассмотрим область $\beta_\ell(V) \subset V_\ell = \{x^2 + y^2 < r_0^2\} \subset V'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ (см. следствие 8.3), а также круг

$$\overline{V}_\ell'' := \left\{ x^2 + y^2 \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2 \right\}$$

относительно координат x, y в $T_{w_\ell}M$. Пусть погружение $\beta'_\ell: \overline{V}'_\ell \rightarrow M$ определено по паре (f, ds^2) как в (12). Согласно следствию 8.3 $\beta'_\ell|_{\beta_\ell(V)}$ является вложением с образом $U_\ell := \beta'_\ell(\beta_\ell(V))$. По лемме 9.2, приведенной ниже, имеем

$$\overline{U}_\ell'' := \beta'_\ell(\overline{V}_\ell'') \subset \phi_\ell \left\{ u^2 + v^2 < \frac{3}{4}\varepsilon_2 \right\} \subset \phi_\ell \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} = U_\ell := \beta'_\ell(\beta_\ell(V)).$$

Таким образом,

$$\overline{V}_\ell'' \subset \beta_\ell(V) \subset V_\ell \subset V'_\ell \subset T_{w_\ell}M.$$

Заметим, что $|(1/2)d^2f|_{w_\ell}|$ является положительно определенной квадратичной формой в точке нуля касательной плоскости $T_{w_\ell}M$. Рассмотрим евклидову риманову метрику на этой касательной плоскости, полученную из $|(1/2)d^2f|_{w_\ell}|$

параллельным переносом во все точки плоскости. Обратный образ этой римановой метрики при гомеоморфизме $(\beta'_\ell)^{-1}|_{U_\ell} : U_\ell \rightarrow \beta_\ell(V) \subset T_{w_\ell}M$ является евклидовой римановой метрикой на U_ℓ , которую обозначим через ds_ℓ^2 . Отметим, что $(1/2)d^2f|_{w_\ell}$ является также гладкой функцией на касательной плоскости $T_{w_\ell}M$, а значит, функция

$$f_\ell := \frac{1}{2}d^2f|_{w_\ell} \circ (\beta'_\ell)^{-1}|_{U_\ell}$$

является гладкой функцией в окрестности U_ℓ точки w_ℓ . Перенесением при помощи $\beta'_\ell|_{\beta_\ell(V)}$ координат x, y из касательной плоскости $T_{w_\ell}M$ получаем координаты x, y в $U_\ell = \beta'_\ell(\beta_\ell(V))$ (зависящие от выбора прямой $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$, а при фиксированной прямой определенные с точностью до преобразования $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, см. замечание 9.7 ниже). В координатах x, y область U_ℓ отождествляется с окрестностью начала координат в $\mathbb{R}^2$, которая по лемме 9.2 ниже содержит круг $\bar{U}_\ell'' = \{x^2 + y^2 \leq 2\varepsilon_2/3\}$. В координатах x, y на U_ℓ имеем

$$\bar{U}_\ell'' = \left\{x^2 + y^2 \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2\right\} \subset U_\ell, \quad f_\ell = \pm(x^2 + y^2), \quad ds_\ell^2 = dx^2 + dy^2, \quad (24)$$

где точке w_ℓ локального минимума (соответственно максимума) функции f отвечает знак $+$ (соответственно $-$). Следующая лемма 9.2 доказывает включение $\bar{U}_\ell'' \subset U_\ell$ в (24).

ЛЕММА 9.2. Пусть $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ – точка локального минимума или максимума функции f . Тогда в замкнутой круговой окрестности

$$\bar{V}_\ell'' = \left\{x^2 + y^2 \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2\right\} \subset V_\ell = \{x^2 + y^2 < r_0^2\} \subset V'_\ell \subset T_{w_\ell}M$$

выполнено неравенство $|f \circ \beta'_\ell - f(w_\ell)| < 3\varepsilon_2/4$, т.е.

$$\bar{U}_\ell'' = \beta'_\ell(\bar{V}_\ell'') \subset \phi_\ell \left\{u^2 + v^2 < \frac{3}{4}\varepsilon_2\right\} \subset U_\ell = \phi_\ell \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \subset M.$$

В частности, $\bar{U}_\ell'' \subset U_\ell$ (см. (22) и (23)).

Итак, образ $\beta'_\ell\{2\varepsilon_2/3 < x^2 + y^2 < r_0^2\} \subset M$ открытого кольца $\{2\varepsilon_2/3 < x^2 + y^2 < r_0^2\} \subset V_\ell \subset T_{w_\ell}M$ при погружении $\beta'_\ell|_{V_\ell} : V_\ell \rightarrow M$ содержит кольцо $\phi_\ell\{3\varepsilon_2/4 \leq u^2 + v^2 \leq \varepsilon_2\} \subset \bar{U}_\ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности w_ℓ – точка локального минимума функции f .

Для любой прямой $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$, содержащей точку нуль, рассмотрим отрезок этой прямой $\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell$. Рассмотрим на этом отрезке функцию $f_{\xi_\ell} := f \circ \beta'_\ell|_{\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell} - f(w_\ell)$.

Пусть $s \in [-r_0, r_0]$ – натуральный параметр на отрезке $\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell$ в смысле римановой метрики $|(1/2)d^2f|_{w_\ell}|$ на $T_{w_\ell}M$ (а потому $f_\ell \circ \beta'_\ell|_{\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell}(s) = (x^2 + y^2)|_{\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell}(s) = s^2$, $|s| \leq r_0$). Покажем сначала, что

$$|f_{\xi_\ell}(s) - s^2| \leq C \frac{|s|^3}{6}, \quad \left| \frac{d}{ds} f_{\xi_\ell}(s) - 2s \right| \leq C \frac{s^2}{2}, \quad |s| \leq r_0, \quad (25)$$

где константа $C > 0$ определена в (14). Пусть координаты x, y в $T_{w_\ell} M$ построены по одномерному подпространству $\xi_\ell \subset T_{w_\ell} M$ (см. (14)). В этих координатах $\bar{V}_\ell = \{x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$ и $\xi_\ell = \{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Поэтому

$$f_{\xi_\ell}(s) = \hat{f}(s, 0) - f(w_\ell) = a(s, 0)s^2, \quad \frac{d}{ds}f_{\xi_\ell}(s) = a_x(s, 0)s^2 + 2a(s, 0)s$$

(см. (13) и (15)). Из оценок $|a(s, 0) - 1| \leq C|s|/6$ и $|a_x(s, 0)| \leq C/6$ (см. определение функции $a = a(x, y)$) получаем (25).

Из определений чисел ε_2, r_0 в (14) и следствии 8.3 следует, что $\varepsilon_2 = 16r_0^2/25$ и $5\sqrt{\varepsilon_2}/4 = r_0 \leq 1/(\sqrt{2}C)$.

При $s^2 \leq 2\varepsilon_2/3$ в силу оценки $C\sqrt{\varepsilon_2} \leq 2\sqrt{2}/5$ имеем

$$\begin{aligned} f_{\xi_\ell}(s) &\leq s^2 \left(1 + \frac{C}{6}|s|\right) \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2 \left(1 + \frac{C}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\varepsilon_2}\right) \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2 \left(1 + \frac{2}{15\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon_2 + \frac{4}{45\sqrt{3}}\varepsilon_2 < \frac{3}{4}\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Поэтому в замкнутом круге $\bar{V}_\ell''$ выполнено $|f \circ \beta'_\ell - f(w_\ell)| < 3\varepsilon_2/4 < \varepsilon_2$, откуда $\beta'_\ell(\bar{V}_\ell'') \subset U_\ell$. Лемма доказана.

Далее мы будем считать, что u, v – это локальные координаты в окрестности $U_\ell = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \subset M$ точки w_ℓ и если w_ℓ – критическая точка локального минимума или максимума, то (в силу леммы 9.2) x, y – это локальные координаты в меньшей окрестности $\bar{U}_\ell'' = \{x^2 + y^2 \leq 2\varepsilon_2/3\} \subset \{u^2 + v^2 < 3\varepsilon_2/4\} \subset U_\ell$. Обозначим

$$I := I_{\varepsilon_2/3, 2\varepsilon_2/3, 3}, \quad M' := M \setminus \bigcup_{w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}} U_\ell, \quad M'' := M' \setminus \bigcup_{w_\ell \in \{y_j\}} U_\ell,$$

где функция $I_{a,b,v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с параметрами $a < b, v > 1$ определена формулой (20) (см. шаг 1). Построим новую функцию $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2)$ и новую риманову метрику $\tilde{ds}^2 = \tilde{ds}^2(f, ds^2)$ на M , совпадающие с f на M' и ds^2 на M'' (соответственно), а внутри кругов $U_\ell, w_\ell \in \{x_i\} \cup \{y_j\} \cup \{z_k\}$ определенные следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{f}|_{M'} &:= f|_{M'}, \\ \tilde{f}|_{U_\ell} &:= (1 - I \circ |f_\ell|)(f(w_\ell) + f_\ell) + (I \circ |f_\ell|)f|_{U_\ell}, \quad w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}, \\ \tilde{ds}^2|_{M''} &:= ds^2|_{M''}, \\ \tilde{ds}^2|_{U_\ell} &:= (1 - I \circ |f_\ell|)ds_\ell^2 + (I \circ |f_\ell|)ds^2|_{U_\ell}, \quad w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}, \\ \tilde{ds}^2|_{U_\ell} &:= (1 - I(u^2 + v^2))(du^2 + dv^2) + I(u^2 + v^2)ds^2|_{U_\ell}, \quad w_\ell \in \{y_j\}, \\ \tilde{ds}^2|_{M''} &:= ds^2|_{M''}, \\ \tilde{ds}^2|_{U_\ell} &:= (1 - I(u^2 + v^2))(du^2 + dv^2) + I(u^2 + v^2)ds^2|_{U_\ell}, \quad w_\ell \in \{x_i, y_j, z_k\}. \end{aligned} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Отметим два следующих свойства построенной пары $(\tilde{f}, \tilde{ds}^2)$.

(а) Пусть $w_\ell \in \{y_j\}$ – седловая критическая точка функции f . Тогда всюду в U_ℓ имеем $\tilde{f} - \tilde{f}(w_\ell) = f - f(w_\ell) = u^2 - v^2$ (квадратичная функция по отношению

к координатам u, v в U_ℓ), см. (23). Так как на отрезке $[0, \varepsilon_2/3]$ функция I тождественно равна нулю, то в круге $\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_2/3\} \subset U_\ell$ имеем $d\tilde{s}^2 = du^2 + dv^2$ (евклидова риманова метрика). Так как на интервале $(2\varepsilon_2/3, \varepsilon_2)$ функция I тождественно равна единице, то в кольце $\{2\varepsilon_2/3 < u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \subset U_\ell$ имеем $d\tilde{s}^2 = ds^2$.

(б) Пусть $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ – точка локального минимума или максимума функции f . Так как на отрезке $[0, \varepsilon_2/3]$ функция I тождественно равна нулю, то в круге $\{|f_\ell| \leq \varepsilon_2/3\} \subset U_\ell$ имеем $d\tilde{s}^2 = ds_\ell^2$ – евклидова риманова метрика, а $\tilde{f} - f(w_\ell) = f_\ell$ – квадратичная функция по отношению к евклидовым координатам x, y этой метрики (см. (24)). По лемме 9.2 выполнено (24), т.е. $\bar{U}_\ell'' \subset U_\ell$, откуда $U_\ell \setminus \bar{U}_\ell''$ гомеоморфно открытому кольцу $S^1 \times (0, 1)$. Так как на интервале $(2\varepsilon_2/3, \infty)$ функция I тождественно равна единице, то в кольце $U_\ell \setminus \bar{U}_\ell'' = \{2\varepsilon_2/3 < |f_\ell|\} \subset U_\ell$ имеем $\tilde{f} = f$ и $d\tilde{s}^2 = ds^2$.

Следовательно, полученная пара $(\tilde{f}, d\tilde{s}^2)$ гладкая на всем M . Если $p + q + r = 0$, т.е. функция f не имеет критических точек, то $(\tilde{f}, d\tilde{s}^2) = (f, ds^2)$. Покажем, что $\tilde{f}$ – функция Морса.

ЛЕММА 9.3. Пусть $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ – точка локального минимума или максимума функции f . Тогда функция $\tilde{f}|_{\bar{U}_\ell}$ в замкнутой окрестности $\bar{U}_\ell$ имеет единственную критическую точку w_ℓ . В частности, $\tilde{f}$ – функция Морса, $\tilde{f} \in F^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности w_ℓ – точка локального минимума функции f . По лемме 9.2 выполнено (24), откуда $\tilde{f}$ гладкая на всей M . В обозначениях доказательства леммы 9.2 при $|s| \leq r_0$ выполнено

$$(\tilde{f} \circ \beta'_\ell|_{\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell})(s) = (1 - I(s^2))s^2 + I(s^2)f_{\xi_\ell}(s) = s^2 + I(s^2)(f_{\xi_\ell}(s) - s^2).$$

Поэтому при $|s| \leq \sqrt{2\varepsilon_2/3} < \sqrt{\varepsilon_2} = 4r_0/5 < r_0$ имеем для некоторых функций $\theta_i = \theta_i(\ell, s)$, $|\theta_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\tilde{f} \circ \beta'_\ell|_{\xi_\ell \cap \bar{V}_\ell})(s) &= 2s + 2sI'(s^2)(f_{\xi_\ell}(s) - s^2) + I(s^2)\left(\frac{d}{ds}f_{\xi_\ell}(s) - 2s\right) \\ &= 2s\left(1 + \theta_1\frac{9}{\varepsilon_2}C\frac{|s|^3}{6} + \theta_2C\frac{|s|}{4}\right) = 2s\left(1 + \theta_3C\sqrt{\varepsilon_2}\frac{6+1}{4}\right) = 2s\left(1 + \theta_4\frac{7}{5\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

в силу неравенств (25), $0 \leq I'(s^2) \leq 9/\varepsilon_2$ (ввиду $0 \leq I'_{a,b,v} < v/(b-a)$, см. (21)), $C\sqrt{\varepsilon_2} \leq 2\sqrt{2}/5$ (ввиду (14) и определения ε_2 в следствии 8.3) и $|s| \leq \sqrt{\varepsilon_2}$. Так как полученное выражение отлично от нуля при $s \neq 0$, то в замкнутом круге $\bar{V}_\ell''$ функция $\tilde{f} \circ \beta'_\ell$ имеет единственную критическую точку нуль. Поэтому в $\bar{U}_\ell'' = \beta'_\ell(\bar{V}_\ell'')$ функция $\tilde{f}$ имеет единственную критическую точку w_ℓ .

Так как $\tilde{f} = f$ в $\bar{U}_\ell \setminus U_\ell''$ и по построению замкнутые окрестности $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{p+q+r}$ попарно не пересекаются и содержат лишь по одной критической точке функции f , то функция $\tilde{f}$ не имеет в $\bar{U}_\ell$ других критических точек кроме точки w_ℓ . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.4. (А) В множестве $f^{-1}[-1 + 3\varepsilon_2/4, 1 - 3\varepsilon_2/4]$ выполнено $\tilde{f} = f$ и $d\tilde{s}^2 = ds^2$.

(Б) Пусть $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ – точка локального минимума или максимума функции f . Рассмотрим ее круговую окрестность U_ℓ (см. (22) и (23)). Тогда $\overline{U}_\ell$ совпадает с компонентой связности точки w_ℓ в каждом из множеств

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(w_\ell) - \varepsilon_2, f(w_\ell) + \varepsilon_2] &= \{|f - f(w_\ell)| \leq \varepsilon_2\}, \\ \tilde{f}^{-1}[\tilde{f}(w_\ell) - \varepsilon_2, \tilde{f}(w_\ell) + \varepsilon_2] &= \{|\tilde{f} - \tilde{f}(w_\ell)| \leq \varepsilon_2\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) По лемме 9.2 выполнено $\overline{U}_\ell'' \cap f^{-1}[-1 + 3\varepsilon_2/4, 1 - 3\varepsilon_2/4] = \emptyset$. По построению функции $\tilde{f}$ имеем $\tilde{f} = f$ вне окрестностей U_ℓ'' точек локальных минимумов и максимумов, а потому и в $f^{-1}[-1 + 3\varepsilon_2/4, 1 - 3\varepsilon_2/4]$. По построению римановых метрик $d\tilde{s}^2$ и $d\hat{s}^2$ имеем $d\tilde{s}^2 = d\hat{s}^2$ в $(f^{-1}[-1 + 2\varepsilon_2/3, 1 - 2\varepsilon_2/3]) \setminus \bigcup U_\ell''$, а потому и в $f^{-1}[-1 + 3\varepsilon_2/4, 1 - 3\varepsilon_2/4]$.

(Б) По построению замкнутые окрестности $\overline{U}_\ell$ не содержат точек края ∂M и других критических точек функции f , кроме точки w_ℓ . По лемме 9.3 функция $\tilde{f}$ тоже не имеет в $\overline{U}_\ell$ других критических точек, кроме точки w_ℓ . Так как $\tilde{f}|_{\partial\overline{U}_\ell} = f|_{\partial\overline{U}_\ell} = f(w_\ell) \pm \varepsilon_2$ и множество $\overline{U}_\ell$ гомеоморфно замкнутому кругу (см. (22) и (23)), то этот круг совпадает с компонентой связности точки w_ℓ в каждом из множеств $f^{-1}[f(w_\ell) - \varepsilon_2, f(w_\ell) + \varepsilon_2]$ и $\tilde{f}^{-1}[\tilde{f}(w_\ell) - \varepsilon_2, \tilde{f}(w_\ell) + \varepsilon_2]$, а значит, и с множеством U_ℓ . Следствие доказано.

Шаг 3. Для каждой седловой точки w_ℓ определим “седловую ручку” и ее “толстые подошвы” как следующие замкнутые подмножества координатной окрестности $U_\ell = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\}$:

$$\begin{aligned} \Pi_\ell &:= \left\{ |u^2 - v^2| \leq \frac{\varepsilon_2}{6}, |2uv| \leq \frac{\varepsilon_2}{9} \right\} \subset U_\ell, \\ \Pi'_\ell &:= \left\{ -\frac{\varepsilon_2}{6} \leq u^2 - v^2 \leq -\frac{\varepsilon_2}{9}, |2uv| \leq \frac{\varepsilon_2}{9} \right\} =: \Pi_{\ell,1} \sqcup \Pi_{\ell,2} \subset \Pi_\ell, \end{aligned} \quad (29)$$

где подмножества $\Pi_{\ell,1}, \Pi_{\ell,2} \subset \Pi'_\ell$ – это компоненты связности множества Π'_ℓ , причем $v > 0$ на $\Pi_{\ell,1}$ и $v < 0$ на $\Pi_{\ell,2}$ (см. рис. 2, а) при $\varepsilon = \varepsilon_2$). Каждое Π_ℓ , $\Pi_{\ell,1}$, $\Pi_{\ell,2}$ гомеоморфно замкнутому кругу. Тогда вся “ручка” Π_ℓ содержится в круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_2/3\}$ (поскольку при $(u, v) \in \Pi_\ell$ справедливо $(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 \leq \varepsilon_2^2/36 + \varepsilon_2^2/81 < \varepsilon_2^2/9$), а значит, в Π_ℓ метрика $d\tilde{s}^2$ евклидова относительно координат u, v .

Для каждой точки w_ℓ локального минимума или максимума определим “минимаксную ручку” и ее “толстую подошву” как следующие замкнутый круг и круговое кольцо в координатной окрестности $U_\ell = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \supset \{u^2 + v^2 < 3\varepsilon_2/4\} \supset \overline{U}_\ell'' = \{x^2 + y^2 \leq 2\varepsilon_2/3\}$:

$$\begin{aligned} \Pi_\ell &:= \left\{ |f|_{U_\ell} - f(w_\ell)| \leq \frac{4}{5}\varepsilon_2 \right\} = \left\{ |\tilde{f}|_{U_\ell} - \tilde{f}(w_\ell)| \leq \frac{4}{5}\varepsilon_2 \right\} \subset U_\ell, \\ \Pi'_\ell &:= \Pi_\ell \setminus \left\{ x^2 + y^2 < \frac{\varepsilon_2}{3} \right\} = \left\{ \frac{\varepsilon_2}{3} \leq |\tilde{f}|_{U_\ell} - \tilde{f}(w_\ell)| \leq \frac{4}{5}\varepsilon_2 \right\} \subset \Pi_\ell. \end{aligned} \quad (30)$$

В круге $\overline{\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell} = \{x^2 + y^2 \leq \varepsilon_2/3\}$ риманова метрика $d\tilde{s}^2 = dx^2 + dy^2$ евклидова, а функция $\tilde{f} - \tilde{f}(w_\ell) = f_\ell = \pm(x^2 + y^2)$ квадратична относительно координат x, y (см. (26), (27) и рис. 3 при $\varepsilon = \varepsilon_2$).

Шаг 4. На шагах 4 и 5 (соответственно 4 и 6) мы построим замкнутую 1-форму $\tilde{\alpha}$ (соответственно α) на проколотой поверхности $M \setminus (\{x_i\} \cup \{z_k\})$.

Рис. 2. Седловая ручка Π_ℓ и ее толстые подошвы $\Pi_{\ell,1}$ и $\Pi_{\ell,2}$,
 $f|_{U_\ell} = u^2 - v^2 + f(w_\ell)$

Рис. 3. Минимаксная ручка Π_ℓ и ее толстая подошва Π'_ℓ ,
 $\tilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell} = \pm(x^2 + y^2) + f(w_\ell)$, $f|_{\Pi_\ell} = \pm(u^2 + v^2) + f(w_\ell)$

Сопоставим паре (f, ds^2) поверхность

$$\widehat{M} := M \setminus \bigcup_{w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}} \Pi_\ell. \quad (31)$$

Напомним, что на $\widehat{M}$ выполнено $\tilde{f} = f$ и $d\tilde{s}^2 = ds^2$ (см. следствие 9.4, (A)), причем $d\tilde{s}^2 = d\tilde{s}^2(f, ds^2)$. На этом шаге мы построим на $\widehat{M}$ по паре $(f, d\tilde{s}^2)|_{\widehat{M}}$ гладкую 1-форму $\alpha|_{\widehat{M}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) форма $\alpha|_{\widehat{M}}$ замкнута и в некоторой окрестности множества $\overline{M \setminus \bigcup \Pi'_\ell} \subset \widehat{M}$ в $\widehat{M}$ выполняется $i_{\text{grad } f} \alpha = 0$, где градиент функции f определен с помощью метрики $d\tilde{s}^2|_{\widehat{M}} = ds^2|_{\widehat{M}}$;
- 2) дифференциальная 2-форма $df \wedge \alpha$ отлична от нуля всюду на поверхности $\widehat{M} \setminus \{y_j\}$ и задает ее положительную ориентацию;
- 3) ограничение 1-формы α на касательное пространство $T(\partial^- M)$ ориентированной кривой $\partial^- M$ совпадает с ориентированным элементом длины в метрике $d\tilde{s}^2|_{\partial^- M} = ds^2|_{\partial^- M}$;
- 4) для любой критической точки $w_\ell \in \{x_i\}$ локального минимума ограничение 1-формы α на касательное пространство $T(\partial \Pi_\ell)$ ориентированной

кривой $\partial\Pi_\ell$ совпадает с ориентированным элементом длины в метрике $d\tilde{s}^2|_{\partial\Pi_\ell} = ds^2|_{\partial\Pi_\ell}$;

- 5) в некоторых окрестностях в $\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell$ седловых точек $w_\ell \in \{y_j\}$ выполнено $\alpha(u, v) \equiv d(2uv)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. При замене базиса (e_1, e_2) на базис $(\theta_1 e_1, \theta_2 e_2)$ (для $\theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}$) и в случае $\theta_1 \theta_2 = -1$ при одновременном изменении локальной ориентации поверхности и знака 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ риманова метрика $d\tilde{s}^2$, функция $\tilde{f}$, координатные окрестности U_ℓ, U'_ℓ и множества Π_ℓ, Π'_ℓ не изменятся (см. замечание 8.4), а каждое из условий 1)–5) выше на 1-форму $\alpha|_{\widehat{M}}$ заменится на эквивалентное ему условие.

Зададим 1-форму $\alpha|_{T(\partial^-M \cup (\bigcup_{w_\ell \in \{x_i\}} \partial\Pi_\ell))}$ условиями 3) и 4) на касательных пространствах кривой ∂^-M и граничных окружностей $\partial\Pi_\ell$ вокруг точек w_ℓ локальных минимумов.

При $q = 0$ положим $N = 0$, $\tilde{c}_0 = -1$, $\tilde{c}_1 = 1$ и перейдем к шагу 4е, а при $q > 0$ рассмотрим множество значений

$$\bigcup_{j=1}^q \left\{ c_j - \frac{\varepsilon_2}{6}, c_j + \frac{\varepsilon_2}{6} \right\} =: \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N\}, \quad -1 =: \tilde{c}_0 < \tilde{c}_1 < \dots < \tilde{c}_N < \tilde{c}_{N+1} := 1,$$

где $c_j = f(y_j)$ – седловые значения (они все лежат в $[-1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2]$, см. (23)). Будем строить α на каждом $M_\lambda := \widehat{M} \cap (f^{-1}[-1, \tilde{c}_\lambda])$, $1 \leq \lambda \leq N+1$, индукцией по λ .

Шаг 4а. Построим сначала α на M_λ при $\lambda = 1 \leq N$. Имеем $\tilde{c}_1 = c_j - \varepsilon_2/6$ и $M_1 = \widehat{M} \cap (f^{-1}[-1, c_j - \varepsilon_2/6])$ для некоторого $j \in [1, q]$. Так как M_1 не содержит критических точек, то M_1 является несвязным объединением цилиндров, на краях которых функция f постоянна. Поэтому 1-форма

$$\alpha|_{T(\partial^-M \cup (\bigcup_{w_\ell \in \{x_i\}} \partial\Pi_\ell))}$$

однозначно продолжается на все M_1 с выполнением условия 1). Из условий 3), 4) и определения индуцированной ориентации на линиях уровня функции f (см. обозначение 2.8) следует выполнение условия 2) на кривой ∂^-M и на граничных окружностях $\partial\Pi_\ell$ вокруг точек w_ℓ локальных минимумов. Отсюда и из условия 1) следует, что построенная 1-форма $\alpha|_{M_1}$ удовлетворяет условию 2) на всем M_1 .

Шаги 4б, 4в, 4г, 4д. Пусть теперь $2 \leq \lambda \leq N$. Предположим, что построена 1-форма $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$, удовлетворяющая условиям 1)–5). Положим

$$\widetilde{M}_\lambda := \overline{M_\lambda \setminus M_{\lambda-1}} = f^{-1}[\tilde{c}_{\lambda-1}, \tilde{c}_\lambda], \quad \partial^- \widetilde{M}_\lambda := f^{-1}(\tilde{c}_{\lambda-1}) \subset \partial \widetilde{M}_\lambda.$$

Предположим сначала (шаги 4б, 4в, 4г), что для некоторого j выполнено $\tilde{c}_{\lambda-1} = c_j - \varepsilon_2/6$, где $w_\ell = y_j$ – соответствующая седловая точка. Построим продолжение $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$ на все $M_{\lambda-1} \cup \Pi_\ell$, хотя “седловая ручка” Π_ℓ не обязана целиком лежать в M_λ .

Шаг 4б. Сначала построим α на обеих “толстых подошвах” $\Pi_{\ell,\eta}$, $\eta = 1, 2$, “седловой ручки” Π_ℓ (см. (29)). На линии $\partial^- \Pi_{\ell,\eta} := \Pi_{\ell,\eta} \cap \partial^- \widetilde{M}_\lambda$ функция

$g_{\ell,\eta} = g_{\ell,\eta}(u, v) := 2uv$ является гладким параметром, принимающим значения на отрезке $[-\varepsilon_2/9, \varepsilon_2/9]$. Введем на этом отрезке гладкую функцию

$$\tilde{g}_{\ell,\eta} = \tilde{g}_{\ell,\eta}(t) = \int_{(\partial - \Pi_{\ell,\eta}) \cap \{g_{\ell,\eta} \leq t\}} (\alpha|_{\partial - \Pi_{\ell,\eta}}), \quad -\frac{\varepsilon_2}{9} \leq t \leq \frac{\varepsilon_2}{9}.$$

Эта функция строго возрастает на $[-\varepsilon_2/9, \varepsilon_2/9]$ и принимает значения в отрезке $[0, \Delta_+ + \Delta_-]$, где

$$\Delta_+ = \Delta_{\ell,\eta,+} := \tilde{g}_{\ell,\eta}\left(\frac{\varepsilon_2}{9}\right) - \tilde{g}_{\ell,\eta}(0), \quad \Delta_- = \Delta_{\ell,\eta,-} := \tilde{g}_{\ell,\eta}(0) - \tilde{g}_{\ell,\eta}\left(-\frac{\varepsilon_2}{9}\right).$$

Из свойства 2) для $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$ следует, что производная функции $\tilde{g}_{\ell,\eta}$ всюду положительна. Рассмотрим на $\Pi_{\ell,\eta}$ новые положительно ориентированные координатные функции $\tilde{u}, \tilde{v}$, где

$$\tilde{u} = u^2 - v^2, \quad \tilde{v} = \tilde{g}_{\ell,\eta}(2uv) - \tilde{g}_{\ell,\eta}(0).$$

В этих координатах $\Pi_{\ell,\eta}$ является прямоугольником $[-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9] \times [-\Delta_-, \Delta_+]$, а функция $g_{\ell,\eta} = 2uv$ является возрастающей функцией $g_{\ell,\eta} = g_{\ell,\eta}(\tilde{v})$ от координаты $\tilde{v}$. Положим в этой координате

$$m_1 = m_{\ell,\eta,1} := \max_{\tilde{v} \in [-\Delta_-, \Delta_+]} g'_{\ell,\eta}(\tilde{v}) > 0, \quad m_2 = m_{\ell,\eta,2} := \begin{cases} \frac{1}{3m_1 - 1}, & m_1 \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & m_1 \leq 1. \end{cases}$$

В частности, $0 < m_2 \leq 1/2$. На отрезке $[-\Delta_-, \Delta_+]$ рассмотрим функцию $h_{\ell,\eta} = h_{\ell,\eta}(\tilde{v})$, которая при $\tilde{v} = 0$ равна нулю, а при $\tilde{v} \neq 0$ и $\theta := \tilde{v}/|\tilde{v}|$ задается формулой

$$h_{\ell,\eta}(\tilde{v}) := (1 - I_{0,m_2\Delta_\theta}(\theta\tilde{v})) \cdot g_{\ell,\eta}(\tilde{v}) + (I_{0,m_2\Delta_\theta}(\theta\tilde{v}) - I_{\Delta_\theta/2,\Delta_\theta}(\theta\tilde{v})) \cdot \left(\theta \frac{\Delta_\theta}{3} + \frac{\tilde{v}}{3}\right) + I_{\Delta_\theta/2,\Delta_\theta}(\theta\tilde{v}) \cdot \tilde{v},$$

$0 < \theta\tilde{v} \leq \Delta_\theta$ (функция $h_{\ell,\eta}$ не имеет никакого отношения к функции $h_{a,b}$ из (9)). Функция $h_{\ell,\eta}$ гладкая на всем отрезке $[-\Delta_-, \Delta_+]$, совпадает с координатной функцией $\tilde{v}$ в окрестностях концов отрезка и совпадает с функцией $g_{\ell,\eta} = 2uv$ в окрестности $(-m_2\Delta_-/3, m_2\Delta_+/3)$ точки $\tilde{v} = 0$.

Рассмотрим на “толстой седловой подошве” $\Pi_{\ell,\eta} = [-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9] \times [-\Delta_-, \Delta_+]$ гладкую функцию

$$\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (1 - I_{-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9}(\tilde{u}))\tilde{v} + I_{-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9}(\tilde{u})h_{\ell,\eta}(\tilde{v}),$$

где функция $I_{a,b}$ определена в (6). Функция $\tilde{h}_{\ell,\eta}$ гладкая на всем $\Pi_{\ell,\eta}$, совпадает с функцией $\tilde{v}$ в окрестностях линий $[-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9] \times \{-\Delta_-\}$, $[-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9] \times \{\Delta_+\}$ и $\partial - \Pi_{\ell,\eta} = \{-\varepsilon_2/6\} \times [-\Delta_-, \Delta_+]$ и совпадает с функцией $g_{\ell,\eta} = 2uv$ в замкнутой окрестности $[-7\varepsilon_2/54, -\varepsilon_2/9] \times [-m_2\Delta_-/3, m_2\Delta_+/3]$ точки $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-\varepsilon_2/9, 0)$ в $\Pi_{\ell,\eta}$. Положим

$$\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}} := d\tilde{h}_{\ell,\eta}, \quad \eta = 1, 2.$$

Проверим условие 1) для $\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}}$. В следующей окрестности граничной кривой $\partial\Pi_{\ell,\eta}$ в $\Pi_{\ell,\eta} = [-\varepsilon_2/6, -\varepsilon_2/9] \times [-\Delta_-, \Delta_+]$ функция $\tilde{h}_{\ell,\eta}$ зависит (локально) лишь от координаты $\tilde{v}$:

- (a) $\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$ при $-\frac{\varepsilon_2}{6} \leq \tilde{u} < -\frac{4}{27}\varepsilon_2$,
- (b) $\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$ при $-\Delta_- \leq \tilde{v} < -\frac{5\Delta_-}{6}$,
- (c) $\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$ при $\frac{5\Delta_+}{6} < \tilde{v} \leq \Delta_+$,
- (d) $\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = h_{\ell,\eta}(\tilde{v})$ при $-\frac{7}{54}\varepsilon_2 < \tilde{u} \leq -\frac{\varepsilon_2}{9}$.

Так как координата $\tilde{v}$ является функцией от $2uv$, то в любой точке указанной окрестности 1-форма α пропорциональна 1-форме $d(2uv)$, где коэффициент пропорциональности зависит от точки. С другой стороны, 1-форма $d(2uv)$ в Π_ℓ удовлетворяет условию 1), так как $f = u^2 - v^2 + f(w_\ell)$ и $d\tilde{s}^2 = du^2 + dv^2$ в Π_ℓ . Это доказывает выполнение условия 1) для $\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}}$.

Условие 2) для $\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}}$ следует из того, что $f|_{\Pi_{\ell,\eta}} = \tilde{u} + f(w_\ell)$ и в силу следующей леммы функция $h_{\ell,\eta} = h_{\ell,\eta}(\tilde{v})$ строго монотонна и имеет всюду положительную производную.

ЛЕММА 9.6. Пусть $a < b$ и на отрезке $[a, b]$ заданы гладкие функции φ, ψ со всюду положительными производными, причем всюду $\varphi \leq \psi$. Тогда функция $(1 - I_{a,b})\varphi + I_{a,b}\psi$ имеет всюду положительную производную на $[a, b]$, где функция $I_{a,b}$ определена в (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная функции $(1 - I_{a,b})\varphi + I_{a,b}\psi$ равна

$$(\psi - \varphi)I'_{a,b} + (1 - I_{a,b})\varphi' + I_{a,b}\psi'.$$

Каждое слагаемое, очевидно, всюду на $[a, b]$ не меньше нуля, причем второе и третье слагаемые не обращаются в нуль одновременно. Лемма доказана.

Выведем из леммы 9.6, что $h'_{\ell,\eta}(\tilde{v}) > 0$ при $0 \leq \tilde{v} \leq \Delta_+$. Напомним, что $0 < m_2 \leq 1/2$. Лемма 9.6 применима на отрезке $[0, m_2\Delta_+]$ (соответственно $[\Delta_+/2, \Delta_+]$), поскольку функции $g_{\ell,\eta}(\tilde{v})$, $\Delta_+/3 + \tilde{v}/3$ (соответственно $\Delta_+/3 + \tilde{v}/3$, $\tilde{v}$) имеют всюду положительные производные, а $g_{\ell,\eta}(\tilde{v}) \leq m_1\tilde{v} \leq \Delta_+/3 + \tilde{v}/3$ всюду при $\tilde{v} \in [0, m_2\Delta_+]$ (соответственно $\Delta_+/3 + \tilde{v}/3 \leq \tilde{v}$ всюду при $\tilde{v} \in [\Delta_+/2, \Delta_+]$). Аналогично доказывается, что $h'_{\ell,\eta}(\tilde{v}) > 0$ при $-\Delta_- \leq \tilde{v} \leq 0$. Условие 2) для $\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}}$ доказано.

Шаг 4в. Определим α на оставшейся части “седловой ручки” Π_ℓ , т.е. на замыкании $\overline{\Pi_\ell} \setminus \overline{\Pi'_\ell} \ni w_\ell$ дополнения “толстых подошв” $\Pi'_\ell = \Pi_{\ell,1} \cup \Pi_{\ell,2}$ в “седловой ручке” Π_ℓ . Положим

$$\delta_\ell := \min \left\{ \theta g_{\ell,\eta} \left(m_{\ell,\eta,2} \theta \frac{\Delta_{\ell,\eta,\theta}}{3} \right) \middle| \eta = 1, 2, \theta = +, - \right\},$$

где $g_{\ell,\eta} = g_{\ell,\eta}(\tilde{v}) = 2uv$. В замкнутой окрестности $\{-\varepsilon_2/9 \leq u^2 - v^2 \leq \varepsilon_2/6, |2uv| \leq \delta_\ell\}$ седловой точки w_ℓ положим $\alpha = d(2uv)$ согласно условию 5). Тогда условия 1) и 2) автоматически выполнены в указанной окрестности, поскольку

$f|_{\Pi_\ell} = u^2 - v^2 + f(w_\ell)$ и $d\tilde{s}^2|_{\Pi_\ell} = du^2 + dv^2$. На кривой $\{u^2 - v^2 = -\varepsilon_2/9, |2uv| \leq \delta_\ell\}$ это определение согласуется с построением $\alpha|_{\Pi'_\ell}$ на шаге 4б, так как $\tilde{h}_{\ell,\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{\ell,\eta}(\tilde{v}) = 2uv$ на $[-7\varepsilon_2/54, -\varepsilon_2/9] \times [-m_2\Delta_-/3, m_2\Delta_+/3]$.

В множестве $\{-\varepsilon_2/9 \leq u^2 - v^2 \leq \varepsilon_2/6, \delta_\ell/2 \leq |2uv| \leq \varepsilon_2/9\}$ продолжим 1-форму α с общих кусков границ этого множества с множеством Π'_ℓ условием 1). Это определение согласуется с построением α в указанной выше окрестности точки w_ℓ в силу выполнения условия 1) в этой окрестности. Условие 2) на указанном множестве следует из того, что это множество заполнено отрезками интегральных траекторий $\text{grad } f$, выпущенных из точек общего куска границы этого множества с Π'_ℓ , и из выполнения условия 2) на Π'_ℓ .

Шаг 4г. Осталось проверить гладкость полученной 1-формы α на всем $M_{\lambda-1} \cup \Pi_\ell$. Форма $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$ удовлетворяет условию 1) в окрестности кривой $\partial^-\Pi_{\ell,\eta}$ в $M_{\lambda-1}$ по предположению индукции, а форма $\alpha|_{\Pi'_\ell}$ удовлетворяет условию 1) в окрестности кривой $\partial^-\Pi_{\ell,\eta}$ в Π'_ℓ по построению (см. формулу (а) шага 4). По построению 1-формы $\alpha|_{\Pi_{\ell,\eta}}$ ее ограничение на касательное пространство куска границы $\partial^-\Pi_{\ell,\eta}$ совпадает с ограничением 1-формы $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$ на касательное пространство этого куска границы. Отсюда следует, что эти 1-формы задают гладкую 1-форму на всем $M_{\lambda-1} \cup \Pi'_\ell$. Аналогичным образом, поскольку свойство 1) выполнено для 1-форм $\alpha|_{M_{\lambda-1} \cup \Pi'_\ell}$ и $\alpha|_{\overline{\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell}}$ в окрестностях их общих кусков границы $\partial^+\Pi_{\ell,\eta} := \partial\Pi_{\ell,\eta} \cap f^{-1}(c_j - \varepsilon_2/9)$, $\eta = 1, 2$, то продолженная 1-форма $\alpha|_{M_{\lambda-1} \cup \Pi_\ell}$ гладкая на всем $M_{\lambda-1} \cup \Pi_\ell$.

Шаг 4д. Пусть, как и выше, $2 \leq \lambda \leq N$. Если некоторая “седловая ручка” Π_ℓ пересекает внутренность $\tilde{M}_\lambda$, то на всем Π_ℓ 1-форма α уже построена на одном из предыдущих шагов индукции. На дополнении $\tilde{M}_\lambda \setminus \bigcup \Pi_\ell$ продолжим α с кривой $\partial^-\tilde{M}_\lambda$ условием 1). Это возможно, так как множество $\tilde{M}_\lambda \setminus \bigcup \Pi_\ell$ заполнено отрезками интегральных траекторий поля $\text{grad } f$, выпущенными из общего куска границы этого множества с $\partial^-\tilde{M}_\lambda$. Гладкость полученной формы α на $\tilde{M}_\lambda$ следует из гладкости формы $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$, выполнения условия 1) в окрестности края $\partial\Pi_\ell$ по обе стороны этого края и из отсутствия критических точек функции f на замыкании множества $\tilde{M}_\lambda \setminus \bigcup \Pi_\ell$.

Шаг 4е. Пусть $\lambda = N + 1$ и 1-форма α построена на M_N . Множество $\tilde{M}_{N+1} := \tilde{M} \setminus M_N \subset f^{-1}[\tilde{c}_N, 1]$ является несвязным объединением цилиндров, не содержащих критических точек. В каждом цилиндре определим 1-форму α как продолжение на весь цилиндр имеющейся 1-формы на кривой $\partial^-\tilde{M}_{N+1} = \tilde{M} \cap f^{-1}(\tilde{c}_N)$ условием 1). Гладкость построенной 1-формы $\alpha|_{\tilde{M}}$ доказывается как на предыдущих шагах индукции (см. шаг 4д).

Шаг 5. Рассмотрим 1-форму $\alpha|_{\tilde{M}}$, построенную на шаге 4. Напомним, что $\tilde{f} = f$ на $\tilde{M}$ (см. (31)). Рассмотрим “минимаксную ручку” и ее “толстую подошву” $\Pi_\ell \supset \Pi'_\ell$ (т.е. замкнутый круг и цилиндр) вокруг каждой точки w_ℓ локального минимума или максимума (см. (30)). На этом шаге мы построим на всей проколотой поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ гладкую замкнутую 1-форму $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2)$ такую, что $\tilde{\alpha}|_{\tilde{M}} = \alpha|_{\tilde{M}}$ и 1-форма $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ на проколотой “минимаксной ручке” $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ вокруг любой точки w_ℓ локального минимума или максимума удовлетворяет следующим условиям:

- 1) форма $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ замкнута и в некоторых окрестностях множеств $\partial\Pi_\ell$ и $\overline{\Pi_\ell} \setminus \overline{\Pi'_\ell} \setminus \{w_\ell\}$ в $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ выполняется $i_{\text{grad}} \tilde{f} \tilde{\alpha} = 0$, где градиент функции $\tilde{f}$ определен с помощью метрики $d\tilde{s}^2$;
- 2) дифференциальная 2-форма $d\tilde{f} \wedge \tilde{\alpha}$ отлична от нуля всюду на проколоте круге $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ и задает его положительную ориентацию;
- 3) в проколоте окрестности $\Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\})$ любой точки w_ℓ локального минимума (соответственно максимума) выполнено

$$\tilde{\alpha}(x, y) \equiv \varkappa_\ell \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad \varkappa_\ell = \text{const} > 0$$

(соответственно < 0);

- 4) для любой точки w_ℓ локального минимума или максимума ограничения 1-форм $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ и $\alpha|_{\widehat{M}}$ на касательное пространство $T(\partial\Pi_\ell)$ ориентированной кривой $\partial\Pi_\ell$ совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.7. Напомним (см. § 8), что для точки w_ℓ локального минимума или максимума базис $(e_1, e_2) = (e_{\ell,1}, e_{\ell,2}) \in T_{w_\ell}M$ и отвечающие ему координаты x, y на касательном пространстве $T_{w_\ell}M$ строились по тройке (f, ds^2, ξ_ℓ) , где $\xi_\ell \subset T_{w_\ell}M$ – одномерное подпространство, $e_1 \in \xi_\ell$. Другой тройке $(f, ds^2, \tilde{\xi}_\ell)$ отвечают базис $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (\tilde{e}_{\ell,1}, \tilde{e}_{\ell,2}) \in T_{w_\ell}M$ и координаты $\tilde{x}, \tilde{y}$ на $T_{w_\ell}M$ вида

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos \varphi_\ell & -\sin \varphi_\ell \\ \sin \varphi_\ell & \cos \varphi_\ell \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_\ell & -\sin \varphi_\ell \\ \sin \varphi_\ell & \cos \varphi_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

где φ_ℓ – угол между прямыми $\xi_\ell, \tilde{\xi}_\ell \subset T_{w_\ell}M$ относительно римановой метрики, задаваемой положительно определенной квадратичной формой $|(1/2)d^2f|_{w_\ell}|$ на $T_{w_\ell}M$. Напомним также (см. (24)), что координатные функции $x \circ \beta_\ell'^{-1}|_{U_\ell}$, $y \circ \beta_\ell'^{-1}|_{U_\ell}$ в окрестности $U_\ell \ni w_\ell$ мы тоже обозначили через x, y . Поэтому в координатах x, y и $\tilde{x}, \tilde{y}$ на U_ℓ выполнено

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{\tilde{x} d\tilde{y} - \tilde{y} d\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}.$$

Значит, при изменении прямой ξ_ℓ условие 3) заменится на эквивалентное ему условие, а круг Π_ℓ , кольцо Π'_ℓ , функция $\tilde{f}$ и риманова метрика $d\tilde{s}^2$ не изменятся (см. (26) и (27)).

Так как окрестности U_ℓ попарно не пересекаются, то достаточно построить 1-форму $\tilde{\alpha}$ отдельно на каждом проколоте круге $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\} \subset U_\ell$ вокруг любой точки w_ℓ локального минимума или максимума.

Пусть w_ℓ – любая точка локального минимума или максимума функции f . Проведем построение 1-формы $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ в проколоте круге $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ в четыре этапа (шаги 5а, 5б, 5в, 5г).

Шаг 5а. Положим

$$\varkappa_\ell := \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Pi_\ell} \alpha|_{\widehat{M}} = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Pi_\ell} ds,$$

где 1-форма $\alpha|_{\widehat{M}}$ построена на шаге 4, а знак $+$ (соответственно $-$) отвечает точке w_ℓ локального минимума (соответственно максимума). Зададим

1-форму $\tilde{\alpha}$ в проколотой окрестности $\Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\}) = \{0 < x^2 + y^2 < \varepsilon_2/3\}$ точки w_ℓ (см. (30)) условием 3). В этой проколотой окрестности условия 1) и 2) автоматически выполнены в силу $\tilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell} = \tilde{f}(w_\ell) \pm (x^2 + y^2)$, евклидовости метрики $d\tilde{s}^2$ относительно координат x, y в $\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell$ и положительной ориентации этих координат.

Шаг 5б. Цилиндр

$$\Pi'_\ell = \left\{ \frac{\varepsilon_2}{3} \leq |\tilde{f}|_{U'_\ell} - \tilde{f}(w_\ell) \leq 4\frac{\varepsilon_2}{5} \right\}$$

не содержит критических точек, и на его краях функция $\tilde{f}$ постоянна. Поэтому построенная на шаге 5а 1-форма $\tilde{\alpha}$ в проколотой окрестности

$$\Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\}) = \left\{ 0 < |\tilde{f}|_{U'_\ell} - \tilde{f}(w_\ell) < \frac{\varepsilon_2}{3} \right\}$$

однозначно продолжается на весь проколотый круг

$$\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\} = \left\{ 0 < |\tilde{f}|_{U'_\ell} - \tilde{f}(w_\ell) \leq 4\frac{\varepsilon_2}{5} \right\}$$

с выполнением условия 1). Обозначим продолженную 1-форму на всем $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ через $\tilde{\alpha}_{\ell,1}$. Из выполнения условия 2) для $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\})}$ (см. шаг 5а) и из условия 1) следует, что построенная 1-форма $\tilde{\alpha}_{\ell,1}$ удовлетворяет условию 2) на всем $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$, а потому условиям 1)–3) на $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$.

Шаг 5в. Построим в проколотом круге $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ замкнутую 1-форму $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$. Зададим ограничение 1-формы $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$ на касательное пространство $T(\partial\Pi_\ell)$ ориентированной кривой $\partial\Pi_\ell$ равным ограничению 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ на это касательное пространство (т.е. $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$ удовлетворяет аналогу условия 4)). Эта 1-форма однозначно продолжается на весь проколотый круг $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ с выполнением условия 1). Полученную 1-форму в $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ обозначим через $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$. Выполнение условия 2) для $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$ следует из условия 1), а также из свойства 2) для 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$.

Шаг 5г. По построению на шагах 5б, 5в замкнутых 1-форм $\tilde{\alpha}_{\ell,1}$, $\tilde{\alpha}_{\ell,2}$ в $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi_\ell} \tilde{\alpha}_{\ell,1} &= \int_{(\partial\Pi'_\ell) \setminus (\partial\Pi_\ell)} \tilde{\alpha} = |\varkappa_\ell| \int_{x^2+y^2=\varepsilon_2/3} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi|\varkappa_\ell| \\ &= \int_{\partial\Pi_\ell} \alpha|_{\widehat{M}} = \int_{\partial\Pi_\ell} \tilde{\alpha}_{\ell,2}. \end{aligned}$$

Поэтому замкнутая 1-форма $\tilde{\alpha}_{\ell,1} - \tilde{\alpha}_{\ell,2}$ в проколотом круге $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$ является точной, т.е. равна dg_ℓ для некоторой гладкой функции $g_\ell: \Pi_\ell \setminus \{w_\ell\} \rightarrow \mathbb{R}$. При этом функция g_ℓ определена с точностью до прибавления произвольной константы. Ровно одна из этих функций

$$\widehat{g}_\ell := g_\ell - \frac{\int_{\partial\Pi_\ell} g_\ell \alpha_{\ell,2}}{\int_{\partial\Pi_\ell} \alpha_{\ell,2}}$$

обладает свойством $\int_{\partial \Pi_\ell} \widehat{g}_\ell \alpha_{\ell,2} = 0$. Отметим, что знаменатель в формуле для $\widehat{g}_\ell$ отличен от нуля в силу свойства 2) для формы $\alpha_{\ell,2}$ (см. шаг 5в).

Определим 1-форму $\widetilde{\alpha}$ на $M \setminus \{x_i, z_k\}$ формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}|_{\widehat{M}} &:= \alpha|_{\widehat{M}}, \\ \widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} &:= \widetilde{\alpha}_{\ell,1} - d(\widehat{g}_\ell I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2} \circ |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)|), \quad w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где функция $I_{a,b}$ определена в (6). Проверим корректность этого определения, а также выполнение условий 1)–4) для 1-формы $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$. Так как функция $I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2}$ равна нулю на интервале $(0, \varepsilon_2/2)$, то в проколотой окрестности

$$\left\{ 0 < |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)| < \frac{\varepsilon_2}{2} \right\} \supset \overline{\Pi_\ell \setminus \Pi'_\ell} \setminus \{w_\ell\} \supset \Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\})$$

выполнено $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{\ell,1}$. Поэтому определение 1-формы $\widetilde{\alpha}$ согласуется с построением 1-формы $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus (\Pi'_\ell \cup \{w_\ell\})}$ на шаге 5а. Так как функция $I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2}$ равна единице на отрезке $[3\varepsilon_2/4, 4\varepsilon_2/5]$ и $d\widehat{g}_\ell = \widetilde{\alpha}_{\ell,1} - \widetilde{\alpha}_{\ell,2}$, то в цилиндре $\{3\varepsilon_2/4 \leq |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)| \leq 4\varepsilon_2/5\} \supset \Pi'_\ell$ выполнено $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{\ell,2}$. Отсюда и из выполнения условий 1)–3) для $\widetilde{\alpha}_{\ell,1}$ (см. шаг 5б) и условий 1), 2), 4) для $\widetilde{\alpha}_{\ell,2}$ (см. шаг 5в) следует выполнение условий 1)–4) для $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$. При этом условие 2) для $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ доказывается с помощью следующего тождества в $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}$:

$$\begin{aligned} d\widetilde{f} \wedge \widetilde{\alpha} &= d\widetilde{f} \wedge (\widetilde{\alpha}_{\ell,1} - (I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2} \circ |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)|) d\widehat{g}_\ell) \\ &= (1 - I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2} \circ |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)|) d\widetilde{f} \wedge \widetilde{\alpha}_{\ell,1} \\ &\quad + (I_{\varepsilon_2/4, \varepsilon_2} \circ |\widetilde{f}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}} - \widetilde{f}(w_\ell)|) d\widetilde{f} \wedge \widetilde{\alpha}_{\ell,2}. \end{aligned}$$

Из условий 1), 2), 4) для 1-формы $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$, условий 1), 2) для 1-формы $\widetilde{\alpha}|_{\widehat{M}} = \alpha|_{\widehat{M}}$ (см. шаг 4) и из гладкости этих форм получаем гладкость 1-формы $\widetilde{\alpha}$ на всей поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ аналогично шагам 4д, 4е. Построение $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантного отображения $p_2: F_1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$, $(f, ds^2) \mapsto (\widetilde{f}, \widetilde{\alpha})$ завершено.

Шаг 6. Аналогично построениям шага 5 по тройке (f, ds^2, ξ) строится гладкая 1-форма $\alpha = \alpha(f, ds^2, \xi)$ на $M \setminus \{x_i, z_k\}$, которая является продолжением 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ (см. шаг 4) на всю поверхность $M \setminus \{x_i, z_k\}$ и удовлетворяет в проколотой “минимаксной ручке” $\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\} \subset U_\ell$ вокруг любой точки $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ локального минимума или максимума аналогам условий 1)–4) из шага 5 по отношению к функции f , римановой метрике $d\widehat{s}^2$ (см. (28)), координатным функциям u, v и цилиндру $\widehat{\Pi}'_\ell := \{\varepsilon_2/3 \leq u^2 + v^2 \leq 4\varepsilon_2/5\} \subset \Pi_\ell$ (вместо $\widetilde{f}$, $d\widetilde{s}^2$, x, y и $\Pi'_\ell \subset \Pi_\ell$ соответственно). Напомним, что координаты u, v в каждой такой окрестности U_ℓ были построены (непрерывным образом) по тройке (f, ds^2, ξ_ℓ) (см. § 8, (22), (23)). При построении 1-формы $\alpha|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ надо учесть, что в этих координатах

$$\begin{aligned} U_\ell &= \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\}, \quad \Pi_\ell = \left\{ u^2 + v^2 \leq \frac{4\varepsilon_2}{5} \right\}, \\ f|_{U_\ell} &= \pm(-1 + u^2 + v^2), \quad d\widehat{s}^2|_{U_\ell} = du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

(см. (23) и (28)). Построение оснащения α для функции Морса $f \in F_1$ завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.8. Из замечаний 8.1, 8.4, 9.5 и из проведенного выше построения 1-форм $\tilde{\alpha}$ и α на $M \setminus \{x_i, z_k\}$ (см. шаги 4–6) легко следует, что в окрестности любой критической точки $w_\ell = w_\ell(f)$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, эти 1-формы не меняются при замене базиса $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2}) \mapsto (-e_{\ell,1}, -e_{\ell,2})$ для локальной ориентации поверхности согласно базису, а при смене локальной ориентации поверхности и замене базиса $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2}) \mapsto (e_{\ell,1}, -e_{\ell,2})$ или $(-e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ они меняют знак. Поэтому $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2, \xi)$ и $\alpha = \alpha(f, ds^2, \xi)$ – корректно определенная “локальная 1-форма” на $M \setminus \{x_i, z_k\}$ (т.е. корректно определенная и гладкая при фиксированной локальной ориентации поверхности M), меняющая знак при смене локальной ориентации поверхности. Из построений на шаге 5 и замечания 9.7 следует, что (при фиксированной локальной ориентации поверхности) 1-форма $\tilde{\alpha}$ в окрестности любой точки $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$ локального минимума или максимума не зависит от выбора подпространства $\xi_\ell \subset T_{w_\ell} M$, а потому и от (положительно ориентированного) базиса $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ в точке w_ℓ . Поэтому $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2)$ не зависит от ξ .

В силу (26) и лемм 9.2 и 9.3 (см. шаг 2) имеем

$$\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2) \in F^1.$$

По замечанию 9.8 $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(f, ds^2)$. Согласно свойствам 1)–5) формы $\alpha|_{\widehat{M}} = \tilde{\alpha}|_{\widehat{M}}$ (см. шаг 4) и свойствам 1)–4) форм $\tilde{\alpha}|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ и $\alpha|_{\Pi_\ell \setminus \{w_\ell\}}$ (см. шаги 5, 6) пары $(\tilde{f}, \tilde{\alpha})$ и (f, α) являются оснащенными функциями Морса, т.е. принадлежат пространству $\mathbb{F}^1$ (см. определение 9.1). Определим отображение

$$p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad (f, ds^2) \mapsto (\tilde{f}(f, ds^2), \tilde{\alpha}(f, ds^2)). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сюръективности в теоремах 1.7, (Б) и 2.5, (Б). Сопоставим любой функции Морса $f \in F$ функцию Морса $f_1 = p_0(f) = \rho_2 \circ \rho_1 \in F^1$ (см. § 6). Рассмотрим построенное выше оснащение $\alpha(f_1, ds^2, \xi_1) =: \alpha_1$ функции Морса $f_1 \in F^1$ (для каких-либо римановой метрики $ds^2 \in \mu$ и набора касательных прямых ξ). Из свойства $(f_1, \alpha_1) \in \mathbb{F}^1$ и из определения 9.1 следует, что $(af_1 + b, a\alpha_1) \in \mathbb{F}$ для любых констант $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$. Отсюда и из построения функции f_1 по функции f (см. (5) и (7)) следует, что $(f, (\max f - \min f)\alpha_1/2) \in \mathbb{F}$ – оснащенная функция Морса.

§ 10. Проверка непрерывности отображения $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$

ЛЕММА 10.1. Пусть M_1, M_2 – компактные гладкие многообразия (возможно, с непустым краем), $\dim M_1 = \dim M_2$, $M'_2 \subset M_2$ – открытое подмножество. Пусть $\text{Emb}(M_1, M_2)$ – пространство гладких вложений $M_1 \hookrightarrow M_2$, и $\text{Emb}(M_1, M_2, M'_2)$ – его подпространство, состоящее из вложений, образ которых содержит M'_2 . Тогда отображение

$$F: \text{Emb}(M_1, M_2, M'_2) \rightarrow \text{Emb}(M'_2, M_1), \quad \phi \mapsto \phi^{-1}|_{M'_2},$$

непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\phi^{-1}|_{M'_2}$ через ϕ^{-1} . Нужно доказать, что если последовательность $\{\phi_{(n)}\}$ сходится к $\phi \in \text{Emb}(M_1, M_2, M'_2)$ в смысле C^∞ -топологии на пространстве $\text{Emb}(M_1, M_2, M'_2) \subset C^\infty(M_1, M'_2)$, то последовательность $\{\phi_{(n)}^{-1}\}$ сходится к $\phi^{-1} \in \text{Emb}(M'_2, M_1)$ в смысле C^∞ -топологии на пространстве $\text{Emb}(M'_2, M_1) \subset C^\infty(M'_2, M_1)$. Зафиксируем на M_1 и M_2 произвольные римановы метрики. Расстояния между точками в этих метриках обозначим через ρ_1 и ρ_2 соответственно. Покажем сначала, что для любой точки $y \in M_2$ выполняется сходимост $\rho_1(\phi_{(n)}^{-1}(y), \phi^{-1}(y)) \rightarrow 0$. Для любого конечномерного линейного оператора A обозначим через $\lambda_{\min}(A)$ его минимальное по модулю собственное значение. В силу компактности многообразия M_2 и сходимости $\phi_{(n)} \rightarrow \phi$ существует такая константа $C > 0$, что $|\lambda_{\min}(d\phi_{(n)}|_x)| \geq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in M_1$. Выполняется

$$\|d(\phi_{(n)}^{-1})|_{\tilde{y}}\| = \frac{1}{|\lambda_{\min}(d\phi_{(n)}|_{\phi_{(n)}^{-1}(\tilde{y}))|} \leq \frac{1}{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{y} \in M'_2.$$

Значит, для любых двух точек $y_1, y_2 \in M_2$ выполнено $\rho_1(\phi_{(n)}^{-1}(y_1), \phi_{(n)}^{-1}(y_2)) \leq (1/C)\rho_2(y_1, y_2)$. В частности,

$$\begin{aligned} \rho_1(\phi_{(n)}^{-1}(y), \phi^{-1}(y)) &\leq \frac{1}{C}\rho_2(y, \phi_{(n)}(\phi^{-1}(y))) \\ &\leq \frac{1}{C}\rho_2(\phi(\phi^{-1}(y)), \phi_{(n)}(\phi^{-1}(y))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу равномерной сходимости $\phi_{(n)} \rightarrow \phi$, $n \rightarrow \infty$.

Осталось доказать сходимост всех частных производных. Рассмотрим локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ на какой-либо карте $U_1 \subset M_1$ и локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ на какой-либо карте $U_2 \subset M_2$. Обозначим ℓ -ую координатную функцию вложения ϕ (соответственно ϕ^{-1}) в этих координатах через ϕ_ℓ (соответственно $(\phi^{-1})_\ell$), $1 \leq \ell \leq \dim M_1$. Выполняется равенство

$$\frac{\partial^k (\phi^{-1})_\ell}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_k}} \Big|_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial y_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial (\phi^{-1})_\ell}{\partial y_{i_k}} \right) \right) \dots \right) \right) \Big|_y,$$

причем $\frac{\partial (\phi^{-1})_\ell}{\partial y_{i_k}}$ является рациональной функцией от $\frac{\partial \phi_{\ell'}}{\partial x_{\ell''}} \circ \phi^{-1}$ со знаменателем $\det \left\| \frac{\partial \phi_{\ell'}}{\partial x_{\ell''}} \circ \phi^{-1} \right\|$, который непрерывен и всюду отличен от нуля. Значит, любая частная производная порядка k функции $(\phi^{-1})_\ell$ является композицией функции ϕ^{-1} и рациональной функции от частных производных порядка меньше либо равного k функций $\phi_{\ell'}$ со знаменателем $(\det \left\| \frac{\partial \phi_{\ell'}}{\partial x_{\ell''}} \right\|)^k$. Из этого следует непрерывная зависимость всех частных производных координатных функций вложения ϕ^{-1} (как элементов топологического пространства $C^0(U_1)$) от вложения ϕ (элемента пространства $\text{Emb}(M_1, M_2, M'_2)$, снабженного C^∞ -топологией). Лемма доказана.

Для доказательства непрерывности отображения $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$, $(f, ds^2) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$, укажем объекты, используемые при его построении, в том порядке, в котором они появлялись в § 8 (шаги а–г и следствие 8.3) и § 9, шаги 1–5 (непрерывность сопоставлений $(f, ds^2, \xi) \mapsto \phi_\ell \in \text{Emb}(\{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\}, M)$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, и $(f, ds^2, \xi) \mapsto (f, \alpha(f, ds^2, \xi)) \in \mathbb{F}^1$ доказывается аналогично, см. шаги 1–4 и 6):

- 1) величина $H = \max\{0, \max K\} \geq 0$ непрерывно зависит от ds^2 ;
- 2) величины $L_j = L_j(f, ds^2) > 0$ непрерывно зависят от f, ds^2 ($1 \leq j \leq q$);
- 3) число $r'_0 > 0$ непрерывно зависит от H, f, ds^2 ;
- 4) критическая точка $w_\ell \in M$, круг $\bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ и экспоненциальное отображение $\beta'_\ell: \bar{V}'_\ell \rightarrow M$ непрерывно зависят от f, ds^2, r'_0 ($1 \leq \ell \leq p+q+r$);
- 5) базисы $(e_1, e_2) = (e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ непрерывно зависят от f, ds^2 (для $w_\ell \in \{y_j\}$);
- 6) число $\lambda_{\ell,+} > 0$ непрерывно зависит от $f, ds^2, (e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$ ($1 \leq \ell \leq p+q+r$);
- 7) число $C > 0$ непрерывно зависит от $f, ds^2, r'_0, \beta'_\ell$ ($1 \leq \ell \leq p+q+r$);
- 8) число $\varepsilon_2 > 0$ непрерывно зависит от C, r'_0, f, ds^2 ;
- 9) эллипс $\bar{V}_\ell = \{x^2 + y^2 \leq (5/4)^2 \varepsilon_2\} \subset \bar{V}'_\ell \subset T_{w_\ell}M$ непрерывно зависит от $\varepsilon_2, (e_{\ell,1}, e_{\ell,2}), f, ds^2$ ($w_\ell \in \{y_j\}$);
- 10) погружение

$$h_\ell: \left\{x^2 + y^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \varepsilon_2\right\} \approx V_\ell \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h_\ell(x, y) := (u(x, y), v(x, y)),$$

непрерывно зависит от $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2}), \varepsilon_2, f, \beta'_\ell$ ($w_\ell \in \{y_j\}$);

- 11) вложение

$$\beta'^{-1}_\ell|_{U_\ell}: U_\ell \rightarrow V_\ell = \left\{x^2 + y^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \varepsilon_2\right\} \subset T_{w_\ell}M$$

непрерывно зависит от w_ℓ и β'_ℓ по лемме 10.1 ($w_\ell \in \{y_j\}$);

- 12) замкнутая окрестность $\bar{U}_\ell := \phi_\ell(\bar{V}) = \beta'_\ell \circ h_\ell^{-1}(\bar{V}) \subset M$ и морсовский координатный диффеоморфизм

$$\phi_\ell^{-1}|_{U_\ell} := h_\ell \circ \beta'^{-1}_\ell|_{U_\ell}: U_\ell \rightarrow V = \{u^2 + v^2 < \varepsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$$

непрерывно зависят от ε_2, h_ℓ и $\beta'^{-1}_\ell|_{U_\ell}$ ($w_\ell \in \{y_j\}$);

- 13) функция $f_\ell = (1/2)d^2f \circ \beta'^{-1}_\ell|_{U_\ell}$ и риманова метрика ds^2_ℓ на $U_\ell \subset M$ непрерывно зависят от $w_\ell, d^2f|_{w_\ell}, \varepsilon_2, \beta'^{-1}_\ell|_{U_\ell} = \beta'_\ell|_{\beta_\ell(V)}^{-1}: U_\ell \rightarrow V_\ell \subset T_{w_\ell}M$ ($w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$);
- 14) функция $\tilde{f} \in F^1$ непрерывно зависит от f, ε_2, f_ℓ ($w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$);
- 15) риманова метрика $d\tilde{s}^2 \in \mu$ непрерывно зависит от f_ℓ, ds^2_ℓ (для $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$), $\phi_\ell^{-1}|_{U_\ell}$ (для $w_\ell \in \{y_j\}$), ds^2 ;
- 16) множества Π_ℓ непрерывно зависят от f, ε_2 ($w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$);
- 17) набор $\bar{c} = (c_1, \dots, c_q)$ седловых значений функции $f, c_j := f(y_j) \in [-1 + \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2]$, $1 \leq j \leq q$, а также “расширенный” набор $\bar{c}_+ = \bar{c}_+(f) = (c_{+,1}, \dots, c_{+,2q}) := (c_1 - \varepsilon_2/6, c_1 + \varepsilon_2/6, \dots, c_q - \varepsilon_2/6, c_q + \varepsilon_2/6)$ непрерывно зависят от f, ε_2 ;
- 18) число N , последовательность $\tilde{c}_1 < \dots < \tilde{c}_N$, $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N\} := \{c_{+,1}, \dots, c_{+,2q}\}$ и соответствующее разбиение $J = J(\bar{c}_+) = (J_1, \dots, J_N)$ множества $\{1, \dots, 2q\}$ на подмножества $J_\lambda := \{s \mid 1 \leq s \leq 2q, c_{+,s} = \tilde{c}_\lambda\}$, $1 \leq \lambda \leq N$, не непрерывно зависят от набора $\bar{c}_+ = (c_{+,1}, \dots, c_{+,2q})$;
- 19) множества $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{N+1} = \bar{M} \subset M$ непрерывно зависят от разбиения J (относительно дискретной топологии на множестве разбиений), ε_2 и f , а зависимость 1-форм $\alpha|_{M_\lambda}$ ($0 \leq \lambda \leq N+1$) от пары (f, ds^2) имеет следующий вид:

(шаг 4а) форма $\alpha|_{M_0}$ непрерывно зависит от $ds^2|_{T(\partial^- M)}$, $\partial\Pi_\ell$ и $ds^2|_{T(\partial\Pi_\ell)}$ ($w_\ell \in \{x_i\}$), ds^2 , f ;

(шаги 4б, 4в, 4г, 4д) форма $\alpha|_{M_\lambda}$ ($1 \leq \lambda \leq N$) непрерывно зависит от $\partial^+ M_{\lambda-1}$, $\partial^+ M_\lambda$, $\alpha|_{M_{\lambda-1}}$, $J(\bar{c}_+)$, ε_2 , $d\tilde{s}^2$, f , h_ℓ , $(e_{\ell,1}, e_{\ell,2})$, $\beta_\ell'^{-1}$ ($w_\ell \in \{y_j\}$);

(шаг 4е) форма $\alpha|_{M_{N+1}} = \alpha|_{\widehat{M}}$ непрерывно зависит от $\alpha|_{T(\partial M_N)}$, $\partial\Pi_\ell$ ($w_\ell \in \{z_k\}$), ds^2 , f ;

20) оснащенная функция Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha})|_{\Pi_\ell}$, $w_\ell \in \{x_i, z_k\}$, непрерывно зависит от ε_2 , $\tilde{f}$, $d\tilde{s}^2$, Π_ℓ , $\beta_\ell'^{-1}|_{U_\ell}$, а также либо от $ds^2|_{T(\partial\Pi_\ell)}$ (для $w_\ell \in \{x_i\}$), либо от $(\alpha|_{\widehat{M}})|_{T(\partial\Pi_\ell)}$ (для $w_\ell \in \{z_k\}$);

21) оснащенная функция Морса $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$ непрерывно зависит от $\tilde{f}$, $\alpha|_{\widehat{M}}$, $(\tilde{f}, \tilde{\alpha})|_{\Pi_\ell}$ (для $w_\ell \in \{x_i\} \cup \{z_k\}$), ε_2 и $\phi_\ell^{-1}|_{U_\ell}$ в силу свойства 5) формы $\alpha|_{\widehat{M}}$, см. шаг 4в (для $w_\ell \in \{y_j\}$).

Выше в пп. 4), 10)–13), 19) и 20) соответствующее отображение (функция, риманова метрика, 1-форма или оснащенная функция Морса) g определено на подмножестве $U = U_g \subset M$, зависящем, вообще говоря, от g . В пп. 4), 10)–13) все подмножества U_g являются открытыми и топология на пространстве таких отображений (функций, римановых метрик) определяется как в § 4, (г). В пп. 19) и 20) все подмножества U_g компактны и топология на пространстве таких 1-форм (соответственно оснащенных функций Морса) g определяется аналогично § 4, (д), где вместо g рассматривается его очевидное продолжение до ростка на M в компакте U_g , определяемого так же, как g .

Таким образом, непрерывность отсутствует лишь у объекта 18) (зависящего от объекта 17)), от которого в свою очередь зависит объект 19). Поэтому остается проверить непрерывность зависимости 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ (см. объект 19)) на “страте” $\{(f_0, ds_0^2)\} \cup Q_{\hat{J}}$ в точке (f_0, ds_0^2) , где $(f_0, ds_0^2) \in F^1 \times \mu$ – любая пара, $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_N)$ – любое разбиение множества $\{1, \dots, 2q\}$ и $Q_{\hat{J}} := \{(f, ds^2) \in F^1 \times \mu | J(\bar{c}_+(f, ds^2)) = \hat{J}\}$ такие, что

$$J(\bar{c}_+(f_0, ds_0^2)) = (\hat{J}_1 \cup \dots \cup \hat{J}_{n_1}, \hat{J}_{n_1+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{n_2}, \dots, \hat{J}_{n_{N_0-1}+1} \cup \dots \cup \hat{J}_{n_{N_0}})$$

для некоторой последовательности $1 \leq n_1 < \dots < n_{N_0} = N$, где $2 \leq N_0 < N \leq 2q$ (поэтому при $q \leq 1$ доказывать нечего).

Индуктивное построение 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ по паре $(f, ds^2) \in Q_{\hat{J}}$ (см. шаг 4 в § 9) проводилось за $N+1$ шаг, причем каждый такой шаг (за исключением первого и последнего шагов, см. шаги 4а, 4е) состоит из 4 этапов (шаги 4б, 4в, 4г, 4д соответственно). Построение аналогичной 1-формы $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ по паре (f_0, ds_0^2) проводилось за N_0+1 аналогичный шаг. Пусть пара $(f, ds^2) \in Q_{\hat{J}}$ достаточно близка к паре (f_0, ds_0^2) .

Опишем новые, аналогичные друг другу, алгоритмы построения 1-форм $\alpha|_{\widehat{M}}$ и $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$, состоящие из N_0 шагов каждый. Для этого объединим некоторые из указанных $N+1$ шагов построения формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ в N_0 групп шагов. А именно, объединим первые n_1 шагов в первую группу, следующие $(n_2 - n_1)$ шагов – во вторую группу и т.д., а последние $(n_{N_0} - n_{N_0-1} + 1)$ шагов – в N_0 -ую группу. Переставим шаги внутри каждой группы так: сначала выполняются все этапы 4б, 4в, 4г данной группы шагов и лишь затем – все этапы 4д этой группы шагов

(возможность такого построения проверим ниже). При этом для ν -ой группы шагов, $1 \leq \nu \leq N_0$, будем строить 1-форму $\alpha|_{\widehat{M}}$ не поочередно на поверхностях $M_\lambda = \widehat{M} \cap f^{-1}[-1, \tilde{c}_\lambda(f, ds^2)]$, $\lambda \in [n_{\nu-1}+1, n_\nu]$ ($\tilde{c}_\lambda(f, ds^2) := c_{+,s}(f, ds^2)$, $s \in \widehat{J}_\lambda$), а сразу на чуть большей поверхности

$$M'_\nu := \widehat{M} \cap f^{-1}[-1, \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) + \varepsilon'_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq N_0,$$

где $\tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) := c_{+,s}(f_0, ds_0^2)$, $s \in \widehat{J}_{n_{\nu-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{n_\nu}$,

$$\varepsilon'_\nu := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\varepsilon_2(f_0, ds_0^2)}{30}, \tilde{c}_{\nu+1}(f_0, ds_0^2) - \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) \right\}, \quad 1 \leq \nu < N_0,$$

$$\varepsilon'_{N_0} := 1 - \tilde{c}_{N_0}(f_0, ds_0^2).$$

Аналогично, на ν -ом шаге, $1 \leq \nu \leq N_0$, будем строить 1-форму $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ не на поверхности $M_{0,\nu} = \widehat{M}_0 \cap f_0^{-1}[-1, \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2)]$, а на чуть большей поверхности

$$M'_{0,\nu} := \widehat{M}_0 \cap f_0^{-1}[-1, \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) + \varepsilon'_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq N_0.$$

Здесь поверхности $\widehat{M} \supset M_\lambda$, $1 \leq \lambda \leq N+1$ (соответственно $\widehat{M}_0 \supset M_{0,\nu}$, $1 \leq \nu \leq N_0+1$), отвечают паре $\varepsilon_2(f, ds^2)$, f (соответственно паре $\varepsilon_2(f_0, ds_0^2)$, f_0), см. шаг 4 в § 9.

Опишем новый алгоритм построения $\alpha|_{\widehat{M}}$ более точно. Для любого $s \in [1, 2q]$ определим число $\nu' = \nu'(s) \in [1, N_0]$ условием $s \in \widehat{J}_{n_{\nu'-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{n_{\nu'}}$. Аналогично построению формы $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ на шаге 4, на этапах 4б, 4в, 4г ν -ой группы шагов нового алгоритма, $2 \leq \nu \leq N_0$, мы строим ограничение 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ на множество

$$\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)=\nu-1} \Pi_\ell(f, ds^2)$$

(хотя это множество либо пусто, либо имеет непустое пересечение с множеством $M'_{\nu-1}$, на котором 1-форма была построена на предыдущем шаге нового алгоритма). На этапе 4д этой группы шагов мы строим продолжение построенной 1-формы

$$\alpha|_{M'_{\nu-1} \cup (\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f, ds^2))}$$

на множество

$$M'_\nu \cup \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f, ds^2) \right)$$

так, чтобы полученная 1-форма удовлетворяла условию 1) шага 4 на множестве

$$C_\nu := M'_\nu \setminus \left((M'_{\nu-1} \setminus \partial^+ M'_{\nu-1}) \cup \bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \text{int } \Pi_\ell(f, ds^2) \right).$$

Это возможно, так как f не имеет критических точек в C_ν и множество C_ν является объединением отрезков интегральных траекторий поля $\text{grad } f$ по отношению к римановой метрике $\tilde{ds}^2$, выпущенных из точек кривой

$$(\partial^+ M'_{\nu-1}) \setminus \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \text{int } \Pi_\ell(f, ds^2) \right)$$

и точек кривой

$$\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j)=\nu-1} \partial^+ \Pi_\ell(f, ds^2).$$

Ниже мы докажем применимость (т.е. корректность) этого алгоритма для построения 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ по паре (f, ds^2) , а также применимость аналогичного алгоритма для построения 1-формы $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ по паре (f_0, ds_0^2) . Отсюда будет следовать непрерывность зависимости 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ от пары $(f, ds^2) \in \{(f_0, ds_0^2)\} \cup Q_{\widehat{f}}$ в точке (f_0, ds_0^2) .

Осталось доказать корректность обоих описанных выше алгоритмов, т.е. что 1-форма $\alpha|_{\widehat{M}}$ (соответственно $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$) удовлетворяет условию 1) из шага 4 на всем множестве

$$M'_\nu \setminus \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f, ds^2) \right)$$

(соответственно $M'_{0,\nu} \setminus (\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f_0, ds_0^2))$), $1 \leq \nu < N_0$, хотя это множество может иметь непустое пересечение с множеством

$$\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1) \geq \nu} \Pi'_\ell(f, ds^2)$$

(соответственно $\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1) \geq \nu} \Pi'_\ell(f_0, ds_0^2)$). Действительно, из формулы (а) шага 4б следует, что условие 1) для 1-формы $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ выполнено на содержащем множество $M'_{0,\nu} \setminus (\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f_0, ds_0^2))$ множестве

$$(\widehat{M}_0 \cap f_0^{-1}[-1, \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) + \varepsilon'_{0,\nu}]) \setminus \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \tilde{\Pi}_\ell(f_0, ds_0^2) \right),$$

где

$$\varepsilon'_{0,\nu} := \min \left\{ \frac{\varepsilon_2(f_0, ds_0^2)}{54}, \tilde{c}_{\nu+1}(f_0, ds_0^2) - \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) \right\},$$

$\tilde{\Pi}_\ell(f_0, ds_0^2)$ – некоторое замкнутое подмножество множества $\text{int } \Pi_\ell(f_0, ds_0^2)$. Аналогично, с учетом непрерывности зависимости множеств $\Pi_\ell = \Pi_\ell(f, ds^2)$ от (f, ds^2) для любой пары (f, ds^2) , достаточно близкой к паре (f_0, ds_0^2) , 1-форма $\alpha|_{\widehat{M}}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) на совпадающем с множеством

$$M'_\nu \setminus \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \eta(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f, ds^2) \right)$$

множестве

$$(\widehat{M} \cap f^{-1}[-1, \tilde{c}_\nu(f_0, ds_0^2) + \varepsilon'_\nu]) \setminus \left(\bigcup_{w_\ell=y_j, \nu'(2j-1)<\nu} \Pi_\ell(f, ds^2) \right).$$

Это доказывает корректность описанных выше алгоритмов для $\alpha_0|_{\widehat{M}_0}$ и $\alpha|_{\widehat{M}}$.

Тем самым доказана непрерывность зависимости 1-формы $\alpha|_{\widehat{M}}$ (см. объект 19)) от пары $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$. Это завершает доказательство непрерывности отображения p_2 .

§ 11. Равномерная $\mathcal{D}^\pm$ -эquivариантная лемма Морса для оснащенных функций Морса

Леммы 11.1 и 11.2 (соответственно лемма 11.2) этого параграфа будут использованы в § 12 (соответственно в работе [13]) при построении гомотопической эквивалентности $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$ (соответственно $\tilde{i}_4: \mathcal{D}_0 \times \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}^1$). В этом параграфе мы предполагаем, что число $p + q + r$ критических точек функций Морса положительно, а поверхность M не обязательно ориентируема.

Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ – оснащенная функция Морса (см. определение 9.1 и замечание 2.7). Рассмотрим на $M \setminus \{x_i, z_k\}$ гладкое поле неотрицательно определенных в каждой точке квадратичных форм

$$d\check{s}^2 := (df)^2 + \alpha^2.$$

На $M \setminus \{x_i, y_j, z_k\}$ оно является римановой метрикой. Аналогично римановым метрикам, этому полю квадратичных форм отвечает функция длины $\check{L}(\gamma)$ регулярных кусочно гладких путей γ на $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Определим расстояние $\rho(x, y) = \rho_{f, \alpha}(x, y) := \inf(\check{L}(\gamma))$, $x, y \in M \setminus \{x_i, z_k\}$, где нижняя грань берется по регулярным кусочно гладким путям γ на поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ из x в y .

Пусть x_i – точка локального минимума функции $f \in F^1$, $1 \leq i \leq p$, пусть $c_j = f(y_j)$ – седловые критические значения, $1 \leq j \leq q$, и пусть $0 < R \leq R_- := \min\{1 + c_j\}$ в случае $q > 0$ или $0 < R \leq R_- := 2$ в случае $q = 0$. Открытым (соответственно замкнутым) кругом радиуса R с центром в точке x_i в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$ назовем компоненту связности $D_{x_i, R}$ точки x_i в множестве $f^{-1}[-1, -1 + R)$ (соответственно компоненту связности $\overline{D}_{x_i, R}$ в множестве $f^{-1}[-1, -1 + R]$). Аналогично определяется круг радиуса R (при $0 < R \leq R_+ := \min\{1 - c_j\}$ в случае $q > 0$ или $0 < R \leq R_+ := 2$ в случае $q = 0$) с центром в точке z_k локального максимума в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$, $1 \leq k \leq r$.

ЛЕММА 11.1. Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ – оснащенная функция Морса, $w_\ell \in \{x_i, z_k\}$ – критическая точка локального минимума (соответственно максимума) функции f , и пусть $R_0 = R_- := \min_{j=1}^q \{1 + c_j\} > 0$ (соответственно $R_0 = R_+ := \min_{j=1}^q \{1 - c_j\} > 0$) в случае $q > 0$ и $R_0 = R_- = R_+ := 2$ в случае $q = 0$. Тогда в открытом круге D_{w_ℓ, R_0} радиуса R_0 с центром в точке w_ℓ в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$ существуют регулярные координаты u, v , принимающие значения в $\{u^2 + v^2 < R_0\}$, в которых

$$f|_{D_{w_\ell, R_0}} = \pm(u^2 + v^2) + f(w_\ell), \quad \alpha|_{D_{w_\ell, R_0}} = \varkappa_\ell \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$$

(см. определение 9.1). В частности, в этих координатах $\overline{D}_{w_\ell, R} = \{u^2 + v^2 \leq R\}$ для любого $R \in (0, R_0)$. В любом круге $D_{w_\ell, R}$, $0 < R \leq R_0$, координаты u, v с этими свойствами определены однозначно, с точностью до преобразований $(u, v) \mapsto (u \cos \varphi_0 - v \sin \varphi_0, u \sin \varphi_0 + v \cos \varphi_0)$, где $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ – произвольная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $0 < R < R_0$ круг $\overline{D}_{w_\ell, R}$ не содержит других критических точек и точек края ∂M и $f(\partial \overline{D}_{w_\ell, R}) = R$, то $\overline{D}_{w_\ell, R}$ гомеоморфен стандартному замкнутому кругу.

Пусть для определенности $w_\ell = x_i$ – точка локального минимума, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, $1 \leq i \leq p$, $R_0 = R_-$. По определению 9.1 искомые координаты существуют в некоторой замкнутой окрестности $\overline{D}'$ точки x_i и принимают значения

в круге $\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon \in (0, R_-)$. Введем в этой окрестности полярные координаты ρ, φ , полагая $u = \sqrt{\rho} \cos \varphi$, $v = \sqrt{\rho} \sin \varphi$, $0 \leq \rho \leq \varepsilon$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, тогда

$$f|_{\overline{D}'} = -1 + \rho, \quad \alpha|_{\overline{D}'} = \varkappa_\ell d\varphi, \quad d\check{s}^2|_{\overline{D}' \setminus \{w_\ell\}} = d\rho^2 + \varkappa_\ell^2 d\varphi^2. \quad (34)$$

Сдвиг цилиндра

$$\left\{ \frac{\varepsilon}{2} \leq u^2 + v^2 \leq \varepsilon \right\} = f|_{D_{x_i, R_-}}^{-1} \left[-1 + \frac{\varepsilon}{2}, -1 + \varepsilon \right]$$

вдоль интегральных линий векторного поля $\text{grad } f / |\text{grad } f|^2$ (в смысле римановой метрики $d\check{s}^2$) за время $t \in (-\varepsilon/2, R_0 - \varepsilon)$ определяет диффеоморфизм Ψ_t этого цилиндра на цилиндр $f|_{D_{x_i, R_-}}^{-1} [-1 + \varepsilon/2 + t, -1 + \varepsilon + t]$. При этом на цилиндре $\{\varepsilon/2 \leq u^2 + v^2 \leq \varepsilon\}$ выполнено

$$f \circ \Psi_t = f + t, \quad \Psi_t^* \alpha = \alpha, \quad -\frac{\varepsilon}{2} < t < R_- - \varepsilon, \quad (35)$$

а при $-\varepsilon/2 < t \leq 0$ в полярных координатах выполнено $\Psi_t(\varepsilon, \varphi) = (\varepsilon + t, \varphi)$. Продолжим полярные координаты ρ, φ на весь круг D_{x_i, R_-} условием $\Psi_t(\varepsilon, \varphi) = (\varepsilon + t, \varphi)$, $-\varepsilon/2 < t < R_- - \varepsilon$. Тогда из (35) для $t := \rho - \varepsilon$ следует, что в этих координатах при $\varepsilon/2 < \rho < R_-$ выполнено

$$f(\rho, \varphi) = f \circ \Psi_{\rho - \varepsilon}(\varepsilon, \varphi) = f(\varepsilon, \varphi) + \rho - \varepsilon = -1 + \rho, \\ \Psi_{\rho - \varepsilon}^*(\alpha|_{(\rho, \varphi)}) = \alpha|_{(\varepsilon, \varphi)} = \varkappa_\ell d\varphi,$$

откуда $\alpha|_{(\rho, \varphi)} = \varkappa_\ell d\varphi$, $\varepsilon/2 < \rho < R_-$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, т.е. в построенных полярных координатах ρ, φ на D_{x_i, R_-} выполнены аналоги формул (34) во всем круге D_{x_i, R_-} . Переход от полярных координат к декартовым по формулам $u = \sqrt{\rho} \cos \varphi$, $v = \sqrt{\rho} \sin \varphi$, $0 \leq \rho < R_-$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, дает искомые координаты u, v в круге D_{x_i, R_-} , принимающие значения в $\{u^2 + v^2 < R_-\}$.

Если u_1, v_1 – другие координаты в D_{x_i, R_-} с нужными свойствами, то в соответствующих полярных координатах ρ_1, φ_1 , определяемых соотношениями $u_1 = \sqrt{\rho_1} \cos \varphi_1$, $v_1 = \sqrt{\rho_1} \sin \varphi_1$, $0 \leq \rho_1 < R_-$, $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$, выполнены аналоги формул (34) во всем круге D_{x_i, R_-} . Значит, $\rho_1 = \rho$, $\varphi_1 = \varphi + \varphi_0$ для некоторой константы $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Поэтому $u_1 = \sqrt{\rho} \cos(\varphi + \varphi_0) = u \cos \varphi_0 - v \sin \varphi_0$, $v_1 = \sqrt{\rho} \sin(\varphi + \varphi_0) = u \sin \varphi_0 + v \cos \varphi_0$. Лемма доказана.

Ниже строятся аналогичные регулярные координаты u, v в окрестностях седловых критических точек y_j , принимающие значения в $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$ и непрерывно зависящие от пары (f, α) , $1 \leq j \leq q$, где числа $\varepsilon_{3,j} = \varepsilon_{3,j}(f, \alpha) > 0$ непрерывно зависят от оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ и строятся так. Пусть вещественное число $d_{j_1, j_2} = d_{j_2, j_1}$ равно расстоянию $\rho_{f, \alpha}(y_{j_1}, y_{j_2})$ между седловыми точками y_{j_1} и y_{j_2} при $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$. Определим число $\tilde{L}_j = \tilde{L}_j(f, \alpha) := \inf(\tilde{L}(\gamma)) > 0$, где нижняя грань берется по замкнутым кусочно гладким нестягиваемым путям γ на поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$ с началом и концом в точке y_j , $1 \leq j \leq q$. Определим числа $\varepsilon_{3,j} = \varepsilon_{3,j}(f, \alpha)$, $1 \leq j \leq q$, формулой

$$\varepsilon_{3,j} := \min \left\{ \min_{j_1 \neq j} d_{j_1, j}, \frac{1}{2} \tilde{L}_j, 1 - c_j, 1 + c_j \right\} \in (0, 1], \quad 1 \leq j \leq q, \quad (f, \alpha) \in \mathbb{F}^1. \quad (36)$$

Для любого $R \in (0, \varepsilon_{3,j}]$ обозначим через $D_{y_j, R} = D_{y_j, R}(f, \alpha)$ (соответственно $\overline{D}_{y_j, R} = \overline{D}_{y_j, R}(f, \alpha)$) открытый (соответственно замкнутый) круг радиуса R с центром в седловой критической точке y_j в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$, $1 \leq j \leq q$. Тогда открытый круг $D_{y_j, R}$ не содержит других критических точек и точек края ∂M .

ЛЕММА 11.2. Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ – оснащенная функция Морса, y_j – седловая критическая точка функции f , $1 \leq j \leq q$. Тогда:

(А) для любого $R \in (0, \varepsilon_{3,j})$ замкнутый круг $\overline{D}_{y_j, R}$ с центром в точке y_j радиуса R гомеоморфен стандартному замкнутому кругу;

(Б) более того, в $D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}$ существуют положительно ориентированные гладкие координаты u, v , принимающие значения во всем круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$, в которых

$$\begin{aligned} f|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} &= u^2 - v^2 + c_j, & \alpha|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} &= d(2uv), \\ d\tilde{s}^2|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} &= 4(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2), \end{aligned} \quad (37)$$

где $c_j = f(y_j)$. Если координаты u, v со свойствами (37) существуют в некоторой окрестности точки y_j , то они определены этими свойствами однозначно, с точностью до преобразования $(u, v) \mapsto (-u, -v)$. При этом

$$\rho_{f, \alpha}(y_j, \cdot)|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = u^2 + v^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В приводимом ниже доказательстве все рассматриваемые открытые круги (в смысле расстояния $\rho = \rho_{f, \alpha}$) имеют центр в точке y_j и обозначены через $D_R := D_{y_j, R}$, где R – радиус круга.

Согласно определению 9.1 координаты u, v с требуемыми свойствами существуют в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки y_j и принимают значения в некоторой окрестности начала координат. Пусть эти координаты определены в замкнутой окрестности $\overline{D}' \subset D_{\varepsilon_{3,j}}$ точки y_j при помощи диффеоморфизма $\Psi' = \Psi'_j: \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\} \rightarrow \overline{D}'$, где $\varepsilon > 0$. Проведем построение координат во всем открытом круге $D_{\varepsilon_{3,j}}$ за девять шагов. На шагах 1–4 мы построим продолжение $\Psi = \Psi_j: \{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\} \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}} \subset M \setminus \{x_i, z_k\}$ отображения Ψ' на весь круг $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$. На шагах 5 и 6 проверим гладкость Ψ и выполнение свойств $f \circ \Psi = u^2 - v^2 + c_j$ и $\Psi^* \alpha = d(2uv)$, а на шагах 7–9 проверим, что Ψ является диффеоморфизмом.

Шаг 1. Так как 1-форма α замкнута, то в достаточно малой окрестности любой точки из $M \setminus \{x_i, y_{j_1}, z_k\}$ она имеет вид $\alpha = dg$ для некоторой гладкой функции g в этой окрестности. Так как 2-форма $df \wedge dg$ отлична от нуля в каждой точке и задает положительную ориентацию поверхности, то пара функций f, g является положительно ориентированными локальными координатами. В этих локальных координатах метрика $d\tilde{s}^2 = df^2 + \alpha^2$ является евклидовой, поэтому интервалы геодезических являются прямыми в этих локальных координатах. Отсюда следует, что вдоль любого интервала геодезической $\gamma: (a, b) \rightarrow M \setminus \{x_i, y_{j_1}, z_k\}$ с натуральным параметром t выполнено

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \equiv \text{const}, \quad \alpha|_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right) \equiv \text{const}, \quad t \in (a, b). \quad (38)$$

В частности, в круге $\overline{D}'$ положим $g' := (2uv) \circ \Psi'^{-1}$ и рассмотрим отображение $h' : \overline{D}' \rightarrow \mathbb{R}^2$, задаваемое формулой $h' = (f|_{\overline{D}'}, g')$. Так как

$$h' \circ \Psi' = (f \circ \Psi', g' \circ \Psi') = (u^2 - v^2 + c_j, 2uv) =: (\tilde{u} + c_j, \tilde{v}), \quad \tilde{u} + i\tilde{v} = (u + iv)^2,$$

то h' задает двулистное разветвленное накрытие замкнутой окрестности $\overline{D}'$ на замкнутый круг $\{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \leq \varepsilon^2\}$ с ветвлением в начале координат. По доказанному выше, при отображении h' геодезические в проколотой замкнутой окрестности $\overline{D}' \setminus \{y_j\}$ по отношению к римановой метрике

$$d\tilde{s}^2|_{\overline{D}' \setminus \{y_j\}} = (df^2 + \alpha^2)|_{\overline{D}' \setminus \{y_j\}}$$

переходят в прямолинейные интервалы в проколотом круге $\{0 < \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \leq \varepsilon^2\}$. В частности, для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ определен полуинтервал геодезической $\gamma'_\varphi|_{(0,r]}$ по отношению к римановой метрике

$$d\tilde{s}^2|_{M \setminus \{x_i, y_{j_1}, z_k\}} = (df^2 + \alpha^2)|_{M \setminus \{x_i, y_{j_1}, z_k\}},$$

где $\gamma'_\varphi(t) := \Psi'(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi) \in \overline{D}'$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, причем t – натуральный параметр.

Шаг 2. Покажем, что при любом $R \in (0, \varepsilon]$ выполнено $\Psi'\{u^2 + v^2 < R\} = D_R$ – открытый круг радиуса R в смысле расстояния ρ . Так как $\tilde{L}(\gamma'_\varphi|_{[0,R]}) = R$, то $\Psi'\{u^2 + v^2 < R\} \subset D_R$. Предположим, что $z \in D_R$. Тогда найдется гладкая кривая $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M \setminus \{x_i, z_k\}$, $\tilde{\gamma}(0) = y_j$, $\tilde{\gamma}(1) = z$, длины $\tilde{L}(\tilde{\gamma}) < R \leq \varepsilon$. Так как кривая $h' \circ \tilde{\gamma}$ (или по меньше мере ее начальный отрезок) выходит из начала координат и имеет евклидову длину $\tilde{L}(\tilde{\gamma}) < R \leq \varepsilon$, то она никогда не достигнет границы круга радиуса ε , а потому кривая $\tilde{\gamma}$ целиком содержится в $D' := \Psi'\{u^2 + v^2 < \varepsilon\}$ и, в частности, $\tilde{\gamma}(1) = z = \Psi'(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi) = \gamma'_\varphi(t)$ для некоторых $t \in [0, \varepsilon)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Отсюда $h' \circ \tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$ и $h' \circ \tilde{\gamma}(1) = h'(z) = h' \circ \gamma'_\varphi(t)$. Но кривая $h' \circ \gamma'_\varphi|_{[0,t]}$ является прямолинейным отрезком, поэтому его евклидова длина $\tilde{L}(\gamma'_\varphi|_{[0,t]}) = t$ не превосходит евклидовой длины $\tilde{L}(\tilde{\gamma}) < R$ кривой $h' \circ \tilde{\gamma}$, имеющей те же концы, поэтому $t < R$. Значит,

$$z = \Psi'(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi) \in \Psi'\{u^2 + v^2 = t\} \subset \Psi'\{u^2 + v^2 < R\}.$$

Таким образом, $D_R \subset \Psi'\{u^2 + v^2 < R\}$, а потому $\Psi'\{u^2 + v^2 < R\} = D_R$. В частности, при $R = \varepsilon$ получаем $D' := \Psi'\{u^2 + v^2 < \varepsilon\} = D_\varepsilon$.

Шаг 3. Для каждого числа $\varphi \in [0, 2\pi]$ обозначим через $T = T(\varphi)$ максимальное число из отрезка $[\varepsilon, \varepsilon_{3,j}]$ такое, что полуинтервал геодезической $\gamma'_\varphi|_{(0,r]}$ может быть продолжен на интервал $0 < t < T(\varphi)$. Обозначим этот интервал геодезической через $\gamma_\varphi|_{(0,T(\varphi))}$, где $\gamma_\varphi : [0, T(\varphi)) \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}}$ – продолжение кривой γ'_φ на полуинтервал $0 \leq t < T(\varphi)$. По результатам шагов 1, 2 полуинтервал геодезической $\gamma_\varphi|_{(0,\varepsilon]} = \gamma'_\varphi|_{(0,\varepsilon]}$ всегда определен и целиком лежит в круге $\overline{D}' = \overline{D}_\varepsilon$. Интервал геодезической $\gamma_\varphi|_{(0,T(\varphi))}$ целиком содержится в $D_{\varepsilon_{3,j}} \setminus \{y_j\}$, так как расстояние от точки y_j до любой точки $\gamma_\varphi(t)$, $0 < t < T(\varphi)$, этого интервала геодезической в метрике $d\tilde{s}^2$ не превосходит $t < T(\varphi) \leq \varepsilon_{3,j}$.

Положим $\tilde{\varepsilon} := \inf T \in [\varepsilon, \varepsilon_{3,j}]$. Рассмотрим отображение

$$\Psi = \Psi_j : \{u^2 + v^2 < \tilde{\varepsilon}\} \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}},$$

переводящее начало координат в точку y_j и сопоставляющее паре чисел $(u, v) = (\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi) \in \{0 < u^2 + v^2 < \tilde{\varepsilon}\}$, $0 < t < \tilde{\varepsilon}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, точку $\gamma_\varphi(t) \in D_{\varepsilon_{3,j}}$. Таким образом, $\Psi|_{\{u^2+v^2 \leq \varepsilon\}} = \Psi'$, т.е. мы продолжили диффеоморфизм $\Psi': \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\} \rightarrow \bar{D}'$ до отображения $\Psi: \{u^2 + v^2 < \tilde{\varepsilon}\} \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}}$.

Шаг 4. Докажем, что $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{3,j}$. Предположим, что $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_{3,j}$, а потому $\varepsilon \leq T(\varphi) < \varepsilon_{3,j}$ для некоторого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Заметим, что $\gamma_\varphi(t) \in \bar{D}_t$ для любого $t \in (0, T(\varphi))$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что существует число $\varepsilon' \in (0, \varepsilon/2]$ такое, что для любого $t \in (T(\varphi) - \varepsilon', T(\varphi))$ точка $\gamma_\varphi(t)$ лежит в $\bar{D}_{T(\varphi)} \setminus D_{\varepsilon'}$. Значит, интервал геодезической $\gamma_\varphi|_{(T(\varphi)-\varepsilon', T(\varphi))}$ лежит полностью в компакте $\bar{D}_{T(\varphi)} \setminus D_{\varepsilon'} \subset M \setminus \{x_i, y_{j_1}, z_k\}$, а потому может быть продолжен на полуинтервал $(0, T(\varphi)]$. Так как рассматриваемый компакт содержится в поверхности $M \setminus (\partial M \cup \{x_i, y_{j_1}, z_k\})$, имеющей пустой край, то полуинтервал геодезической $\gamma_\varphi|_{(0, T(\varphi))}$ может быть продолжен на некоторый открытый интервал, содержащий $(0, T(\varphi)]$, что противоречит определению числа $T(\varphi)$.

Случай 2. Пусть для любого $\varepsilon' \in (0, \varepsilon/2]$ существует $t \in (T(\varphi) - \varepsilon', T(\varphi))$ такое, что $\gamma_\varphi(t) \in D_{\varepsilon'}$. Тогда интервал геодезической $\gamma_\varphi|_{(T(\varphi)-\varepsilon/2, T(\varphi))}$ лежит полностью в круге D_ε . Покажем, что $\lim_{t \rightarrow T(\varphi)-0} \gamma_\varphi(t) = y_j$. По доказанному на шаге 2 $D_\varepsilon = D'$, поэтому $\bar{D}_\varepsilon = \bar{D}'$. Рассмотрим двулистное накрытие $h': \bar{D}_\varepsilon \rightarrow \{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \leq \varepsilon^2\}$ из шага 1. Тогда кривая $h' \circ \gamma_\varphi|_{(T(\varphi)-\varepsilon/2, T(\varphi))}$ является прямолинейным интервалом в проколотом круге $\{0 < \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \leq \varepsilon^2\}$, см. шаг 1. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае $\lim_{t \rightarrow T(\varphi)-0} h' \circ \gamma_\varphi(t) = 0$, а потому $\lim_{t \rightarrow T(\varphi)-0} \gamma_\varphi(t) = y_j$. Так как $\frac{d}{dt} f(\gamma_\varphi(t)) \equiv \text{const}$ (см. (38)) и $\lim_{t \rightarrow +0} f(\gamma_\varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow T(\varphi)-0} f(\gamma_\varphi(t)) = f(y_j) = c_j$, то $f \circ \gamma_\varphi \equiv c_j$. Значит, геодезическая $\gamma_\varphi|_{(0, T(\varphi))}$ является открытым ребром графа $f^{-1}(c_j)$, а потому ее замыкание является нестягиваемой петлей длины $T(\varphi) < \varepsilon_{3,j}$ в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$, что противоречит определению (36) числа $\varepsilon_{3,j}$.

Шаг 5. Проверим гладкость отображения $\Psi: \{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\} \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}} \subset M \setminus \{x_i, z_k\}$. Согласно шагам 3, 4 имеем $\Psi(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi) = \gamma_\varphi(t)$, $0 < t < \varepsilon_{3,j}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поэтому из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что в проколотом круге $\{0 < u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$ отображение Ψ является гладким. Поскольку в круге $\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\}$ отображение Ψ совпадает с диффеоморфизмом Ψ' , получаем гладкость Ψ на всем $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$.

Шаг 6. Проверим, что

$$f \circ \Psi = u^2 - v^2 + c_j, \quad \Psi^* \alpha = d(2uv) = 2(u dv + v du).$$

При $u^2 + v^2 \leq \varepsilon$ равенства верны по определению координат u, v в круге $\bar{D}'$. Отсюда и из равенства $\gamma_\varphi(t) = \Psi(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi)$, $0 < t < \varepsilon_{3,j}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, следует, что при $0 \leq t \leq \varepsilon$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} f(\gamma_\varphi(t)) &= f(\Psi(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi)) = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)t + c_j, \\ \alpha|_{\gamma_\varphi(t)} \left(\frac{d}{dt} \gamma_\varphi(t) \right) &= d(2uv) \left(\frac{d}{dt} \gamma_\varphi(t) \right) = \frac{d}{dt} (2t \cos \varphi \sin \varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (38) следует, что

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_\varphi(t)) \equiv \text{const}, \quad \alpha|_{\gamma_\varphi(t)} \left(\frac{d\gamma_\varphi}{dt}(t) \right) \equiv \text{const}, \quad t \in (0, \varepsilon_{3,j}),$$

а значит, вышеприведенные равенства верны при всех $t \in (0, \varepsilon_{3,j})$. Полагая $\sqrt{t} \cos \varphi = u$, $\sqrt{t} \sin \varphi = v$, имеем в круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$

$$\begin{aligned} f \circ \Psi(u, v) &= f(\Psi(\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi)) = f(\gamma_\varphi(t)) \\ &= (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)t + c_j = u^2 - v^2 + c_j, \\ \alpha|_{\Psi(u, v)} \left(\frac{d}{dt} \gamma_\varphi(t) \right) &= \alpha|_{\gamma_\varphi(t)} \left(\frac{d}{dt} \gamma_\varphi(t) \right) = 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \frac{2uv}{u^2 + v^2} = d(2uv) \left(\frac{d}{dt} \gamma_\varphi(t) \right). \end{aligned}$$

Из замкнутости 1-формы α и гладкости Ψ получаем, что форма $\Psi^* \alpha$ является гладкой и замкнутой в круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$. Поэтому по лемме Пуанкаре она является точной в этом круге, т.е. имеет вид $\Psi^* \alpha = d\tilde{g}$ для некоторой гладкой функции $\tilde{g}$ в этом круге. При этом $\Psi^* \alpha = d\tilde{g}$ совпадает с $d(2uv)$ в круге $\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\}$, а также при ограничении на касательные пространства радиусов проколото круга $\{0 < u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$. Отсюда следует, что функция $\tilde{g} - 2uv$ постоянна вдоль любого радиуса круга $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$ и поэтому она является константой на всем круге. Значит, 1-форма $\Psi^* \alpha = d\tilde{g}$ совпадает с $d(2uv)$ во всем круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$.

Шаг 7. Убедимся, что Ψ – погружение, т.е. локальный диффеоморфизм. В окрестности нуля он совпадает с диффеоморфизмом $\Psi': \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\} \rightarrow \bar{D}'$. Пусть g , как и на шаге 1, – заданная локально функция в $D_{\varepsilon_{3,j}}$ со свойством $dg = \alpha$. Из шага 5 следует, что в проколоте круге $\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\} \setminus \{(0, 0)\}$ пара функций $f \circ \Psi$, $g \circ \Psi$ задает локальные координаты. Поэтому композиция отображений $(u, v) \mapsto \Psi(u, v) \mapsto (f \circ \Psi(u, v), g \circ \Psi(u, v))$ является локальным диффеоморфизмом. Следовательно, и первое отображение в композиции тоже является локальным диффеоморфизмом.

Шаг 8. Покажем, что погружение Ψ инъективно, т.е. является вложением. Предположим, что $R \in [\varepsilon, \varepsilon_{3,j})$ – нижняя грань таких чисел $R' \in [\varepsilon, \varepsilon_{3,j})$, что $\Psi|_{\{u^2 + v^2 \leq R'\}}$ не инъективно. Из того, что Ψ – локальный диффеоморфизм (см. шаг 7), следует, что существуют различные пары чисел $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ такие, что $\Psi(u_1, v_1) = \Psi(u_2, v_2)$. Из минимальности R заключаем, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \partial\{u^2 + v^2 \leq R\}$.

Из точки y_j в точку $z := \Psi(u_1, v_1) = \Psi(u_2, v_2)$ ведут два различных пути $\gamma_\eta(t) := \Psi(\sqrt{t}u_\eta, \sqrt{t}v_\eta)$, $0 \leq t \leq 1$, в $\bar{D}_R \subset D_{\varepsilon_{3,j}}$, $\eta = 1, 2$. Как в доказательстве следствия 8.3, шаг 3б, можно показать, что образованная этими путями петля $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ в $\bar{D}_R$ не стягиваема в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Здесь доказательство даже проще, так как аналог соотношения (18) имеет вид

$$\frac{(f(z) - c_j)df + g_1(z)\alpha}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_1^2(z)}} \Big|_z = -\lambda \frac{(f(z) - c_j)df + g_2(z)\alpha}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_2^2(z)}} \Big|_z, \quad \lambda > 0,$$

где $g_\eta := (2uv) \circ \Psi_\eta^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi_\eta := \Psi|_{U_\eta} : U_\eta \rightarrow U$ – диффеоморфизм достаточно малой окрестности U_η точки (u_η, v_η) на малую окрестность $U \subset D_{\varepsilon_{3,j}}$ точки z , $\eta = 1, 2$. При этом из шага 6 имеем $dg_1 = dg_2 = \alpha|_U$. Поскольку пара $(df|_z, \alpha|_z)$ является базисом T_z^*M , то

$$\frac{f(z) - c_j}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_1^2(z)}} = -\lambda \frac{f(z) - c_j}{\sqrt{(f(z) - c_j)^2 + g_2^2(z)}},$$

а значит, $f(z) - c_j = 0$. Отсюда и из равенства $f \circ \Psi = u^2 - v^2 + c_j$ (см. шаг 6) имеем $u_\eta^2 - v_\eta^2 = 0$, $\eta = 1, 2$, и на каждом из путей γ_1, γ_2 функция f постоянна. Значит, петля $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ является петлей графа $f^{-1}(c_j)$ и поэтому она не стягиваема в поверхности $M \setminus \{x_i, z_k\}$. Так как длина петли равна $\tilde{L}(\gamma_1^{-1}\gamma_2) = 2R < 2\varepsilon_{3,j}$, получаем противоречие с определением (36) числа $\varepsilon_{3,j}$.

Шаг 9. Докажем сюръективность Ψ и формулу

$$\rho_{f,\alpha}(y_j, \cdot)|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = u^2 + v^2.$$

Равенство $\Psi\{u^2 + v^2 < R\} = D_R$ при $0 < R \leq \varepsilon_{3,j}$ доказывается как на шаге 2 с помощью формул, доказанных на шаге 6. В частности, $\Psi\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\} = D_{\varepsilon_{3,j}}$, т.е. вложение Ψ сюръективно. Отсюда также получаем, учитывая биективность Ψ , что при $0 < R < \varepsilon_{3,j}$ выполнено

$$\begin{aligned} \Psi\{u^2 + v^2 \leq R\} &= \Psi\left(\bigcap_{R' \in (R, \varepsilon_{3,j})} \{u^2 + v^2 < R'\}\right) = \bigcap_{R' \in (R, \varepsilon_{3,j})} \Psi\{u^2 + v^2 < R'\} \\ &= \bigcap_{R' \in (R, \varepsilon_{3,j})} D_{R'} = \bar{D}_R. \end{aligned}$$

Поэтому $\rho_{f,\alpha}(y_j, \cdot)|_{D_{y_j, \varepsilon_{3,j}}} = u^2 + v^2$.

Шаг 10. Осталось показать, что построенные координаты u, v в круге $D_{\varepsilon_{3,j}}$ определены однозначно, с точностью до преобразования координат $(u, v) \mapsto (-u, -v)$. Пусть $\Psi: \{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\} \rightarrow D_{\varepsilon_{3,j}}$ — диффеоморфизм, задающий такие координаты. В круге $D_{\varepsilon_{3,j}}$ замкнутая 1-форма $\alpha|_{D_{\varepsilon_{3,j}}}$ точна, поэтому она имеет вид $\alpha = dg$ для некоторой гладкой функции $g = g_j: D_{\varepsilon_{3,j}} \rightarrow \mathbb{R}$, определенной однозначно условием $g(y_j) = 0$. Зададим отображение $h: D_{\varepsilon_{3,j}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $h = (f|_{D_{\varepsilon_{3,j}}}, g)$. Тогда композиция $h \circ \Psi = (f \circ \Psi, g \circ \Psi) = (u^2 - v^2 + c_j, 2uv) =: (\tilde{u} + c_j, \tilde{v})$ имеет вид $\tilde{u} + i\tilde{v} = (u + iv)^2$ и, в частности, не зависит от диффеоморфизма Ψ . Поэтому для любого другого диффеоморфизма Ψ_1 имеем $h \circ \Psi = h \circ \Psi_1 = h \circ \Psi \circ (\Psi^{-1} \circ \Psi_1)$, откуда $\Psi^{-1} \circ \Psi_1(u, v) \in \{(u, v), (-u, -v)\}$ для любого $(u, v) \in \{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$. Отсюда и из непрерывности отображения $\Psi^{-1} \circ \Psi_1$ следует, что оно равно либо $\text{id}_{\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}}$, либо $-\text{id}_{\{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}}$. Поэтому $\Psi_1 = \Psi$ или $\Psi_1(u, v) = \Psi(-u, -v)$, $(u, v) \in \{u^2 + v^2 < \varepsilon_{3,j}\}$. Лемма 11.2 доказана.

§ 12. Построение $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантного отображения из $\mathbb{F}^1$ в $F^1 \times \mu$

В этом параграфе строится отображение $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$.

Пусть $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ — оснащенная функция Морса (см. определение 9.1), где $f \in F^1$. Если число $p + q + r$ критических точек функции f равно нулю, рассмотрим риманову метрику $ds^2(f, \alpha) := (df)^2 + \alpha^2$ и положим $i_2(f, \alpha) := (f, ds^2(f, \alpha)) \in F^1 \times \mu$. Далее предполагаем, что $p + q + r > 0$.

По оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ определим число $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(f, \alpha) > 0$ аналогично определению (36) чисел $\varepsilon_{3,j} = \varepsilon_{3,j}(f, \alpha) > 0$, $1 \leq j \leq q$, формулой

$$\varepsilon_3 := \frac{1}{3} \min \left\{ 1, \min_{1 \leq j_1 < j_2 \leq q} d_{j_1, j_2}, \min_{1 \leq j \leq q} \min \{ \tilde{L}_j, 1 - c_j, 1 + c_j \} \right\} \in \left(0, \frac{1}{3} \right]. \quad (39)$$

Пусть $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3} = \overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}(f, \alpha)$ – замкнутый круг радиуса ε_3 с центром в критической точке w_ℓ (в смысле расстояния $\rho_{f, \alpha}$ на $M \setminus \{x_i, z_k\}$), $1 \leq \ell \leq p + q + r$, включая критические точки локальных минимумов и максимумов, см. § 11. Так как $\varepsilon_3 < R_- = \min_{j=1}^q \{1 + c_j\}$, $\varepsilon_3 < R_+ = \min_{j=1}^q \{1 - c_j\}$ и $\varepsilon_3 < \varepsilon_{3,1}, \dots, \varepsilon_{3,q}$ (см. (36)), то замкнутые круги $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$, $1 \leq \ell \leq p + q + r$, согласно леммам 11.1 и 11.2, (А) гомеоморфны стандартному замкнутому кругу. Эти круги попарно не пересекаются и отстоят друг от друга и от края не менее, чем на ε_3 .

Для любой оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ рассмотрим риманову метрику $ds^2 = ds^2(f, \alpha)$ на M , совпадающую с

$$ds^2 := (df)^2 + \alpha^2 \quad \text{в} \quad M \setminus \bigcup_{\ell=1}^{p+q+r} \overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3},$$

а в каждом круге $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$ выражающуюся следующей формулой через координаты u, v из лемм 11.1 и 11.2:

$$ds^2|_{\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}} := (1 - I_{0, \varepsilon_3}(u^2 + v^2))(du^2 + dv^2) + I_{0, \varepsilon_3}(u^2 + v^2) d\check{s}^2|_{\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}}, \quad (40)$$

где функция $I_{a,b}$ определена в (6). Так как $I_{0, \varepsilon_3} \equiv 0$ на $[0, \varepsilon_3/3]$, то $ds^2 = du^2 + dv^2$ в кругах $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3/3}$. Так как $I_{0, \varepsilon_3} \equiv 1$ на $[2\varepsilon_3/3, 1]$, имеем $ds^2 = df^2 + \alpha^2 = d\check{s}^2$ в цилиндрах $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3} \setminus D_{w_\ell, 2\varepsilon_3/3} = \{2\varepsilon_3/3 \leq u^2 + v^2 \leq \varepsilon_3\}$ вокруг критических точек w_ℓ . Отсюда и из гладкости координатных функций u, v в кругах $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$ следует, что построенная риманова метрика ds^2 корректно определена и является гладкой на всем M .

В каждом проколотом круге $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3} \setminus \{w_\ell\}$ риманова метрика ds^2 допускает следующее бескоординатное задание. Определим в круге $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$ функцию $r_{w_\ell} := u^2 + v^2$ следующей бескоординатной формулой, в зависимости от типа критической точки $w_\ell \in \{x_i, y_j, z_k\}$:

$$r_{x_i} = (1 + f)|_{\overline{D}_{x_i, \varepsilon_3}}, \quad r_{y_j} = \sqrt{(f - c_j)^2|_{\overline{D}_{y_j, \varepsilon_3}} + g_j^2}, \quad r_{z_k} = (1 - f)|_{\overline{D}_{z_k, \varepsilon_3}}, \quad (41)$$

$1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq r$, где $c_j := f(y_j)$, а функция $g_j: \overline{D}_{y_j, \varepsilon_3} \rightarrow \mathbb{R}$ определена условиями $dg_j = \alpha|_{\overline{D}_{y_j, \varepsilon_3}}$ и $g_j(y_j) = 0$, $1 \leq j \leq q$. Тогда верна бескоординатная формула

$$ds^2|_{\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3} \setminus \{w_\ell\}} = (1 - I_{0, \varepsilon_3} \circ r_{w_\ell}) \left(\frac{df^2}{4r_{w_\ell}} + (C_\ell \circ r_{w_\ell}) \alpha^2 \right) + (I_{0, \varepsilon_3} \circ r_{w_\ell}) d\check{s}^2, \quad (42)$$

где $C_\ell(t) := t/\varkappa_\ell^2$ при $w_\ell \in \{x_i, z_k\}$, $C_\ell(t) := 1/(4t)$ при $w_\ell \in \{y_j\}$. Эта риманова метрика продолжается по непрерывности в точку w_ℓ бескоординатной формулой $ds^2|_{w_\ell} = -(1/2)d^2|f|$ при $w_\ell \in \{x_i, z_k\}$, $ds^2|_{w_\ell} = (1/2)\sqrt{(d^2f)^2 + (d\alpha)^2}$ при $w_\ell \in \{y_j\}$, где через $d^2|f|$, d^2f (соответственно $d\alpha$) обозначена квадратичная форма в $T_{w_\ell}M$, задаваемая матрицей вторых частных производных функции $|f|$, f (соответственно матрицей первых частных производных ковекторного поля α) в точке w_ℓ относительно каких-либо локальных координат.

Из бескоординатных формул (41), (42) следует, что риманова метрика $ds^2 = ds^2(f, \alpha)$ не зависит от произвола в выборе координат u, v в круге $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$ вокруг любой критической точки w_ℓ . Она даже может быть вычислена без использования существования этих координат во всем круге $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$, а с использованием лишь гомеоморфности этого круга стандартному замкнутому кругу, если

$w_\ell \in \{y_j\}$ – седловая точка (см. лемму 11.2, (А)). Определим отображение

$$i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu, \quad (f, \alpha) \mapsto (f, ds^2(f, \alpha)).$$

§ 13. Проверка непрерывности отображения $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$

Докажем непрерывность отображения $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu, (f, \alpha) \mapsto (f, ds^2(f, \alpha))$.

Укажем объекты, используемые при построении этого отображения, в том порядке, в котором они появлялись в § 11 и § 12, где объекты 3)–8) рассматриваются для каждой критической точки $w_\ell \in \{x_i(f), y_j(f), z_k(f)\}$:

1) поле

$$d\tilde{s}^2 = (df)^2 + \alpha^2 \in \mu_{\geq 0}(M \setminus \{x_i(f), z_k(f)\})$$

неотрицательно определенных квадратичных форм на проколотой поверхности $M \setminus \{x_i(f), z_k(f)\}$ непрерывно зависит от (f, α) по отношению к C^∞ -топологии на $\mu_{\geq 0}(M \setminus \{x_i(f), z_k(f)\}) \subset OT_0^2(M)$, определенной в § 4, (в), (г);

2) числа d_{j_1, j_2} ($1 \leq j_1 < j_2 \leq q$), $\tilde{L}_j$ ($1 \leq j \leq q$), ε_3 непрерывно зависят от $d\tilde{s}^2, f$;

3) число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3(f_0, \alpha_0))$ и гладкое вложение $\Psi'_\ell: \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\} \rightarrow M$, задающее в замкнутой окрестности $\overline{D}'_{w_\ell, \varepsilon} := \Psi'_\ell\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\} \subset M$ регулярные координаты u, v со свойствами из определения 9.1, могут быть выбраны непрерывно зависящими от $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ в некоторой окрестности $\mathbb{U}'_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{F}^1$ любой оснащенной функции Морса $(f_0, \alpha_0) \in \mathbb{F}^1$ согласно определению C^∞ -топологии на $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ (см. п. 4.2 и § 4, (б), (д));

4) гладкое вложение $\Psi_\ell: \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_3\} \rightarrow M$ со свойством $\Psi_\ell|_{\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon\}} = \Psi'_\ell$, задающее в замкнутой окрестности $\overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3} := \Psi_\ell\{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_3\} \subset M$ точки $w_\ell \in \{x_i(f), y_j(f), z_k(f)\}$ регулярные координаты u, v со свойствами из определения 9.1, определено в окрестности $\mathbb{U}'_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{F}^1$ и непрерывно зависит от $\varepsilon, \Psi'_\ell, \varepsilon_3$, а также от f и α (см. доказательство лемм 11.1 и 11.2);

5) включение кругов $\overline{D}_{w_\ell, 2\varepsilon_3/3} \subset \overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0) \subset \overline{D}_{w_\ell, \varepsilon_3}$ имеет место в достаточно малой окрестности $\mathbb{U}_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{U}'_{(f_0, \alpha_0)}$ пары (f_0, α_0) в $\mathbb{F}^1$;

6) риманова метрика

$$ds^2|_{M \cup D_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0)}$$

на компакте $M \setminus \bigcup D_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0)$ совпадает с

$$d\tilde{s}^2|_{M \cup D_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0)}$$

в окрестности $\mathbb{U}_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{F}^1$, а потому непрерывно зависит в этой окрестности от $d\tilde{s}^2$;

7) координатное вложение

$$\begin{aligned} (u, v)|_{\overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0)} &= \Psi_\ell^{-1}|_{\overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0)}: \overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3}(f_0, \alpha_0) \\ &\rightarrow \{u^2 + v^2 \leq \varepsilon_3 = \varepsilon_3(f, \alpha)\} \end{aligned}$$

определено в окрестности $\mathbb{U}_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{F}^1$ и согласно лемме 10.1 непрерывно зависит от Ψ_ℓ ;

8) риманова метрика

$$ds^2|_{\overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3(f_0, \alpha_0)}}$$

задается формулой (40) в окрестности $\mathbb{U}_{(f_0, \alpha_0)} \subset \mathbb{F}^1$ и непрерывно зависит в этой окрестности от $(u, v)|_{\overline{D}_{w_\ell, (3/4)\varepsilon_3(f_0, \alpha_0)}}$, ε_3 , $d\tilde{s}^2$.

Поэтому риманова метрика $ds^2 = ds^2(f, \alpha) \in \mu$ непрерывно зависит от пары $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$.

§ 14. Проверка гомотопической эквивалентности $F^1 \times \mu \sim \mathbb{F}^1$

Отображение $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$, построенное в § 9, непрерывно (см. § 10) и переводит пару $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ в пару $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$ (см. (33)). При этом функция Морса $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2) \in F^1$ отличается от f лишь в малых кругах $U_\ell \ni w_\ell$ вокруг точек w_ℓ локальных минимумов и максимумов, где U_ℓ – компонента связности точки w_ℓ в множестве $f^{-1}(f(w_\ell) - \varepsilon_2, f(w_\ell) + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(f, ds^2)$ (см. (26)). Из доказательства леммы 9.3 следует, что $(1-t)\tilde{f} + tf \in F^1$ при любом $t \in [0, 1]$. Кроме того, из построения (26) функции $\tilde{f}$ и лемм 9.3 и 5.1 следует, что $(1-t)\tilde{f} + tf \sim_{\text{isot}} f$, $t \in [0, 1]$.

Отображение $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$, построенное в § 12, непрерывно (см. § 13) и переводит пару $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ в пару вида $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$, т.е. не меняет первый элемент пары.

Следовательно, композиция $i_2 \circ p_2: F^1 \times \mu \rightarrow F^1 \times \mu$ непрерывна и переводит $(f, ds^2) \mapsto (\tilde{f}, d\tilde{s}^2)$, где функция $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2)$ та же, что и выше. Определим гомотопию между этой композицией и отображением $\text{id}_{F^1 \times \mu}$ методом “соединение отрезком”:

$$(f, ds^2) \mapsto ((1-t)\tilde{f} + tf, (1-t)d\tilde{s}^2 + tds^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Очевидно, $(1-t)d\tilde{s}^2 + tds^2 \in \mu$, а по доказанному выше $(1-t)\tilde{f} + tf \in F^1$ и $(1-t)\tilde{f} + tf \sim_{\text{isot}} f$, $0 \leq t \leq 1$. Поэтому гомотопия не выводит из пространства $F^1 \times \mu$.

Композиция $p_2 \circ i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ непрерывна и переводит $(f, \alpha) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$, где функция $\tilde{f} = \tilde{f}(f, ds^2(f, \alpha)) \in F^1$ зависит от пары $(f, ds^2(f, \alpha)) \in F^1 \times \mu$ как выше. Из построения отображений следует, что в достаточно малой окрестности каждой критической точки функции f имеем $\tilde{f} \equiv f$ и $\tilde{\alpha} \equiv \alpha$, причем вне окрестностей U_ℓ критических точек $w_\ell \in \{x_i(f)\} \cup \{z_k(f)\}$ локальных минимумов и максимумов выполнено $\tilde{f} \equiv f$, а в каждой такой окрестности U_ℓ функция $\tilde{f}$ постоянна на линиях уровня функции f . Отсюда и из определения 9.1 получаем, что из $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ следует $((1-t)\tilde{f} + tf, \alpha) \in \mathbb{F}^1$, а из $(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$ следует $((1-t)\tilde{f} + tf, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{F}^1$, $0 \leq t \leq 1$. Так как функция Морса $(1-t)\tilde{f} + tf \in F^1$ имеет два оснащения $\alpha, \tilde{\alpha}$, совпадающие в окрестности любой критической точки, то у нее также имеется оснащение $(1-t)\tilde{\alpha} + t\alpha$, $0 \leq t \leq 1$. Поэтому $((1-t)\tilde{f} + tf, (1-t)\tilde{\alpha} + t\alpha) \in \mathbb{F}^1$, $0 \leq t \leq 1$. Определим гомотопию между рассматриваемой композицией и отображением $\text{id}_{\mathbb{F}^1}$ методом “соединение отрезком”: $(f, \alpha) \mapsto ((1-t)\tilde{f} + tf, (1-t)\tilde{\alpha} + t\alpha)$, $0 \leq t \leq 1$. По доказанному выше гомотопия не выводит из пространства $\mathbb{F}^1$ оснащенных функций Морса. Выше мы также показали, что $(1-t)\tilde{f} + tf \sim_{\text{isot}} f$, $0 \leq t \leq 1$.

Отметим, что если $p + q + r = 0$ (т.е. функции Морса из F^1 не имеют критических точек), то композиция $p_2 \circ i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ является тождественным отображением.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Непосредственно проверяется, что оба построенных выше отображения i_2 и p_2 (осуществляющие гомотопическую эквивалентность $F^1 \times \mu \sim \mathbb{F}^1$) и соответствующие гомотопии являются $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантными (см. обозначение 2.2 и определение 2.4). Это следует из того, что отображение i_2 (соответственно p_2) строилось с помощью значений функции f и линий поля ядер 1-формы α (соответственно интегральных линий поля $\text{grad } f$ относительно римановой метрики ds^2 , см. также замечание 9.8), а гомотопии строились методом “соединение отрезком”. Например, для любых $h \in \mathcal{D}^\pm$ и $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ выполнено

$$i_2(h^\#(f, \alpha)) = i_2(f \circ h, \text{sgn}(h)h^*\alpha) = (f \circ h, h^*(ds^2)) = h^*(f, ds^2) = h^*(i_2(f, \alpha)),$$

где $i_2: (f, \alpha) \mapsto (f, ds^2)$. Аналогично, для любых $h \in \mathcal{D}^\pm$ и $(f, ds^2) \in F^1 \times \mu$ выполнено

$$p_2(h^*(f, ds^2)) = p_2(f \circ h, h^*(ds^2)) = (\tilde{f} \circ h, \text{sgn}(h)h^*\tilde{\alpha}) = h^\#(\tilde{f}, \tilde{\alpha}) = h^\#(p_2(f, ds^2)),$$

где $p_2: (f, ds^2) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{\alpha})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.5 и 1.7. (А) Строгая деформационная ретракция $p_0 = \rho_2 \circ \rho_1: F \rightarrow F^1$ построена в (5) и (7), причем соответствующая гомотопия строится методом “соединение отрезком”. Согласно утверждениям 6.1 и 6.2 эта ретракция является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной, переводит изотопные функции в изотопные и ее ограничение на любой класс изотопности является гомотопической эквивалентностью классов изотопности. Как в доказательстве сюръективности забывающего отображения $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow F$ (см. конец §9) показывается, что строгая деформационная ретракция $p_0: F \rightarrow F^1$, $f \mapsto f_1 = p_0(f)$, “поднимается” до строгой деформационной ретракции

$$\tilde{p}_0: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^1, \quad (f, \alpha) \mapsto \left(f_1, \frac{2}{\max f - \min f} \alpha \right),$$

где соответствующая гомотопия строится методом “соединение отрезком”. Последнее показывает, что строгая деформационная ретракция $\tilde{p}_0$ тоже является сильно $\mathcal{D}^\pm$ -эквивариантной. По построению

$$p_0 \circ \text{Forg} = \text{Forg}_1 \circ \tilde{p}_0: \mathbb{F} \rightarrow F^1.$$

(Б) По доказанному выше отображения $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$ и $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Отсюда и из §7 композиции $\text{Forg}_1 = p_1 \circ i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ и $p_2 \circ i_1: F^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. В силу замечаний 7.1 и 14.1 они являются сильно $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эквивариантными.

Пусть $f \in F^1$ и $[f]_{\text{isot}} \cap F^1 \subset F^1$ – функция Морса и ее класс изотопности, и пусть $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \subset \mathbb{F}^1$ – прообраз этого класса в $\mathbb{F}^1$ при проекции $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$. Выше мы показали, что взаимно обратные гомотопические эквивалентности $i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \times \mu$ и $p_2: F^1 \times \mu \rightarrow \mathbb{F}^1$ переводят классы $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1)$ и $[f]_{\text{isot}} \cap F^1$ друг в друга, а соответствующие гомотопии

не выводят из этих классов. Поэтому i_2 индуцирует гомотопическую эквивалентность $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \rightarrow ([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \times \mu$. Так как взаимно обратные гомотопические эквивалентности $p_1: F^1 \times \mu \rightarrow F^1$ и $i_1: F^1 \rightarrow F^1 \times \{ds_0^2\} \subset F^1 \times \mu$ и соответствующая гомотопия между $i_1 \circ p_1$ и $\text{id}_{F^1 \times \mu}$ не меняют любую функцию Морса $f \in F^1$, то p_1 индуцирует гомотопическую эквивалентность $([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \times \mu \rightarrow [f]_{\text{isot}} \cap F^1$. Поэтому композиция $\text{Forg}_1 = p_1 \circ i_2: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1) \rightarrow [f]_{\text{isot}} \cap F^1$.

В § 9 доказана сюръективность забывающих отображений $\text{Forg}_1: \mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ и $\text{Forg}: \mathbb{F} \rightarrow F$ (см. конец § 9). Осталось показать, что отображение Forg является сильно $\text{Iso}^\pm(M, ds_0^2)$ -эквивариантной гомотопической эквивалентностью и для любой функции $f \in F$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}}) \rightarrow [f]_{\text{isot}}$. Так как $p_0 \circ \text{Forg} = \text{Forg}_1 \circ \tilde{p}_0$ и по доказанному p_0 , $\tilde{p}_0$ и Forg_1 являются сильно $\text{Iso}^+(M, ds_0^2)$ -эквивариантными гомотопическими эквивалентностями, то отображение Forg является таким же. Так как ретракция p_0 переводит изотопные функции в изотопные (см. (A)), то $\tilde{p}_0$ переводит $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}})$ в $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}} \cap F^1)$. Рассматривая в соотношении $p_0 \circ \text{Forg} = \text{Forg}_1 \circ \tilde{p}_0$ ограничения всех отображений на соответствующие классы и учитывая, что ограничения отображений p_0 , $\tilde{p}_0$ и Forg_1 являются гомотопическими эквивалентностями (см. выше), получаем, что ограничение отображения Forg на класс $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}})$ является гомотопической эквивалентностью $\text{Forg}^{-1}([f]_{\text{isot}}) \rightarrow [f]_{\text{isot}}$. Теоремы 2.5 и 1.7 доказаны.

Список литературы

- [1] М. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **9**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [2] K. Igusa, “Higher singularities of smooth functions are unnecessary”, *Ann. of Math.* (2), **119**:1 (1984), 1–58.
- [3] В. А. Васильев, “Топология пространств функций без сложных особенностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:4 (1989), 24–36; англ. пер.: V. A. Vasil’ev, “Topology of spaces of functions without compound singularities”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:4 (1989), 277–286.
- [4] В. И. Арнольд, “Пространства функций с умеренными особенностями”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:3 (1989), 1–10; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Spaces of functions with moderate singularities”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:3 (1989), 169–177.
- [5] Yu. Burman, “Morse theory for functions of two variables without critical points”, *Funct. Differ. Equ.*, **3**:1–2 (1995), 31–43.
- [6] Yu. M. Burman, “Triangulations of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **17**:3 (1999), 221–238.
- [7] A. Chenciner, F. Laudenbach, “Morse 2-jet space and h -principle”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **40**:4 (2009), 455–463; [arXiv: 0311123](#).
- [8] J. M. Franks, *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [9] A. E. Hatcher, “Higher simple homotopy theory”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 101–137.
- [10] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.

- [11] Е. А. Кудрявцева, “Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 29–88; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Realization of smooth functions on surfaces as height functions”, *Sb. Math.*, **190**:3 (1999), 349–405.
- [12] J. W. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.
- [13] Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков, *Гомотопический тип пространств функций Морса на поверхностях*, <http://dfgm.math.msu.su/people/koudr>.
- [14] Е. А. Кудрявцева, “Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 147–202.
- [15] Е. А. Кудрявцева, “Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем., мех.*, 2009, № 4, 13–22; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Uniform Morse lemma and isotopy criterion for Morse functions on surfaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **64**:4 (2009), 150–158.
- [16] B. Farb, N. V. Ivanov, “The Torelli geometry and its applications: research announcement”, *Math. Res. Lett.*, **12**:2–3 (2005), 293–301; [arXiv:math/0311123](https://arxiv.org/abs/math/0311123).
- [17] W. J. Harvey, “Geometric structure of surface mapping class groups”, *Homological group theory* (Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, 255–269.
- [18] J. L. Harer, “The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface”, *Invent. Math.*, **84**:1 (1986), 157–176.
- [19] N. V. Ivanov, “Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces”, *Progress in knot theory and related topics*, Travaux en Cours, **56**, Hermann, Paris, 1997, 113–120.
- [20] A. Hatcher, W. Thurston, “A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface”, *Topology*, **19**:3 (1980), 221–237.
- [21] D. Margalit, *The automorphism group of the pants complex*, [arXiv:math/0201319](https://arxiv.org/abs/math/0201319).
- [22] S. Matveev, M. Polyak, “Cubic complexes and finite type invariants”, *Invariants of knots and 3-manifolds* (Kyoto, 2001), Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002, 215–233; [arXiv:math/0204085](https://arxiv.org/abs/math/0204085).
- [23] Е. А. Кудрявцева, “Canonical form of Reeb graph for Morse functions on surfaces. Inversion of 2-sphere in 3-space”, *Int. J. Shape Model.*, **5**:1 (1999), 69–80.
- [24] В. В. Шарко, “Функции на поверхностях, Г”, *Некоторые проблемы современной математики*, Наукова Думка, Киев, 1998, 408–434.
- [25] S. Maksymenko, “Path-components of Morse mappings spaces of surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **80**:3 (2005), 655–690.
- [26] М. Басманова, Е. А. Кудрявцева, *Компоненты связности пространств функций Морса с закрепленными критическими точками на поверхностях*, <http://dfgm.math.msu.su/people/koudr>.
- [27] E. V. Kulinich, “On topologically equivalent Morse functions on surfaces”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **4**:1 (1998), 59–64.
- [28] S. Maksymenko, “Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **29**:3 (2006), 241–285; [arXiv:math/0310067](https://arxiv.org/abs/math/0310067).
- [29] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: А. Т. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [30] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II”, *Матем. сб.*, **185**:4 (1994), 27–80; **185**:5 (1994), 27–78; англ. пер.:

- A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A classification theorem. I, II”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **81**:2 (1995), 421–465; **82**:1 (1995), 21–63.
- [31] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*, Наука, М., 1997.
- [32] M. Dehn, “Die Gruppe der Abbildungsklassen”, *Acta Math.*, **69**:1 (1938), 135–206.
- [33] C. J. Earle, J. Eells, “The diffeomorphism group of a compact Riemann surface”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:4 (1967), 557–559.
- [34] C. J. Earle, J. Eells, “A fibre bundle description of Teichmüller theory”, *J. Differential Geometry*, **3** (1969), 19–43.
- [35] А. С. Кронрод, “О функциях двух переменных”, *УМН*, **5**:1 (1950), 24–134.
- [36] S. Smale, “Diffeomorphisms of the 2-sphere”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**:4 (1959), 621–626.
- [37] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [38] J. N. Mather, “Stability of C^∞ mappings: II. Infinitesimal stability implies stability”, *Ann. of Math. (2)*, **89**:2 (1969), 254–291.
- [39] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [40] R. Brown, *Topology: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [41] R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Academic Press, New York–London, 1964.

Е. А. Кудрявцева (Е. А. Kudryavtseva)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

18.03.2009 и 02.07.2009

Д. А. Пермяков (D. A. Permyakov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dimap@mccme.ru