Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Гусельников, Треугольные функции множества и теоремы Никодима, Брукса–Джеветта и Витали–Хана–Сакса о сходящихся последовательностях мер, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 6, 29–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:25:40

УДК 517.51+517.987

Н. С. Гусельников

Треугольные функции множества и теоремы Никодима, Брукса–Джеветта и Витали–Хана–Сакса о сходящихся последовательностях мер

Рассматриваются треугольные функции множества со свойством отсутствия ускользающей нагрузки, определенные на классах множеств, замкнутых относительно объединения не более чем счетного количества своих дизъюнктивных множеств. На такие классы функций множества, содержащие в себе квазилиппшицевы и конечно-аддитивные функции множества, векторнозначные меры, полумеры, внешние меры обобщены и при этом нетривиально усилены теоремы Никодима, Брукса–Джеветта, Витали–Хана–Сакса. В качестве прямых следствий доказанных теорем получен ряд утверждений о продолжении с кольца множеств на порожденное им σ -кольцо таких свойств функций множества как сходимости, компактности, равностепенная абсолютная непрерывность, абсолютная непрерывность.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: треугольные, квазилиппшицевы, неаддитивные функции.

Введение

Теорема Никодима о равностепенной непрерывности сходящейся на σ -кольце множеств последовательности мер (см. [1; гл. III, § 7, теорема 4]) находит многочисленные применения в различных разделах теории меры и интеграла, в теории компактности функций множества. В связи с этим она является объектом исследования целого ряда работ, в которых получены ее различные обобщения на классы функций множества более общие, чем счетно-аддитивные.

Из этих работ следует отметить статью Г. Я. Арешкина, В. Н. Алексюка и В. М. Климкина [2], в которой теорема Никодима была обобщена В. Н. Алексюком на случай неаддитивных непрерывных треугольных функций множества. В работе Дж. Брукса и Р. Джеветта [3] было получено следующее усиление теоремы Никодима: “Если μ_n – не имеющие ускользающей нагрузки комплекснозначные конечно-аддитивные функции множества на σ -кольце множеств S , и если $\{\mu_n\}$ сходится к μ на S , то последовательность $\{\mu_n\}$ обладает свойством равномерного отсутствия ускользающей нагрузки (РОУН) на S , а μ – свойством отсутствия ускользающей нагрузки” (см. определения в § 1). Л. Древновским в [4] эта теорема Брукса–Джеветта была обобщена на случай не имеющих ускользающей нагрузки конечно-аддитивных функций множества со значениями в абелевой квазинормированной группе. Все эти результаты затем были обобщены автором настоящей статьи в работе [5] на случай N -треугольных

функций множества, а в работе [6] была предпринята попытка перенести вышеуказанные результаты на функции множества, областью определения которых являются так называемые суммируемые субтрактивные классы множеств. Результаты работы [5] использовались затем в работе [7] для получения различных модификаций теоремы Витали–Хана–Сакса для треугольных функций множества. Кроме того, в качестве следствия из них было получено простое доказательство теоремы Витали–Хана–Сакса для векторнозначных мер.

Однако дальнейший анализ перечисленных результатов показал, что все они могут быть нетривиально усилены. Этому и посвящена настоящая работа. В ней рассматриваются N -треугольные и квазилиппшицевы функции множества со значениями в абелевой квазинормированной группе, которые являются более общими, чем векторнозначные меры, конечные обобщенная скалярная и внешняя меры и конечно-аддитивные векторные функции множества. Особенностью изучаемого случая является то, что рассматриваемые треугольные функции множества не имеют ускользящей нагрузки (см. определение 2), но не обязательно непрерывны. Исследования свойств таких функций множества сопряжены с рядом трудностей; главная из них – отсутствие у супремаций (см. определение 1) рассматриваемых функций свойства непрерывности и свойства счетной N -полуаддитивности, которые в случае счетно-аддитивных мер играют основополагающую роль при доказательстве большого числа утверждений.

Работа состоит из трех параграфов и введения. В § 1 формулируются определения и вспомогательные утверждения, а в §§ 2, 3 – основные результаты работы. В § 2 показано, что теоремы Никодима и Брукса–Джеветта, сформулированные выше, можно не только “перенести” с σ -кольца множеств на класс множеств, замкнутый лишь относительно не более чем счетных объединений дизъюнктивных множеств, но и существенно обобщить их, получая тем самым нетривиальные усиления этих теорем. Необходимость рассмотрения таких задач диктуется, например, потребностями квантовой механики (см. работу С. Гаддера [8]), а также необходимостью совершенствования теории аддитивных и неаддитивных функций множества вообще (см., например, [9]). В качестве простых следствий в работе получены утверждения о продолжении свойств сходимости и компактности различных семейств треугольных функций множества с класса множеств M_σ на σ -кольцо $S(M)$, порожденное кольцом M . Результаты, приведенные в § 2, позволяют в § 3 в качестве прямых следствий из них получить различные модификации теоремы Витали–Хана–Сакса, в том числе и касающиеся вопросов продолжения свойств равностепенной абсолютной непрерывности мер с кольца множеств на порожденное им σ -кольцо.

Полученные в §§ 2, 3 результаты вскрывают в определенном смысле и структурную характеристику сходящихся последовательностей аддитивных и неаддитивных треугольных функций множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки. В частности, показано, что полученные в работе результаты не могут быть улучшены (в определенном смысле).

§ 1. Основные понятия и вспомогательные предложения

Пусть T – некоторое непустое множество, M – кольцо, а S – σ -кольцо подмножеств множества T , $\bar{R}^+ = [0, +\infty]$, $(G, \|\cdot\|)$ – абелева квазинормированная

группа, т.е. абелева группа, в которой каждому элементу $x \in G$ ставится в соответствие вещественное число $0 \leq \|x\| < +\infty$, называемое *квазинормой* и удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) если $x = \mathbf{0}$, то $\|x\| = 0$;
- 2) $\| -x \| = \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in G$.

Если в абелевой квазинормированной группе $(G, \|\cdot\|)$ каждая фундаментальная по квазинорме последовательность $\{x_n\}$ имеет предел в G , т.е. если

$$\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m} 0 \implies \|x_n - x\| \xrightarrow{n} 0$$

для некоторого x из G , то такую группу будем называть *секвенциально полной* (или просто *полной*) и обозначать символом $(G, \|\cdot\|)$.

Неубывающую (невозрастающую) последовательность множеств $\{E_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, будем обозначать символом $E_n \nearrow (E_n \searrow)$. Условимся также последовательность попарно дизъюнктивных множеств $\{E_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ называть *спектром* и обозначать символом $\{\perp E_k\}$.

Класс множеств R_σ будем определять обычным образом, т.е.

$$R_\sigma = \left\{ E : E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \in R \right\},$$

где R – произвольный класс множеств.

Однако основные результаты мы будем доказывать для функций множества, заданных на более общих классах множеств – на классах множеств R_σ^* , замкнутых относительно не более чем счетных объединений попарно дизъюнктивных множеств из R . Иначе говоря, класс множеств R_σ^* мы определяем следующим равенством:

$$R_\sigma^* = \left\{ E : E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \in R, E_k \cap E_i = \emptyset, i \neq k \right\}.$$

При этом предполагаем, что в общем случае $\emptyset \in R$. Тогда ясно, что $R \subset R_\sigma^* \subset R_\sigma$, так как для каждого $E \in R$, положив $E_1 = E$, $E_k = \emptyset$ при $k \geq 2$, получим $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in R_\sigma^*$ (так как $E_k \cap E_i = \emptyset$, $i \neq k$), а включение $R_\sigma^* \subset R_\sigma$ очевидно. Следует отметить, что если $R = M$ и M – кольцо множеств, то $M_\sigma^* = M_\sigma$ ($R_\sigma^* = R_\sigma$). Действительно, если $E \in M_\sigma$, то $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ дизъюнктивны и $B_k \in M$, и поэтому $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in M_\sigma^*$. Следовательно, $E \in M_\sigma^*$. Отсюда получаем, что $M_\sigma \subset M_\sigma^*$, и поэтому $M_\sigma^* = M_\sigma$. Это обстоятельство мы будем учитывать при формулировке следствий из основных утверждений, полученных в §§ 2, 3 настоящей работы.

Отметим также, что так определенный класс множеств R_σ^* с дополнительным свойством

$$A, B \in R_\sigma^*, \quad A \subset B \implies B \setminus A \in R_\sigma^* \quad (1)$$

автор работы [6] называет *субтрактивным суммируемым классом множеств*. В общем случае мы не рассматриваем такие классы множеств. Однако полезно отметить, что в частном случае, когда $R = M$ – кольцо множеств, свойство (1)

выполняется. Иначе говоря, простым примером субтрактивного суммируемого класса множеств является класс множеств M_σ , где M – кольцо множеств.

Ясно также, что если S – σ -кольцо множеств, то $S = S_\sigma^* = S_\sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *супремацией* произвольной функции множества $\varphi: M \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, определенной на классе множеств M , будем понимать функцию множества $\bar{\varphi}$, определенную условием

$$\bar{\varphi}(E) = \sup\{\|\varphi(B)\| : B \subset E, B \in M\}, \quad E \in M.$$

Если φ является $\bar{R}^+$ -значной функцией, то ее супремацию $\bar{\varphi}$ определяем равенством

$$\bar{\varphi}(E) = \sup\{\varphi(B) : B \subset E, B \in M\}, \quad E \in M.$$

Ясно, что $\bar{\varphi}$ монотонна на M ; $\|\varphi(E)\| \leq \bar{\varphi}(E)$ и $0 \leq \bar{\varphi}(E) \leq +\infty$, $E \in M$; $\bar{\varphi}(\emptyset) = 0$, если $\varphi(\emptyset) = 0$. Кроме того, если $\bar{R}^+$ -значная функция φ монотонна, то $\bar{\varphi}(E) = \varphi(E)$ для каждого множества $E \in M$.

Здесь и далее все определения мы рассматриваем на произвольном классе множеств (в частности, на R , R_σ и т.д.).

При исследовании сходимости, компактности, абсолютной непрерывности и во многих других задачах, включая доказываемые в §§ 2, 3 результаты, важную роль играют различные формы непрерывности семейств рассматриваемых функций множества, которые определяются следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что семейство $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества, определенных на M , обладает на нем свойством

$(РСН)_M$ (*равностепенной слабой непрерывности*), если для любой последовательности множеств $E_n \searrow \emptyset$ из M

$$\lim_n \|\varphi_\alpha(E_n)\| = 0 \quad (2)$$

равномерно относительно всех $\alpha \in J$;

$(РН)_M$ (*равностепенной непрерывности*), если для любой сходящейся к пустому множеству последовательности множеств $\{E_n\}$ из M условие (2) выполняется равномерно по $\alpha \in J$;

$(РОУН)_M$ (*равномерного отсутствия ускользящей нагрузки*), если для любого спектра $\{\perp E_n\}$ из M условие (2) выполняется равномерно относительно всех $\alpha \in J$.

Функцию множества $\varphi: M \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ ($\bar{R}^+$) будем называть *непрерывной сверху в нуле* (соответственно *непрерывной в нуле, не имеющей ускользящей нагрузки*) на M , если семейство $\{\varphi\} = \varphi$ обладает свойством $(РСН)_M$ (соответственно $(РН)_M$, $(РОУН)_M$).

Если функции множества заданы на R_σ^* , то наиболее приемлемыми для них являются свойства отсутствия ускользящей нагрузки и РОУН. В частности, непосредственно из определения супремации и определения РОУН следует

ЛЕММА 1. Для семейства произвольных $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, определенных на произвольном классе множеств R , следующие условия эквивалентны:

- 1) семейство $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, обладает свойством $(POUH)_R$;
- 2) семейство $\{\bar{\varphi}_\alpha\}$, $\alpha \in J$, супремаций функций множества φ_α обладает свойством $(POUH)_R$.

При помощи леммы 1 можно доказать следующее утверждение о характеристическом свойстве функций множества, наделенных свойством равномерного отсутствия ускользающей нагрузки (РОУН).

ЛЕММА 2 (см. также теорему 1 и следствия из нее в § 1 работы [7]). Для семейства произвольных $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, определенных на классе множеств R_σ^* , эквивалентны следующие условия:

- 1) семейство $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, обладает свойством $(POUH)_{R_\sigma^*}$;
- 2) для любого спектра множеств $\{\perp E_k\}$ из R_σ^* и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$

$$\bar{\varphi}_\alpha \left(\bigcup_{k=n_0}^n E_k \right) < \varepsilon$$

равномерно относительно всех $\alpha \in J$.

Определим теперь класс так называемых N -треугольных функций множества, которые являются объектом дальнейших исследований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функцию множества $\varphi: M \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, равную нулю на пустом множестве, будем называть N -треугольной, если существует такое число $N > 0$, что для любых дизъюнктных множеств $A, B \in M$ выполняются неравенства

$$\|\varphi(A \cup B)\| \leq \|\varphi(A)\| + N\|\varphi(B)\|, \quad \|\varphi(A \cup B)\| \geq \|\varphi(A)\| - N\|\varphi(B)\|.$$

Ясно, что если $\|\varphi(E)\| \neq 0$ на M , то $N \geq 1$. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $N \geq 1$.

Примерами N -треугольных функций множества являются квазилиппшицева функция множества (см. определение 5), конечно-аддитивная $(G, \|\cdot\|)$ -значная функция множества и полумера (следовательно, и векторнозначная мера, и конечная обобщенная мера, и конечная внешняя мера).

ЛЕММА 3 (см., например, [7; § 1, лемма 3]). Супремация $\bar{\varphi}$ N -треугольной функции множества $\varphi: M \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ обладает на M следующими свойствами:

- 1) монотонностью, т.е. $\bar{\varphi}(A) \leq \bar{\varphi}(B)$, если $A \subset B$ и $A, B \in M$;
- 2) N -полуаддитивностью, т.е. $\bar{\varphi}(A \cup B) \leq \bar{\varphi}(A) + N\bar{\varphi}(B)$ для любых $A, B \in M$, $A \cap B = \emptyset$;
- 3) если φ не имеет ускользающей нагрузки на M , то и $\bar{\varphi}$ не имеет ускользающей нагрузки на M ;
- 4) если M – кольцо и φ не имеет ускользающей нагрузки на M , то ее супремация $\bar{\varphi}$ ограничена на M .

Если $\mu: M \rightarrow \bar{R}^+$ удовлетворяет условиям 1)–3) свойств супремации, то μ называют N -полумерой. Если N -полумера μ такова, что $N = 1$, то ее называют

полумерой. Счетно-полуаддитивную полумеру будем называть *внешней мерой* (см. также [1]).

Для семейства непрерывных сверху в нуле N -треугольных функций множества (следовательно, и для векторнозначных мер) соотношения между различными формами непрерывности хорошо изучены в работе [10]. В частности, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Для семейства $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, непрерывных сверху в нуле N -треугольных функций множества и семейства их супремаций $\{\bar{\varphi}\}$, $\alpha \in J$, на σ -кольце S выполняются одновременно соотношения*

$$(PH)_S \iff (POUH)_S \iff (PCH)_S.$$

Ясно, что если N -треугольная функция множества $\varphi: R_\sigma^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ непрерывна сверху в нуле на R_σ^* , то она не имеет ускользающей нагрузки на R_σ^* .

Напомним, что векторнозначная мера $\varphi: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ непрерывна на σ -кольце S , и поэтому не имеет ускользающей нагрузки и счетно-полуаддитивна по квазинорме на S . Легко показать, что эти два последних свойства векторнозначная мера сохраняет и на классе множеств R_σ^* .

Многие результаты в теории функций множества связаны с так называемым свойством плотности, которое было введено в работе [11] и определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть на кольце множеств S , содержащем в себе кольцо множеств M , задано семейство $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, произвольных $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества.

а) Будем говорить, что семейство $\{\varphi_\alpha\}$ *слабо равностепенно плотно на кольце M* (относительно множеств класса S) и писать $(\text{СРП})_M$, если для любого множества $E \in S$, любого $\varepsilon > 0$ и произвольного конечного подсемейства $\{\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \dots, \varphi_{\alpha_k}\} \subset \{\varphi_\alpha\}$ существует такое множество $e \in M$, что

$$\bar{\varphi}_{\alpha_i}(E\Delta e) < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k.$$

б) Будем говорить, что семейство $\{\varphi_\alpha\}$ *равностепенно плотно на кольце M* (относительно множеств класса S) и писать $(\text{РП})_M$, если для любого множества $E \in S$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \in M$, что

$$\bar{\varphi}_\alpha(E\Delta e) < \varepsilon$$

равномерно относительно всех $\alpha \in J$.

в) Если $\varphi = \{\varphi\}$ и $\{\varphi\}$ обладает свойством $(\text{СРП})_M$ (что равносильно в этом случае свойству $(\text{РП})_M$), то будем говорить, что φ *плотна на M* (относительно множеств класса S ; см. также [12]).

Простым примером семейства N -треугольных функций множества со свойством $(\text{СРП})_M$ является любое семейство непрерывных сверху в нуле N -треугольных функций множества $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, определенных на σ -кольце S , порожденном кольцом M . Если же такое семейство наделено еще и свойством $(\text{РОУН})_M$, то оно становится семейством функций множества со свойством $(\text{РП})_M$. Действительно, это следует из такого утверждения.

ЛЕММА 5 (принцип равностепенной плотности; см. [10; § 2, теорема 1]). Если семейство $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, непрерывных сверху в нуле N -треугольных функций множества, определенных на σ -кольце S , порожденном кольцом M , обладает свойством $(\text{РОУН})_M$, то для любого множества $E \in S$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \in M$, что

$$\bar{\varphi}_\alpha(E \Delta e) < \varepsilon$$

равномерно относительно всех $\alpha \in J$.

Все сказанное выше относится и к семейству векторнозначных мер, так как они являются непрерывными N -треугольными функциями множества на σ -кольце S .

Если же функции семейства $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, не являются непрерывными сверху в нуле, то это семейство может не обладать не только свойством $(\text{СРП})_M$, но и каждая из функций φ_α может и не быть плотной на M , а функции множества в этом случае могут приобретать некоторые “патологические” свойства (см., например, лемму 2 и пример из § 1 работы [12]).

Следует отметить также, что если семейство N -треугольных функций множества $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, определено на σ -кольце S , порожденном кольцом M , обладает свойствами $(\text{РОУН})_M$ и $(\text{СРП})_M$, то это семейство обладает и свойством $(\text{РОУН})_S$ (см. [13; § 1, теорема 1]).

Напомним определение квазилипшицевой функции множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция множества $\varphi: M \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ называется квазилипшицевой, если она равна нулю на пустом множестве и для любых дизъюнктных множеств $A, B \in M$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(A \cup B) - \varphi(B)\| \leq N \|\varphi(A)\|$$

при некотором фиксированном $N \geq 1$.

Заметим, что квазилипшицева функция множества является N -треугольной. Примерами квазилипшицевых функций множества служат конечно-аддитивная $(G, \|\cdot\|)$ -значная функция множества, векторнозначная мера, конечные непрерывная внешняя мера, полумера и скалярная мера, неотрицательная N -треугольная функция множества.

Основные результаты работы связаны и с понятием равностепенной абсолютной непрерывности семейств функций множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть μ и γ – произвольные $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значные функции множества на M , а $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in J$, – семейство произвольных $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества на M . Будем говорить, что семейство $\{\varphi_\alpha\}$ обладают на M свойством *равностепенной абсолютной непрерывности относительно μ* (и писать при этом $\varphi_\alpha \overset{M}{\lll} \mu$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только для некоторого множества $E \in M$ выполнено неравенство

$$\bar{\mu}(E) < \delta, \quad \text{то} \quad \|\varphi_\alpha(E)\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \alpha \in J.$$

В этом случае для сокращения записи будем писать также “семейство $\{\varphi_\alpha\}$ обладает свойством $(\text{РАН})_M^\mu$ ”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что функция множества μ абсолютно непрерывна относительно γ на M (и писать при этом $\mu \overset{M}{\ll} \gamma$), если семейство $\{\mu\} = \mu$ обладает свойством $(\text{РАН})_M^\gamma$.

Заметим, что в этом определении абелевы группы G и G_α могут совпадать или быть различными, что удобно в приложениях, например, при переходе от абелевых квазинормированных групп к абелевым топологическим (так как они порождаются семейством квазинорм).

Используя метод доказательства теоремы 2 из § 1 работы [14], получаем такое утверждение.

ЛЕММА 6. Пусть на кольце S , содержащем в себе кольцо M , задано семейство N -треугольных функций множества $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, и некоторая N -треугольная функция $\varphi: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ такая, что семейство $\{\varphi_\alpha, \varphi\}$ с присоединенной к семейству $\{\varphi_\alpha\}$ функцией множества φ совместно плотно на M (т.е. обладает свойством $(\text{ПП})_M$).

Тогда если $\varphi_\alpha \overset{M}{\lll} \varphi$, то $\varphi_\alpha \overset{S}{\lll} \varphi$.

§ 2. Основные результаты и их приложения к теории векторных мер

Хорошо известным методом “скользящего горба” установим справедливость теоремы, которая является обобщением и усилением сформулированной выше теоремы Брукса–Джеветта и усилением соответствующей теоремы автора из работы [5].

Для этого нам потребуется такое вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 7 (см. [5; предложение 1]). Пусть на классе множеств R_σ^* задана последовательность произвольных $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значных функций множества $\{\varphi_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, каждая из которых не имеет ускользящей нагрузки на R_σ^* . Тогда для каждого спектра $\{\perp E_k\}$ из R_σ^* и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой подспектр $\{E_{k_i}\}$ спектра $\{E_k\}$, что для всякого натурального m и для всех $n = 0, 1, 2, \dots, k_m$ выполнено неравенство

$$\bar{\varphi}_n \left(\bigcup_{i=m}^{\infty} E_{k_{i+1}} \right) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi_n: R_\sigma^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность N -треугольных функций множества на классе множеств R_σ^* , причем каждая из функций множества не имеет ускользящей нагрузки на R_σ^* ; $\varphi: R_\sigma^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ – некоторая функция множества такая, что

$$\lim_n \|\varphi_n(E)\| = \|\varphi(E)\|, \quad E \in R_\sigma^*. \quad (3)$$

Для того чтобы φ не имела ускользящей нагрузки на R_σ^* , необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\varphi_n\}$ обладала свойством $(\text{РОУН})_{R_\sigma^*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Доказательство необходимости проведем методом от противного. Пусть существуют число $\varepsilon_0 > 0$, спектр $\{\perp E_k\}$ из R_σ^* и последовательность номеров $\{n_k\}$, для которых

$$\|\varphi_{n_k}(E_k)\| > 2\varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Согласно лемме 1 существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{k_i\}$, что

$$\bar{\varphi}_{n_{k_z}} \left(\bigcup_{i=z}^{\infty} E_{k_{i+1}} \right) < \frac{\varepsilon_0}{N^2 2^z}, \quad z = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$\bar{\varphi} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k_i} \right) < \frac{\varepsilon_0}{4N}. \quad (6)$$

Учитывая монотонность $\bar{\varphi}$, неравенство (4) и неравенство $\|\varphi(E)\| \leq \bar{\varphi}(E)$, $E \in R_{\sigma}^*$, а также условие (3), приходим к выводу, что для любого множества $E_{k_{i_1}}$ существует такой номер $i_2 > i_1$, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_2}}}(E_{k_{i_1}})\| < \frac{\varepsilon_0}{2N}.$$

По тем же соображениям для множества $E_{k_{i_1}} \cup E_{k_{i_2}}$ найдется такой номер $i_3 > i_2$, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_3}}}(E_{k_{i_1}} \cup E_{k_{i_2}})\| < \frac{\varepsilon_0}{2N},$$

и так далее. Таким образом, для любого $z = 2, 3, \dots$ и множества $\bigcup_{l=1}^{z-1} E_{k_{i_l}}$ из R_{σ}^* найдется такой номер $i_z > i_{z-1}$, что

$$\left\| \varphi_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=1}^{z-1} E_{k_{i_l}} \right) \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2N}. \quad (7)$$

Отметим теперь, что согласно (4)

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E_{k_{i_z}})\| \geq 2\varepsilon_0, \quad (8)$$

а из (5) следует, что

$$\bar{\varphi}_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k_{i_z+l}} \right) < \frac{\varepsilon_0}{2N^2}, \quad z = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Положим $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_{i_m}}$. Множества из формул (7)–(9) и множество E – это множества из R_{σ}^* , а множества $E_{k_{i_z}}$ образуют спектр $\{\perp E_{k_{i_z}}\}$. Поэтому в силу N -треугольности φ_n и монотонности $\bar{\varphi}_n$ получаем, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E)\| \geq \|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E_{k_{i_z}})\| - N \left\| \varphi_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=1}^{z-1} E_{k_{i_l}} \right) \right\| - N^2 \bar{\varphi}_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=z}^{\infty} E_{k_{i_{l+1}}} \right).$$

Сравнивая это неравенство с неравенствами (7) и (8), приходим к выводу, что при любом $z = 2, 3, \dots$ справедлива оценка

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E)\| > 2\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} - N^2 \bar{\varphi}_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=z}^{\infty} E_{k_{i_{l+1}}} \right). \quad (10)$$

Ясно, что $\bigcup_{l=z}^{\infty} E_{k_{i_{l+1}}} \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k_{i_z+l}}$. Поэтому, учитывая (9) и монотонность $\bar{\varphi}_n$, получаем, что

$$\bar{\varphi}_{n_{k_{i_z}}} \left(\bigcup_{l=z}^{\infty} E_{k_{i_{l+1}}} \right) < \frac{\varepsilon_0}{2N^2}, \quad z = 2, 3, \dots \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E)\| \geq \varepsilon_0, \quad z = 2, 3, \dots \quad (12)$$

С другой стороны, так как $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_{i_m}} = E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}$, то в силу монотонности $\bar{\varphi}$ и неравенства (6) верна следующая оценка:

$$\bar{\varphi}(E) < \frac{\varepsilon_0}{4N}. \quad (13)$$

Далее в силу (3) для числа $\varepsilon_0/(4N)$ существует такой номер $z_0 \geq 2$, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E)\| - \|\varphi(E)\| < \frac{\varepsilon_0}{4N}, \quad z \geq z_0.$$

Откуда, учитывая (13), получаем, что

$$\|\varphi_{n_{k_{i_z}}}(E)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2N} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad z \geq z_0.$$

Однако последнее неравенство противоречит неравенству (12), и теорема доказана полностью.

Ясно, что теорема 1 распространяется на любые N -треугольные функции множества, включая квазилиппшицевы, полумеры, меры и конечно-аддитивные функции множества.

Покажем, как из теоремы 1 легко получить замечательную теорему Брукса–Джеветта (см. [3; теорема 2 и следствие 1.2]) в усиленной форме.

ТЕОРЕМА 2 (усиленная теорема Брукса–Джеветта). Пусть на классе множеств R_{σ}^* задана последовательность конечно-аддитивных функций множества $\varphi_n: R_{\sigma}^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, каждая из которых не имеет ускользящей нагрузки. Если для каждого множества $E \in R_{\sigma}^*$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E), \quad (14)$$

то предельная функция множества φ конечно-аддитивна и не имеет ускользящей нагрузки, а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POUH)_{R_{\sigma}^*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что φ конечно-аддитивна. Предположим, что φ имеет ускользящую нагрузку. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и спектр $\{\perp E_k\}$ из R_{σ}^* , для которых

$$\|\varphi(E_k)\| \geq 3\varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Пусть $k_1 = 1$. В силу (14) найдется такой номер $k_2 > k_1$, что

$$\|\varphi_{k_2}(E_{k_1}) - \varphi(E_{k_1})\| < \varepsilon_0.$$

Отсюда и из (15) следует, что $\|\varphi_{k_2}(E_{k_1})\| > 2\varepsilon_0$.

Так как $\{\perp E_k\}$ – спектр множеств, а каждая φ_k не имеет ускользящей нагрузки, то найдется такой номер $k_3 > k_2$, что

$$\|\varphi_{k_2}(E_{k_3})\| < \varepsilon_0.$$

Далее, в силу (14) найдется такой номер $k_4 > k_3$, что

$$\|\varphi_{k_4}(E_{k_3}) - \varphi(E_{k_3})\| < \varepsilon_0.$$

Следовательно, в силу (15) имеем

$$\|\varphi_{k_4}(E_{k_3})\| > 2\varepsilon_0.$$

Ясно также, что существует такой номер $k_5 > k_4$, для которого

$$\|\varphi_{k_4}(E_{k_5})\| < \varepsilon_0.$$

Таким образом можно построить последовательность номеров $\{k_n\}$ и под-спектр $\{\perp E_{k_n}\} \subset \{\perp E_k\}$, для которых

$$\begin{cases} \|\varphi_{k_{2n+2}}(E_{k_{2n+1}})\| > 2\varepsilon_0, \\ \|\varphi_{k_{2n}}(E_{k_{2n+1}})\| < \varepsilon_0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Рассмотрим теперь последовательность треугольных функций множества $\lambda_n: R_\sigma^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, каждая из которых не имеет ускользящей нагрузки, где

$$\lambda_n(E) = \varphi_{k_{2n+2}}(E) - \varphi_{k_{2n}}(E), \quad E \in R_\sigma^*. \quad (17)$$

В силу (14) имеем $\lim_n \lambda_n(E) = 0$ для каждого $E \in R_\sigma^*$, т.е. последовательность треугольных функций множества $\{\lambda_n\}$ сходится на R_σ^* к (тождественно равной нулю) треугольной функции множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки. Следовательно, по теореме 1 равномерно относительно всех $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\lim_k \lambda_n(E_k) = 0. \quad (18)$$

С другой стороны, учитывая (16) и (17), получаем следующие оценки:

$$\|\lambda_n(E_{k_{2n+1}})\| \geq \|\varphi_{k_{2n+2}}(E_{k_{2n+1}})\| - \|\varphi_{k_{2n}}(E_{k_{2n+1}})\| > \varepsilon_0$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, что противоречит (18).

Таким образом, φ не имеет ускользящей нагрузки, а последовательность $\{\varphi_n\}$ в силу теоремы 1 обладает свойством $(\text{РОУН})_{R_\sigma^*}$. Теорема доказана.

В монографии [1] теорема Никодима (см. гл. III, § 7, теорема 4) о равномерной непрерывности сходящейся последовательности конечных обобщенных мер, определенных на σ -алгебре множеств, доказана с помощью теоремы Витали–Хана–Сакса, которая, в свою очередь, получена с помощью теоремы Бэра о категориях. В этой же монографии теорема Никодима обобщена на векторнозначные меры с помощью теоремы Бартла–Данфорда–Шварца (см. [1; гл. IV, § 10, теорема 6]). Оставив в стороне столь глубокие теоремы функционального анализа, а используя лишь теорему 1 и лемму 2 настоящей работы, мы дадим более прозрачное, на наш взгляд, доказательство усиленных вариантов теоремы Никодима и теоремы 6 из [1; гл. IV, § 10]. При этом σ -алгебру множеств мы заменим классом множеств R_σ^* .

ТЕОРЕМА 3 (усиленная теорема Никодима). Пусть $\varphi_n: R_\sigma^* \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ – последовательность векторнозначных мер на классе множеств R_σ^* . Если

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E) \quad (19)$$

существует для каждого множества $E \in R_\sigma^*$, то φ является векторнозначной мерой, а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POУН)_{R_\sigma^*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что предельная функция множества φ конечно-аддитивна на R_σ^* .

Напомним, что на классе множеств R_σ^* векторнозначные меры сохраняют свойство счетной полуаддитивности по квазинорме и свойство отсутствия ускользающей нагрузки. Потому по теореме 2 φ не имеет ускользающей нагрузки, а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POУН)_{R_\sigma^*}$.

Остается показать, что φ – векторнозначная мера, т.е. счетно-аддитивна на R_σ^* . Покажем это.

Возьмем любой спектр множеств $\{\perp E_k\}$ из R_σ^* . По лемме 2 существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\bar{\varphi}_z \left(\bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i \right) < \frac{1}{2^k} \quad (20)$$

равномерно относительно всех $z = 1, 2, \dots$ и для всех $k = 1, 2, \dots$. Так как

$$\bigcup_{i=n_{m+1}}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i, \quad \left\{ \bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i \right\} = \left\{ \perp \bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i \right\},$$

а φ_z счетно-полуаддитивны по квазинорме, то в силу (20) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_z \left(\bigcup_{i=n_{m+1}}^{\infty} E_i \right) \right\| &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left\| \varphi_z \left(\bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i \right) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{\varphi}_z \left(\bigcup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} E_i \right) \\ &< \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

равномерно относительно всех $z = 1, 2, \dots$ и для всех $m = 1, 2, \dots$. Отсюда, учитывая (19), предельным переходом при $z \rightarrow \infty$ (при каждом $m = 1, 2, \dots$) в неравенстве $\left\| \varphi_z \left(\bigcup_{i=n_{m+1}}^{\infty} E_i \right) \right\| < 1/2^m$ получим, что $\left\| \varphi \left(\bigcup_{i=n_{m+1}}^{\infty} E_i \right) \right\| < 1/2^m$. Следовательно,

$$\left\| \varphi \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) - \sum_{i=1}^{n_{m+1}-1} \varphi(E_i) \right\| = \left\| \varphi \left(\bigcup_{i=n_{m+1}}^{\infty} E_i \right) \right\| \leq \frac{1}{2^m} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

Отсюда и следует счетная аддитивность предельной функции φ . Теорема доказана.

Теоремы 1–3 позволяют получить ряд утверждений о возможности продолжения свойств сходимости последовательностей многих классов функций множества с кольца множеств M или класса множеств M_σ^* на σ -кольцо S , порожденное кольцом M .

Для этого нам потребуется теорема 2 из § 1 работы [13], которую в настоящей работе мы сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 8 (см. [13; § 1, теорема 2]). Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана последовательность квазилипшицевых функций множества $\varphi_n: S(M) \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, со значениями в полной абелевой квазинормированной группе и со свойством слабой равностепенной плотности (т.е. свойством $(СРП)_M$), причем каждая из функций множества φ_n не имеет ускользящей нагрузки на M .

Для того чтобы последовательность $\{\varphi_n\}$ сходилась на S к некоторой квазилипшицевой функции множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(РОУН)_M$;
- 2) $\{\varphi_n\}$ сходится на M .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана последовательность квазилипшицевых функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, причем каждая из φ_n не имеет ускользящей нагрузки на кольце M , а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством слабой равностепенной плотности на M (т.е. свойством $(СРП)_M$).

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

причем $\varphi: M_\sigma \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ не имеет ускользящей нагрузки на M_σ , то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S к некоторой квазилипшицевой функции множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки и, кроме того, последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(РОУН)_S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия следствия 1. Так как $M \subset M_\sigma$ и последовательность квазилипшицевых функций множества $\{\varphi_n\}$ сходится на M_σ к квазилипшицевой функции множества φ со свойством отсутствия ускользящей нагрузки, то в силу теоремы 1 последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(РОУН)_M$ и сходится на M . Для доказательства следствия остается сослаться на лемму 8.

Ясно, что следствие 1 распространяется на конечные N -полумеры и полумеры, на неотрицательные N -треугольные функции множества, на конечно-аддитивные $\bar{R}^+$ - или $(G, \|\cdot\|)$ -значные функции множества, так как они являются квазилипшицевыми.

В частности, сопоставляя теорему 2 и следствие 1, получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 2 (усиленная теорема Брукса–Джеветта). Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана последовательность конечно-аддитивных функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, причем каждая из φ_n не

имеет ускользящей нагрузки на кольцо M , а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством слабой равностепенной плотности на M (т.е. свойством $(СРП)_M$).

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S (т.е. на S) к некоторой конечно-аддитивной функции множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки и, кроме того, последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(РОУН)_S$.

Напомним, что согласно лемме 5 непрерывные N -треугольные функции множества (следовательно, и векторнозначные меры, и непрерывные квазилипшицевы функции), определенные на σ -кольце S , порожденном кольцом M , обладающие свойством $(РОУН)_M$, обладают и свойством равностепенной плотности на M (и, тем более, свойством $(СРП)_M$). Поэтому из теорем 1–3 и следствий 1 и 2 получаем непосредственно и такие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана последовательность непрерывных сверху в нуле квазилипшицевых функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, со значениями в полной абелевой квазинормированной группе $(G, \|\cdot\|)$.

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

где $\varphi: M_\sigma \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ непрерывна сверху в нуле на M_σ (ясно, что она квазилипшицева), то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S к некоторой непрерывной в нуле квазилипшицевой функции множества и обладает свойством $(РОУН)_S$ (следовательно, и свойством $(РН)_S$).

СЛЕДСТВИЕ 4 (усиленная теорема Никодима). Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана последовательность векторнозначных мер $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, со значениями в полной абелевой квазинормированной группе $(G, \|\cdot\|)$.

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S к некоторой векторнозначной мере и обладает свойством $(РОУН)_S$ (следовательно, и свойством $(РН)_S$).

Непосредственно из следствий 1–4 получаем и такие результаты, полезные в теории компактности аддитивных и неаддитивных треугольных функций множества.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задано семейство векторнозначных мер (соответственно, непрерывных сверху в нуле

квазилипицевых функций множества) $\varphi_\alpha: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$, $\alpha \in J$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) семейство $\{\varphi_\alpha\}$ компактно на S ;
- 2) семейство $\{\varphi_\alpha\}$ компактно на M_σ .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задано семейство конечно-аддитивных (соответственно, квазилипицевых) функций множества $\varphi_\alpha: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$, $\alpha \in J$, причем каждая из функций множества $\{\varphi_\alpha\}$ не имеет ускользающей нагрузки, а семейство обладает свойством $(СП)_M$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) семейство $\{\varphi_\alpha\}$ компактно на S ;
- 2) семейство $\{\varphi_\alpha\}$ компактно на M_σ .

Пусть теперь S – произвольное σ -кольцо множеств. Положим $M = S$. Тогда $M = M_\sigma = M_\sigma^* = S$, σ -кольцо S порождено кольцом M , а любое семейство $\varphi_\alpha: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$, $\alpha \in J$, функций множества, каждая из которых равна нулю на пустом множестве, будет обладать свойством равностепенной плотности на M (т.е. свойством $(РП)_M$, так как для каждого $E \in S$ существует такое множество $e = E \in M$, что $\bar{\varphi}_\alpha(E \Delta e) = \bar{\varphi}_\alpha(\emptyset) = 0 < \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $\alpha \in J$).

Учитывая это, из теорем 1–3 (или из следствий 1–4) последовательно получаем следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 7 (обобщенная теорема Брукса–Джеветта; см. [5]). Пусть на σ -кольце S задана последовательность N -треугольных функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G_n, \|\cdot\|})$, $n = 1, 2, \dots$, и некоторая функция множества $\varphi: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$. Пусть, кроме того, для каждого $E \in S$

$$\lim_n \|\varphi_n(E)\| = \|\varphi(E)\|,$$

а каждая из φ_n не имеет ускользающей нагрузки на S . Для того чтобы φ не имела ускользающей нагрузки на S (ясно, что она N -треугольная), необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\varphi_n\}$ обладала свойством $(РОУН)_S$.

СЛЕДСТВИЕ 8 (теорема Брукса–Джеветта; см. [2], [3]). Пусть на σ -кольце множеств S задана последовательность конечно-аддитивных функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$, каждая из которых не имеет ускользающей нагрузки. Если для каждого множества $E \in S$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

то предельная функция множества φ конечно-аддитивна и не имеет ускользающей нагрузки, а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(РОУН)_S$.

СЛЕДСТВИЕ 9 (усиленная теорема Никодима; см. [1]). Предположим, что на σ -кольце множеств S задана последовательность векторнозначных мер $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G, \|\cdot\|})$. Если для каждого множества $E \in S$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

то предельная функция множества является векторнозначной мерой на S , а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POУН)_S$ (следовательно, и свойством $(PH)_S$).

Ясно также, что следствие 7 справедливо, в частности, и для непрерывных N -треугольных функций множества, и для непрерывных внешних мер.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно видеть, что даже в случае непрерывных счетно-аддитивных функций множества, определенных на “хорошем” классе множеств M_σ , где $R = M$ – кольцо множеств, условие сходимости последовательности на M_σ в доказанных выше утверждениях нельзя ослабить, потребовав сходимость этой последовательности лишь на множествах кольца M , а не на M_σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в доказанных утверждениях о треугольных функциях множества, которые не обязаны быть аддитивными (т.е. в теореме 1 и следствиях 1, 3, 7), требование отсутствия ускользающей нагрузки или непрерывности сверху в нуле у предельной треугольной функции множества φ сходящейся последовательности $\{\varphi_n\}$ опустить нельзя (см. также [2]).

Действительно, пусть μ – сужение меры Лебега на σ -кольцо S , порожденное кольцом M всевозможных объединений конечного числа полуинтервалов вида $[a, b)$, $a \leq b$. Тогда μ конечна на M . Положим $\mu_n(E) = \mu(E \cap [n-1, n))$, $n = 1, 2, \dots$, $E \in S$. Каждая μ_n есть ограниченная (единицей) на S мера и поэтому она непрерывна в нуле на σ -кольце S . Положим теперь при каждом $n = 1, 2, \dots$ для каждого $E \in S$

$$\varphi_n(E) = \max\{\mu_1(E), \mu_2(E), \dots, \mu_n(E)\}. \quad (21)$$

Легко проверить, что φ_n – неотрицательная, ограниченная единицей, не имеющая ускользающей нагрузки непрерывная внешняя мера на S . Ясно также, что при каждом $E \in S$ последовательность $\{\varphi_n\}$ возрастает и ограничена. Поэтому существует конечный предел этой последовательности непрерывных (и, следовательно, не имеющих ускользающей нагрузки) квазилипшицевых функций множества. Обозначим этот предел через φ , т.е.

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E), \quad E \in S,$$

где $\varphi: S \rightarrow R^+$ – ограниченная единицей квазилипшицева функция множества (так как она является полумерой).

Возьмем $E_n = [n-1, n)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{E_n\} = \{\perp E_n\}$, $E_n \in M$. При всех $n = 1, 2, \dots$ и при всех $k < n$ имеем $[k-1, k) \cap [n-1, n) = \emptyset$. Поэтому по определению μ_k получаем

$$\begin{aligned} \mu_k(E_n) &= \mu([n-1, n) \cap [k-1, k)) = \mu(\emptyset) = 0, \quad k < n, \\ \mu_n(E_n) &= \mu([n-1, n) \cap [n-1, n)) = \mu([n-1, n)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (21) при всех $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\varphi_n(E_n) = \max\{\mu_1(E_n), \mu_2(E_n), \dots, \mu_n(E_n)\} = \mu_n(E_n) = 1.$$

Поэтому сходящаяся к φ на S (следовательно, и на M_σ) последовательность непрерывных в нуле квазилипшицевых функций множества $\{\varphi_n\}$ не обладает

свойством $(\text{РОУН})_S$ и свойством $(\text{РОУН})_{M_\sigma}$. Следовательно, действительно, без требования наличия свойства отсутствия ускользающей нагрузки у предельной функции множества φ теорема 1 и ее следствия 1, 3 и 7 становятся неверными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Хорошо известно, что абелева топологическая группа порождается семейством квазинорм, т.е. является абелевой группой с семейством квазинорм. Поэтому результаты, полученные в этом и в следующем параграфах для функций множества со значениями в абелевой квазинормированной группе, могут быть перенесены на функции множества со значениями в абелевой топологической группе с соблюдением соответствующих формулировок и терминологии. Пути и методы такого переноса результатов хорошо описаны, например, в работах [15], [16], [4], [6]. Поэтому на этих вопросах мы не останавливаемся.

В заключение отметим еще раз: из замечаний 1 и 2 следует, что полученные в § 2 результаты в определенном смысле неумлучшаемы.

§ 3. Основные результаты и их приложения к теории векторных мер (продолжение)

В своей монографии [1] Н. Данфорд и Дж. Шварц называют теорему Витали–Хана–Сакса (см. [1; гл. III, § 7, теорема 2]) одним из важнейших результатов в теории функций множества. Покажем, что результаты, полученные в § 2, и теорема 1 из § 2 работы [7] позволяют получить целый ряд утверждений, являющихся аналогами и усилениями теоремы Витали–Хана–Сакса.

ЛЕММА 9 (см. [11; теорема 2]). Пусть на σ -кольце S , содержащем в себе кольцо M , определено семейство N -треугольных функций множества $\varphi_\alpha: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, со свойством $(\text{РОУН})_M$. Обозначим его через K . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) семейство K обладает свойством $(\text{СПП})_M$;
- 2) семейство K обладает свойством $(\text{РП})_M$.

ТЕОРЕМА 4 (см. [7; § 2, теорема 1 и замечания к ней]). Пусть семейство N -треугольных функций множества $\varphi_\alpha: M \rightarrow (G_\alpha, \|\cdot\|)$, $\alpha \in J$, определенных на кольце множеств M , обладает свойством $(\text{РОУН})_M$. Пусть, кроме того, μ – одна из следующих функций множества на кольце M : N -треугольная или конечно-аддитивная $(G, \|\cdot\|)$ -значная функция множества; аддитивная функция множества со значениями из расширенной области действительных чисел; полумера или внешняя мера, допускающая значение $+\infty$.

Если $\varphi_\alpha \overset{M}{\ll} \mu$ при каждом $\alpha \in J$, то $\varphi_\alpha \overset{M}{\ll\ll} \mu$ (т.е. семейство $\{\varphi_\alpha\}$ обладает свойством $(\text{РАН})_M^\mu$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , задана некоторая N -треугольная функция множества $\mu: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ и последовательность квазилипицевых функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, причем каждая из функций множества μ и φ_n не имеет ускользающей нагрузки на кольце M , а последовательность $\{\varphi_n; \mu\}$ обладает свойством слабой равностепенной плотности на M (т.е. свойством $(\text{СПП})_M$).

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

причем $\varphi: M_\sigma \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ не имеет ускользающей нагрузки на M_σ , и $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$, $n = 1, 2, \dots$, на множествах кольца M , то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S к некоторой квазилиппшицевой функции множества φ (обозначенной тем же символом φ , что и предел на M_σ) со свойством отсутствия ускользающей нагрузки на S . Кроме того, последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(\text{РОУН})_S$ и свойством $(\text{РАН})_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$), а предельная функция φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \overset{S}{\ll} \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы 5 выполнены все условия следствия 1. Поэтому согласно следствию 1 последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к φ на S , φ не имеет ускользающей нагрузки на S , а последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(\text{РОУН})_S$ (следовательно, и свойством $(\text{РОУН})_M$). Так как по условию теоремы $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то по теореме 4 имеем $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$. Остается показать, что $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$. Покажем это.

По условию теоремы μ не имеет ускользающей нагрузки и плотна на кольце M (плотность μ следует из условия $(\text{СРП})_M$ семейства $\{\varphi_n; \mu\}$). Поэтому, учитывая свойство $(\text{РОУН})_M$ последовательности $\{\varphi_n\}$, получаем, что семейство $\{\varphi_n; \mu\}$ обладает свойствами $(\text{РОУН})_M$ и $(\text{СРП})_M$. В силу леммы 9 отсюда следует, что семейство $\{\varphi_n; \mu\}$ обладает свойством $(\text{РП})_M$, а по доказанному $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$. Следовательно, по лемме 6 имеем $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$. Тогда очевидно, что $\varphi \overset{S}{\ll} \mu$, где φ – предельная функция (предел) последовательности $\{\varphi_n\}$.

Теорема доказана полностью.

Из теоремы 5, учитывая лемму 6, получаем и такое утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , заданы некоторая непрерывная сверху в нуле N -треугольная функция множества $\mu: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$ и последовательность непрерывных сверху в нуле квазилиппшицевых функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$.

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

где $\varphi: M_\sigma \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ непрерывна сверху в нуле на M_σ , и если $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$ на множествах кольца M , то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S к некоторой непрерывной сверху в нуле квазилиппшицевой функции множества φ (обозначенной тем же символом φ , что и предел на M_σ), последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(\text{РОУН})_S$ и свойством $(\text{РАН})_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$), а предельная функция множества φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \overset{S}{\ll} \mu$.

Так как конечно-аддитивная функция множества является квазилипшицевой, а векторнозначная мера – непрерывной сверху в нуле квазилипшицевой функцией множества, то из теорем 5 и 6 в качестве прямых следствий последовательно получаем такие усиленные варианты теоремы Витали–Хана–Сакса.

СЛЕДСТВИЕ 10 (усиленная теорема Витали–Хана–Сакса). Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , заданы некоторая N -треугольная функция множества $\mu: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ и последовательность конечно-аддитивных функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, причем каждая из функций множества μ и φ_n не имеет ускользящей нагрузки на кольцо M , а последовательность $\{\varphi_n; \mu\}$ обладает свойством слабой равностепенной плотности на M (т.е. свойством $(CPI)_M$).

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

а $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$ на множествах кольца M , то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S (т.е. на S) к некоторой конечно-аддитивной функции множества φ (обозначенной тем же символом φ , что и предел на M_σ) со свойством отсутствия ускользящей нагрузки на S , последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POUH)_S$ и свойством $(PAH)_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$), а предельная функция φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \overset{S}{\ll} \mu$.

СЛЕДСТВИЕ 11 (усиленная теорема Витали–Хана–Сакса). Пусть на σ -кольце S , порожденном кольцом M , заданы некоторая векторнозначная мера $\mu: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$ и последовательность векторнозначных мер $\varphi_n: S \rightarrow (\overline{G}, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$.

Если для каждого $E \in M_\sigma$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

и если $\varphi_n \overset{M}{\ll} \mu$ на множествах кольца M , то последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится на каждом множестве σ -кольца S (т.е. на S) к некоторой векторнозначной мере φ (обозначенной тем же символом φ , что и предел на M_σ), последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(POUH)_S$ и свойством $(PAH)_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \overset{S}{\ll} \mu$), а предельная функция множества φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \overset{S}{\ll} \mu$.

Если перейти теперь к частным вопросам и рассматривать сходимость и абсолютную непрерывность функций множества на множествах σ -кольца S , то и в этих частных случаях получают усиленные варианты классической теоремы Витали–Хана–Сакса. Действительно, сопоставляя следствия 8 и 9 с теоремой 4, приходим к выводу, что справедливы следующие два утверждения (следствия 12 и 13).

СЛЕДСТВИЕ 12 (усиленная теорема Витали–Хана–Сакса). Пусть на σ -кольце S задана последовательность конечно-аддитивных функций множества

$\varphi_n: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, каждая из которых не имеет ускользящей нагрузки. Пусть, кроме того, μ – одна из следующих функций множества на S : N -треугольная или конечно-аддитивная $(G, \|\cdot\|)$ -значная функция множества; аддитивная функция множества со значениями из расширенной области действительных чисел; полумера или внешняя мера, допускающая значение $+\infty$.

Если для каждого $E \in S$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

и если $\varphi_n \ll \mu$ на S , то φ является конечно-аддитивной функцией множества со свойством отсутствия ускользящей нагрузки на S , последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(\text{РОУН})_S$ и свойством $(\text{РАН})_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \ll_S \mu$), а предельная функция множества φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \ll \mu$.

СЛЕДСТВИЕ 13 (усиленная теорема Витали–Хана–Сакса; см. [7; следствие из § 2]). Пусть на σ -кольце S задана последовательность векторнозначных мер $\varphi_n: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть, кроме того, μ – одна из следующих функций множества на S : N -треугольная или конечно-аддитивная $(G, \|\cdot\|)$ -значная функция множества; аддитивная функция множества со значениями из расширенной области действительных чисел; полумера или внешняя мера, допускающая значение $+\infty$.

Если для каждого $E \in S$ существует

$$\lim_n \varphi_n(E) = \varphi(E),$$

и если $\varphi_n \ll \mu$ на S при каждом $n = 1, 2, \dots$, то φ является векторнозначной мерой на S , последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает свойством $(\text{РОУН})_S$ и свойством $(\text{РАН})_S^\mu$ (т.е. свойством $\varphi_n \ll_S \mu$), а векторнозначная мера φ абсолютно непрерывна на S относительно μ , т.е. $\varphi \ll \mu$.

Отметим, что в частном случае, когда $\mu: S \rightarrow \bar{R}^+$ – неотрицательная конечно-аддитивная функция множества, а φ_n принимают значения в банаховом пространстве, утверждение следствия 12 доказано Дж. К. Бруксом в [3] (см. также [17]). В случае, когда $\mu: S \rightarrow \bar{R}^+$ – неотрицательная конечно-аддитивная функция множества, а φ_n принимают значения в сепарабельном банаховом пространстве над полем комплексных чисел, утверждение следствия 12 доказано Р. Б. Дарстом в [18]. Ясно теперь, что упомянутые результаты Брукса и Дарста являются прямыми следствиями сформулированного выше следствия 12.

Кроме того, с помощью следствия 12 легко получить не только указанные результаты из работ [3], [17] и [18], но, например, такой обобщенный вариант теоремы Витали–Хана–Сакса, полезный, прежде всего, в теории интеграла.

СЛЕДСТВИЕ 14 (обобщенная теорема Витали–Хана–Сакса). Пусть последовательность конечно-аддитивных функций множества $\varphi_n: S \rightarrow (G, \|\cdot\|)$, $n = 1, 2, \dots$, сходится на каждом множестве σ -кольца S . Если $\varphi_n \ll_S \mu$

при каждом $n = 1, 2, \dots$, где $\mu: S \rightarrow \bar{R}$ – обобщенная скалярная мера, которая на отдельных множествах σ -кольца S может принимать значение, равное бесконечности, то $\varphi_n \overset{S}{\lll} \mu$.

Ясно, что все полученные в этой работе результаты могут быть распространены на различные классы функций, которые приведены в § 1 в качестве примеров N -треугольных и квазилиппицевых функций множества.

Список литературы

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [2] Г. Я. Арешкин, В. Н. Алексюк, В. М. Климин, “О некоторых свойствах векторзначных мер”, *Вопросы современной математики и методики ее преподавания в высшей школе*, Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, **404**, ЛГПИ им. А. И. Герцена, Л., 1971, 298–321.
- [3] J. K. Brooks, R. S. Jewett, “On finitely additive vector measures”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **67**:3 (1970), 1294–1298.
- [4] L. Drewnowski, “Equivalence of Brooks–Jewett, Vitali–Hahn–Saks and Nikodym theorems”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **20**:9 (1972), 725–731.
- [5] Н. С. Гусельников, “О теоремах Брукса–Джеветта и Никодима”, *Теория функций и функциональный анализ*, ЛГПИ им. А. И. Герцена, Л., 1975, 45–54.
- [6] В. Н. Алексюк, *Функции множеств*, деп. в ВИНТИ 4543–81.
- [7] Н. С. Гусельников, “Об одном аналоге теоремы Витали–Хана–Сакса”, *Матем. заметки*, **19**:4 (1976), 641–652; англ. пер.: N. S. Gusel'nikov, “An analog of the Vitali–Hahn–Saks theorem”, *Math. Notes*, **19**:4 (1976), 387–392.
- [8] S. Gudder, “Generalized measure theory”, *Found. Phys.*, **3**:3 (1973), 399–411.
- [9] Н. С. Гусельников, *Введение в теорию неаддитивных функций множеств*, Изд-во Ишимского гос. ин-та им. П. П. Ершова, Ишим, 2004.
- [10] Г. Я. Арешкин, Н. С. Гусельников, “О некоторых свойствах семейства N -треугольных функций множества”, *Математический анализ и теория функций*, вып. 1, Изд-во МОПИ им. Н. К. Крупской, М., 1973, 211–219.
- [11] Н. С. Гусельников, “Две теоремы о равностепенной плотности семейств N -треугольных функций множества”, *Функциональный анализ*, вып. 5, Изд-во УГПИ, Ульяновск, 1975, 44–55.
- [12] Н. С. Гусельников, “Треугольные функции множества и теорема Никодима о равномерной ограниченности семейства мер”, *Матем. сб.*, **106**(148):3(7) (1978), 340–356; англ. пер.: N. S. Gusel'nikov, “Triangular set functions and Nikodým's theorem on the uniform boundedness of a family of measures”, *Math. USSR-Sb.*, **35**:1 (1979), 19–33.
- [13] Г. Я. Арешкин, Н. С. Гусельников, “О слабой равностепенной плотности и компактности семейств квазилиппицевых функций множества”, *Функциональный анализ*, вып. 5, Изд-во УГПИ, Ульяновск, 1975, 3–13.
- [14] Н. С. Гусельников, “О квазibasise и равностепенной абсолютной непрерывности семейства N -треугольных функций множества. I”, *Математический анализ и теория функций*, вып. 3, Изд-во МОПИ им. Н. К. Крупской, М., 1974, 211–219.
- [15] L. Drewnowski, “Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I, II, III”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. et Phys.*, **20**:4 (1972), 269–276; **20**:4 (1972), 277–286; **20**:6 (1972), 439–445.

- [16] Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства*, Наука, М., 1969; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques. Fasc. III. Première partie. Livre III: Topologie générale. Chap. 3: Groupes topologiques (théorie élémentaire). Chap. 4: Nombres réels*, Hermann & Cie, Paris, 1960.
- [17] J. K. Brooks, “Equicontinuous sets of measures and applications to Vitali’s integral convergence theorem and control measures”, *Advances in Math.*, **10**:2 (1973), 165–171.
- [18] R. B. Darts, “The Vitali–Hahn–Saks and Nikodym theorems for additive set functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 1297–1298.

Н. С. Гусельников (N. S. Gusel’nikov)

Ишимский государственный педагогический институт

им. П. П. Ершова

E-mail: zvor@mail.ru

Поступила в редакцию

18.03.2009 и 26.01.2010