Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Достанич, Асимптотика спектра и регуляризованный след одного сингулярного интегрального оператора, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 8, 31–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:03:04

УДК 517.968

М. Р. Достанич

Асимптотика спектра и регуляризованный след одного сингулярного интегрального оператора

Дано уточненное описание асимптотики спектра некоторого сингулярного интегро-дифференциального оператора. Найден регуляризованный след обратного оператора.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: уравнение Прандтля, сингулярные числа, собственные значения, регуляризованный след.

§ 1. Введение

В теории тонкого крыла важную роль играет следующее интегро-дифференциальное уравнение Прандтля:

$$\frac{\varphi(x)}{S(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi'(y)}{y-x} dy = f(x),$$

где φ – неизвестная функция, а S и f – заданные функции,

$$S(x) = \frac{mb(x)}{8}, \quad f(x) = 4V\alpha(x).$$

Функции и константы в этих формулах имеют следующий механический смысл: $2a$ – размах крыльев, $b = b(x)$ описывает форму профиля крыла как функцию абсциссы x , $\varphi(x)$ характеризует циркуляцию воздушного потока за профилем, $\alpha(x)$ – “геометрический угол атаки”, а V – скорость потока воздуха на бесконечности. Через m обозначена постоянная, обычно принимаемая равной 2π (более точное ее значение 5.5, см. [1]).

В настоящей работе рассматриваются свойства оператора

$$Af(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(y)}{x-y} dy,$$

входящего в уравнение Прандтля. Без ограничения общности положим $a = 1$, так что

$$Af(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(y)}{x-y} dy.$$

(Интеграл рассматривается в смысле главного значения.)

Работа выполнена при поддержке гранта MNZZS № ON 144010 (Function spaces and operators of them).

Область определения оператора A состоит из функций f , удовлетворяющих следующим условиям:

$$f' \in L(-1, 1), \quad Af \in L^2(-1, 1), \quad f(-1) = f(1) = 0.$$

Известно (см. [2]), что оператор $B = A^{-1}$ имеет следующий вид:

$$Bf(x) = \int_{-1}^1 b(x, y) f(y) dy, \quad B: L^2(-1, 1) \longrightarrow L^2(-1, 1),$$

где

$$b(x, y) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 - xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}{x - y} \right|.$$

Оператор B самосопряженный, положительный и компактный. Обозначим через $\lambda_n(B)$ его собственные значения, расположенные по убыванию. Тогда

$$\lambda_n(B) = \frac{2}{n\pi} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty$$

(см. [2]). Аналогично, обозначим через $\lambda_n(A)$ собственные значения оператора A . Ясно, что $\lambda_n(A) = 1/\lambda_n(B)$.

В [3] Кац эвристически (без строгого доказательства) получил следующую формулу:

$$\lambda_n(A) = \frac{n\pi}{2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Коган и Сахнович в [2] дали строгое доказательство результата Каца.

В настоящей работе мы получим оценку второго члена спектральной асимптотики оператора B (соответственно, A) и найдем такую подходящую последовательность $(c_n)_{n=1}^\infty$, что ряд $\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n(B) - c_n)$ сходится. Кроме того, мы найдем сумму этого ряда (“регуляризованный след” оператора B).

Прекрасный обзор результатов по теории следов дифференциальных и абстрактных дискретных операторов приведен в [4], но литературы по “регуляризованным следам” интегральных операторов почти нет.

Обозначим через $\int_a^b L(x, y) dy$ интегральный оператор на $L^2(a, b)$ с ядром $L(x, y)$. Для компактного оператора T обозначим через $s_n(T)$ n -е собственное значение оператора $|T| = (T^*T)^{1/2}$, т.е. $s_n(T) = \lambda_n(|T|)$. Через c_p обозначим множество компактных операторов T , у которых

$$|T|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty s_k^p(T) \right)^{1/p} < \infty.$$

В частности, c_1 – множество ядерных операторов.

§ 2. Результаты

ТЕОРЕМА 1. а) Для оператора B (оператора A) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_n(B) = \frac{2}{n\pi}(1 + O(n^{-1/9})), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\left(\lambda_n(A) = \frac{n\pi}{2}(1 + O(n^{-1/9})), \quad n \rightarrow \infty \right).$$

б) Для оператора A справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n(A)} - \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}} \right) = \frac{2C + 4 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)},$$

где C — константа Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорему 1 можно использовать для приближенного вычисления первых N собственных значений оператора B (соответственно, A). В самом деле, $B^2, B^3, \dots$ — ядерные интегральные операторы, соответствующие ядра которых суть

$$b_2(x, t) = \int_{-1}^1 b(x, s)b(s, t) ds,$$

$$b_3(x, t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b(x_1, s_1)b(s_1, s_2)b(s_2, t) ds_1 ds_2,$$

$$\dots$$

и выполнены равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(B) = \int_{-1}^1 b_2(x, x) dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3(B) = \int_{-1}^1 b_3(x, x) dx, \quad \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^N(B) = \int_{-1}^1 b_N(x, x) dx.$$

При достаточно больших N имеем

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n^s(B) = k_s, \quad s = 1, 2, \dots, N,$$

где $k_2, k_3, \dots, k_N$ приближенно равны соответственно

$$\int_{-1}^1 b_2(x, x) dx, \quad \int_{-1}^1 b_3(x, x) dx, \quad \dots, \quad \int_{-1}^1 b_N(x, x) dx,$$

и по теореме 1

$$k_1 \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}} + \frac{2C + 4 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)}.$$

Рассмотрим теперь многочлен

$$P_N(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i(B)) = z^N - z^{N-1} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_i(B) \right) + z^{N-2} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_i(B) \lambda_j(B) \right) - z^{N-3} \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \lambda_i(B) \lambda_j(B) \lambda_k(B) \right) + \dots$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_i(B) &= k_1, & \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_i(B) \lambda_j(B) &= \frac{1}{2}(k_1^2 - k_2), \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \lambda_i(B) \lambda_j(B) \lambda_k(B) &= \frac{1}{6}(k_1^3 - 3k_1 k_2 + 2k_3), & \dots \end{aligned}$$

получаем

$$P_N(z) = z^N - k_1 z^{N-1} + \frac{1}{2}(k_1^2 - k_2) z^{N-2} - \frac{1}{6}(k_1^3 - 3k_1 k_2 + 2k_3) z^{N-3} + \dots$$

Нули многочлена P_N приблизительно совпадают с первыми N собственными значениями B (поэтому мы можем приближенно найти первые N собственных значений оператора A).

Для доказательства теоремы 1 нам нужно несколько лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $c > 0$ и $S: L^2(0, c) \rightarrow L^2(0, c)$ – оператор, заданный равенством

$$Sf(x) = \int_0^c \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} f(y) dy.$$

Тогда $s_n(S) = O(n^{-5/4})$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $c = 1$. Пусть $0 < \delta < 1$ и

$$P_\delta: L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad P_\delta f(x) = \mathcal{X}_{[0, \delta]}(x) f(x).$$

Положим $Q_\delta = I - P_\delta$ (I – тождественный оператор, $\mathcal{X}_S(\cdot)$ – характеристическая функция множества S). Тогда

$$S = P_\delta S P_\delta + Q_\delta S P_\delta + P_\delta S Q_\delta + Q_\delta S Q_\delta. \quad (2.1)$$

Пусть

$$J_1: L^2(\delta, 1) \rightarrow L^2(\delta, 1), \quad S_1: L^2(\delta, 1) \rightarrow L^2(\delta, 1)$$

– операторы, заданные формулами

$$J_1 f(x) = \int_\delta^x f(x) dx, \quad S_1 f(x) = \int_\delta^1 \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} f(y) dy.$$

Тогда $s_n(Q_\delta S Q_\delta) = s_n(S_1)$. Интегрируя по частям, получим

$$S_1 = R_1 - T_1 J_1, \quad (2.2)$$

где $R_1, T_1: L^2(\delta, 1) \rightarrow L^2(\delta, 1)$ – операторы, заданные равенствами

$$R_1 f(x) = \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \int_{\delta}^1 f(t) dt, \quad T_1 f(x) = \int_{\delta}^1 L(x, y) f(y) dy;$$

здесь

$$L(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

Свойства сингулярных чисел (см. [5; гл. II, раздел 2, п. 3]) показывают, что, как следует из (2.2) (поскольку ранг R_1 равен единице),

$$s_{2n+1}(S_1) \leq s_{2n}(T_1 J_1) \leq s_n(T_1) s_n(J_1). \quad (2.3)$$

Так как

$$s_n(J_1) = \frac{1-\delta}{\pi} \frac{1}{n-1/2}$$

(см. [5; гл. II, раздел 2, п. 3]), то с учетом равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T_1) = \int_{\delta}^1 \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx dy$$

(см. [6; теорема 6.11]) получаем, что

$$n s_n^2(T_1) \leq \int_{\delta}^1 \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx dy,$$

а из (2.3) имеем оценку

$$s_{2n+1}(S_1) \leq \frac{1-\delta}{\pi} \frac{1}{n-1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{\delta}^1 \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Так как $|L(x, y)| \leq 2/\delta$ при $x, y \in [\delta, 1]$, то из предыдущего неравенства следует, что

$$s_{2n+1}(S_1) \leq \frac{1-\delta}{\pi} \frac{1}{n-1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{\delta},$$

т.е.

$$s_n(Q_{\delta} S Q_{\delta}) \leq \frac{c_1}{\delta n^{3/2}} \quad (2.4)$$

с постоянной c_1 , не зависящей от δ и n . Пусть $S_2: L^2(0, \delta) \rightarrow L^2(\delta, 1)$ – оператор, заданный формулой

$$S_2 f(x) = \int_0^{\delta} \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} f(y) dy.$$

Тогда $s_n(Q_{\delta} S P_{\delta}) = s_n(S_2)$. Пусть $J: L^2(0, \delta) \rightarrow L^2(0, \delta)$, $JF(x) = \int_0^x f(t) dt$. Имеем

$$S_2 = R_2 - T_2 J,$$

где $R_2, T_2: L^2(0, \delta) \rightarrow L^2(\delta, 1)$ – операторы вида

$$R_2 f(x) = \ln \frac{(x+\delta)^2}{x^2+\delta^2} \int_0^{\delta} f(t) dt, \quad T_2 f(x) = \int_0^{\delta} L(x, y) f(y) dy.$$

Ввиду того, что R_2 – оператор ранга один, из равенства

$$s_n(J) = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{n - 1/2}$$

вытекает, что

$$s_{2n+1}(S_2) \leq s_{2n}(T_2 J_1) \leq s_n(T_2) s_n(J) \leq \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{n - 1/2} s_n(T_2). \quad (2.5)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T_2) = \int_0^{\delta} dy \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx$$

(см. [6; теорема 6.11]), то

$$n s_n^2(T_2) \leq \int_0^{\delta} dy \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx,$$

а в силу (2.5) имеем

$$s_{2n+1}(S_2) \leq \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{n - 1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^{\delta} dy \int_{\delta}^1 |L(x, y)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Так как $|L(x, y)| \leq 2/\delta$ (при $x \in [\delta, 1]$ и $y \in [0, \delta]$), то из (2.6) следует, что

$$s_{2n+1}(S_2) \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n - 1/2)\sqrt{n}},$$

т.е.

$$s_n(Q_{\delta} S P_{\delta}) (= s_n(S_2)) \leq \frac{c_2}{n^{3/2}} \quad (2.7)$$

с постоянной c_2 , не зависящей от n и δ . Следовательно,

$$s_n(P_{\delta} S Q_{\delta}) \leq \frac{c_2}{n^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Оценим теперь $s_n(P_{\delta} S P_{\delta})$. Пусть

$$S_3: L^2(0, \delta) \rightarrow L^2(0, \delta), \quad S_3 f(x) = \int_0^{\delta} \ln \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} f(y) dy.$$

Тогда $s_n(P_{\delta} S P_{\delta}) = s_n(S_3)$ и

$$S_3 = R_3 - T_3 J,$$

где $R_3, T_3: L^2(0, \delta) \rightarrow L^2(0, \delta)$ – операторы, определенные формулами

$$T_3 f(x) = \int_0^{\delta} L(x, y) f(y) dy, \quad R_3 f(x) = \ln \frac{(x+\delta)^2}{x^2 + \delta^2} \int_0^{\delta} f(t) dt.$$

Так как R_3 – оператор ранга один, то

$$s_{n+1}(S_3) \leq s_n(T_3 J) \leq s_n(J) \|T_3\| = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{n - 1/2} \|T_3\|.$$

Функция

$$L(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

– однородная степени -1 , поэтому по неравенству Харди (см. [7; теорема 319]) имеем

$$\|T_3\| \leq \int_0^\infty x^{-1/2} |L(x, 1)| dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^{1/2}|x-1|}{(1+x)(1+x^2)} dx < \infty.$$

Итак,

$$s_n(P_\delta S P_\delta) (= s_n(S_3)) \leq \frac{c_3}{n} \delta \quad (2.9)$$

с c_3 , не зависящей от n и δ . Из (2.1), (2.4), (2.7)–(2.9) вытекает, что

$$s_{4n}(S) \leq \frac{c_3}{n} \delta + \frac{2c_2}{n^{3/2}} + \frac{c_1}{\delta n^{3/2}}$$

для всякого $\delta \in (0, 1)$. Положив $\delta = n^{-1/4}$, получаем

$$s_{4n}(S) = O(n^{-5/4}),$$

т.е.

$$s_n(S) = O(n^{-5/4}).$$

ЛЕММА 2. Для оператора $K: L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1)$, заданного формулой

$$Kf(x) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1 - xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{4 - (x+y)^2} f(y) dy,$$

справедлива оценка

$$s_n(K) = O(n^{-5/4}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_+, P_-: L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1)$ – операторы, заданные формулами

$$P_+f(x) = \mathcal{X}_{[0,1]}(x)f(x), \quad P_-f(x) = \mathcal{X}_{[-1,0]}(x)f(x).$$

Тогда

$$K = P_+K P_+ + P_+K P_- + P_-K P_+ + P_-K P_-.$$

У операторов $P_-K P_+$ и $P_+K P_-$ сингулярные числа оцениваются как $O(1/n^p)$ для каждого $p \in \mathbb{N}$ (см. [5; гл. II, раздел 2, п. 3]) и достаточно доказать, что $s_n(P_+K P_+) = O(n^{-5/4})$ (аналогично, $s_n(P_-K P_-) = O(n^{-5/4})$). Пусть $K_1: L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$,

$$K_1f(x) = \int_0^1 \ln \frac{1 - xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{4 - (x+y)^2} f(y) dy.$$

Тогда мы имеем $s_n(K_1) = s_n(P_+K P_+)$ и достаточно доказать, что

$$s_n(K_1) = O(n^{-5/4}). \quad (2.10)$$

Учитывая, что у оператора

$$\int_0^1 \ln(2+x+y) dy: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$$

собственные числа убывают экспоненциально (см. [8; теорема 11.3]), для доказательства (2.10) осталось показать, что

$$s_n(K_2) = O(n^{-5/4}), \quad (2.11)$$

где $K_2: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$,

$$K_2 f(x) = \int_0^1 \ln \frac{1-xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{2-x-y} f(y) dy.$$

Пусть K_3 и M – операторы на $L^2(0, \pi/2)$, заданные формулами

$$K_3 f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 - \cos(x+y)}{2(\sin^2(x/2) + \sin^2(y/2))} f(y) dy, \quad M f(x) = \sqrt{\sin x} f(x),$$

и пусть

$$V: L^2(0,1) \rightarrow L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad V f(x) = \sqrt{\sin x} f(\cos x).$$

Заметим, что V – изометрия, $\|M\| \leq 1$ и $K_2 = V^{-1} M K_3 M V$. Отсюда видно, что

$$s_n(K_2) = s_n(M K_3 M) \leq s_n(K_3),$$

так что для доказательства (2.11) достаточно установить оценку

$$s_n(K_3) = O(n^{-5/4}). \quad (2.12)$$

Пусть $K_4: L^2(0, \pi/4) \rightarrow L^2(0, \pi/4)$,

$$K_4 f(x) = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{\sin^2(x+y)}{\sin^2 x + \sin^2 y} f(y) dy.$$

Для доказательства (2.12) достаточно показать, что

$$s_n(K_4) = O(n^{-5/4}). \quad (2.13)$$

Определим операторы $K_4^{(1)}$, $K_4^{(2)}$, $K_4^{(3)}$ на $L^2(0, \pi/4)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} K_4^{(1)} f(x) &= \int_0^{\pi/4} \ln \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} f(y) dy, & K_4^{(2)} f(x) &= \int_0^{\pi/4} 2 \ln \frac{\sin(x+y)}{x+y} f(y) dy, \\ K_4^{(3)} f(x) &= \int_0^{\pi/4} \ln \frac{x^2+y^2}{\sin^2 x + \sin^2 y} f(y) dy. \end{aligned}$$

Тогда

$$K_4 = K_4^{(1)} + K_4^{(2)} + K_4^{(3)}. \quad (2.14)$$

По лемме 1 имеем

$$s_n(K_4^{(1)}) = O(n^{-5/4}).$$

Как следует из [5; гл. II, раздел 2, п. 3],

$$s_n(K_4^{(2)}) = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{x^2 + y^2}{\sin^2 x + \sin^2 y}$$

ограничена на $(0, \pi/4) \times (0, \pi/4)$, так что согласно [5; гл. II, раздел 2, п. 3] имеем

$$s_n(K_4^{(3)}) = O(n^{-3/2}).$$

Отсюда и из (2.14) следует оценка (2.13). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3 (см. [9]). Если C и D – положительные компактные операторы на комплексном гильбертовом пространстве и выполнено

$$|C - D|^{\operatorname{Re} z} \in c_1, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1,$$

то $C^z - D^z \in c_1$ и

$$|C^z - D^z|_1 \leq \frac{|\sin \pi z|}{\sin \pi(\operatorname{Re} z)} \|C - D\|^{\operatorname{Re} z}_1.$$

ЛЕММА 4. Если A и B – компактные операторы на комплексном гильбертовом пространстве и выполнено

$$\begin{aligned} s_n(A) &= an^{-\alpha} + O(n^{-\beta}), \quad a > 0, \quad \alpha < \beta < \alpha + 1, \\ s_n(B) &= O(n^{-\beta_1}), \quad \beta_1 \geq \frac{\beta}{\alpha + 1 - \beta}, \end{aligned}$$

то

$$s_n(A + B) = an^{-\alpha} + O(n^{-\beta_1}).$$

Заметим, что лемма 4 – частный случай теоремы 6.3 из [10].

Пусть

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \Psi(k+1)$$

(функция Макдональда), где

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad \Psi(k+1) = -C + \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu}, \quad \Psi(1) = -C,$$

а C – постоянная Эйлера.

Как известно, K_0 экспоненциально убывает на бесконечности (см. [11]). Пусть $k(x) = \frac{1}{\pi} K_0(|x|)$. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} k(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (=:\mathcal{K}(x)).$$

Пусть

$$H(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [k(x - y + 4n) - k(x + y + 4n + 2)], \quad x, y \in [-1, 1],$$

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi(1+x)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Система функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L^2(-1, 1)$. Непосредственными вычислениями находим, что

$$\int_{-1}^1 H(x, y) \varphi_n(y) dy = \mathcal{K}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \varphi_n(x). \quad (2.15)$$

Пусть

$$G: L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1), \quad Gf(x) = \int_{-1}^1 H(x, y) f(y) dy.$$

Согласно (2.15) G – самосопряженный компактный положительный оператор и

$$\lambda_n(G) = \mathcal{K}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}}.$$

Положим $R = B - G$. Тогда

$$Rf(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{R}(x, y) f(y) dy,$$

где

$$\mathcal{R}(x, y) = b(x, y) - H(x, y).$$

Обозначив

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad B(x) = I_0(x) \ln 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} \Psi(k+1),$$

получим

$$K_0(|x|) = -\ln|x| - A(x) \ln|x| + B(x),$$

так что

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}}{4 - (x+y)^2} + W(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} W(x, y) = & -\frac{1}{\pi} A(x+y+2) \ln|x+y+2| + \frac{1}{\pi} B(x+y+2) \\ & - \frac{1}{\pi} A(x+y-2) \ln|x+y-2| + \frac{1}{\pi} B(x+y-2) \\ & + \frac{1}{\pi} A(x-y) \ln|x-y| - \frac{1}{\pi} B(x-y) \\ & - \left[k(x-y+4) + \sum_{n \neq 0, -1} [k(x-y+4n) - k(x+y+4n+2)] \right]. \end{aligned}$$

Так как функция $\frac{\partial W}{\partial y}$ ограничена на $(-1, 1) \times (-1, 1)$, то согласно [5; гл. II, раздел 2, п. 3] получаем

$$s_n \left(\int_{-1}^1 W(x, y) dy \right) = O(n^{-3/2}). \quad (2.16)$$

Учитывая равенство

$$R = \frac{1}{\pi} K + \int_{-1}^1 W(x, y) dy,$$

из (2.16) и леммы 2 выводим следующую оценку:

$$s_n(R) = O(n^{-5/4}). \quad (2.17)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

а) Выполнено равенство $B = G + R$. Так как

$$s_n(G) = \lambda_n(G) = \left(1 + \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} = \frac{2}{n\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right),$$

то имеет место соотношение

$$s_n(G) = \frac{2}{n\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/9}} \right) \right)$$

и, как вытекает из (2.17) и леммы 4 ($a = 2/\pi$, $\alpha = 1$, $\beta = 10/9$, $\beta_1 = 5/4$),

$$s_n(B) = s_n(G + R) = \frac{2}{n\pi} (1 + O(n^{-10/9})),$$

т.е.

$$\lambda_n(B) = \frac{2}{n\pi} (1 + O(n^{-1/9})).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_n(A) = \frac{n\pi}{2} (1 + O(n^{-1/9})).$$

б) Так как

$$s_n(R) = s_n(B - G) = O(n^{-5/4}),$$

то по индукции получаем

$$s_n(B^k - G^k) = O(n^{-k-1/4}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Применим теперь лемму 3 к операторам B^k и G^k . Как следует из (3.1), если

$$\frac{k}{k+1/4} < \operatorname{Re}(z) < k$$

(т.е. $1/(k+1/4) < \operatorname{Re}(z/k) < 1$), то

$$B^z - G^z = (B^k)^{z/k} - (G^k)^{z/k} \in c_1$$

и функция $z \mapsto \operatorname{tr}(B^z - G^z)$ аналитична в области

$$\left\{ z : \frac{k}{k+1/4} < \operatorname{Re} z < k \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Итак, функция $z \mapsto \operatorname{tr}(B^z - G^z)$ аналитична в области $\{z : \operatorname{Re} z > 4/5\}$. Теперь рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^z(B) - \lambda_n^z(G)).$$

Как следует из асимптотики последовательностей $\lambda_n(B)$ и $\lambda_n(G)$,

$$\lambda_n^z(B) - \lambda_n^z(G) = O(n^{-1/9 - \operatorname{Re} z}), \quad n \rightarrow \infty,$$

так что функция Ψ аналитична в области $\{z : \operatorname{Re} z > 8/9\}$. При $\operatorname{Re} z > 1$ оба оператора B^z и G^z ядерные, поэтому

$$\operatorname{tr}(B^z - G^z) = \operatorname{tr} B^z - \operatorname{tr} G^z = \Psi(z).$$

Итак, $\Psi(z) = \operatorname{tr}(B^z - G^z)$, $\operatorname{Re} z > 1$, и по теореме единственности

$$\Psi(z) = \operatorname{tr}(B^z - G^z)$$

для всех z с $\operatorname{Re} z > 8/9$. При $z = 1$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n(B) - \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}} \right) = \operatorname{tr}(B - G) = \operatorname{tr} R,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n(A)} - \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}} \right) = \operatorname{tr} R. \quad (3.2)$$

Так как

$$R = \frac{1}{\pi} K + \int_{-1}^1 W(x, y) dy,$$

то выполнено равенство

$$\operatorname{tr} R = \frac{1}{\pi} \operatorname{tr} K + \operatorname{tr} \int_{-1}^1 W(x, y) dy.$$

Функция W непрерывна на $[-1, 1] \times [-1, 1]$, а оператор $\int_{-1}^1 W(x, y) dy$ – ядерный. Значит,

$$\operatorname{tr} \int_{-1}^1 W(x, y) dy = \int_{-1}^1 W(x, x) dx$$

(см. [5; гл. II, раздел 3, п. 3]). Учитывая, что функция Макдональда имеет представление

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)}}, \quad x > 0$$

(см. [11]), непосредственными вычислениями получаем, что

$$\int_{-1}^1 W(x, x) dx = \frac{2C + 6 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)},$$

т.е.

$$\operatorname{tr} \int_{-1}^1 W(x, y) dy = \frac{2C + 6 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)}.$$

Оператор K – ядерный и по теореме 3.1 из [12] имеем

$$\operatorname{tr} K = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{2} dx = -2 \ln 2.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tr} R = \frac{2C + 4 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)},$$

и в силу (3.2) выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\lambda_n(A)} - \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi/2)^2}} \right) = \frac{2C + 4 \ln 2 - 4}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(e^{4x} - 1)},$$

что завершает доказательство.

Список литературы

- [1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*, ГИТТЛ, 1946; англ. пер.: N.I. Muskhelishvili, *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their applications to mathematical physics*, Aeronautical Research Laboratories, Melbourne, 1949.
- [2] Х. М. Коган, Л. А. Сахнович, “Асимптотика спектра одного сингулярного интегро-дифференциального оператора”, *Дифференц. уравнения*, **20:8** (1984), 1444–1447.
- [3] М. Кац, “О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями”, *Математика. Сб. пер.*, **1:2** (1957), 95–124; пер. с англ.: М. Кас, “On some connections between probability theory and differential and integral equations”, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, CA, 1950), Univ. of California Press, Berkeley, CA, 1951, 189–215.

- [4] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Следы операторов”, **61**:5 (2006), 89–156; англ. пер.: V. A. Sadovnichii, V. E. Podol'skii, “Traces of operators”, *Russian Math. Surveys*, **61**:5 (2006), 885–953.
- [5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [6] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Grad. Texts in Math., **68**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.
- [7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 2-d ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1952; рус. пер. 1-го изд.: Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [8] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Оценки сингулярных чисел интегральных операторов”, *УМН*, **32**:1 (1977), 17–84; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “Estimates of singular numbers of integral operators”, *Russian Math. Surveys*, **32**:1 (1977), 15–89.
- [9] M. R. Dostanić, “Spectral properties of the operator of Riesz potential type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:8 (1998), 2291–2297.
- [10] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984; англ. пер.: V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **48**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [11] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [12] Ch. Brislawn, “Kernels of trace class operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:4 (1988), 1181–1190.

М. Р. Достанич (M. R. Dostanić)

Department of Mathematics,
University of Belgrade, Serbia
E-mail: domi@matf.bg.ac.yu

Поступила в редакцию
17.03.2009

Перевод с английского Н. Г. Кружилина.