Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. У. Браден, В. З. Энольский, $SU(2)$ -монополи, кривые с симметриями и наследие Рамануджана, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 6, 19–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:29:33

УДК 517.958:530.145.83+515.178.2+517.58

Г. У. Браден, В. З. Энольский

$SU(2)$ -монополи, кривые с симметриями и наследие Рамануджана

Предложено обобщение конструкции Эрколани–Синха $SU(2)$ -монополей на случай семейства пятипараметрических центрированных монополей с зарядом три. В частности, показано как разрешить трансцендентные условия на спектральную кривую. Для класса кривых с симметриями эти трансцендентные условия приводят к некоторой теоретико-числовой проблеме, которая может быть решена при помощи недавно доказанного равенства Рамануджана.

Библиография: 36 названий.

Ключевые слова: неабелевы монополи, гипергеометрические соотношения Рамануджана, алгебраические кривые с автоморфизмами.

§ 1. Введение

В настоящей статье обсуждаются конструкция магнитных монополей, алгебраические кривые с наложенными на них трансцендентными условиями и связанные с этим проблемы теории чисел. Магнитные монополи или топологические солитонные решения в калибровочных теориях Янга–Миллса–Хиггса в трех измерениях уже в течение четверти века являются объектом повышенного интереса. В частности, в фокусе внимания многих исследователей все это время находились BPS (Bogomolny–Prasad–Sommerfeld)-монополи (см. обзор [1] и монографию [2]). Эти монополи возникают в пределе, когда исчезает потенциал Хиггса и удовлетворяют при этом следующему уравнению первого порядка – уравнению Богомольного:

$$B_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} F^{jk} = D_i \Phi,$$

которое следует решать при граничных условиях, сохраняющих память о потенциале Хиггса. Здесь F^{ij} – напряженность поля, ассоциированного с калибровочным полем A , Φ – поле Хиггса, D_i – ковариантная производная. Эти уравнения могут быть интерпретированы как размерностная редукция в четырехмерном уравнении самодуальности, при которой все функции считаются независимыми от x_4 и $\Phi = A_4$. Как известно, твисторное преобразование Уорда связывает инстантонные решения в $\mathbb{R}^4$ с некоторым векторным голоморфным расслоением над твисторным пространством $\mathbb{CP}^3$. Хитчин показал в [3], что и размерностная редукция, приводящая к BPS-монополям, может быть также произведена в твисторном пространстве. Мини-твисторное

пространство – это двумерное комплексное многообразие, изоморфное $\mathbb{TP}^1$, и BPS-монополи могут быть сопоставлены некоторым расслоениям над этим пространством. В частности, в конструкции возникает кривая $\mathcal{C} \subset \mathbb{TP}^1$, называемая *спектральной кривой*, удовлетворяющая некоторым условиям несингулярности. Хитчину удалось доказать, что все монополи могут быть получены в рамках такого подхода [4]. Нам в работе [5] модифицировал ADHM (Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin)-конструкцию инстантонов таким образом, что получаются BPS-монополи. Основные в этой модификации уравнения – уравнения Нама – допускают представление Лакса и соответствующая спектральная кривая совпадает с $\mathcal{C}$.

Кривые $\mathcal{C}$ – это кривые, указанные в заглавии настоящей статьи. Конструкция Хитчина, которую мы далее напомним, налагает на них трансцендентные ограничения и проблема состоит в явном построении кривых, для которых эти ограничения выполняются. Далее, для данной кривой Эрколани и Синха в своей фундаментальной работе [6] показали, как разрешить (калибровочно преобразованные) уравнения Нама в терминах функции Бейкера–Ахиезера кривой $\mathcal{C}$. Авторы развили в [7] результаты этой работы, показав, как для данной кривой разрешить уравнения Нама и восстановить монополь в рамках стандартных подходов теории интегрируемых систем. Однако в фокусе настоящего анализа находится не эта сторона задачи (т.е. ее интегрируемость), а кривые $\mathcal{C}$, и мы только приведем различные формулы интегрирования для того, чтобы описать свойства кривой, необходимые для осуществления конструкции. Теория чисел (и, в частности, наследие Рамануджана) привлекается, когда мы накладываем трансцендентные ограничения на кривую и определяем по кривой требуемые величины.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приводятся необходимые сведения из работ Хитчина и Эрколани–Синха. Здесь же излагаются условия Хитчина и выделяются необходимые объекты для эффективного построения интегрируемой системы и соответствующей кривой. Показано, как вся конструкция может быть сведена к вычислению стандартных объектов, связанных с кривой. Первая принципиальная проблема, возникающая при построении конструкции, состоит в необходимости аналитического определения матрицы периодов для кривой $\mathcal{C}$. Затем следует описать пересечение тета-дивизора с некоторым отрезком в якобиане кривой.

В § 3 введен класс кривых (рода четыре), для которых удается полностью построить конструкцию. Они имеют следующий вид:

$$\eta^3 + \widehat{\chi}(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3)(\zeta - \lambda_4)(\zeta - \lambda_5)(\zeta - \lambda_6) = 0, \quad (1.1)$$

где λ_i , $i = 1, \dots, 6$, – различные комплексные числа. (При определенном выборе λ_i кривая соответствует монополю заряда три.) Этот класс кривых изучался Веллштейном более ста лет тому назад в [8] и недавно Мацумото в [9]. В § 3 введен также базис гомологий и определены точки ветвления посредством тета-констант в соответствии с [9].

Эрколани и Синха переформулировали некоторые из условий несингулярности Хитчина в терминах ограничений на допустимые периоды спектральной

кривой. Эквивалентная формулировка этих условий была дана в [10]. Условия Эрколани–Синха трансцендентны и проверка их выполнения является другой и, по-видимому, основной проблемой, которую необходимо разрешить. В § 4 это сделано для рассматриваемого класса кривых. На этом этапе трансцендентные условия сведены к соотношениям между гипергеометрическими интегралами. Далее задача упрощается (что позволяет завершить построение конструкции) путем увеличения симметрии кривой и рассмотрения в § 5 кривой рода четыре,

$$\eta^3 + \chi(\zeta^6 + b\zeta^3 - 1) = 0, \quad (1.2)$$

где b – некоторый действительный параметр. Такое упрощение позволяет свести к двум число необходимых для вычислений гипергеометрических интегралов. Примечательно, что требуемые для конструкции соотношения между этими интегралами являются тождествами Рамануджана, доказанными только недавно. Будем называть кривые вида (1.2) кривыми *симметричного монополя* (хотя они могут и не удовлетворять всем условиям несингулярности Хитчина). Кривая тетраэдрально симметричного монополя заряда три имеет именно такой вид.

Кривая (1.2) накрывает гиперэллиптическую кривую рода два и две эллиптические кривые. В работе обсуждаются эти накрытия. Используя теорию редукции Вейерштрасса–Пуанкаре, мы выражаем тета-функции таких симметричных монополей через эллиптические функции, получая тем самым в замкнутом виде окончательное выражение. Наконец, в § 6 рассматривается кривая (1.2), ассоциированная с тетраэдрально симметричным 3-монополем, для которого упомянутый параметр $b = 5\sqrt{2}$. Эта кривая рода четыре накрывает четыре эллиптических кривых и все матричные элементы матрицы периодов оказываются выраженными через эллиптические модули. Аналитические средства, используемые для анализа, включают в себя формулы типа Томэ, теорию редукции Вейерштрасса–Пуанкаре, гипергеометрические функции и высшие гипергеометрические соотношения Гурса. В заключении (в § 7) выделяются основные результаты. Настоящая работа является версией препринта [11], в котором сделаны небольшие исправления.

§ 2. Спектральная кривая монополя

В этом параграфе исследуются трансцендентные условия, налагаемые на спектральную кривую в соответствии с конструкцией Хитчина. Далее по кривой строятся объекты, необходимые для конструкции Эрколани–Синха – периоды некоторых мероморфных интегралов, затем эти результаты развиваются далее.

2.1. Данные Хитчина. Используя метод твисторов, Хитчин показал в [4], что каждый статический SU(2)-Янг–Миллс–Хиггс-монополь с магнитным зарядом n в BPS-пределе эквивалентен спектральной кривой специального вида. Если ζ – неоднородная координата на римановой сфере и (ζ, η) – стандартные координаты на $\mathbb{TP}^1$ (определяемые как $(\zeta, \eta) \rightarrow \eta \frac{d}{d\zeta}$), то спектральная кривая

является алгебраической кривой $\mathcal{C} \subset \mathbb{TP}^1$ следующего вида

$$P(\eta, \zeta) = \eta^n + \eta^{n-1}a_1(\zeta) + \cdots + \eta^r a_{n-r}(\zeta) + \cdots + \eta a_{n-1}(\zeta) + a_n(\zeta) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $a_r(\zeta)$, $1 \leq r \leq n$, – полином по ζ максимальной степени $2r$.

Данные Хитчина накладывают ограничения на кривую $\mathcal{C}$ явно в виде условий на полином $P(\eta, \zeta)$ и неявно в виде условий на поведение некоторых линейных расслоений над $\mathcal{C}$. Введем однородные координаты $[\zeta_0, \zeta_1]$ в пространстве $\mathbb{P}^1$ и рассмотрим его стандартное накрытие открытыми множествами $U_0 = \{[\zeta_0, \zeta_1] \mid \zeta_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[\zeta_0, \zeta_1] \mid \zeta_1 \neq 0\}$, где $\zeta = \zeta_1/\zeta_0$ – неоднородная координата на U_0 . Обозначим через $\widehat{U}_{0,1}$ прообразы этих множеств при отображении проектирования $\pi: \mathbb{TP}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть L^λ обозначает голоморфное линейное расслоение на $\mathbb{TP}^1$, определяемое функцией перехода $g_{01} = \exp(-\lambda\eta/\zeta)$ на $\widehat{U}_0 \cap \widehat{U}_1$. Аналогичным образом определим $L^\lambda(m) \equiv L^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}(m)$ посредством функции перехода $g_{01} = \zeta^m \exp(-\lambda\eta/\zeta)$. Голоморфные сечения таких линейных расслоений являются голоморфными функциями f_α на $\widehat{U}_\alpha$, удовлетворяющими соотношению $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$. Таким же образом обозначим линейные расслоения на $\mathcal{C}$, где голоморфные функции f_α определены на $\mathcal{C} \cap \widehat{U}_\alpha$.

Условия Хитчина накладывают на кривую следующие ограничения:

H1) условие вещественности

$$a_r(\zeta) = (-1)^r \zeta^{2r} \overline{a_r\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}; \quad (2.2)$$

H2) L^2 тривиально на $\mathcal{C}$ и $L(n-1)$ вещественно;

H3) $H^0(\mathcal{C}, L^\lambda(n-2)) = 0$ при $\lambda \in (0, 2)$.

Условие вещественности означает, что кривая $\mathcal{C}$ является вещественной по отношению к стандартной вещественной структуре τ на $\mathbb{TP}^1$:

$$\tau: (\zeta, \eta) \mapsto \left(-\frac{1}{\bar{\zeta}}, -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2}\right). \quad (2.3)$$

Структура τ является анти-голоморфной инволюцией, определяемой обращением ориентации прямых линий в $\mathbb{R}^3$. Следствием условия вещественности является следующая параметризация полиномов $a_r(\zeta)$:

$$a_r(\zeta) = \sum_{k=0}^{2r} a_{rk} \zeta^k = \chi_r \left[\prod_{l=1}^r \left(\frac{\bar{\alpha}_l}{\alpha_l} \right)^{1/2} \right] \prod_{k=1}^r (\zeta - \alpha_k) \left(\zeta + \frac{1}{\bar{\alpha}_k} \right), \quad \alpha_r \in \mathbb{C}, \quad \chi_r \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Таким образом, каждый полином $a_r(\zeta)$ содержит $2r+1$ действительных параметров. Очевидно, что условие вещественности может быть легко выполнено. Однако остающиеся два условия являются трансцендентными.

Тривиальность L^2 на $\mathcal{C}$ означает, что существует нигде не обращающееся в нуль голоморфное сечение. Это означает, что на каждом из введенных выше открытых множествах $\widehat{U}_{0,1}$ существует нигде не обращающаяся в нуль голоморфная функция, а именно, f_0 на $\widehat{U}_0 \cap \mathcal{C}$ и f_1 на $\widehat{U}_1 \cap \mathcal{C}$, причем на пересечении

$\widehat{U}_0 \cap \widehat{U}_1 \cap \mathcal{C}$ выполняется соотношение

$$f_0(\eta, \zeta) = \exp \left\{ -2 \frac{\eta}{\zeta} \right\} f_1(\eta, \zeta). \quad (2.5)$$

Эрколани и Синха, используя эти утверждения, получили альтернативное описание условия тривиальности, к которому мы обратимся далее.

Спектральная кривая общего n -монополя неприводима и имеет род

$$g_{\mathcal{C}} = (n - 1)^2.$$

Он вычисляется следующим образом. Пусть ζ фиксирован. Тогда n -й корень уравнения $P(\eta, \zeta) = 0$ порождает n -листное накрытие сферы Римана. Накрытие имеет следующие точки ветвления:

$$0 = \text{результант}_{\eta}(P(\eta, \zeta), \partial_{\eta} P(\eta, \zeta)) = \prod_{i=1}^n \partial_{\eta} P(\eta_i, \zeta), \quad \text{где } P(\eta_i, \zeta) = 0.$$

Степень этого выражения по ζ равна $n \deg a_{n-1} = n(2n - 2)$ и по теореме Римана–Гурвица получаем

$$2g_{\mathcal{C}} - 2 = 2n(g_{\mathbb{P}^1} - 1) + n(2n - 2) = 2(n - 1)^2 - 2,$$

откуда и следует требуемая формула.

Спектральная кривая монополя при $n = 1$ определяется по формуле

$$\eta = (x_1 + ix_2) - 2x_3\zeta - (x_1 - ix_2)\zeta^2,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольная точка в $\mathbb{R}^3$. В общем случае три независимых действительных коэффициента $a_1(\zeta)$ могут быть интерпретированы как центр монополя в $\mathbb{R}^3$. Строго центрированные монополи имеют начало координат в центре и, следовательно, $a_1(\zeta) = 0$. Группа $SO(3)$ вращений в $\mathbb{R}^3$ индуцирует действие в $\mathbb{TP}^1$ посредством PSU(2)-преобразований. Если

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in \text{PSU}(2), \quad |p|^2 + |q|^2 = 1,$$

то преобразование на $\mathbb{TP}^1$, определяемое как

$$\zeta \rightarrow \frac{\bar{p}\zeta - \bar{q}}{q\zeta + p}, \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{(q\zeta + p)^2},$$

соответствует повороту на угол θ вокруг $\mathbf{n} \in S^2$, где

$$n_1 \sin \frac{\theta}{2} = \text{Im } q, \quad n_2 \sin \frac{\theta}{2} = -\text{Re } q, \quad n_3 \sin \frac{\theta}{2} = -\text{Im } p, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \text{Re } p;$$

здесь η – преобразование, полученное дифференцированием ζ -преобразования. $SO(3)$ -действие коммутирует с действительной структурой τ . Хотя общее преобразование Мёбиуса не меняет матрицы периодов кривой $\mathcal{C}$, только подгруппа

$\text{PSU}(2) < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ сохраняет желаемое свойство вещественности. Имеем

$$\begin{aligned}\alpha_k &\rightarrow \tilde{\alpha}_k \equiv \frac{p\alpha_k + \bar{q}}{\bar{p} - \alpha_k q}, \\ \chi_r &\rightarrow \tilde{\chi}_r \equiv \chi_r \prod_{k=1}^r \left[\frac{(\bar{p} - \alpha_k q)(p - \bar{\alpha}_k \bar{q})(\bar{\alpha}_k \bar{p} + q)(\alpha_k p + \bar{q})}{\alpha_k \bar{\alpha}_k} \right]^{1/2}, \\ a_r &\rightarrow \frac{\tilde{a}_r}{(q\zeta + p)^{2r}} \equiv \frac{\tilde{\chi}_r}{(q\zeta + p)^{2r}} \left[\prod_{l=1}^r \left(\frac{\tilde{\alpha}_l}{\tilde{\alpha}_l} \right)^{1/2} \right] \prod_{k=1}^r (\zeta - \tilde{\alpha}_k) \left(\zeta + \frac{1}{\tilde{\alpha}_k} \right).\end{aligned}$$

В частности, вид кривой остается неизменным, т.е. если $a_r = 0$, то $\tilde{a}_r = 0$. Стоит подчеркнуть, что условия имеют внешний характер (в них зашифрован пространственно-временной аспект проблемы), в то время как внутренние свойства кривой остаются инвариантными относительно действия бирациональных преобразований полной группы Мёбиуса. Такие внешние аспекты не возникают в хорошо разработанной теории интегрируемых систем.

2.2. Величины, связанные с кривой и необходимые для реконструкции. Для того чтобы осуществить реконструкцию данных Нама, ассоциированных с кривой $\mathcal{C}$, и затем построить монополь, требуется вычислить ряд величин, связанных с $\mathcal{C}$. Мы опишем такие вычисления, следуя работе Эрколани–Синха, где была найдена альтернативная характеристика трансцендентного условия Хитчина H2).

Спектральная кривая (2.1) является n -листным накрытием над $\mathbb{P}^1$. Производя, если необходимо, вращение, можно всегда получить n различных преобразов $\{\infty_j\}$ точки $\zeta = \infty$ и, следовательно, в окрестности $\zeta = \infty$ имеем

$$\frac{P(\eta, \zeta)}{\zeta^{2n}} \sim \prod_{j=1}^n \left(\frac{\eta}{\zeta^2} - \rho_j \right), \quad (2.6)$$

где величины ρ_j также предполагаются различными. Отсюда следует, что в окрестности ∞_j получаем

$$\frac{\eta}{\zeta} \sim \rho_j \zeta, \quad d\left(\frac{\eta}{\zeta}\right) \sim \rho_j d\zeta = \left(-\frac{\rho_j}{t^2} + O(1) \right) dt, \quad (2.7)$$

где $t = 1/\zeta$ – локальная координата. Аналогично, из (2.4) при $\zeta = 0$ находим

$$P(\eta, 0) = \prod_{j=1}^n (\eta + \bar{\rho}_j). \quad (2.8)$$

В силу (2.7) существует дифференциал γ_∞ , являющийся суммой дифференциалов второго типа, такой, что

$$\gamma_\infty(P) = \left(\frac{\rho_l}{t^2} + O(1) \right) dt, \quad P \rightarrow \infty_l, \quad (2.9)$$

$$\oint_{a_k} \gamma_\infty(P) = 0, \quad k = 1, \dots, g. \quad (2.10)$$

Здесь циклы $\{\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k\}$ образуют канонический базис гомологий кривой $\mathcal{C}$. Согласно теории интегрируемых систем этот дифференциал порождает поток на якобиане, соответствующий эволюции по времени. Направление потока определяется как

$$U_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_k} \gamma_\infty(P). \quad (2.11)$$

Для нашего построения не нужен явный вид дифференциала $\gamma_\infty(P)$, нужны только (2.11) и константа

$$\nu_j = \lim_{P \rightarrow \infty_j} \left[\int_{P_0}^P \gamma_\infty(P) + \frac{\eta}{\zeta} \right]. \quad (2.12)$$

На этом этапе мы еще не наложили на кривую $\mathcal{C}$ условия Хитчина Н2), Н3). Эрколани и Синха нашли следующую связь между (2.11) и Н2). Рассмотрим логарифмическую производную от (2.5), представляющую условие тривальности L^2 на $\mathcal{C}$:

$$d \log f_0 = d \left(-2 \frac{\eta}{\zeta} \right) + d \log f_1. \quad (2.13)$$

(Хуртубиз в [12] рассмотрел такую же конструкцию в случае $n = 2$.) Для того чтобы устранить существенные особенности в $f_{0,1}$, получим из (2.6) и (2.8) следующие соотношения:

$$d \log f_1(P) = \left(-\frac{2\eta_j(0)}{\zeta^2} + O(1) \right) d\zeta = \left(\frac{2\bar{\rho}_j(0)}{\zeta^2} + O(1) \right) d\zeta, \quad P \rightarrow 0_j, \quad (2.14)$$

$$d \log f_0(P) = \left(\frac{2\rho_j}{t^2} + O(1) \right) dt, \quad P \rightarrow \infty_j. \quad (2.15)$$

Так как f_0 является функцией на $U_0 = \mathcal{C} \setminus \{P_j\}_{j=1}^n$, то

$$\exp \oint_\lambda d \log f_0 = 1 \quad (2.16)$$

для всех циклов λ из $H_1(\mathbb{Z}, \mathcal{C})$. Аналогичный результат справедлив и для f_1 . Используя равенство (2.13), определим

$$m_j = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{a}_j} d \log f_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{a}_j} d \log f_1, \quad (2.17)$$

$$n_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_j} d \log f_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_j} d \log f_1. \quad (2.18)$$

Далее, учитывая (2.9) и (2.15), запишем

$$\gamma_\infty(P) = \frac{1}{2} d \log f_0(P) + i\pi \sum_{j=1}^g m_j v_j(P), \quad (2.19)$$

где v_j – канонические $\mathbf{a}$ -нормированные голоморфные дифференциалы. Интегрирование γ_∞ по $\mathbf{b}$ -циклам приводит к условиям Эрколани–Синха:

$$\oint_{\mathbf{b}_k} \gamma_\infty = i\pi n_k + i\pi \sum_{l=1}^g \tau_{kl} m_l,$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями тривиальности L^2 при ограничении на $\mathcal{C}$. Таким образом,

$$U = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\tau m. \quad (2.20)$$

Следовательно, вектор $2U \in \Lambda$ принадлежит решетке периодов $\mathcal{C}$ и поэтому “обмоточный вектор” U является полупериодом. Заметим, что $U \neq 0$, так как в противном случае дифференциал γ_∞ был бы голоморфным, что противоречит нашему выбору.

Используя билинейные соотношения, находим, что для каждого голоморфного дифференциала Ω выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^g U_l \oint_{\mathbf{a}_l} \Omega &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^g \left(\oint_{\mathbf{a}_l} \Omega \oint_{\mathbf{b}_l} \gamma_\infty(P) - \oint_{\mathbf{b}_l} \Omega \oint_{\mathbf{a}_l} \gamma_\infty(P) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega. \end{aligned}$$

Хоугтон, Мантон и Ромао [10] использовали это выражения для получения дуальной формы условий Эрколани–Синха (2.20). Определим 1-цикл так:

$$\mathbf{c} = \sum_{l=1}^g (n_l \mathbf{a}_l + m_l \mathbf{b}_l). \quad (2.21)$$

Тогда (напомним, что $\tau_{lk} \oint_{\mathbf{a}_k} \Omega = \oint_{\mathbf{b}_l} \Omega$, где τ – это матрица периодов) мы получим следующие эквивалентные условия:

$$\oint_{\mathbf{c}} \Omega = 2 \sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega. \quad (2.22)$$

Преобразуем выражение в правой части этого уравнения. Произвольный голоморфный дифференциал Ω можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\beta_0 \eta^{n-2} + \beta_1(\zeta) \eta^{n-3} + \dots + \beta_{n-2}(\zeta)}{\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta}} d\zeta \\ &= \frac{\beta_0 (\eta/\zeta^2)^{n-2} + \tilde{\beta}_1(1/\zeta) (\eta/\zeta^2)^{n-3} + \dots + \tilde{\beta}_{n-2}(1/\zeta)}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\eta/\zeta^2 - \mu_j(1/\zeta))} \frac{d\zeta}{\zeta^2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\beta_j(\zeta) \equiv \zeta^{2j} \tilde{\beta}_j(1/\zeta)$ – это полином не более чем $(2j)$ -ой степени по ζ . Поэтому, используя (2.6), получаем

$$\sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_0 \rho_i^{n-1} + \tilde{\beta}_1(0) \rho_i^{n-2} + \dots + \tilde{\beta}_{n-2}(0) \rho_i}{\prod_{j \neq i}^n (\rho_i - \rho_j)} = -\beta_0,$$

применив при этом интерполяцию Лагранжа.

Таким образом, условие Н2) может быть представлено в следующих эквивалентных формах.

ЛЕММА 2.1 (условия Эрколани–Синха). Следующие условия эквивалентны:

- 1) L^2 тривиально на $\mathcal{C}$;
- 2) существует такой 1-цикл $\mathbf{c} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}$, что для любого голоморфного дифференциала Ω , определенного в (2.23), выполнено равенство

$$\oint_{\mathbf{c}} \Omega = -2\beta_0, \quad (2.24)$$

- 3) $2\mathbf{U} \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\mathbf{b}_1} \gamma_\infty, \dots, \oint_{\mathbf{b}_g} \gamma_\infty \right)^T = \frac{1}{2} \mathbf{n} + \frac{1}{2} \tau \mathbf{m}. \quad (2.25)$$

Здесь 2) – это дуальная форма условий Эрколани–Синха, данная Хоугтоном, Мантоном и Ромао [10]. Их 1-цикл обобщает подобное условие, приведенное в работе [13]. Единственное различие между 3) и теоремой П.2 работы Эрколани–Синха состоит в приведенном там выражении для $\mathbf{U}$, которое представляется неверным. Мы также заметим, что $\mathbf{U} \neq 0$.

Условия Эрколани–Синха накладывают g условий на матрицу периодов рассматриваемой кривой. Мы также видели, что каждый из коэффициентов $a_r(\zeta)$ содержит $2r + 1$ действительных параметров, поэтому пространство модулей заряда n централизованного SU(2)-монополя имеет

$$\sum_{r=2}^n (2r + 1) - g = (n + 3)(n - 1) - (n - 1)^2 = 4(n - 1)$$

действительных измерений.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (Хоугтон, Мантон, Ромао; 2000). Для 1-цикла, появляющегося в работе Хоугтона, Мантона и Ромао, справедливо следующее равенство: $\tau_* \mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Этот результат подтверждает замечание Хитчина в [4; с. 164] о том, что тривиальность L^2 вместе с антиголоморфным изоморфизмом $L \cong L^*$ порождает мнимую точку решетки по отношению к $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \subset H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$.

Последнее условие Хитчина, а также различные величины, необходимые для нашего построения, содержатся в выражениях

$$\begin{aligned} \Psi_j(z, P) = g_j(P) \frac{\theta_{\mathbf{m}/2, \mathbf{n}/2}(\varphi(P) - \varphi(\infty_j) + z\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}}) \theta_{\mathbf{m}/2, \mathbf{n}/2}(-\widetilde{\mathbf{K}})}{\theta_{\mathbf{m}/2, \mathbf{n}/2}(\varphi(P) - \varphi(\infty_j) - \widetilde{\mathbf{K}}) \theta_{\mathbf{m}/2, \mathbf{n}/2}(z\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}})} \\ \times \exp \left(z \int_{P_0}^P \gamma_\infty - z\nu_j \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Поясним эту формулу: $\theta_{\mathbf{m}/2, \mathbf{n}/2}$ – тета-функции с характеристиками, φ – отображение Абеля, $z \in (-1, 1)$, $P \in \mathcal{C}$. (Наши определения тета-функций содержатся в приложении А). Вектор $\widetilde{\mathbf{K}}$ играет специальную роль в конструкции монополя. Он определяется выражением

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \varphi \left((n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right),$$

где $\mathbf{K}$ – это вектор римановых констант (связанные с этим определения также даны в приложении А). Кроме того, справедливы следующие утверждения:

- 1) $\widetilde{\mathbf{K}}$ не зависит от выбора базисной точки отображения Абеля;
- 2) $\theta(\widetilde{\mathbf{K}}) = 0$;
- 3) $2\widetilde{\mathbf{K}} \in \Lambda$;
- 4) для $n \geq 3$ имеем $\widetilde{\mathbf{K}} \in \Theta_{\text{singular}}$.

Точка $\widetilde{\mathbf{K}}$ – это выделенная точка, которую Хитчин использовал для того, чтобы установить тождество между линейными расслоениями степени $g - 1$ и $\text{Jac}(\mathcal{C})$. Доказательство этих свойств, а также следующей леммы, налагающей дальнейшие ограничения на вектор Эрколани–Синха, даны в [7]:

ЛЕММА 2.3. *Вектор $\mathbf{U} \pm \widetilde{\mathbf{K}}$ является несингулярной четной тета-характеристикой.*

Выражения (2.26) являются компонентами функции Бейкера–Ахиезера, это сечения линейного расслоения $L^{z+1}(n-1)$. Функции $g_j(P)$, которые мы оставили неопределенными, образуют базис голоморфных сечений в $L(n-1)$. (Они могут быть явно выражены через тета-функции и введенные выше величины, однако для наших целей эти выражения не потребуются.) Теперь полное условие НЗ) формулируются в следующем виде:

$$L^{z+1}(n-2) \in \text{Jac}^{g_{\mathcal{C}}-1}(\mathcal{C}) \setminus \Theta \quad \text{при } z \in (-1, 1).$$

Эти условия могут быть проверены с помощью тета-дивизора Θ . Точная последовательность $\mathcal{O}(L^s) \hookrightarrow \mathcal{O}(L^s(n-2))$, полученная умножением на сечение $\pi^*\mathcal{O}(n-2)|_{\mathcal{C}}$, дает, однако, следующее необходимое условие:

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L^s(n-2))) = 0 \implies H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L^s)) = 0, \quad s \in (0, 2). \quad (2.27)$$

Если L^s тривиальны, то мы получаем сечение, противоречащее результату зануления. Такой же анализ тривиальности L^2 показывает, что если L^s тривиальны, то тогда $s\mathbf{U} \in \Lambda$. Следовательно, (2.27) означает, что $s\mathbf{U} \notin \Lambda$ при $s \in (0, 2)$. Значит, $2\mathbf{U}$ является примитивным вектором в Λ и мы получаем последнюю часть условий Эрколани–Синха:

$$2\mathbf{U} \text{ – примитивный вектор в } \Lambda \iff \mathbf{c} \text{ – примитивен в } H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}). \quad (2.28)$$

Условия Эрколани–Синха (2.25) или (2.24) накладывают g трансцендентных ограничений на $\mathcal{C}$ и основная трудность в реализации всей конструкции даже в простейших случаях состоит в разрешении этих условий. Случай $n = 2$ уже исследовался рядом авторов и в оставшейся части работы мы выходим за рамки этих исследований, рассматривая случай $n = 3$. Однако, прежде, чем приступить к изучению этого случая, мы запишем оставшиеся выражения, необходимые для восстановления интегрируемой системы и содержащиеся в матрице $Q_0(z)$, использованной Эрколани и Синха для реконструкции данных Нама. В работе [7] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. Матрица $Q_0(z)$ (имеющая полюсы первого порядка при $z = \pm 1$) может быть представлена в виде

$$Q_0(z)_{jl} = \epsilon_{jl} \frac{\rho_j - \rho_l}{\mathcal{E}(\infty_j, \infty_l)} \exp\{i\pi \tilde{\mathbf{q}} \cdot (\varphi(\infty_l) - \varphi(\infty_j))\} \times \frac{\theta(\varphi(\infty_l) - \varphi(\infty_j) + [z + 1]\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}})}{\theta([z + 1]\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}})} e^{z(\nu_l - \nu_j)}, \quad (2.29)$$

где $E(P, Q) = \mathcal{E}(P, Q) / \sqrt{dx(P) dx(Q)}$ – прим-форма Шоттки–Клейна, $\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\tau\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}^g$, – несингулярная четная тета-характеристика и $\epsilon_{jl} = \epsilon_{lj} = \pm 1$ определяются при $j < l$ как $\epsilon_{jl} = \epsilon_{j,j+1}\epsilon_{j+1,j+2} \cdots \epsilon_{l-1,l}$, $n - 1$ знаков $\epsilon_{j,j+1} = \pm 1$ – произвольны.

Заметим, что ранее подобная формула была получена Дубровиным в [14] при выводе тета-функционального решения уравнений Эйлера, описывающих динамику n -мерного твердого тела. (Кривая Дубровина отличалась от исследуемой здесь и была свободна от трансцендентных условий Хитчина.) Эта теорема содержит необходимые выражения для реконструкции данных Нама и монополей по подходящей кривой. Вся конструкция основана на использовании тета-функций, построенных по спектральной кривой. Таким образом, необходимо

- (1) построить матрицу периодов τ , ассоциированную с $\mathcal{C}$;
- (2) определить полупериод $\widetilde{\mathbf{K}}$;
- (3) определить вектор Эрколани–Синха $\mathbf{U}$;
- (4) для нормированных голоморфных дифференциалов $\mathbf{v}$ вычислить

$$\int_{\infty_i}^{\infty_j} \mathbf{v} = \varphi(\infty_j) - \varphi(\infty_i);$$

- (5) определить $E(\infty_j, \infty_l)$.
- (6) определить $\gamma_\infty(P)$ и

$$\nu_i = \lim_{P \rightarrow \infty_i} \left(\int_{P_0}^P \gamma_\infty(P') + \frac{\eta}{\zeta}(P) \right).$$

§ 3. Тригональная кривая

Определим класс кривых, который будет использоваться далее. А именно,

$$\eta^3 + \widehat{\chi}(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3)(\zeta - \lambda_4)(\zeta - \lambda_5)(\zeta - \lambda_6) = 0. \quad (3.1)$$

Выбранные подходящим образом λ_i соответствуют¹ центрированному монополю заряда три, ограниченному условием $a_2(\zeta) = 0$. Таким образом, восьмимерное пространство модулей центрированных монополей сводится к трехмерному. Асимптотическое поведение кривой приводит к равенствам

$$\rho_k = -\widehat{\chi}^{1/3} e^{2ik\pi/3}. \quad (3.2)$$

¹Здесь $\{\lambda_i\}_{i=1}^6 = \{\alpha_j, -1/\bar{\alpha}_j\}_{j=1}^3$ и $\widehat{\chi} = \chi_3[\prod_{l=1}^3 (\bar{\alpha}_l/\alpha_l)^{1/2}]$.

Для упрощения обозначений будем изучать (3.1) в виде

$$w^3 = \prod_{i=1}^6 (z - \lambda_i), \quad w = -\widehat{\chi}^{-1/3} \eta, \quad z = \zeta. \quad (3.3)$$

Пространство модулей такой кривой с отмеченными гомологиями может быть представлено как конфигурационное пространство шести различных точек в $\mathbb{P}^1$. Этот класс кривых изучался Пикаром [15], Веллштейном [8], Шига [16] и Мацумото [9]. Мы напомним некоторые их результаты. Для того чтобы конкретизировать тета-функции, возникающие в конструкции Эрколани–Синха, необходимо определить матрицу периодов кривой, вектор римановых констант и описать специальные дивизоры. Мы дадим явное описание этих объектов, начав с выбора базиса гомологий.

3.1. Кривая и гомологии. Пусть $\mathcal{C}$ – кривая (3.3) рода четыре, где шесть точек $\lambda_i \in \mathbb{C}$ предполагаются различными и упорядоченными по правилу

$$\arg(\lambda_1) < \arg(\lambda_2) < \dots < \arg(\lambda_6).$$

Пусть $\mathcal{R}$ является автоморфизмом $\mathcal{C}$, определенным как

$$\mathcal{R}: (z, w) \rightarrow (z, \rho w), \quad \rho = \exp\left\{\frac{2i\pi}{3}\right\}. \quad (3.4)$$

Билинейное преобразование $(z, w) \leftrightarrow (Z, W)$,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(z - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(z - \lambda_1)}, \\ W &= -\frac{w}{(z - \lambda_1)^2} \left(\prod_{k=2}^6 (\lambda_1 - \lambda_k) \right)^{-1/3} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_4} \right)^{5/3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

и ему обратное

$$\begin{aligned} z &= \frac{Z\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_4(\lambda_1 - \lambda_2)}{Z(\lambda_2 - \lambda_4) - (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ w &= -\frac{W}{(Z(\lambda_2 - \lambda_4) - (\lambda_2 - \lambda_1))^2} \left(\prod_{k=2}^6 (\lambda_1 - \lambda_k) \right)^{1/3} \\ &\quad \times (\lambda_1 - \lambda_2)^{1/3} (\lambda_1 - \lambda_4)^{1/3} (\lambda_2 - \lambda_4)^{5/3} \end{aligned} \quad (3.6)$$

приводят к следующей нормализации кривой (3.14):

$$W^3 = Z(Z - 1)(Z - \Lambda_1)(Z - \Lambda_2)(Z - \Lambda_3), \quad (3.7)$$

где

$$\Lambda_i = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4} \frac{\lambda_{2+j(i)} - \lambda_4}{\lambda_{2+j(i)} - \lambda_1}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j(1) = 1, \quad j(2) = 3, \quad j(3) = 4. \quad (3.8)$$

 Рис. 1. Базис гомологий: $\mathbf{a}$ -циклы

Примем следующее лексикографическое упорядочение независимых голоморфных дифференциалов на $\mathcal{C}$,

$$du_1 = \frac{dz}{w}, \quad du_2 = \frac{dz}{w^2}, \quad du_3 = \frac{zdz}{w^2}, \quad du_4 = \frac{z^2dz}{w^2}. \quad (3.9)$$

Для того чтобы построить базис $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4)$ в $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$, введем ориентированные пути $\gamma_k(z_i, z_j)$, идущие от $P_i = (z_i, w_i)$ к $P_j = (z_j, w_j)$ на k -ом листе. Определим 1-циклы $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ на $\mathcal{C}$ следующим образом²:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \gamma_2(\lambda_2, \lambda_1), & \mathbf{b}_1 &= \gamma_1(\lambda_2, \lambda_1) + \gamma_3(\lambda_1, \lambda_2), \\ \mathbf{a}_2 &= \gamma_1(\lambda_3, \lambda_4) + \gamma_2(\lambda_4, \lambda_3), & \mathbf{b}_2 &= \gamma_1(\lambda_4, \lambda_3) + \gamma_3(\lambda_3, \lambda_4), \\ \mathbf{a}_3 &= \gamma_1(\lambda_5, \lambda_6) + \gamma_2(\lambda_6, \lambda_5), & \mathbf{b}_3 &= \gamma_1(\lambda_6, \lambda_5) + \gamma_3(\lambda_5, \lambda_6), \\ \mathbf{a}_4 &= \gamma_3(\lambda_1, \lambda_2) + \gamma_1(\lambda_2, \lambda_6) + \gamma_3(\lambda_6, \lambda_5) + \gamma_2(\lambda_5, \lambda_1), \\ \mathbf{b}_4 &= \gamma_2(\lambda_2, \lambda_1) + \gamma_3(\lambda_6, \lambda_2) + \gamma_2(\lambda_5, \lambda_6) + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_5). \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\mathbf{a}$ -циклы базиса гомологий даны на рис. 1, при этом $\mathbf{b}$ -циклы получаются из $\mathbf{a}$ -циклов сдвигом на лист; циклы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ даны на рис. 2. Так как выполняются соотношения дуальности

$$\mathbf{a}_k \circ \mathbf{a}_l = \mathbf{b}_k \circ \mathbf{b}_l = 0, \quad \mathbf{a}_k \circ \mathbf{b}_l = -\mathbf{b}_k \circ \mathbf{a}_l = \delta_{k,l},$$

то циклы $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4)$ образуют симплектический базис в $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$. В введенном базисе гомологий получаем

$$\mathcal{R}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{R}(\mathbf{b}_4) = -\mathbf{a}_4. \quad (3.11)$$

²Этот базис взят из [9]; другой, эквивалентный ему базис можно найти в [8].

Рис. 2. Циклы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$

Так как $(1 + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2)\mathbf{c} = 0$, то для любого цикла $\mathbf{c}$ получаем, в частности, что

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}_i) = -\mathbf{a}_i - \mathcal{R}^2(\mathbf{a}_i) = -\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{R}(\mathbf{a}_4) = -\mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4,$$

что завершает описание действия $\mathcal{R}$ на базис гомологий.

3.2. Риманова матрица периодов. Обозначим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \left(\oint_{\mathbf{a}_1} du_1, \dots, \oint_{\mathbf{a}_4} du_1 \right)^T, \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4)^T = \left(\oint_{\mathbf{a}_1} du_2, \dots, \oint_{\mathbf{a}_4} du_2 \right)^T, \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3, c_4)^T = \left(\oint_{\mathbf{a}_1} du_3, \dots, \oint_{\mathbf{a}_4} du_3 \right)^T, \\ \mathbf{d} &= (d_1, d_2, d_3, d_4)^T = \left(\oint_{\mathbf{a}_1} du_4, \dots, \oint_{\mathbf{a}_4} du_4 \right)^T. \end{aligned}$$

Важным для нас фактом является то, что симметрия (3.4) позволяет связать матрицы $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -периодов. Для любого контура Γ и 1-формы ω справедливо равенство

$$\oint_{\mathcal{R}(\Gamma)} \omega = \oint_{\Gamma} \mathcal{R}^* \omega.$$

Если $(\tilde{z}, \tilde{w}) = (z, \rho w) = R(z, w)$, то, например, соотношения

$$\mathcal{R}^*(du_2) = \mathcal{R}^*\left(\frac{d\tilde{z}}{\tilde{w}^2}\right) = \frac{dz}{\tilde{w}^2} = \frac{dz}{\rho^2 w^2} = \rho \frac{dz}{w^2}$$

приводят к равенствам

$$\oint_{\mathbf{a}_1} du_2 = \oint_{\mathcal{R}(\mathbf{b}_1)} du_2 = \oint_{\mathbf{b}_1} \mathcal{R}^*(du_2) = \oint_{\mathbf{b}_1} \frac{dz}{\rho^2 w^2} = \rho \oint_{\mathbf{b}_1} du_2.$$

Поэтому получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ki}) &= \left(\oint_{\mathbf{a}_k} du_i \right)_{i,k=1,\dots,4} = (\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}), \\ \mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ki}) &= \left(\oint_{\mathbf{b}_k} du_i \right)_{i,k=1,\dots,4} = (\rho H \mathbf{x}, \rho^2 H \mathbf{b}, \rho^2 H \mathbf{c}, \rho^2 H \mathbf{d}) = H \mathcal{A} \Lambda, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $H = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ и $\Lambda = \text{diag}(\rho, \rho^2, \rho^2, \rho^2)$. Эти соотношения между $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -периодами приводят к различным упрощениям в соотношениях Римана,

$$\sum_i \left(\oint_{\mathbf{a}_i} du_k \oint_{\mathbf{b}_i} du_l - \oint_{\mathbf{b}_i} du_k \oint_{\mathbf{a}_i} du_l \right) = 0.$$

Для $k = 1$ и $l = 2, 3, 4$ получаем соответственно равенства

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{b} = \mathbf{x}^T H \mathbf{c} = \mathbf{x}^T H \mathbf{d} = 0, \quad (3.13)$$

используемые далее в статье.

По данным $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы построим риманову матрицу периодов, принадлежащую верхнему полупространству Зигеля $\mathbb{S}^4$ степени четыре. Если мы работаем с канонически $\mathbf{a}$ -нормированными дифференциалами, то матрица периодов (при наших соглашениях) есть $\tau_{\mathbf{a}} = \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1}$, в то время как при $\mathbf{b}$ -нормированных дифференциалах $\tau_{\mathbf{b}} = \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1}$. Очевидно, $\tau_{\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{a}}^{-1}$ и мы можем просто обозначить матрицу периодов через τ , если тип нормализации несущественен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 (Веллштейн, 1899; Мацумото, 2000). Пусть $\mathcal{C}$ – трехлистная накрывающая над $\mathbb{P}^1$ с шестью различными точками ветвления $\lambda_1, \dots, \lambda_6$,

$$w^3 = \prod_{i=1}^6 (z - \lambda_i). \quad (3.14)$$

Тогда риманова матрица периодов имеет вид

$$\tau_{\mathbf{b}} = \rho \left(H - (1 - \rho) \frac{\mathbf{x} \mathbf{x}^T}{\mathbf{x}^T H \mathbf{x}} \right), \quad (3.15)$$

где $H = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Мнимая часть $\tau_{\mathbf{b}}$ положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\overline{\mathbf{x}}^T H \mathbf{x} < 0. \quad (3.16)$$

Доказательства Веллштейна и Мацумото формулы (3.15) в общих чертах сходны, но мы здесь дадим другой вариант доказательства, поскольку в дальнейшем нам понадобится равенство, используемое в этом варианте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.13) следует, что

$$\mathcal{A}^T H \mathbf{x} = (\Delta, 0, 0, 0)^T, \quad \Delta := \mathbf{x}^T H \mathbf{x}.$$

Так как $\mathcal{A}$ несингулярна, то $\mathbf{x} \neq 0$ и $\Delta \neq 0$. Далее, $H \mathbf{x} = \mathcal{A}^{T^{-1}}(\Delta, 0, 0, 0)^T$, что дает равенство

$$(H \mathbf{x})_\mu = \mathcal{A}_{1\mu}^{-1} \Delta. \quad (3.17)$$

Из (3.12) следует, что

$$\mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} = \rho^2 H + (\rho - \rho^2) H(\mathbf{x}, 0, 0, 0) \mathcal{A}^{-1}.$$

Из (3.17) получаем

$$H(\mathbf{x}, 0, 0, 0) \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} H \mathbf{x} \mathbf{x}^T H$$

и поэтому

$$\mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} = \rho^2 H + \frac{(\rho - \rho^2)}{\Delta} H \mathbf{x} \mathbf{x}^T H.$$

Наконец, легко видеть, что

$$\left[\rho^2 H + \frac{(\rho - \rho^2)}{\Delta} H \mathbf{x} \mathbf{x}^T H \right] \left[\rho H - \frac{(\rho - \rho^2)}{\Delta} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \right] = 1,$$

откуда и следует результат (3.15) для $\tau_b = \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1}$. Остающиеся условия возникают из требования положительной определенности $\text{Im } \tau$. Заметим, что в силу (3.16) выполнено $\mathbf{x} \neq 0$ и $\Delta \neq 0$.

Точки ветвления могут быть выражены через θ -константы. Следуя Мацумото [9], введем набор характеристик

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = -\mathbf{a}H, \quad a_i \in \left\{ \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6} \right\} \quad (3.18)$$

и обозначим $\theta_{\mathbf{a}, -H\mathbf{b}}(\tau) = \theta\{6\mathbf{a}\}(\tau)$ (см. приложение А для наших соглашений относительно тета-функций). Характеристики (3.18) классифицированы в [9] представлениями группы моноклассификации. Далее, точки ветвления определяются матрицей периодов следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 (Диез, 1991, [17]; Мацумото, 2000). Пусть τ_b – матрица периодов (3.7) определенная в предложении 3.1. Тогда

$$\Lambda_1 = \left(\frac{\theta\{3, 3, 3, 5\}}{\theta\{1, 1, 3, 3\}} \right)^3, \quad \Lambda_2 = - \left(\frac{\theta\{1, 5, 3, 3\}}{\theta\{1, 1, 5, 5\}} \right)^3, \quad \Lambda_3 = - \left(\frac{\theta\{1, 1, 3, 3\}}{\theta\{5, 1, 1, 1\}} \right)^3. \quad (3.19)$$

Эти результаты имеют следующее значение для нашего построения монополей. Прежде всего заметим, что матрица периодов инвариантна относительно $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^3$. Поэтому рассматриваемой поверхности можно сопоставить точку $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3 \mid \mathbf{x}^T H \mathbf{x} < 0\} \subset \mathbb{P}^3$ и из этой точки можно получить нормированную кривую (3.7). Известно, что таким образом кривые с различными точками ветвления порождают плотное открытое

подмножество $\mathbb{B}^3$, дополнением которого являются образы кривых с кратными корнями. Соответственно, выбрав точку $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{B}^3$, можно построить матрицу периодов и соответствующую нормированную кривую.

Заметим, что если $du = (du_1, \dots, du_4)$, то

$$\tau^*(du) = \overline{du} \cdot T, \quad T = \begin{pmatrix} -\varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa^2 \\ 0 & 0 & -\varkappa^2 & 0 \\ 0 & \varkappa^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \frac{\widehat{\chi}^{1/3}}{\overline{\widehat{\chi}^{1/3}}},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\tau_*\mathfrak{c}} du &= \oint_{\mathfrak{c}} \tau^*(du) = \oint_{\mathfrak{c}} \overline{du} \cdot T = \overline{\left(\oint_{\mathfrak{c}} du \right)} \cdot T = \overline{(6\widehat{\chi}^{1/3} (1 \ 0 \ 0 \ 0))} \cdot T \\ &= -6\widehat{\chi}^{1/3} (1 \ 0 \ 0 \ 0) = \oint_{-\mathfrak{c}} du \end{aligned}$$

и, как вывод из следствия 2.2 Хоугтона, Мантона и Ромао, что $\tau_*\mathfrak{c} = -\mathfrak{c}$. Этому соотношению можно придать и другой вид. Запишем для произвольного цикла

$$\gamma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{p} \ \mathbf{q}) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \tau(\gamma) = (\mathbf{p} \ \mathbf{q}) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство

$$\oint_{\tau(\gamma)} du = \oint_{\gamma} \tau^*(du) = \oint_{\gamma} \overline{du} \cdot T = \overline{\left(\oint_{\gamma} du \right)} \cdot T$$

приводит к уравнению

$$(\mathbf{p} \ \mathbf{q}) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = (\mathbf{p} \ \mathbf{q}) \overline{\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}} \cdot T.$$

Получаем, что матрица $\mathcal{M}$, представляющая инволюцию τ на гомологиях, и вектор Эрколани–Синха удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathcal{M}^2 = \text{Id}, \quad \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}} \cdot T, \quad \mathbf{U} \mathcal{M} = (\mathbf{n} \ \mathbf{m}) \mathcal{M} = -(\mathbf{n} \ \mathbf{m}). \quad (3.20)$$

Вычисление, использующее алгоритм К. Треткова и М. Треткова построения образующих базиса гомологий и соотношений [18], вместе с некоторым аналитическим продолжением путей, ассоциированных выбранным циклам гомологий (с соглашением относительно нумерации листов, как это описано далее в тексте), приводит в случае рассматриваемой кривой к следующей матрице:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{M}$ не является симплектической и удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = -J,$$

где J – стандартная симплектическая форма. (Знак минус появляется в связи с обращением ориентации при анти-голоморфной инволюции.)

3.3. Вектор K и $\int_{\infty_i}^{\infty_j} v$. Мы опишем здесь вектор $\widetilde{K}$ и приведем ряд связанных с ним результатов, включая результаты о величине $\varphi(\infty_i) - \varphi(\infty_j)$.

Прежде всего напомним элементарные факты относительно рассматриваемой кривой. Для простоты изложения при определении различных дивизоров на кривой (3.3) примем, что $\infty_{1,2,3}$ – это три точки над бесконечностью и $Q_i = (\lambda_i, 0)$, $i = 1, \dots, 6$, – точки ветвления. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(z - \lambda_i) &= \frac{Q_i^3}{\infty_1 \infty_2 \infty_3}, & \operatorname{Div}(w) &= \frac{\prod_{i=1}^6 Q_i}{(\infty_1 \infty_2 \infty_3)^2}, \\ \operatorname{Div}(dz) &= \frac{(\prod_{i=1}^6 Q_i)^2}{(\infty_1 \infty_2 \infty_3)^2}, \\ \operatorname{Div}\left(\frac{dz}{w}\right) &= \prod_{i=1}^6 Q_i, & \operatorname{Div}\left(\frac{dz}{w^2}\right) &= (\infty_1 \infty_2 \infty_3)^2, \\ \operatorname{Div}\left(\frac{(z - \lambda_i)dz}{w^2}\right) &= Q_i^3 \infty_1 \infty_2 \infty_3, & \operatorname{Div}\left(\frac{(z - \lambda_i)^2 dz}{w^2}\right) &= Q_i^6. \end{aligned}$$

Рассмотрев функцию $(z - \lambda_i)/(z - \lambda_j)$, заключаем, что $3 \int_{Q_j}^{Q_i} v \in \Lambda$. Порядки обращения в нуль дифференциалов $d(z - \lambda_i)/w^2$, $d(z - \lambda_i)/w$, $(z - \lambda_i)d(z - \lambda_i)/w^2$ и $(z - \lambda_i)^2 d(z - \lambda_i)/w^2$ в точке Q_i соответственно равны нуль, один, три и шесть, поэтому последовательность пробелов в точке Q_i дается числами один, два, четыре и семь. Отсюда заключаем, что индекс специальности дивизора Q_i^3 есть $i(Q_i^3) = 2$. Так как на кривой $\mathcal{C}$ рода четыре существует функция w степени три, то $\mathcal{C}$ не является гиперэллиптической. Дивизор-функция $1/(z - \lambda_i)$ определяется как $\mathcal{U}/D$, где $\mathcal{U} = \infty_1 \infty_2 \infty_3$ и $D = Q_i^3$ такой дивизор, что дивизор D^2 – канонический. Это означает, что любая другая функция порядка три на $\mathcal{C}$ является дробно-линейным преобразованием функции w и что Θ_{singular} состоит в точности из одной точки, которая имеет порядок два в $\operatorname{Jac}(\mathcal{C})$ [19; гл. III, раздел 8, теорема 7, VII.1.6]. Вектор римановых констант K_{Q_i} является точкой порядка два в $\operatorname{Jac}(\mathcal{C})$ потому, что дивизор Q_i^6 канонический [19; гл. VI, раздел 3, теорема 6]. Зафиксируем базисную точку в Q_1 . Так как $K_{Q_1} = \varphi_{Q_1}(Q_1^3) + K_{Q_1}$, то $K_{Q_1} \in \Theta$. Так как $i(Q_1^3) = 2$, то можно идентифицировать K_{Q_1} как единственную точку в Θ_{singular} . Мы также далее идентифицируем K_{Q_1} как единственную четную тета-характеристику, принадлежащую Θ .

При базисной точке Q_1 величина $\varphi(\sum_k \infty_k)$ соответствует образу при отображении Абеля дивизора функции $1/(z - \lambda_1)$ и поэтому она обращается в нуль

(по модулю решетки периодов). Таким образом, для нашей кривой

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{Q_1} + \varphi\left(\sum_k \infty_k\right) = \mathbf{K}_{Q_1} = \Theta_{\text{singular}}$$

является единственной четной тета-характеристикой, $[\frac{\hat{\epsilon}}{\hat{\epsilon}'}]$. Точку $\mathbf{K}_{Q_1}$ можно построить различными способами: 1) непосредственно, используя формулу (A.6) из приложения А (вычисление интегралов от нормированных дифференциалов между точками ветвления описано в приложении В); 2) посредством перечисления находим сто тридцать шесть четных тета-характеристик $[\frac{\epsilon'}{\epsilon}]$ и одна из них приводит к занулению $\theta[\frac{\hat{\epsilon}}{\hat{\epsilon}'}](z; \tau)$ при $z = \mathbf{0}$; 3) используя аргументы монодромии, как это было сделано в работе Мацумото [9]. В результате можно заключить, что соответствующий полупериод дается характеристикой $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, вместе с леммой 2.3 приводит к заключению, что вектор $\mathbf{U}$ должен быть также некоторой четной тета-характеристикой.

Снова, используя соотношение $\sum_k \infty_k \sim_l 0$, получаем, что $\infty_i - \infty_j \sim_l 2\infty_i + \infty_k$ (где i, j, k различны) и поэтому

$$\theta(\varphi(\infty_j) - \varphi(\infty_i) - \widetilde{\mathbf{K}}) = \theta(\varphi(2\infty_i + \infty_k) + \mathbf{K}) = 0.$$

Можно получить из рассмотренных выше дивизоров (в частности $\text{Div}(dz/w^2)$), что $\text{Dim } H^0(\mathcal{C}, L_{2\infty_i + \infty_k}) = i(2\infty_i + \infty_k) = 1$. Таким образом, $\theta(\mathbf{w} + \varphi(\infty_j) - \varphi(\infty_i) - \widetilde{\mathbf{K}})$ и $\theta(\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{K}})$ имеет порядок обращения в нуль, отличающийся на единицу (от случая общего положения) при $w \rightarrow 0$.

3.4. Вычисление $\nu_i - \nu_j$. Из результатов предыдущего раздела следует, что

$$\text{Div}\left(\frac{z^4 dz}{w^2}\right) = \frac{(0_1 0_2 0_3)^4}{(\infty_1 \infty_2 \infty_3)^2}.$$

Этот дивизор имеет в точности такой же дивизор нулей, как и γ_∞ , и мы используем этот факт для нахождения γ_∞ . Удобно ввести (мероморфный) дифференциал

$$dr_1(P) = \frac{z^4 dz}{3w^2}.$$

Множитель “три” здесь введен, чтобы обеспечить выполнение соотношения

$$\sum_{s=1}^3 \text{Res}_{P=\infty_s} dr_1(P) \int_{P_0}^P du_1(P') = 1.$$

Поэтому можно написать

$$\gamma_\infty(P) = -3dr_1(P) + \sum_{i=1}^4 c_i v_i(P). \quad (3.21)$$

Константы c_i находятся из условия нормализации

$$\oint_{\mathbf{a}_k} \gamma_\infty(P) = 0 \iff c_k = 3 \oint_{\mathbf{a}_k} dr_1(P) \equiv 3y_k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

где определен вектор $\mathbf{a}$ -периодов

$$\mathbf{y}^T = \left(\oint_{\mathbf{a}_1} dr_1(P), \dots, \oint_{\mathbf{a}_4} dr_1(P) \right).$$

Вектор $\mathbf{b}$ -периодов dr_1 оказывается равным $\rho^2 H \mathbf{y}$. Спаривание с du_1 приводит к соотношению Лежандра

$$\mathbf{y} \cdot H \mathbf{x} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (3.22)$$

Далее, $\mathbf{b}$ -периоды дифференциала γ_∞ являются векторами Эрколани–Синха. Используя (3.21), выводим равенство

$$-3(\rho^2 H - \tau_a) \mathbf{y} = \pi i \mathbf{n} + \pi i \tau \mathbf{m}. \quad (3.23)$$

В результате в силу (3.21) получаем

$$\nu_i - \nu_j = 3\mathbf{y} \cdot \int_{\infty_j}^{\infty_i} \mathbf{v} + \int_{\infty_j}^{\infty_i} \left[d\left(\frac{w}{z}\right) - 3dr_1 \right]. \quad (3.24)$$

§ 4. Разрешение условий Эрколани–Синха

Хотя мы уже описали большинство величин, необходимых для реконструкции монополя вплоть до вычисления интегралов $\mathbf{x}$, еще остался не рассмотренным метод разрешения условий Эрколани–Синха для спектральной кривой (3.1), которые представляют собой одно из трансцендентных условий Хитчина. Здесь мы разберем этот вопрос. Как будет показано, эта задача сводится к условиям на четыре периода $\mathbf{x}$. Далее мы ограничимся рассмотрением кривых (1.2). В этом случае число интегралов, подлежащих вычислению, сводится к двум, что существенно упрощает настоящий анализ.

Наше исследование основано на условиях Эрколани–Синха в форме (2.24). Допустим, что голоморфные дифференциалы упорядочены в соответствии с (3.9). Тогда существуют два целочисленных 4-вектора $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^4$ и такие значения параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ и χ , что

$$\mathbf{n}^T \mathcal{A} + \mathbf{m}^T \mathcal{B} = \nu(1, 0, 0, 0). \quad (4.1)$$

Здесь ν зависит от нормализации. В рассматриваемом случае

$$\nu = 2.3\hat{\chi}^{1/3} = 6\hat{\chi}^{1/3}.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что (2.24) требует

$$-2\delta_{1k} = \oint_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}} \Omega^{(k)}$$

для дифференциалов

$$\Omega^{(1)} = \frac{\eta^{n-2} d\zeta}{\frac{\partial P}{\partial \eta}} = \frac{d\zeta}{n\eta}, \quad \Omega^{(2)} = \frac{\eta^{n-3} d\zeta}{\frac{\partial P}{\partial \eta}}, \quad \dots$$

В используемой параметризации (3.3) получаем

$$x_i = \oint_{a_i} \frac{dz}{w} = \oint_{a_i} \frac{d\zeta}{-\widehat{\chi}^{-1/3}\eta} = -3\widehat{\chi}^{1/3} \oint_{a_i} \Omega^{(1)}.$$

Необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$-2 = \oint_{n \cdot a + m \cdot b} \Omega^{(1)} = \frac{-1}{3\widehat{\chi}^{1/3}} (n \cdot x + \rho m \cdot H \cdot x).$$

Поэтому

$$n \cdot x + \rho m \cdot H \cdot x = \nu \quad (4.2)$$

с указанным значением ν . Рассмотрение других дифференциалов приводит к (4.1), т.е. к трансцендентным условиям на кривую $\mathcal{C}$. Эти условия могут быть разрешены на основе следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Условия Эрколани–Синха (4.1) выполняются для кривой (3.1) тогда и только тогда, когда*

$$x = \xi(Hn + \rho^2 m), \quad (4.3)$$

где

$$\xi = \frac{\nu}{[n \cdot Hn - m \cdot n + m \cdot Hm]} = \frac{6\widehat{\chi}^{1/3}}{[n \cdot Hn - m \cdot n + m \cdot Hm]}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переписывая (4.1), получаем, что

$$n^T + m^T \mathcal{BA}^{-1} = \nu(1, 0, 0, 0) \mathcal{A}^{-1} = \nu \mathcal{A}_{1\mu}^{-1}.$$

Используя (3.17), имеем

$$n^T + m^T \mathcal{BA}^{-1} = \frac{\nu}{\Delta} x^T H.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\Delta}{\nu} (Hn + H(\mathcal{BA}^{-1})^T m) = \frac{\Delta}{\nu} \left(Hn + \rho^2 m + \left(\frac{\rho - \rho^2}{\Delta} \right) x x^T H m \right),$$

где была использована симметрия матрицы периодов и выражение для $\mathcal{BA}^{-1}$. Перегруппировка приводит к равенству

$$\left(1 + \frac{\rho^2 - \rho}{\nu} x^T H m \right) x = \frac{\Delta}{\nu} (Hn + \rho^2 m) \quad (4.5)$$

и поэтому установлено (4.3), где

$$\xi = \frac{\Delta}{\nu} \left(1 + \frac{\rho^2 - \rho}{\nu} x \cdot H m \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Здесь возникает ряд ограничений. Во-первых, из условий Эрколани–Синха (4.2) следует, что

$$[n^T + \rho m^T H] \xi [Hn + \rho^2 m] = \nu$$

и поэтому

$$[\mathbf{n}.\mathbf{H}\mathbf{n} - \mathbf{m}.\mathbf{n} + \mathbf{m}.\mathbf{H}\mathbf{m}]\xi = \nu = 6\widehat{\chi}^{1/3}, \quad (4.7)$$

т.е. установлено (4.4). Заметим, что при действительном $\widehat{\chi}$ также действительно $\widehat{\chi}^{1/3}$ и, следовательно, ξ действительно. Отметим также, что (4.4) и (4.6) согласуются с соотношением

$$\Delta = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} = \xi^2 (\mathbf{n}^T \mathbf{H} + \rho^2 \mathbf{m}^T) \mathbf{H} (\mathbf{H} \mathbf{n} + \rho^2 \mathbf{m}) = \xi^2 [\mathbf{n}.\mathbf{H}\mathbf{n} + 2\rho^2 \mathbf{m}.\mathbf{n} + \rho \mathbf{m}.\mathbf{H}\mathbf{m}].$$

Иная проверка совместности дается (3.23). Используя вид матрицы периодов, соотношение Лежандра (3.22) и предложение 4.1 (при $\nu = -6$), получаем (3.23).

На этом этапе мы приводим условия Эрколани–Синха к следующим четырем условиям (4.3) на периоды x_k . В частности, это означает, что должны быть разрешены уравнения

$$\frac{x_1}{n_1 + \rho^2 m_1} = \frac{x_2}{n_2 + \rho^2 m_2} = \frac{x_3}{n_3 + \rho^2 m_3} = \frac{x_4}{-n_4 + \rho^2 m_4} = \xi, \quad (4.8)$$

что приводит к включению $x_i/x_j \in \mathbb{Q}[\rho]$. Далее, из условий (3.16) получаем, что

$$\frac{\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x}}{|\xi|^2} = [\mathbf{n}.\mathbf{H}\mathbf{n} - \mathbf{m}.\mathbf{n} + \mathbf{m}.\mathbf{H}\mathbf{m}] = \sum_{i=1}^3 (n_i^2 - n_i m_i + m_i^2) - n_4^2 - m_4^2 - m_4 n_4 < 0. \quad (4.9)$$

Этот результат допускает другую интерпретацию. До сих пор мы предполагали, что задана подходящая кривая (т.е. удовлетворяющая условию вещественности Н1)), на которую накладываются дальнейшие ограничения для того, чтобы обеспечить выполнение условий Эрколани–Синха. В качестве альтернативы к этому варианту можно было бы рассмотреть следующий вариант: начать с кривой, удовлетворяющей (некоторым) условиям Эрколани–Синха, и затем пытаться обеспечить выполнение условия вещественности (и оставшихся условий Эрколани–Синха). Как это можно сделать? Сначала заметим, что матрица периодов (3.15) кривой, удовлетворяющая (4.8), не зависит от ξ : она полностью определяется вектором Эрколани–Синха и корнями ρ из единицы. В этом подходе зададим сначала примитивный вектор $\mathbf{U} = (\mathbf{n}, \mathbf{m})$, удовлетворяющий условию гиперболоида (4.9) и лемме 2.3. По этим данным мы построим матрицу периодов и затем, используя предложение 3.2, найдем нормированную кривую (3.7). Теперь мы должны выяснить, удовлетворяет ли кривая требуемым свойствам вещественности. Для этого мы должны показать, что существует преобразование Мёбиуса множества $S = \{0, 1, \infty, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ в множество вида $H = \{\alpha_j, -1/\overline{\alpha_j}\}_{j=1}^3$. Ниже будет показано, что на этот вопрос можно ответить при значениях α_i , определенных с точностью до их общего вращения. На этом этапе кривая определяется (в силу свободы вращения) в виде

$$W^3 = Z(Z - a) \left(Z + \frac{1}{a} \right) (Z - w) \left(Z + \frac{1}{w} \right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Для восстановления кривой монополя необходимо ее нормировать:

$$\widehat{\chi} = \chi_3 \left[\frac{\overline{w}}{w} \right]^{1/2}.$$

Эта нормализация обеспечивается параметром ξ , который еще не вводился. Для вычисления нормализационной постоянной следует вычислить период. Тогда, используя (4.8) и (4.4), определим $\hat{\chi}$. Это – ограничение. Для совместности кривой монополя с условием вещественности потребуем, чтобы

$$\arg(\xi) = \arg \left[\frac{\bar{w}}{w} \right]^{1/6}.$$

Разумеется, для завершения конструкции необходимо проверить, что отсутствуют нули тета-функции внутри интервала $(-1, 1)$. Хотя описанная процедура включает ряд трансцендентных вычислений, ее можно реализовать численно, что позволяет построить предполагаемые монополярные кривые.

В заключение мы сформулируем утверждение о существовании преобразования Мёбиуса множества $S = \{0, 1, \infty, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ к одной из форм $H = \{\alpha_j, -1/\bar{\alpha}_j\}_{j=1}^3$. Для простоты рассмотрим случай различных корней.

ТЕОРЕМА 4.2. *Корни $S = \{0, 1, \infty, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ являются Мёбиус-эквивалентными $H = \{\alpha_j, -1/\bar{\alpha}_j\}_{j=1}^3$ тогда и только тогда, когда*

1) *либо один из корней (например, Λ_1) действителен и*

$$\begin{aligned} \Lambda_2 \bar{\Lambda}_3 &= \Lambda_1, & \text{если } \Lambda_1 < 0, \\ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - 1} \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 - 1} &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 - 1}, & \text{если } 0 < \Lambda_1 < 1, \\ (1 - \Lambda_2)(1 - \Lambda_3) &= 1 - \Lambda_1, & \text{если } 1 < \Lambda_1; \end{aligned}$$

2) *либо все три корня действительны и с точностью до перестановки индексов выполняется одно из перечисленных выше утверждений;*

3) *либо все три корня комплексны и выполняются условия*

$$0 < \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2 \in \mathbb{R}, \quad 1 < \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}, \quad \Lambda_3 = \Lambda_2 \frac{1 - \bar{\Lambda}_1}{1 - \Lambda_2}$$

или те же условия с циклически переставленными индексами.

§ 5. Симметричный 3-монополь

В этом параграфе рассматривается специальная кривая $\mathcal{C}$ вида

$$\eta^3 + \chi(\zeta^6 + b'\zeta^3 - 1) = 0, \quad (5.1)$$

где b' – действительный параметр. В этом случае точки ветвления таковы:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = (\alpha, \rho^2\beta, \rho\alpha, \beta, \rho^2\alpha, \rho\beta),$$

где α и β действительны,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-b' + \sqrt{b'^2 + 4}}{2}} > 0, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{-b' - \sqrt{b'^2 + 4}}{2}} < 0, \quad \alpha^3\beta^3 = -1.$$

Здесь число $\chi = \widehat{\chi}$ действительное и мы выбираем точки ветвления таким образом, чтобы $\widehat{\chi}^{1/3}$ было также действительным.

Следствием выбора такой симметричной кривой является сведение четырех, вообще говоря, различных периодов x_i к двум независимым интегралам. Монополь с тетраэдральной симметрией также принадлежит классу кривых (5.1). Заметим, что при произвольном повороте форма $a_3(\zeta)$ видоизменяется. Поэтому размерность пространства модулей уменьшается с трех на три степени свободы вращения, приводя тем самым к дискретному семейству решений. Таким образом, мы ищем дискретное семейство спектральных кривых.

Начнем с вычисления интегралов, представляющих периоды, и затем наложим условия Эрколани–Синха. Мы также рассмотрим геометрию кривых (5.1).

5.1. Интегралы периодов. Используем параметризацию Веллштейна, задав кривую в виде

$$w^3 = z^6 + bz^3 - 1 = (z^3 - \alpha^3)\left(z^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right),$$

где $1/\alpha^3 = -\beta^3 = (b + \sqrt{b^2 + 4})/2$, $b = -b'$. Выберем первый лист таким образом, чтобы корень $w = \sqrt[3]{(z^3 - \alpha^3)(z^3 + 1/\alpha^3)}$ был отрицательным и действительным на действительной z -оси между точками ветвления $(-1/\alpha, \alpha)$.

Введем интегралы, вычисленные на первом листе:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{dz}{w} = -\frac{2\pi\sqrt{3}\alpha}{9} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\alpha^6\right), \\ \mathcal{J}_1(\alpha) &= \int_0^\beta \frac{dz}{w} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\alpha^{-6}\right).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Здесь ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – стандартная гипергеометрическая функция Гаусса, и для вывода, например, первого интеграла следует произвести замену переменной $z = \alpha t^{1/3}$ и учесть наше соглашение относительно первого листа. Также заключаем, что

$$\int_0^{\rho^k \alpha} \frac{dz}{w} = \rho^k \mathcal{I}_1(\alpha), \quad \int_0^{\rho^k \beta} \frac{dz}{w} = \rho^k \mathcal{J}_1(\alpha), \quad k = 1, 2.$$

Наша цель – выразить периоды в заданном базисе гомологий (3.10) через интегралы $\mathcal{I}_1(\alpha)$ и $\mathcal{J}_1(\alpha)$. Рассмотрим в качестве примера

$$\begin{aligned}x_1 &= \oint_{a_1} du_1 = \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)} \frac{dz}{w} + \int_{\gamma_2(\lambda_2, \lambda_1)} \frac{dz}{w} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dz}{w} - \rho^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dz}{w} \\ &= (1 - \rho^2) \int_\alpha^{\rho^2 \beta} \frac{dz}{w} = (1 - \rho^2) \left[-\mathcal{I}(\alpha) + \int_0^{\rho^2 \beta} \frac{dz}{w} \right] \\ &= (1 - \rho^2) [-\mathcal{I}_1(\alpha) + \rho^2 \mathcal{J}_1(\alpha)] = -2\mathcal{I}_1(\alpha) - \mathcal{J}_1(\alpha) - \rho[\mathcal{I}_1(\alpha) + 2\mathcal{J}_1(\alpha)].\end{aligned}$$

Для того чтобы получить последнее выражение в первой строке, мы использовали то, что на втором листе $w_2 = \rho w_1$. Для того чтобы получить окончательное выражение, мы учли, что $1 + \rho + \rho^2 = 0$. Подобным образом мы

найдем (опуская символ α в интегралах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{J}_1$ в случаях, когда не возникает разночтений), что

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2\mathcal{J}_1 + \mathcal{I}_1)\rho - 2\mathcal{I}_1 - \mathcal{J}_1, & x_2 &= (\mathcal{J}_1 - \mathcal{I}_1)\rho + \mathcal{I}_1 + 2\mathcal{J}_1, \\ x_3 &= (\mathcal{J}_1 + 2\mathcal{I}_1)\rho - \mathcal{J}_1 + \mathcal{I}_1, & x_4 &= 3(\mathcal{J}_1 - \mathcal{I}_1)\rho + 3\mathcal{J}_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Заметим, что

$$x_2 = \rho x_1, \quad x_3 = \rho^2 x_1. \quad (5.4)$$

5.2. Условия Эрколани–Синха. Условия Эрколани–Синха сводятся к теоретико-числовым условиям. Используя (4.3) и (5.3), перепишем их в виде

$$x_i = \xi(\epsilon_i n_i + \rho^2 m_i) = (\alpha_i \mathcal{I}_1 + \beta_i \mathcal{J}_1) + (\gamma_i \mathcal{I}_1 + \delta_i \mathcal{J}_1)\rho. \quad (5.5)$$

Заметим, что можно следующим образом выразить n_i , m_i через n_1 , m_1 . Положим

$$C_i = \begin{pmatrix} \epsilon_i & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{I}_1}{\xi}, \quad \widehat{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}_1}{\xi}.$$

Тогда (5.5) переписывается так:

$$C_i \begin{pmatrix} n_i \\ m_i \end{pmatrix} = D_i \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{I}} \\ \widehat{\mathcal{J}} \end{pmatrix},$$

что дает равенства

$$\begin{pmatrix} n_i \\ m_i \end{pmatrix} = C_i^{-1} D_i \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{I}} \\ \widehat{\mathcal{J}} \end{pmatrix} = C_i^{-1} D_i D_1^{-1} C_1 \begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к следующим выражениям для векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 - n_1 \\ -m_1 \\ 2n_1 - m_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ -n_1 \\ n_1 - m_1 \\ -3n_1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Можно проверить, что для векторов такого вида справедливо равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{m})\mathcal{M} = -(\mathbf{n}, \mathbf{m}),$$

как это и требуется в (3.20). Напомним далее, что $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ является примитивным вектором: это означает, что наибольший общий делитель компонент равен единице и, следовательно, это – генератор в $\mathbb{Z}^8$. Легко видеть, что $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ примитивен тогда и только тогда, когда

$$(n_1, m_1) = 1. \quad (5.7)$$

Из соотношений

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{I}} \\ \widehat{\mathcal{J}} \end{pmatrix} = D_i^{-1} C_i \begin{pmatrix} n_i \\ m_i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\mathcal{I}}}{\widehat{\mathcal{J}}} &= \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{J}} = \frac{m_1 - 2n_1}{m_1 + n_1}, \\ \mathcal{I}_1 &= \frac{m_1 - 2n_1}{3} \xi = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, -\alpha^6\right), \\ \mathcal{J}_1 &= \frac{m_1 + n_1}{3} \xi = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, -\alpha^{-6}\right).\end{aligned}$$

Далее, из (5.6) находим, что

$$\mathbf{n}.H\mathbf{n} - \mathbf{m}.\mathbf{n} + \mathbf{m}.H\mathbf{m} = 2(m_1 + n_1)(m_1 - 2n_1)$$

и, следовательно, условие (3.16) выполняется, если

$$\bar{\mathbf{x}}^T H \mathbf{x} = \xi^2 [\mathbf{n}.H\mathbf{n} - \mathbf{m}.\mathbf{n} + \mathbf{m}.H\mathbf{m}] = 2\xi^2(m_1 + n_1)(m_1 - 2n_1) < 0.$$

Но для этого необходимо, чтобы

$$(m_1 + n_1)(m_1 - 2n_1) < 0. \quad (5.8)$$

В частности, получаем из (4.7), что

$$\xi = \frac{3\chi^{1/3}}{(n_1 + m_1)(m_1 - 2n_1)}.$$

Таким образом, необходимо решить уравнения

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \frac{\chi^{1/3}}{n_1 + m_1} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \alpha {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, -\alpha^6\right), \\ \mathcal{J}_1 &= \frac{\chi^{1/3}}{m_1 - 2n_1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, -\alpha^{-6}\right).\end{aligned} \quad (5.9)$$

В результате использования равенства

$${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1, x\right) = (1-x)^{-1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, \frac{x}{x-1}\right)$$

эта задача сводится к решению уравнения вида

$$\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{J}_1} = \frac{m_1 - 2n_1}{m_1 + n_1} = -\frac{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1, t)}{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1, 1-t)}, \quad t = \frac{\alpha^6}{1 + \alpha^6} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4}}{2\sqrt{b^2 + 4}}.$$

Из (5.8) следует, что $\mathcal{I}_1/\mathcal{J}_1 < 0$. Рассмотрение функции

$$f(t) = \frac{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1, t)}{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1, 1-t)}$$

(см. рис. 3, где представлен график функции) показывает, что для каждого значения $f(t) \in (0, \infty)$ всегда существует единственный корень $t \in (0, 1)$ и соответственно единственное действительное положительное значение $\alpha = \sqrt[6]{t/(1-t)}$.

Рис. 3. Функция $f(t) = \frac{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1; t)}{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1; 1-t)}$

Объединяя все эти результаты, мы устанавливаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для каждой пары n_1, m_1 взаимно простых целых чисел, для которых*

$$(m_1 + n_1)(m_1 - 2n_1) < 0,$$

можно построить решение условий Эрколани–Синга для кривой вида (5.1) следующим образом. Сначала найдем t из уравнения

$$\frac{2n_1 - m_1}{m_1 + n_1} = \frac{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1; t)}{{}_2F_1(1/3, 2/3; 1; 1-t)}. \quad (5.10)$$

Затем вычислим

$$b = \frac{1-2t}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad t = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4}}{2\sqrt{b^2 + 4}} \quad (5.11)$$

и найдем χ по формуле

$$\chi^{1/3} = -(n_1 + m_1) \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha}{(1 + \alpha^6)^{1/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1; t\right), \quad (5.12)$$

где $\alpha^6 = t/(1-t)$.

5.3. Теория Рамануджана. Выше мы свели задачу нахождения в классе кривых (5.1) кривой, удовлетворяющей H1) и H2), к трансцендентному уравнению (5.10), решение которого существует и единственно. Но может ли оно быть решено аналитически? Здесь мы покажем, как недавно доказанный результат Рамануджана позволяет найти такие решения.

Пусть n – натуральное число. Модулярное уравнение степени n и сигнатуры r , $r = 2, 3, 4, 6$, – это соотношение между α и β вида

$$n \frac{{}_2F_1(1/r, (r-1)/r; 1; 1-\alpha)}{{}_2F_1(1/r, (r-1)/r; 1; \alpha)} = \frac{{}_2F_1(1/r, (r-1)/r; 1; 1-\beta)}{{}_2F_1(1/r, (r-1)/r; 1; \beta)}. \quad (5.13)$$

В случае $r = 2$ получается полный эллиптический интеграл

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

а (5.13) порождает обычные модулярные соотношения. Меняя местами α и β , можно заменить n на $1/n$. Итерациями таких модулярных равенств можно получить соотношения при любом рациональном числе n . Уравнение (5.10) сводится к (5.13) при сигнатуре $r = 3$ и для начала итераций может быть выбрано значение $\alpha = 1/2$.

Рамануджан во второй записной книжке представил результаты относительно этих обобщенных модулярных уравнений, а также различные тета-функциональные соотношения. Например, при $n = 2$ и сигнатуре $r = 3$ величины α и β связаны равенством

$$(\alpha\beta)^{1/3} + ((1-\alpha)(1-\beta))^{1/3} = 1. \quad (5.14)$$

Им также было найдено следующее соотношение при $0 \leq p < 1$:

$$(1+p+p^2) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{p^3(2+p)}{1+2p}\right) = \sqrt{1+2p} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, \frac{27p^2(1+p)^2}{4(1+p+p^2)^3}\right). \quad (5.15)$$

Результаты Рамануджана были обоснованы в [20] (см. также [21]), хотя некоторые результаты, связанные с разложением $1/\pi$, были получены ранее в [22]. Изложение истории и теории этих уравнений может быть найдено в последнем томе, посвященном записным книжкам Рамануджана [23]. Теория обобщенных модулярных уравнений, приведенная в процитированных работах, основана на прямой проверке того, что подходящие выражения для гипергеометрических функций удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям и начальным условиям и поэтому возникает равенство. Далее предлагается более геометрическое объяснение этого факта.

Таблица 1

n_1	m_1	$\frac{2n_1 - m_1}{m_1 + n_1}$	t	b
2	1	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	2	$\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{18}$	$-5\sqrt{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{18}$	$5\sqrt{2}$
4	-1	3	$\frac{63 + 171\sqrt[3]{2} - 18\sqrt[3]{4}}{250}$	$\frac{44 + 38\sqrt[3]{2} + 26\sqrt[3]{4}}{3}$
5	-2	4	$\frac{1}{2} + \frac{153\sqrt{3} - 99\sqrt{2}}{250}$	$9\sqrt{458 + 187\sqrt{6}}$

Аналогичные выражения для (5.14) известны для $n = 3, 5, 7$ и 11 (см. [23; формулы 7.13, 7.17, 7.24, 2.28 соответственно]). Таким образом, посредством итераций можно решить (5.10) для рациональных чисел, числители и знаменатели которых содержат эти числа в качестве множителей. Мы приводим ниже ряд таких примеров в таблице 1. Итак, для получения значения два для отношения $(2n_1 - m_1)/(m_1 + n_1)$ мы полагаем $\alpha = 1/2$ в (5.14) и решаем уравнение

$$t^{1/3} + (1 - t)^{1/3} = 2^{1/3}$$

относительно t , взяв в качестве ответа большее значение $t = 1/2 + 5\sqrt{3}/18$ (меньшее значение порождает отношение $1/2$).

Итак, нами развита теория решения (5.13), а для ряда малых натуральных чисел получены явные выражения. Эти результаты позволяют свести условия Эрколани–Синха к алгебраическим уравнениям.

5.4. Накрытия секстики. Здесь описываются геометрические свойства кривой (5.1), которые приводят к интерпретации результатов предыдущего раздела. Сначала будет развит аналитический подход, который позволит произвести численный анализ, затем будут приведены аргументы, использующие теорию инвариантов.

Прежде всего заметим, что каждая из рассматриваемых кривых накрывает четыре эллиптические кривые.

ЛЕММА 5.2. *Кривая $\mathcal{C} := \{(x, y) \mid y^3 + x^6 + bx^3 - 1 = 0\}$ при произвольном значении параметра b является одновременным накрытием над четырьмя эллиптическими кривыми $\mathcal{E}_\pm, \mathcal{E}_{1,2}$, как это указано на диаграмме ниже, где $\mathcal{C}^*$ – это промежуточная кривая рода два.*

Уравнения эллиптических кривых таковы:

$$\mathcal{E}_\pm = \{(z_\pm, w_\pm) \mid w_\pm^2 = z_\pm(1 - z_\pm)(1 - k_\pm^2 z_\pm)\}, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{E}_1 = \{(z_1, w_1) \mid z_1^3 + w_1^3 + 3z_1 + b = 0\}, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{E}_2 = \{(z_2, w_2) \mid w_2^3 + z_2^2 + bz_2 - 1 = 0\}, \quad (5.18)$$

где якобиевские модули $k_\pm$ определяются формулами

$$k_\pm^2 = -\frac{\rho(\rho M \pm 1)(\rho M \mp 1)^3}{(M \pm 1)(M \mp 1)^3} \quad (5.19)$$

при

$$M = \frac{K}{L}, \quad K = (2i - b)^{1/3}, \quad L = (b^2 + 4)^{1/6}. \quad (5.20)$$

Накрытия $\pi_{\pm}, \pi_{1,2}$ определяются так:

$$\begin{aligned} \pi_{\pm} : \quad z_{\pm} &= -\frac{K^2 - L^2}{K^2 - \rho L^2} \frac{Kx - y}{\rho Kx - y} \frac{L^2 x - Ky}{L^2 x - K\rho y}, \\ w_{\pm} &= i\sqrt{2 + \rho} \sqrt{\frac{L \pm K}{L \mp K}} \frac{K^2}{L} \frac{L^2 - \rho K^2}{\rho L^2 - K^2} \frac{(Lx \mp y)(x^6 + 1)}{(\rho Kx - y)^2 (L^2 x - \rho Ky)^2}, \\ \pi_1 : \quad z_1 &= x - \frac{1}{x}, \quad w_1 = \frac{y}{x}, \\ \pi_2 : \quad z_2 &= x^3, \quad w_2 = y. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Эллиптические кривые $\mathcal{E}_{1,2}$ являются эквиангармоническими ($g_2 = 0$) и, следовательно, их j -инварианты обращаются в нуль, т.е. $j(\mathcal{E}_{1,2}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Накрытия $\pi_{1,2}$ и соответствующие кривые находятся непосредственным вычислением. Формулы для прообразов $\pi_{1,2}^{-1}$ этих накрытий

$$\pi_1^{-1} := \begin{cases} x = \frac{z_1 \pm \sqrt{z_1^2 + 4}}{2}, \\ y = \frac{w_1(z_1 \pm \sqrt{z_1^2 + 4})}{2}, \end{cases} \quad \pi_2^{-1} := \begin{cases} x = \rho \sqrt[3]{z_2}, \\ y = w_2 \end{cases}$$

указывают, что их степени равны соответственно двум и трем. Непосредственное вычисление, приводящее эти кривые к вейерштрассовой форме, показывает, что $g_2 = 0$ и, значит, кривые $\mathcal{E}_{1,2}$ эквиангармонические. Их j -инварианты обращаются в нуль и поэтому $\mathcal{E}_{1,2}$ бирационально эквивалентны.

Для того чтобы получить накрытия $\pi_{\pm}$, сначала заметим, что кривая $\mathcal{C}$ является накрытием гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}^*$ рода два,

$$\mathcal{C}^* = \{(\mu, \nu) \mid \nu^2 = (\mu^3 + b)^2 + 4\}. \quad (5.22)$$

Накрытие этой кривой описывается формулами

$$\pi^* : \quad \mu = \frac{y}{x}, \quad \nu = -x^3 - \frac{1}{x^3}. \quad (5.23)$$

Кривая $\mathcal{C}^*$ двулистно покрывает две эллиптические кривые $\mathcal{E}_{\pm}$, приведенные в (5.16),

$$\begin{aligned} z_{\pm} &= \frac{K^2 - L^2}{K^2 - \rho L^2} \frac{K - \mu}{\rho K - \mu} \frac{L^2 - K\mu}{L^2 - K\rho\mu}, \\ w_{\pm} &= -i\sqrt{2 + \rho} \sqrt{\frac{L \pm K}{L \mp K}} \frac{K^2}{L} \frac{L^2 - \rho K^2}{\rho L^2 - K^2} \frac{\nu(L \mp \mu)}{(\mu - \rho K)^2 (L^2 - \rho K\mu)^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Композиция (5.23) и (5.24) приводит к (5.21).

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Голоморфные дифференциалы кривой $\mathcal{C}$ отображаются в голоморфные дифференциалы кривой $\mathcal{E}_{\pm}$, $\mathcal{E}_{1,2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz_{\pm}}{w_{\pm}} &= \sqrt{1+2\rho} \frac{L}{K} \sqrt{(L \pm K)(L \mp K)^3} \frac{Lx \pm y}{y^2} dx \\ &= \sqrt{1+2\rho} \frac{L}{K} \sqrt{(L \pm K)(L \mp K)^3} (L \pm \mu) \frac{d\mu}{\nu}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\frac{dz_1}{w_1^2} = \frac{x^2 + 1}{y^2} dx, \quad (5.26)$$

$$\frac{dz_2}{w_2^2} = \frac{3x^2}{y^2} dx, \quad (5.27)$$

где L, K даны в (5.20).

Абсолютные инварианты $j_{\pm}$ кривых $\mathcal{E}_{\pm}$ определяются по формуле

$$j_{\pm} = 108 \frac{L^3(5L^3 \mp 4b)^3}{(L^3 \pm b)^2}. \quad (5.28)$$

Очевидно, что для общих значений параметров $j_{\pm} \neq 0$ и $j_+ \neq j_-$. Поэтому эти эллиптические кривые не являются бирационально эквивалентными эллиптической кривой, возникающей в теории Хитчина тетраэдрального монополя и являющейся эквиангармонической [24]. Мы заметим, что подстановка

$$M = \frac{1+2\rho+p}{1+2\rho-p}$$

приводит к параметризации якобиевых модулей

$$k_+^2 = \frac{(p+1)^3(3-p)}{16p}, \quad k_-^2 = \frac{(p+1)(3-p)^3}{16p^3}, \quad (5.29)$$

которая была использована Рамануджаном при выводе его гипергеометрических соотношений сигнатуры три (см., например, [20]). Тета-функциональное представление модулей $k_{\pm}$ и параметр p могут быть найдены в [25; раздел 9.7],

$$k_+ = \frac{\vartheta_2^2(0 | \tau)}{\vartheta_3^2(0 | \tau)}, \quad k_- = \frac{\vartheta_2^2(0 | 3\tau)}{\vartheta_3^2(0 | 3\tau)}, \quad p = \frac{3\vartheta_3^2(0 | 3\tau)}{\vartheta_3^2(0 | \tau)}.$$

Обсудим геометрию накрытий, которые были описаны выше явными формулами. Рассматриваемая кривая обладает некоторыми явными симметриями, которые не учитывались в описанных накрытиях. Мы сначала опишем эти симметрии действием на поле функций $\mathfrak{k}$ кривой, поскольку это поле не зависит от сингулярности (или несингулярности) модели кривых; впоследствии мы предъявим их проективную модель, реализованную в проективном пространстве с весом, где кривые несингулярны.

Рассматривая $\bar{y} = y/x$ и x как функции на $\mathcal{C}$, заметим, что

$$\bar{y}^3 = x^3 + b - \frac{1}{x^3}$$

обладает симметриями ($\rho = e^{2i\pi/3}$):

$$\begin{aligned} \text{a: } x &\rightarrow x, & \bar{y} &\rightarrow \rho\bar{y}, \\ \text{b: } x &\rightarrow \rho x, & \bar{y} &\rightarrow \bar{y}, \\ \text{c: } x &\rightarrow -\frac{1}{x}, & \bar{y} &\rightarrow \bar{y}. \end{aligned}$$

Их композиция порождает группу $G = C_3 \times S_3$ при $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ и $S_3 = \langle b, c \mid b^3 = 1, c^2 = 1, cbc = b^2 \rangle$. При $b = 5\sqrt{2}$ диэдральная симметрия S_3 расширяется до тетраэдральной симметрии

$$t: x \rightarrow \frac{\sqrt{2} - x}{1 + \sqrt{2}x}, \quad \bar{y} \rightarrow \frac{3x\bar{y}}{(1 + \sqrt{2}x)(x - \sqrt{2})}, \quad t^2 = 1,$$

с A_4 , образованной b и t . Теперь каждой подгруппе $H \leq G$ соответствует поле $\mathfrak{k}^H$, ассоциированное с факторкривой $\mathcal{C}/H$.

Каноническая кривая негиперэллиптической кривой рода четыре дана пересечением неприводимых квадратичной и кубической поверхностей в $\mathbb{P}^3$. В нашем случае квадрика – это коника и наша кривая $\mathcal{C}$ может быть представлена как несингулярная кривая³ в проективном пространстве с весом $\mathbb{P}^{1,1,2} = \{[z, t, w] \mid [z, t, w] \sim [\lambda z, \lambda t, \lambda^2 w]\}$, определяемая нулями

$$f(z, t, w) = z^6 + bz^3t^3 - t^6 - w^3.$$

Группа G действует как ($x = z/t, \bar{y} = w/(zt)$)

$$\begin{aligned} \text{a: } [z, t, w] &\rightarrow [z, t, \rho w] \sim [\rho z, \rho t, w], \\ \text{b: } [z, t, w] &\rightarrow [\rho z, t, \rho w] \sim [\rho^2 z, \rho t, w], \\ \text{c: } [z, t, w] &\rightarrow [t, -z, -w] \sim [it, -iz, w]. \end{aligned}$$

Неподвижные точки этого действия на $\mathcal{C}$ и факторкривых таковы.

- Имеется шесть неподвижных точек, $[1, \rho^k \alpha_{\pm}, 0]$, где $\alpha_{\pm}$ – два корня уравнения $\alpha^2 - b\alpha - 1 = 0$. Для других точек имеем $3 : 1$ отображение $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\langle a \rangle$. Из теоремы Римана–Гурвица следует, что род $\mathcal{C}/\langle a \rangle$ есть $g_{\mathcal{C}/\langle a \rangle} = 0$.
- Неподвижные точки отсутствуют и из теоремы Римана–Гурвица следует, что род $\mathcal{C}/\langle b \rangle$ есть $g_{\mathcal{C}/\langle b \rangle} = 2$.
- Имеется шесть неподвижных точек, $[1, \pm i, \rho^k \beta_{\pm}]$, где $\beta_{\pm}$ – это корень $\beta_{\pm}^3 = 2 \pm ib$. Здесь теорема Римана–Гурвица показывает, что род $\mathcal{C}/\langle c \rangle$ есть $g_{\mathcal{C}/\langle c \rangle} = 1$.

Используя инварианты H , мы получаем несингулярную модель $\mathfrak{k}^H$. Рассмотрим в качестве примера $H = \langle c \rangle$ с инвариантами $u = zt, v = z^2 - t^2$ и w (степени два). Тогда мы получим факторкривую $w^3 = v^3 + 3u^2v + bu^3$

³Если представить $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ как плоскую кривую, определяемую нулями полинома $z^6 + bz^3t^3 - t^6 - w^3$, то кривая оказывается сингулярной. При действительном b точка $[z, t, w] = [0, 0, 1]$ – единственная сингулярная точка $\mathcal{C}$ с дельта-инвариантом шесть и кратностью три, что приводит к роду $g_{\mathcal{C}} = 4$.

в $\mathbb{P}^{2,2,2} \sim \mathbb{P}^{1,1,1} = \{[u, v, w]\}$. Легко видеть, что род фактора есть единица. Мы отождествляем эту кривую с $\mathcal{E}_1$. Можно проверить, что

$$c^* \left(\frac{x^2 + 1}{y^2} dx \right) = \frac{x^2 + 1}{y^2} dx$$

представляет инвариантный дифференциал (5.26). Подобным образом, полагая $H = \langle bc \rangle$ и $H = \langle b^2c \rangle$, мы также получаем эквиангармонические эллиптические кривые. Инварианты инволюции b^2c снова имеют степень два и определяются как $u = zt$, $v = \rho^{1/2}z^2 - \rho^{-1/2}t^2$ и w .

Полагая $H = \langle a^2b \rangle$, мы получаем $\mathcal{E}_2$. Инвариант $\langle a^2b \rangle : [z, t, w] \rightarrow [\rho z, t, w]$ есть $u = z^3$ и кривая $w^3 = u^2 - but^3 + t^6$ в $\mathbb{P}^{3,1,2} = \{[u, t, w]\}$. Используя формулу для рода кривой степени d в $\mathbb{P}^{a_0, a_1, a_2}$,

$$g = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{a_0 a_1 a_2} - d \sum_{i < j} \frac{\gcd(a_i, a_j)}{a_i a_j} + \sum_{i=0}^2 \frac{\gcd(a_i, d)}{a_i} - 1 \right),$$

находим, что род равен единице. Дифференциал (5.27) инвариантен по отношению к этому действию. Если положить $H = \langle a \rangle$ с инвариантами $u = z^3$, $v = t^3$ и w , то получается кривая $w^3 = u^2 + buv - v^2$ в $\mathbb{P}^{3,3,2}$ (которая эквивалентна $W = u^2 + buv - v^2$ в $\mathbb{P}^{1,1,2}$). Род этого фактора равен нулю.

Кривая $\mathcal{C}^*$ рода два получается следующим образом. Инварианты действия $H = \langle b \rangle$ определены как $U = zt$, $V = z^3$, $T = t^3$ и w , и удовлетворяют соотношению $U^3 = VT$. Кривая $\mathcal{C}$ может быть записана в виде $T^2 = -w^3 + bU^3 + V^2$ и, следовательно,

$$U^6 = V^2 T^2 = V^2 (-w^3 + bU^3 + V^2).$$

Эта кривая имеет род два в $\mathbb{P}^{2,3,2} = \{[U, V, w]\}$ и может быть отождествлена с $\mathcal{C}^*$. Замена $\nu = 2V^2 - (w^3 - bU^3)$ приводит уравнение кривой к виду

$$\nu^2 = (w^3 - bU^3)^2 + 4U^6$$

в $\mathbb{P}^{1,3,1} = \{[U, \nu, w]\}$ и отождествлению с $\mathcal{C}^*$ в данной аффинной карте при $\mu = -w$, $U = 1$. В полученной реализации мы найдем, что действие задается как $[U, \nu, w] \rightarrow [-U, \nu, -w] \sim [U, -\nu, w]$, что представляет собой гиперэллиптическую инволюцию; дальнейшая факторизация приводит к кривой рода нуль.

Оставшиеся кривые $\mathcal{E}_{\pm}$ рода один идентифицируются как факторы $\mathcal{C}^*$ по действию

$$U \rightarrow \pm \frac{w}{\sqrt[6]{4 + b^2}}, \quad w \rightarrow \pm \sqrt[6]{4 + b^2} U, \quad \nu \rightarrow \nu.$$

Это действие обладает инвариантами $A = Uw$ (степени два), $B = w \pm \sqrt[6]{4 + b^2} U$ (степени один) и ν (степени три). Результирующая кривая степени шесть определяется как

$$\nu^2 = B^6 \mp 6LAB^4 + 9L^2 A^2 B^2 \mp 2L^3 A^3 - 2bA^3,$$

где, как и ранее, $L = \sqrt[6]{4 + b^2}$. Эти кривые имеют род один в $\mathbb{P}^{2,1,3} = \{[A, B, \nu]\}$. Для того чтобы завершить идентификацию с $\mathcal{E}_{\pm}$, вычислим j -инварианты этих

кривых. В аффинной части при $B \neq 0$, которая представлена как $\mathbb{C}^2$ (другие аффинные части имеют орбифолд-сингулярности, что определяет сделанный выбор), кривая имеет вид

$$Y^2 = 1 \mp 6LX + 9L^2X^2 - 2(b \pm L^3)X^3.$$

Отметим, что j -инварианты этих кривых согласуются с (5.28) и, следовательно, идентифицируются, как утверждалось выше.

Оба дифференциала dx/y и xdx/y^2 инвариантны относительно b . Это можно получить, рассматривая линейную комбинацию $dz_{\pm}/w_{\pm}$ (5.25). Последние дифференциалы инвариантны относительно симметрии кривой (5.22),

$$\mu \rightarrow \frac{L^2}{\mu}, \quad \nu \rightarrow \pm \frac{L^3\nu}{\mu^3},$$

которая порождает факторы $\mathcal{E}_{\pm}$. Бирациональное преобразование делает эту симметрию более явной⁴. Пусть

$$T = \frac{L + \mu}{L - \mu}, \quad S = \frac{8\nu}{(L - \mu)^3}, \quad \mu = L \frac{T - 1}{T + 1}, \quad \nu = \frac{L^3 S}{(T + 1)^3}.$$

Тогда (5.22) преобразуется к следующему выражению:

$$S^2 = (T - 1)^6 + 2 \frac{b}{L^3} (T^2 - 1)^3 + (T + 1)^6,$$

что, очевидно, инвариантно относительно $T \rightarrow -T$, $S \rightarrow \mp S$. Подстановка $W = T^2$ приводит канонические дифференциалы dT/S и TdT/S^2 к каноническим дифференциалам эллиптических кривых

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ : \quad S^2 &= 2 \left(1 + \frac{b}{L^3}\right) W^3 + 6 \left(5 - \frac{b}{L^3}\right) W^2 + 6 \left(5 + \frac{b}{L^3}\right) W + 2 \left(1 - \frac{b}{L^3}\right), \\ \mathcal{E}_- : \quad S^2 &= 2 \left(1 + \frac{b}{L^3}\right) W^4 + 6 \left(5 - \frac{b}{L^3}\right) W^3 + 6 \left(5 + \frac{b}{L^3}\right) W^2 + 2 \left(1 - \frac{b}{L^3}\right) W, \end{aligned}$$

которые соответствуют данной выше параметризации.

5.5. Роль высших гипергеометрических соотношений Гурса. Выше было показано, что полные абелевы интегралы кривой $\mathcal{C}$ (1.2) выражаются через гипергеометрические функции. Это также справедливо для различных кривых, данных в лемме 5.2, накрываемых кривой $\mathcal{C}$. Рассмотрение связей между периодами накрытия $\mathcal{C}$ и накрываемых кривых приводит к различным соотношениям между гипергеометрическими функциями, которые представляют собой высшие гипергеометрические тождества Гурса [26]. Гурса опубликовал подробные таблицы преобразований гипергеометрических функций вплоть до четвертого порядка, что достаточно для нашего анализа.

Простейшим примером такой связи служит накрытие $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$, для которого $\pi^*(\mu d\mu/\nu) = dx/y$ и $\pi^*(d\mu/\nu) = x dx/y^2$. Для этого примера находим

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{y} = \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\nu}, \quad (5.30)$$

⁴Мы благодарим К. Илбека за это замечание.

где как y , так и ν вычислены на первом листе. В результате замены переменных получаем, что

$$\int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\nu} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(b-2i)^{-1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; \frac{4i}{2i-b}\right).$$

Теперь левая часть уравнения (5.30) есть $-\mathcal{I}_1$ (знак минус возникает при переходе к переменным Веллштейна $y \rightarrow -w$), что было вычислено в (5.2). Сравнение двух этих представлений приводит к гипергеометрическому равенству

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; \frac{4i}{2i-b}\right) = \left(\frac{2(b-2i)}{b+\sqrt{b^2+4}}\right)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; \frac{b-\sqrt{b^2+4}}{b+\sqrt{b^2+4}}\right),$$

которое является одним из квадратичных соотношений Гурса [26]; см. также [27; раздел 2.11, формула (31)]. Другие равенства следуют из накрытий $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_\pm$; они будут описаны далее.

Заметим, что кривая (5.22) изучалась Хатчинсоном в [28] в связи с теорией автоморфных функций, ассоциированных с сингулярной тригональной кривой рода два; работа [28] является развитием более ранней работы Буркхарта [29]. Эти результаты были использованы Грава и одним из авторов [30] для решения проблемы Римана–Гильберта и ассоциированной системы Шлезингера для некоторого класса кривых с Z_N -симметрией.

5.6. Редукция Вейерштрасса. Существуют условия, при которых тета-функция, ассоциированная с матрицей периодов τ , упрощается (или допускает редукцию) таким образом, что может быть выражена через тета-функции меньших размерностей. Это происходит в том случае, когда соответствующая кривая накрывает кривую меньшего рода, но может также произойти и в случае общих тета-функций, не связанных с кривыми. Редукция может быть описана непосредственно в терминах римановой матрицы периодов (см. [31]; недавнее изложение и приложения даны в [32], [33]). Будем говорить, что риманова матрица $\Pi = \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right)$ размера $2g \times g$ допускает редукцию, если существует числовая комплексная матрица λ размера $g \times g_1$ максимального ранга, числовая комплексная матрица Π_1 размера $2g_1 \times g_1$ и целочисленная матрица M размера $2g \times 2g_1$ также максимального ранга такие, что

$$\Pi\lambda = M\Pi_1, \quad (5.31)$$

где $1 \leq g_1 < g$. Когда риманова матрица допускает редукцию, соответствующая матрица периодов может быть приведена к виду

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & Q \\ Q^T & \tau^\# \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

где Q – это матрица размера $g_1 \times (g - g_1)$ с рациональными матричными элементами и матрицы τ_1 и $\tau^\#$ имеют свойства матриц периодов. Так как матричные элементы Q рациональны, то существует диагональная матрица $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_{g-g_1})$ размера $(g - g_1) \times (g - g_1)$ с положительными целыми

элементами такая, что $(QD)_{jk} \in \mathbb{Z}$. При

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (z_1, \dots, z_{g_1}, w_1, \dots, w_{g-g_1})$$

тета-функция, ассоциированная с τ , следующим образом выражается через тета-функции меньших размерностей:

$$\theta((\mathbf{z}, \mathbf{w}); \tau) = \sum_{\substack{\mathbf{m}=(m_1, \dots, m_{g-g_1}) \\ 0 \leq m_i \leq d_i - 1}} \theta(\mathbf{z} + Q\mathbf{m}; \tau_1) \theta \begin{bmatrix} D^{-1}\mathbf{m} \\ 0 \end{bmatrix} (D\mathbf{w}; D\tau^\# D). \quad (5.33)$$

Рассматриваемая кривая допускает много редукций. Это означает, что соответствующая тета-функция может быть сведена к тета-функциям от меньшего числа переменных. Это происходит тогда, когда вектор Эрколани–Синха соответственно редуцируется, приводя к существенным упрощениям. В оставшейся части этого раздела мы опишем эти редукции и покажем, каким образом достигаются упомянутые упрощения.

Сначала опишем риманову матрицу периодов. Можно вычислить оставшиеся интегралы периодов следующим образом. Пусть

$$\int_0^\alpha du_i = \mathcal{I}_i(\alpha), \quad \int_0^\beta du_i = \mathcal{J}_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Тогда при $k = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho^k \alpha} du_{1,2} &= \rho^k \mathcal{I}_{1,2}(\alpha), & \int_0^{\rho^k \beta} du_{1,2} &= \rho^k \mathcal{J}_{1,2}(\alpha), \\ \int_0^{\rho^k \alpha} du_3 &= \rho^{2k} \mathcal{I}_3(\alpha), & \int_0^{\rho^k \beta} du_3 &= \rho^{2k} \mathcal{J}_3(\alpha), \\ \int_0^{\rho^k \alpha} du_4 &= \mathcal{I}_4(\alpha), & \int_0^{\rho^k \beta} du_4 &= \mathcal{J}_4(\alpha), \end{aligned}$$

где, как и ранее, предполагается, что интегралы $\mathcal{I}_*$ и $\mathcal{J}_*$ вычислены на первом листе. Мы уже вычислили $\mathcal{I}_1(\alpha)$ и $\mathcal{J}_1(\alpha)$. Ранее было показано, что интегралы $\mathcal{I}_*$ и $\mathcal{J}_*$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\alpha) &= -\frac{2\pi\alpha}{3\sqrt{3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\alpha^6\right) = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha}{(1+\alpha^6)^{1/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, t\right), \\ \mathcal{J}_1(\alpha) &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{1}{\alpha^6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha}{(1+\alpha^6)^{1/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, 1-t\right), \\ \mathcal{I}_2(\alpha) &= \frac{4\pi^2}{9\Gamma(2/3)^3} \frac{\alpha}{(1+\alpha^6)^{1/3}}, & \mathcal{J}_2(\alpha) &= -\frac{4\pi^2}{9\Gamma(2/3)^3} \frac{\alpha}{(1+\alpha^6)^{1/3}}, \\ \mathcal{I}_3(\alpha) &= \frac{2\pi\alpha^2}{3\sqrt{3}} {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; 1; -\alpha^6\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^6)^{2/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, t\right), \\ \mathcal{J}_3(\alpha) &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\alpha^2} {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{\alpha^6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^6)^{2/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, 1-t\right), \\ \mathcal{I}_4(\alpha) &= \alpha^3 {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, 1; \frac{4}{3}; -\alpha^6\right), & \mathcal{J}_4(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha^3} {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, 1; \frac{4}{3}; -\frac{1}{\alpha^6}\right), \end{aligned}$$

где $t = \alpha^6/(1+\alpha^6)$.

Заметим, что соотношения

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\mathcal{I}_1(\alpha)}{\mathcal{I}_1(\alpha)} = -\frac{\mathcal{I}_3(\alpha)}{\mathcal{I}_3(\alpha)}, \quad \mathcal{I}_2(\alpha) + \mathcal{J}_2(\alpha) = 0, \quad \mathcal{I}_4(\alpha) - \mathcal{J}_4(\alpha) = \mathcal{I}_2(\alpha) \quad (5.34)$$

следуют из приведенных формул.

Векторы $\mathbf{x}, \dots, \mathbf{d}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -(2\mathcal{I}_1 + \mathcal{J}_1)\rho - 2\mathcal{I}_1 - \mathcal{J}_1 \\ (\mathcal{I}_1 - \mathcal{J}_1)\rho + \mathcal{I}_1 + 2\mathcal{J}_1 \\ (\mathcal{I}_1 + 2\mathcal{J}_1)\rho + \mathcal{I}_1 - \mathcal{J}_1 \\ 3(\mathcal{I}_1 - \mathcal{J}_1)\rho + 3\mathcal{J}_1 \end{pmatrix}, & \mathbf{b} &= \mathcal{I}_2 \begin{pmatrix} 1 + 2\rho \\ -2 - \rho \\ 1 - \rho \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} (\mathcal{I}_3 + 2\mathcal{J}_3)\rho + \mathcal{I}_3 - \mathcal{J}_3 \\ (\mathcal{I}_3 - \mathcal{J}_3)\rho + \mathcal{I}_3 + 2\mathcal{J}_3 \\ -(2\mathcal{I}_3 + \mathcal{J}_3)\rho - 2\mathcal{I}_3 - \mathcal{J}_3 \\ 3(\mathcal{I}_3 - \mathcal{J}_3)\rho + 3\mathcal{J}_3 \end{pmatrix}, & \mathbf{d} &= (\rho - 1)\mathcal{I}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{b} = \mathbf{x}^T H \mathbf{c} = \mathbf{x}^T H \mathbf{d} = 0.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} -1 - 2\rho - (2 + \rho)\mathcal{R} & 1 + 2\rho & 1 + 2\rho + (1 - \rho)\mathcal{R} & -1 + \rho \\ 2 + \rho + (1 - \rho)\mathcal{R} & -2 - \rho & 1 - \rho - (2 + \rho)\mathcal{R} & -1 + \rho \\ -1 + \rho + (1 + 2\rho)\mathcal{R} & 1 - \rho & -2 - \rho + (1 + 2\rho)\mathcal{R} & -1 + \rho \\ 3 + 3\rho - 3\rho\mathcal{R} & 0 & -3\rho - 3(1 + \rho)\mathcal{R} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & & & \\ & \mathcal{I}_2 & & \\ & & \mathcal{I}_3 & \\ & & & \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 2 + \rho + (1 - \rho)\mathcal{R} & 1 - \rho & 1 - \rho - (2 + \rho)\mathcal{R} & 2 + \rho \\ -1 + \rho + (1 + 2\rho)\mathcal{R} & 1 + 2\rho & -2 - \rho + (1 + 2\rho)\mathcal{R} & 2 + \rho \\ -1 - 2\rho - (2 + \rho)\mathcal{R} & -2 - \rho & 1 + 2\rho + (1 - \rho)\mathcal{R} & 2 + \rho \\ 3 - 3(1 + \rho)\mathcal{R} & 0 & 3 - 3\rho\mathcal{R} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & & & \\ & \mathcal{I}_2 & & \\ & & \mathcal{I}_3 & \\ & & & \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Условия Эрколани–Синха

$$\mathbf{n}^T \mathcal{A} + \mathbf{m}^T \mathcal{B} = 6\chi^{1/3}(1, 0, 0, 0),$$

записанные для векторов

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 - n_1 \\ -m_1 \\ 2n_1 - m_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ -n_1 \\ n_1 - m_1 \\ -3n_1 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

приводят к уравнениям

$$\mathcal{R} = -\frac{2n_1 - m_1}{m_1 + n_1}, \quad \mathcal{J}_1 = \frac{\chi^{1/3}}{m_1 - 2n_1}, \quad (5.38)$$

которые были получены ранее. Отметим, что непосредственно вычисленное соотношение (3.20)

$$\mathcal{M} \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{smallmatrix} \right) = \overline{\left(\begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{smallmatrix} \right)} \cdot T$$

приводит к нетривиальной проверке всего метода вычислений.

Интегралы между бесконечностями могут быть сведены к введенным стандартным интегралам, если записать

$$\int_{\infty_i}^{\infty_j} d\mathbf{u} = \int_{\tau(0_{\tau(i)})}^{\tau(0_{\tau(j)})} d\mathbf{u} = \int_{0_{\tau(i)}}^{0_{\tau(j)}} \tau^*(d\mathbf{u}) = \overline{\int_{0_{\tau(i)}}^{0_{\tau(j)}} d\mathbf{u}} \cdot T = \left(\overline{\int_{0_{\tau(i)}}^{\lambda_*} d\mathbf{u}} - \overline{\int_{0_{\tau(j)}}^{\lambda_*} d\mathbf{u}} \right) \cdot T,$$

где обозначено $\tau(\infty_i) = 0_{\tau(i)}$ и λ_* – это одна из точек ветвления. Вычисления приводят к выражениям

$$\begin{aligned} \int_{\infty_1}^{\infty_2} d\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} (\rho - 1) \mathcal{J}_1 \\ -(\rho^2 - 1) \mathcal{J}_4 \\ (\rho^2 - 1) \mathcal{J}_3 \\ -(\rho^2 - 1) \mathcal{J}_2 \end{pmatrix}, & \int_{\infty_1}^{\infty_3} d\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} (\rho^2 - 1) \mathcal{J}_1 \\ -(\rho - 1) \mathcal{J}_4 \\ (\rho - 1) \mathcal{J}_3 \\ -(\rho - 1) \mathcal{J}_2 \end{pmatrix}, \\ \int_{\infty_2}^{\infty_3} d\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} (\rho^2 - \rho) \mathcal{J}_1 \\ -(\rho - \rho^2) \mathcal{J}_4 \\ (\rho - \rho^2) \mathcal{J}_3 \\ -(\rho - \rho^2) \mathcal{J}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Рассматриваемая риманова матрица допускает редукцию относительно любого из столбцов. Мы продемонстрируем это на примере первого столбца и используем далее полученный результат; подобным образом могут быть рассмотрены и другие столбцы. Отсюда и из (4.3) следует, что

$$\Pi \lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oint_{\mathbf{a}_i} du_1 \\ \oint_{\mathbf{b}_i} du_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(H\mathbf{n} + \rho^2\mathbf{m}) \\ \xi(\rho\mathbf{n} + H\mathbf{m}) \end{pmatrix} = \xi M \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

где M – это целая матрица размера $2g \times 2$:

$$M^T = \begin{pmatrix} n_1 - m_1 & n_2 - m_2 & n_3 - m_3 & -n_4 - m_4 & m_1 & m_2 & m_3 & -m_4 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & -m_4 & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Тогда для каждых двух векторов Эрколани–Синха $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ получаем

$$M^T J M = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \mathbf{n} \cdot H \mathbf{n} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{m} \cdot H \mathbf{m} = \sum_{j=1}^4 (\varepsilon_j n_j^2 - n_j m_j + \varepsilon_j m_j^2). \quad (5.42)$$

Возникающее здесь число d часто называют числом Хопфа. В частности, если $d \neq 0$, то ранг M максимален и, следовательно, риманова матрица допускает редукцию.

ТЕОРЕМА 5.4. *В случае симметричного монополя редукция относительно первого столбца может быть проведена посредством вектора (5.40), компоненты которого даны в (5.6) при условии $(n_1, m_1) = 1$. Тогда $d = 2(n_1 + m_1)(m_1 - 2n_1)$ и при $d \neq 0$ существует такой элемент σ симплектической группы $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, что*

$$\tau'_b = \sigma \circ \tau_b = \begin{pmatrix} \frac{(\rho+2)}{d} & \frac{\alpha}{d} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d}{\alpha} & & & & \\ \frac{\alpha}{d} & & & & \\ 0 & & \tau^\# & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Полагая $pt_1 + qn_1 = 1$, находим

$$\alpha = \gcd(m_1 + 4n_1 - q[m_1 - 2n_1], n_1 - 2m_1 - p[m_1 - 2n_1]). \quad (5.44)$$

Если $\alpha = 1$, то дальнейшее симплектическое преобразование приводит к следующему упрощению: $\tau'_{11} = \rho/d$.

Под действием σ вектор Эрколани–Синха преобразуется так:

$$\sigma \circ U = \sigma \circ (\mathbf{m}^T + \mathbf{n}^T \tau_b) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right). \quad (5.45)$$

Доказательство теоремы является конструктивным и использует результаты Крацера, Вейерштрасса и Ковалевской. Мартенс (см. [34], [31]) предъявил алгоритм построения σ , который мы применили, используя Maple. Поскольку σ зависит от теоретико-числовых свойств n_1 и m_1 , то вид преобразования описать затруднительно и мы просто приводим полученный результат (хотя явный пример будет дан в следующем разделе). Примечательно, однако, простая и универсальная форма преобразованного вектора Эрколани–Синха. Этот факт существенен для последующего анализа.

Используя (5.33), (5.43) и полагая $D = \text{Diag}(d, 1, 1)$, получаем⁵

$$\begin{aligned} \theta((z, \mathbf{w}); \tau'_b) &= \sum_{m=0}^{d-1} \theta\left(z + \frac{m\alpha}{d}; \frac{\rho+2}{d}\right) \theta \begin{bmatrix} \frac{m}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (D\mathbf{w}; D\tau^\# D) \\ &= \sum_{m=0}^{d-1} \theta \begin{bmatrix} \frac{m}{d} \\ 0 \end{bmatrix} (dz; d(\rho+2)) \theta\left(\left(w_1 + \frac{m\alpha}{d}, w_2, w_3\right); \tau^\#\right), \end{aligned}$$

⁵Если $\gcd(\alpha, d) \neq 1$, то множитель, меньший $d_1 = d$, появится в формуле, что приведет к меньшему числу слагаемых в сумме, т.е. $0 \leq m \leq d_1 - 1$.

где в правой части находятся одномерные и трехмерные тета-функции. Сравнение (2.26) и (5.45) приводит к заключению, что тета-функциональная зависимость функции Бейкера–Ахиезера дается исключительно якобиевскими тета-функциями. Дальнейшие упрощения получаются в результате использования тождества

$$\theta \left[\begin{matrix} \frac{\epsilon}{d} \\ \epsilon' \end{matrix} \right] (dz; d\tau) = \mu(\tau) \prod_{l=0}^{d-1} \theta \left[\begin{matrix} \frac{\epsilon}{d} \\ \frac{\epsilon'}{d} + \frac{d - (1 + 2l)}{2d} \end{matrix} \right] (z; \tau),$$

в котором $\mu(\tau)$ – постоянная. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5.5. *Для симметрического монополя тета-функциональная z -зависимость в (2.26) описывается якобиевскими тета-функциями.*

До сих пор мы не обсуждали последнее условие Хитчина для симметричных монополей. Приведенная теорема сводит проблему к исследованию нулей эллиптических функций.

Рис. 4. Случай $n_1 = 2, m_1 = 1$

На рис. 4 приведены мнимая и действительная части тета-функции, находящейся в знаменателе тета-функционального выражения для $Q_0(z)$ при $n_1 = 2, m_1 = 1$ и симметричном монополе в случае $b = 0$ Рамануджана (рис. 5 соответствует случаю $n_1 = 1, m_1 = 1$). Обе функции обращаются в нуль при $z = 0$ и $z = 2$, как это должно быть, но, кроме этого, имеется еще два других нуля при $z = 2/3$ и $z = 4/3$. Вычисляя тета-функцию в соответствующей точке в числителе, убеждаемся что она не обращается в нуль и поэтому $Q_0(z)$ порождает нежелательные полюсы в интервале $z \in (0, 2)$. Таким образом, при $n_1 = 2, m_1 = 1$ кривая не порождает монополь.

Аналогичный анализ случаев $n_1 = 4, m_1 = -1$ и $n_1 = 5, m_1 = -2$ также приводит к нежелательным нулям тета-функций и поэтому только тетраэдральный случай из таблицы симметричных 3-монополей удовлетворяет требуемым

 Рис. 5. Случай $n_1 = 1$, $m_1 = 1$

условиям обращения в нуль. Таким образом, эти случаи, как и ряд других, приводят к следующей гипотезе

ГИПОТЕЗА 5.6. Число нулей знаменателя $Q_0(z)$ симметрического монополя равно $2(|n_1| - 1)$ и, следовательно, тетраэдрально симметричный монополю является единственным монополем в этом классе кривых.

Хотя известны другие подходы к изучению монополей, позволяющие доказать, что тетраэдрально симметричный монополю является единственным в классе симметричных монополей, нам неизвестна удовлетворительная теория, позволяющая определить число действительных пересечений линии (интервала) с тета-дивизором. Развитие такой теории было бы весьма желательным. Наши результаты, однако, позволяют сказать больше о тетраэдрально симметричном монополе. Прежде чем рассмотреть подробно именно этот случай в следующем разделе, мы опишем, как вычислить оставшиеся величины, входящие в формулу для $Q_0(z)$.

5.7. Вычисление $\nu_i - \nu_j$. Здесь мы следуем п. 5.4. Мы вычисляем $\mathfrak{a}$ -периоды дифференциала dr_1 способом, ранее применявшимся для вычисления периодов интегралов, вводим интегралы на первом листе

$$\mathcal{K}_1(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{z^4 dz}{3w^2}, \quad \mathcal{L}_1(\beta) = \int_0^\beta \frac{z^4 dz}{3w^2}, \quad \beta = -\frac{1}{\alpha}. \quad (5.46)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{K}_1(\rho^k \alpha) = \rho^{2k} \mathcal{K}_1(\alpha), \quad \mathcal{L}_1(\rho^k \beta) = \rho^{2k} \mathcal{L}_1(\beta).$$

Тогда

$$\mathcal{K}_1 = -\frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \alpha^5 {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\alpha^6\right), \quad \mathcal{L}_1 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \frac{1}{\alpha^5} {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\frac{1}{\alpha^6}\right). \quad (5.47)$$

Устанавливаем, как и ранее в случае голоморфных дифференциалов, что

$$\begin{aligned} y_1 &= (\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1)\rho - \mathcal{K}_1 + \mathcal{L}_1, & y_2 &= (\mathcal{K}_1 - \mathcal{L}_1)\rho + 2\mathcal{K}_1 + \mathcal{L}_1, \\ y_3 &= -(2\mathcal{K}_1 + \mathcal{L}_1)\rho - \mathcal{K}_1 - 2\mathcal{L}_1, & y_4 &= 3(\mathcal{K}_1 - \mathcal{L}_1)\rho + 3\mathcal{K}_1. \end{aligned}$$

Соотношение Лежандра (3.22) обеспечивает нетривиальную проверку совместности наших вычислений. Оно может быть записано в виде следующего гипергеометрического равенства:

$$\begin{aligned} \frac{27}{4\sqrt{3}\pi} &= \alpha^4 {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{1}{\alpha^6}\right) {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\alpha^6\right) \\ &+ \frac{1}{\alpha^4} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1; -\alpha^6\right) {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\frac{1}{\alpha^6}\right), \end{aligned}$$

которое может быть установлено стандартными средствами.

Для того чтобы вычислить $\nu_i - \nu_j$, используя (3.24), введем дифференциал второго типа

$$s = d\left(\frac{w}{z}\right)(P) - 3dr_1(P) \equiv \frac{dz}{z^2w^2} \quad (5.48)$$

с полюсом второго порядка в нуле на всех листах,

$$\left. \frac{dz}{z^2w^2} \right|_{P=0_k} = \left\{ \frac{1}{w(0_k)^2} \frac{1}{\xi^2} + \frac{2b}{3}\xi + \dots \right\} d\xi = \left\{ -\frac{w(0_k)}{\xi^2} + \frac{2b}{3}\xi + \dots \right\} d\xi.$$

(Здесь учитывается то, что $w(0_k)^3 = -1$, $k = 1, 2, 3$.) Тогда

$$\nu_i - \nu_j = 3\mathbf{y} \cdot \int_{\infty_i}^{\infty_j} \mathbf{v} + \int_{\infty_i}^{\infty_j} \frac{dz}{z^2w^2}. \quad (5.49)$$

Последний интеграл в (5.49) может быть выражен через гипергеометрические функции следующим образом. Сначала заметим, что

$$\int_{\infty_i}^{\infty_j} \frac{dz}{z^2w^2} = (\rho_i - \rho_j) \int_{\alpha}^{\infty_1} \frac{dz}{z^2w^2},$$

где $\rho_i = \rho^{i-1}$. Далее, для интегралов на первом листе имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dz}{z^2w^2} &= \frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \frac{1}{\alpha^5} {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\frac{1}{\alpha^6}\right) = \mathcal{L}_1, \\ \int_{-1/\alpha}^{\infty} \frac{dz}{z^2w^2} &= -\frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \alpha^5 {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}; 2; -\alpha^6\right) = \mathcal{K}_1. \end{aligned}$$

§ 6. Тетраэдральный 3-монополь

Кривая тетраэдрально симметричного монополя имеет вид

$$\eta^3 + \chi(\zeta^6 + 5\sqrt{2}\zeta^3 - 1) = 0. \quad (6.1)$$

В этом случае можно положить

$$t = \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{18}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{J}_1(\alpha) = -2\mathcal{J}_1(\alpha).$$

Для этих значений удастся вычислить явно различные гипергеометрические функции. Используя тождество Рамануджана (5.15), а также стандартное квадратичное преобразование гипергеометрической функции

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = (1 + \sqrt{z})^{-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{4\sqrt{z}}{(1 + \sqrt{z})^2}\right),$$

(справедливое для $|z| < 1$, $\arg z < \pi$), находим, что

$${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, t\right) = \frac{3^{5/4}}{4} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right).$$

(Для того чтобы проверить это, заметим, что $p = 4 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ — это соответствующее значение, приводящее к нашему t в (5.15).) Теперь эта последняя гипергеометрическая функция связана с эллиптическим интегралом, который можно вычислить (см. [25; с. 86]),

$$K\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{3^{1/4}4\sqrt{\pi}}.$$

Объединяя эти результаты, окончательно получаем

$${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, t\right) = \frac{3\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{8\pi^{3/2}}. \quad (6.2)$$

Тогда из (5.12) находим, что

$$\chi^{1/3} = -2 \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha}{(1 - \alpha^6)^{1/3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1, t\right) = -\frac{1}{2^{1/6}\sqrt{3}} \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{2\sqrt{3}\pi^{1/2}}. \quad (6.3)$$

Это равенство согласуется с результатом [10]. Заметим также, что, используя равенство Гурса [26; формула (39)]

$${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, x\right) = (1 - 2x)^{-1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}\right),$$

мы устанавливаем результат [10], полученный численно, а именно,

$${}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{25}\right) = \frac{5^{1/3}3}{8} \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi^{3/2}}.$$

Используя эти результаты, а также результаты предыдущего раздела, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.1. Матрица периодов τ тетраэдрального 3-монополя, для которого $b = 5\sqrt{2}$, может быть приведена к виду

$$\tau = \frac{1}{98} \begin{pmatrix} -73 + 51i\sqrt{3} & 9 - 13i\sqrt{3} & 15 + 11i\sqrt{3} & 42 - 28i\sqrt{3} \\ 9 - 13i\sqrt{3} & -34 + 60i\sqrt{3} & 2i\sqrt{3} - 24 & 21 + 35i\sqrt{3} \\ 15 + 11i\sqrt{3} & 2i\sqrt{3} - 24 & -40 + 36i\sqrt{3} & -63 - 7i\sqrt{3} \\ 42 - 28i\sqrt{3} & 21 + 35i\sqrt{3} & -63 - 7i\sqrt{3} & 49 + 49i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{11}{49} + \frac{51}{49}\rho & -\frac{2}{49} - \frac{13}{49}\rho & \frac{13}{49} + \frac{11}{49}\rho & \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\rho \\ -\frac{2}{49} - \frac{13}{49}\rho & \frac{13}{49} + \frac{60}{49}\rho & -\frac{11}{49} + \frac{2}{49}\rho & \frac{4}{7} + \frac{5}{7}\rho \\ \frac{13}{49} + \frac{11}{49}\rho & -\frac{11}{49} + \frac{2}{49}\rho & -\frac{2}{49} + \frac{36}{49}\rho & -\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\rho \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\rho & \frac{4}{7} + \frac{5}{7}\rho & -\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\rho & 1 + \rho \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Выше было показано, что кривая симметрического монополя $\mathcal{C}$ накрывает два эквиангармонических тора $\mathcal{E}_{1,2}$. Для значения параметра $b = 5\sqrt{2}$ кривая накрывает еще три эквиангармонические эллиптические кривые. Они могут быть описаны следующим образом. При $i = 3, 4, 5$ определим $\pi_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_i$ по формулам

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -\frac{i}{2^{4/3}} \frac{(1 + z\alpha)^4 + (z - \alpha)^4}{\alpha^2 w^2}, & \nu_3 &= \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \alpha^2)(z^2 + 1)}{(z - \alpha)(z\alpha + 1)}, \\ \mu_4 &= -2^{2/3} \frac{(1 + z\alpha)^4 + (z - \alpha)^4}{2\alpha w(1 + z\alpha)(z - \alpha)}, & \nu_4 &= 2^{2/3} \alpha w \frac{(1 + z\alpha)^4 - (z - \alpha)^4}{(z - \alpha)^3(z\alpha + 1)^3}, \\ \mu_5 &= -\sqrt{3}i \frac{(z^2 + 1)(z^2 - 2\sqrt{2}z - 1)}{(z^2 + \sqrt{2}z - 1)^2}, & \nu_5 &= -4\sqrt{6}i \frac{w(z^4 - \sqrt{2}z^3 + 3z^2 + \sqrt{2}z + 1)}{(z^2 + \sqrt{2}z - 1)^3}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &: \{(\nu_3, \mu_3) \mid \nu_3^2 - \mu_3^3 - 2i = 0\}, \\ \mathcal{E}_4 &: \{(\nu_4, \mu_4) \mid \nu_4^2 - \mu_4(\mu_4^3 + 4) = 0\}, \\ \mathcal{E}_5 &: \{(\nu_5, \mu_5) \mid \nu_5^3 + 24\sqrt{6}i(\mu_5^2 - 1)^2 = 0\}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

и мы приходим к следующему соотношению между голоморфными дифференциалами:

$$du_2 = \frac{zdz}{w^2} = \frac{1}{2^{5/3}\sqrt{3}} \left\{ (i - 1)\pi_3^* \left(\frac{d\mu_3}{\nu_3} \right) + \pi_4^* \left(\frac{d\mu_4}{\nu_4} \right) \right\}, \quad (6.7)$$

$$du_1 = \frac{dz}{w} = \pi_5^* \left(\frac{d\mu_5}{\nu_5} \right). \quad (6.8)$$

Последнее рациональное отображение было введено в [10] и является важным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -периодами дифференциала du_1 . Обозначим через X и Y $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -периоды эллиптического дифференциала $d\mu_5/\nu_5$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = M_5 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

где M_5 – матрица такая, что

$$M_5^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

удовлетворяющая условию

$$M_5^T \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ -1_4 & 0_4 \end{pmatrix} M_5 = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Рис. 6. Базис гомологий эллиптической кривой

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем базис гомологий для эллиптической кривой, как это указано на рис. 6, и положим

$$\mathcal{K}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu_5}{\nu_5}.$$

Тогда

$$X = (2 + \rho)\mathcal{K}(\alpha), \quad Y = -(2\rho + 1)\mathcal{K}(\alpha). \quad (6.12)$$

Из формулы редукции (6.8) можно заключить, что

$$\int_{\alpha\rho}^{\alpha\rho^2} \frac{dz}{w} = \mathcal{K}(\alpha). \quad (6.13)$$

Следовательно, получаем

$$2\mathcal{J}_1(\alpha) + \rho\mathcal{J}_1(\alpha) = \rho\mathcal{K}(\alpha), \quad -2\rho\mathcal{J}_1(\alpha) - \mathcal{J}_1(\alpha) = \mathcal{K}(\alpha). \quad (6.14)$$

Уравнения (6.12) и (6.14) позволяют выразить

$$\mathcal{J}_1(\alpha) = -\frac{Y}{3}, \quad \rho\mathcal{J}_1(\alpha) = -\frac{X}{3} \quad (6.15)$$

и сравнение с (5.36) приводит к данной выше M_5 . Условие (6.11) проверяется непосредственно. Число четыре, появляющееся в (6.11), означает, что накрытие π_5 , определенное в (6.5), имеет степень четыре.

Заметим, что матрица M_5 в предложении 6.2 получена из M , определенной в (5.41) формулой $M_5 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M$, что просто отражает наш выбор базиса гомологий.

Таким образом, обсуждается редукция из предыдущего раздела. В самом деле, при

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

находим, что матрица τ из (6.4) преобразуется к следующему виду:

$$\tau' = \sigma \circ \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5\rho}{4} & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 2\rho & \rho \\ 0 & 0 & \rho & \frac{2}{7} + \frac{6\rho}{7} \end{pmatrix}.$$

Комбинируя этот результат с теоремой 5.4, можно редуцировать в случае тетраэдрального монополя наше выражение для $Q_0(z)$ к якобиевым эллиптическим функциям.

§ 7. Заключение

Несмотря на то, что в течение ряда лет монополи изучались с различных точек зрения, в настоящее время известно сравнительно немного явных решений. При этом остается нерешенной центральная проблема – проблема построения кривых, удовлетворяющих трансцендентным условиям Хитчина. В статье показано, что использование связи с интегрируемыми системами может привести к эффективному решению этой проблемы. Однако изложенное представляет собой только первые шаги на пути реализации такого подхода.

В статье показано, как трансцендентные условия некоторого класса могут быть сведены к некоторой теоретико-числовой проблеме. Применяя нашу технику за пределами известного случая монополей заряда два, мы рассмотрели специальный класс монополей заряда три (1.1), который содержит тетраэдрально симметричный монополь. Соответствующее семейство кривых обладает различными арифметическими свойствами, облегчающими аналитическое интегрирование. В частности, матрица периодов может быть явно выражена только через четыре определенных интеграла. Используя этот факт, удастся разрешить условия Эрколани–Синха, эквивалентные трансцендентному

условию Хитчина H2), т.е. условию тривиальности некоторого линейного расщепления над спектральной кривой (предложение 4.1). Предложенный подход сводит проблему к определению соответствующих четырех периодов, удовлетворяющих некоторым свойствам рациональности. (Наше рассмотрение допускает также и другой подход к определению кривой монополя: можно сначала обеспечить выполнение условий Эрколани–Синха, эквивалентных H2), и затем наложить условие вещественности Хитчина на полученную кривую.) Для того чтобы продвинуться в этой мало исследованной области, мы сконцентрировали внимание на объекте, названном нами “симметричным 3-монополем, спектральная кривая которого имеет вид (1.2)”. В этом случае необходимое число независимых интегралов уменьшается с четырех до двух, каждый из которых является гипергеометрическим, и условие рациональности накладывается на их отношение (предложение 5.1). Включение в рассмотрение результатов Рамануджана связано с тем, что ответ на последний вопрос сводится к применению теории чисел и нахождению решений алгебраических уравнений, зависящих от упомянутого рационального числа. Примеры таких решений, включая случай тетраэдра, предъявлены. Далее были изучены симметрии и накрытия этих симметрических кривых и их связь с высшими гипергеометрическими соотношениями Гурса. Получив множество предполагаемых кривых, мы продвинулись в вычислении оставшихся и необходимых для конструкции интегралов. В результате применения теории редукции Вейерштрасса–Пуанкаре было обнаружено, что вектор Эрколани–Синха преобразуется к универсальному виду таким образом, что z -зависимость тета-функций для симметрического монополя сводится к эллиптическим функциям (теоремы 5.4, 5.5). Поэтому вопрос об окончательном выборе допустимой спектральной кривой сводится к вопросу о нулях эллиптических функций. Дальнейшее продвижение ограничено отсутствием теории, позволяющей определить число пересечений интервала линейной обмотки, $Ux + K$, $x \in (0, 2)$, и тета-дивизора. Численный анализ нулей тета-функции приводит к универсальной гипотезе 5.6, предполагающей, что среди симметрических 3-монополей только тетраэдрально симметричный монополю имеет требуемые нули. Параграф 6 был посвящен тетраэдрально симметричному монополю заряда три. В этом случае удалось существенно упростить известные выражения для матрицы периодов спектральной кривой и также доказать одно соотношение, приведенное (в виде гипотезы) в [24]. Здесь приведено явное отображение и произведена полная редукция к эллиптическим функциям. Окончательное сравнение с данными Нама работы [24] будет проведено в другой работе.

Настоящая работа была задумана в 2001 во время EPSRC-программы “Интегрируемые системы” в Институте Ньютона в Кембридже и была поддержана на начальной стадии Г. Флашка и Н. Эрколани. Авторы благодарят EPSRC и MISGAM за гранты, позволившие им организовать встречи в Эдинбурге и Триесте (SISSA), которые способствовали усовершенствованию настоящей работы, а также Институт высших исследований в Дельменхорсте (HWK) за организацию встречи, во время которой был подготовлен окончательный вариант статьи. Авторы благодарят Н. Хитчина и П. Саттклифа за их комментарии

относительно монополей, Д. Калдерванка, М. Рейда, Р. Томаса и А. Трейбиха за их советы в области геометрии и алгебраической геометрии, Р. Видунаса и А. О. Даалхуиса за ссылки на работы по гипергеометрическим функциям, М. Эггара и К. Мацумото за помощь при обсуждении топологических аспектов рассмотренной кривой, Е. Белоколов за многочисленные обсуждения редукции Вейерштрасса–Пуанкаре, К. Илбека, Т. Грава, Ю. Федорова, Д. МакКая и С. Ричардсона за обсуждения римановых поверхностей.

Приложение А. Тета-функции

При $r \in \mathbb{N}$ каноническая риманова тета-функция определяется так:

$$\theta(\mathbf{z}; \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r} \exp\{i\pi \mathbf{n}^T \tau \mathbf{n} + 2i\pi \mathbf{z}^T \mathbf{n}\}. \quad (\text{A.1})$$

Тета-функция голоморфна на $\mathbb{C}^r \times \mathbb{S}^r$ и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\theta(\mathbf{z} + \mathbf{p}; \tau) = \theta(\mathbf{z}; \tau), \quad \theta(\mathbf{z} + \mathbf{p}\tau; \tau) = \exp\{-i\pi(\mathbf{p}^T \tau \mathbf{p} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{p})\} \theta(\mathbf{z}; \tau), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^r. \quad (\text{A.2})$$

Риманова тета-функция $\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau)$ с характеристиками $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) &= \exp\{i\pi(\mathbf{a}^T \tau \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T(\mathbf{z} + \mathbf{b}))\} \theta(\mathbf{z} + \tau \mathbf{a} + \mathbf{b}; \tau) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r} \exp\{i\pi(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T \tau (\mathbf{n} + \mathbf{a}) + 2i\pi(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T(\mathbf{z} + \mathbf{b})\}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^r \end{aligned}$$

Это также записывается в виде

$$\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) = \theta \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z}; \tau).$$

Для произвольных $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^r$ и $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{Q}^r$ справедлива следующая формула:

$$\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z} + \mathbf{a}'\tau + \mathbf{b}'; \tau) = \exp\{-i\pi \mathbf{a}'^T \tau \mathbf{a}' - 2i\pi \mathbf{a}'^T \mathbf{z} - 2i\pi(\mathbf{b} + \mathbf{b}')^T \mathbf{a}'\} \theta_{\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}'}(\mathbf{z}; \tau). \quad (\text{A.3})$$

Функция $\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0}; \tau)$ называется *тета-константой с характеристиками $\mathbf{a}, \mathbf{b}$* . Имеем

$$\theta_{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) = \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(-\mathbf{z}; \tau), \quad \theta_{\mathbf{a} + \mathbf{p}, \mathbf{b} + \mathbf{q}}(\mathbf{z}; \tau) = \exp(2i\pi \mathbf{a}^T \mathbf{q}) \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau).$$

Следующая формула преобразования приведена в [35; с. 85, с. 176].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А1. Для любых

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Q}^{2g}$ положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathfrak{g}^{-1} + \frac{1}{2}(\text{diag}(CD^T), \text{diag}(AB^T)), \\ \varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathfrak{g}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{a}D^T B\mathbf{a}^T - 2\mathbf{a}B^T C\mathbf{b}^T + \mathbf{b}C^T A\mathbf{b}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}D^T - \mathbf{b}C^T)^T \text{diag}(AB^T), \end{aligned}$$

где $\text{diag}(A)$ – это вектор-строка, образованная диагональными элементами A . Тогда для каждого $\mathfrak{g} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ имеем

$$\begin{aligned} \theta_{\mathfrak{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})}(0; (A\tau_{\mathfrak{b}} + B)(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{-1}) \\ = \varkappa(\mathfrak{g}) \exp(2\pi i \varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathfrak{g})) \det(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{1/2} \theta_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(0; \tau_{\mathfrak{b}}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где $\varkappa(\mathfrak{g})^2$ – это корень четвертой степени из единицы, зависящий только от матрицы $\mathfrak{g}$, в то время как

$$\begin{aligned} \theta_{\mathfrak{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})}(z(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{-1}; (A\tau_{\mathfrak{b}} + B)(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{-1}) \\ = \mu \exp(i\pi z(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{-1} C z^T) \det(C\tau_{\mathfrak{b}} + D)^{1/2} \theta_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(z; \tau_{\mathfrak{b}}), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

μ – это комплексное число, не зависящее от τ и z , такое, что $|\mu| = 1$.

Вектор римановых констант. Вектор римановых констант определяется при решении проблемы обращения Якоби

$$\theta\left(\varphi(P) - \varphi\left(\sum_{i=1}^g Q_i\right) - \mathbf{K}\right) = 0.$$

Такое соглашение относительно $\mathbf{K}$ было предложено Фаркашем и Кра в [19] и отличается знаком от принятого Мамфордом [36]; знак выбирается в записи явной формулы для $\mathbf{K}$, как в [19; формула (2.4.1)]. Тогда

$$(K_Q)_j = \frac{1}{2}\tau_{jj} - \sum_k \oint_{\mathfrak{a}_k} \omega_k(P) \int_Q^P \omega_j = \frac{1}{2}(\tau_{jj} + 1) - \sum_{k \neq j} \oint_{\mathfrak{a}_k} \omega_k(P) \int_Q^P \omega_j. \quad (\text{A.6})$$

Вектор римановых констант зависит от базиса гомологий и базисной точки отображения Абеля Q . При изменении базисной точки $\varphi_Q \rightarrow \varphi_{Q'}$, справедливо равенство $K_Q = K_{Q'} + \varphi_{Q'}(Q^{g-1})$. При этом

$$\varphi_Q(\text{Div}(K_{\mathcal{C}})) = -2K_Q. \quad (\text{A.7})$$

Тета-характеристики. Множество Σ классов дивизоров D таких, что $2D = K_{\mathcal{C}}$ – канонический класс, называется множеством *тета-характеристик кривой* $\mathcal{C}$. Множество Σ является главным однородным пространством для группы J_2 , т.е. группы точек 2-кручений группы $\text{Pic}^0(\mathcal{C})$ линейных расслоений нулевой степени над $\mathcal{C}$. Эквивалентно тета-характеристики могут быть определены как точки 2-кручений якобиана $J_2 = \frac{1}{2}\Lambda/\Lambda$. Геометрически, если ξ – это голоморфное линейное расслоение над $\mathcal{C}$ такое, что ξ^2 голоморфно эквивалентно $K_{\mathcal{C}}$, то дивизор ξ – это тета-характеристика. Если L – голоморфное

линейное расслоение порядка два, т.е. L^2 голоморфно тривиально, то дивизор $\xi \otimes L$ также является тета-характеристикой. Таким образом, имеется $|J_2| = 2^{2g}$ тета-характеристик.

Можно рассматривать $J_2 = \{v \in \text{Pic}^0(\mathcal{C}) \mid 2v = 0\}$ как векторное пространство размерности $2g$ над $\mathbb{F}_2$. Это векторное пространство обладает невырожденной симплектической (и, следовательно, симметричной, поскольку поле $-\mathbb{F}_2$) формой, определенной вейлевским спариванием. Если D и E – дивизоры с непересекающимися носителями в классах u и v соответственно и $2D = \text{Div}(f)$, $2E = \text{Div}(g)$, то вейлевское спаривание определяется так:

$$\lambda_2: J_2 \times J_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, \quad \lambda_2(u, v) = \frac{g(D)}{f(E)},$$

где при $D = \sum_j n_j x_j$ функция $g(D) = \prod_j g(x_j)^{n_j}$. Мамфорд отождествляет $\mathbb{F}_2$ с ± 1 , отображая ноль в единицу и единицу в минус единицу. (В общем, можно рассматривать J_r , т.е. точки r -кручений $\text{Pic}^0(\mathcal{C})$; тогда вейлевское спаривание определяется невырожденным антисимметрическим отображением $\lambda_2: J_r \times J_r \rightarrow \mu_r$, где μ_r – это корни r -ой степени из единицы.) Векторное пространство J_2 над полем с двумя элементами $\mathbb{F}_2$ может быть отождествлено с $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{F}_2)$ и при этом отождествлении λ_2 – это просто $\cup$ -произведение.

Определим $\omega_\xi: J_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ равенством

$$\omega_\xi(u) = \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \xi \otimes u) - \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \xi) \pmod{2}, \quad (\text{A.8})$$

где $u = L_D$ – линейное расслоение с дивизором D . Тогда

$$\lambda_2(u, v) = \omega_\xi(u \otimes v) - \omega_\xi(u) - \omega_\xi(v).$$

Каждая функция, удовлетворяющая этому соотношению, известна как арф-функция и каждая арф-функция определяется ω_ξ для некоторой тета-характеристики и соответствующего линейного расслоения ξ . Таким образом, пространство тета-характеристик может быть отождествлено с пространством квадратичных форм (A.8).

Приложение В. Интегралы между точками ветвления

Здесь мы покажем, как интегрировать голоморфные дифференциалы между точками ветвления. Мы используем тот факт, что для неинвариантных голоморфных дифференциалов (которые используются в тексте) верно равенство

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i(\lambda_A, \lambda_B)} \omega = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} (\omega + R_* \omega + R_*^2 \omega) = 0.$$

В самом деле, если ω – это некоторый голоморфный дифференциал на компактной римановой поверхности, реализованной как N -листно разветвленное накрытие над $\mathbb{CP}^1$, то $\sum_{j=1}^N \omega(P^{(j)}) = 0$, где $P^{(j)}$ – прообразы $P \in \mathbb{CP}^1$. Тогда

$$\oint_{a_1 - b_1} \omega = 3 \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)} \omega, \quad \oint_{a_2 - b_2} \omega = 3 \int_{\gamma_1(\lambda_3, \lambda_4)} \omega, \quad \oint_{a_3 - b_3} \omega = 3 \int_{\gamma_1(\lambda_5, \lambda_6)} \omega$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)} \omega &= \frac{1}{3} \oint_{\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1} \omega, & \int_{\gamma_2(\lambda_1, \lambda_2)} \omega &= \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) - \mathbf{a}_1} \omega = \frac{1}{3} \oint_{-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1} \omega, \\ & & \int_{\gamma_3(\lambda_1, \lambda_2)} \omega &= \frac{1}{3} \oint_{2\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1} \omega \end{aligned}$$

для соответствующих выражений, полученных для $\gamma_i(\lambda_3, \lambda_4)$ и $\gamma_i(\lambda_5, \lambda_6)$.

Далее, используя равенства $\gamma_1(\lambda_2, \lambda_6) = \gamma_1(\lambda_2, \lambda_1) + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_6)$ и $\gamma_2(\lambda_5, \lambda_1) = \gamma_2(\lambda_5, \lambda_6) + \gamma_2(\lambda_6, \lambda_1)$, можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_4 &= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_6) + \gamma_2(\lambda_6, \lambda_1), \\ \mathbf{b}_4 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_3 + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_6) + \gamma_3(\lambda_6, \lambda_1). \end{aligned}$$

Подходящая линейная комбинация этих равенств приводит к

$$\int_{\gamma_i(\lambda_1, \lambda_6)} \omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Например,

$$\int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_6)} \omega = \frac{1}{3} \oint_{2\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4} \omega.$$

Для того чтобы проинтегрировать голоморфный дифференциал между любыми двумя точками ветвления, нужно вычислить интеграл между λ_4 и λ_5 на каждой из ветвей. Используем факт существования мероморфных функций $f = w/(z - \lambda_1)^2$ и $g = (z - \lambda_i)/(z - \lambda_j)$ для каждого i, j с соответствующими дивизорами,

$$(f) = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - 5\lambda_1, \quad (g) = 3(\lambda_i - \lambda_j).$$

Поэтому для каждого нормированного голоморфного дифференциала $\mathbf{v}$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda \ni \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{v} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_3} \mathbf{v} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_4} \mathbf{v} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_5} \mathbf{v} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_6} \mathbf{v} \\ = 4 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{v} + 3 \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \mathbf{v} + 2 \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} \mathbf{v} + \int_{\lambda_4}^{\lambda_5} \mathbf{v} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_6} \mathbf{v} \end{aligned}$$

и $3 \int_{\lambda_j}^{\lambda_i} \mathbf{v} \in \Lambda$, где Λ – это решетка периодов. Эти равенства справедливы (по модулю векторов из решетки периодов) для пути интегрирования на любом из листов и поэтому, например,

$$\int_{\gamma_1(\lambda_4, \lambda_5)} \mathbf{v} \equiv \int_{\gamma_1(\lambda_3, \lambda_4)} \mathbf{v} - \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)} \mathbf{v} - \int_{\gamma_1(\lambda_1, \lambda_6)} \mathbf{v} \pmod{\Lambda}.$$

Приложение С. Преобразование Мёбиуса

В этом разделе выясняется, когда существует преобразование Мёбиуса между множествами точек

$$H = \left\{ \alpha_1, -\frac{1}{\bar{\alpha}_1}, \alpha_2, -\frac{1}{\bar{\alpha}_2}, \alpha_3, -\frac{1}{\bar{\alpha}_3} \right\}, \quad S = \{0, 1, \infty, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}.$$

Первое множество удовлетворяет условию вещественности H1), в то время как второе множество может быть построено по матрице периодов кривой и выражено через тета-константы. Если построенная матрица периодов удовлетворяет H2), то следует затем добиться выполнения H1).

Сначала заметим, что преобразование Мёбиуса M , отображающее $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow \infty$, а также обратное M^{-1} ,

$$\begin{aligned} M(a) &= 0, & M^{-1}(0) &= a, \\ M(b) &= 1, & M^{-1}(1) &= b, \\ M(c) &= \infty, & M^{-1}(\infty) &= c, \end{aligned}$$

определяются как

$$M(z) = \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}, \quad M^{-1}(z) = \frac{zc(b-a) - a(b-c)}{z(b-a) - (b-c)}. \quad (\text{C.1})$$

Преобразование

$$M(z) = \lambda \cdot \frac{z-a}{z-c} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

может быть представлено с помощью $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a+c}} & -\frac{ia\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a+c}} \\ i & ic \\ \frac{i}{\sqrt{\lambda}\sqrt{a+c}} & -\frac{ic}{\sqrt{\lambda}\sqrt{a+c}} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Полагая $\lambda = (b-c)/(b-a)$, можно определить $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -представление соотношений (C.1).

Преобразование Мёбиуса сопряжено с вращением тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$M(z) = \frac{\alpha z + \beta}{-\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}.$$

В терминах (C.2) это означает, что

$$a\bar{c} = -1, \quad \lambda\bar{\lambda} = \frac{1}{a\bar{a}}.$$

Тогда $M(0)\overline{M(\infty)} = -1$.

Вращение

$$\begin{pmatrix} \frac{\bar{\alpha}_1}{\sqrt{1+|\alpha_1|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_1|^2}} \\ -1 & \alpha_1 \\ \frac{-1}{\sqrt{1+|\alpha_1|^2}} & \frac{\alpha_1}{\sqrt{1+|\alpha_1|^2}} \end{pmatrix}$$

преобразует множество H в множество $\{0, \infty, \tilde{\alpha}_2, -1/\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, -1/\tilde{\alpha}_3\}$, где

$$\tilde{\alpha}_r = M(\alpha_r) = \frac{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_r}{\alpha_1 - \alpha_r}, \quad r = 2, 3.$$

Положим $\tilde{\alpha}_2 = a e^{i\theta}$, $a = |\tilde{\alpha}_2|$. Тогда вращение

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

преобразует последнее множество в множество $\{0, \infty, a, -1/a, w, -1/\bar{w}\}$. Наконец, изменение масштаба $z \rightarrow z/a$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

преобразует H в $H_s = \{0, 1, \infty, -1/a^2, w/a, -1/(a\bar{w})\}$. Такое множество имеет требуемый вид и описывается тремя действительными параметрами. При $\Lambda_1 = -1/a^2$, $\Lambda_2 = w/a$, $\Lambda_3 = -1/(a\bar{w})$ имеем $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 \bar{\Lambda}_3 = \Lambda_1$. Из множества H_s и при выборе θ и α_1 (эквивалентными вращению) множество H восстанавливается.

Обобщая, рассмотрим образы $M(H)$ при преобразовании Мёбиуса. С точностью до изменения нумерации корней имеем четыре возможности отображения этих корней в множество $\{0, 1, \infty\}$:

- a) $\alpha_1 \rightarrow 0, \quad \alpha_2 \rightarrow 1, \quad -1/\bar{\alpha}_1 \rightarrow \infty,$
- b) $\alpha_1 \rightarrow 0, \quad -1/\bar{\alpha}_1 \rightarrow 1, \quad \alpha_2 \rightarrow \infty,$
- c) $\alpha_1 \rightarrow 0, \quad -1/\bar{\alpha}_2 \rightarrow 1, \quad \alpha_2 \rightarrow \infty,$
- d) $\alpha_1 \rightarrow 0, \quad \alpha_3 \rightarrow 1, \quad \alpha_2 \rightarrow \infty.$

Случай a) уже рассматривался выше. Для полноты приведем выражения для $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ в различных случаях при различных возникающих ограничениях:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Lambda_1 &= M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_2}\right) = -\frac{(1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)(1 + \bar{\alpha}_2 \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)} < 0, \\ \Lambda_2 &= M(\alpha_3) = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2}{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_3}, \quad \Lambda_3 = M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_3}\right) = -\frac{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3} \frac{1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ \Lambda_2 \bar{\Lambda}_3 &= \Lambda_1; \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \Lambda_1 &= M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_2}\right) = -\frac{1 + \bar{\alpha}_1\alpha_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_1} \frac{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2}{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2} \in \mathbb{R}, \quad 0 < \Lambda_1 < 1, \\
\Lambda_2 &= M(\alpha_3) = \frac{1 + \bar{\alpha}_1\alpha_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_1} \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2}, \quad \Lambda_3 = M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_3}\right) = \frac{1 + \bar{\alpha}_1\alpha_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_1} \frac{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_3}{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_3}, \\
&\quad \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - 1} \overline{\left(\frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 - 1}\right)} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 - 1};
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \Lambda_1 &= M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_1}\right) = -\frac{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2} \frac{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_1} \in \mathbb{R}, \quad 1 < \Lambda_1 < \infty, \\
\Lambda_2 &= M(\alpha_3) = \frac{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2}, \quad \Lambda_3 = M\left(\frac{-1}{\bar{\alpha}_3}\right) = \frac{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2}{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2} \frac{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_3}{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_3}, \\
&\quad (1 - \Lambda_2)\overline{(1 - \Lambda_3)} = 1 - \Lambda_1;
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \Lambda_r &= M\left(-\frac{1}{\bar{\alpha}_r}\right) = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} \frac{1 + \alpha_1\bar{\alpha}_r}{1 + \alpha_2\bar{\alpha}_r}, \quad r = 1, 2, 3, \\
0 < \Lambda_1\bar{\Lambda}_2 &\in \mathbb{R}, \quad 1 < \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \in \mathbb{R}, \quad \Lambda_3 = \Lambda_2 \frac{(1 - \bar{\Lambda}_1)}{1 - \bar{\Lambda}_2}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Условия (C.4) для случая b) могут быть получены таким образом. Дальнейшая композиция преобразования Мёбиуса, которая приводит к b) с преобразованием $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow \infty, \infty \rightarrow 1$, приводит к случаю а), для которого ограничение известно. Это второе преобразование Мёбиуса определяется функцией

$$M(z) = M^{-1}(z) = \frac{z}{(z - 1)}$$

и можно преобразовать ограничение на а) к ограничению на b). Аналогично, композиция с) с $M(z) = 1 - z$ порождает случай а) с точностью до перестановки корней. Геометрически случаи а), b), c) интерпретируются следующим образом. Рассмотрим окружность, проходящую через точки $\{\alpha_1, -1/\bar{\alpha}_1, \alpha_2, -1/\bar{\alpha}_2\}$. Под действием преобразования Мёбиуса множества $\{0, 1, \infty, \mu\}$ окружность превращается в действительную ось и поэтому $\mu \in \mathbb{R}$. Это – тот действительный параметр, который появляется в каждом из рассмотренных случаев. Рассуждая аналогичным образом при композиции d) с $M(z) = z/(z - \Lambda_1)$, получаем ограничения (C.6).

В каждом случае по данному α и выбранному θ (вращение) можно получить S из H .

Список литературы

- [1] E. J. Weinberg, P. Yi, “Magnetic monopole dynamics, supersymmetry, and duality”, *Phys. Rep.*, **438**:2–4, (2007), 65–236.
- [2] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge, 2004.
- [3] N. J. Hitchin, “Monopoles and geodesics”, *Comm. Math. Phys.*, **83**:4, (1982), 579–602.

- [4] N. J. Hitchin, “On the construction of monopoles”, *Comm. Math. Phys.*, **89**:2, (1983), 145–190.
- [5] W. Nahm, “The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method”, *Monopoles in quantum field theory* (Trieste, 1981), World Scientific, Singapore, 1982, 87–94.
- [6] N. Ercolani, A. Sinha, “Monopoles and Baker functions”, *Comm. Math. Phys.*, **125**:3, (1989), 385–416.
- [7] H. W. Braden, V. Z. Enolski, *Remarks on the complex geometry of the 3-monopole*, arXiv:math-ph/0601040.
- [8] J. Wellstein, “Zur Theorie der Functionenklasse $s^3 = (s - \alpha^2) \cdots (z - \alpha^6)$ ”, *Math. Ann.*, **52**:2–3, (1899), 440–448.
- [9] K. Matsumoto, “Theta constants associated with the cyclic triple coverings of the complex projective line branching at six points”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **37**:3, (2001), 419–440.
- [10] C. J. Houghton, N. S. Manton, N. M. Romão, “On the constraints defining BPS monopoles”, *Comm. Math. Phys.*, **212**:1, (2000), 219–243; arXiv:hep-th/9909168.
- [11] H. W. Braden, V. Z. Enolski, *Monopoles, curves and Ramanujan*, arXiv:0704.3939.
- [12] J. Hurtubise, “SU(2) monopoles of charge 2”, *Comm. Math. Phys.*, **92**:2, (1983), 195–202.
- [13] E. Corrigan, P. Goddard, “An n -monopole solution with $4n - 1$ degrees of freedom”, *Comm. Math. Phys.*, **80**:4, (1981), 575–587.
- [14] Б. А. Дубровин, “Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4, (1977), 28–41; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Completely integrable Hamiltonian systems associated with matrix operators and Abelian varieties”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:4, (1977), 265–277.
- [15] E. Picard, “Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires”, *Acta Math.*, **2**:1, (1883), 114–135.
- [16] H. Shiga, “On the representation of the Picard modular function by θ constants. I, II”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **24**:3, (1988), 311–360.
- [17] G. González Díez, “Loci of curves which are prime Galois coverings of $\mathbb{P}^1$ ”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **62**:3, (1991), 469–489.
- [18] C. L. Tretkoff, M. D. Tretkoff, “Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations”, *Contributions to group theory*, Contemp. Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 467–519.
- [19] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Riemann surfaces, **71**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980.
- [20] B. C. Berndt, S. Bhargava, F. G. Garvan, “Ramanujan’s theories of elliptic functions to alternative bases”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:11, (1995), 4163–4244.
- [21] H. H. Chan, “On Ramanujan’s cubic transformation formula for ${}_2F_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1; z)$ ”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **124**:2, (1998), 193–204.
- [22] J. M. Borwein, P. B. Borwein, “Explicit Ramanujan-type approximations to pi of high order”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **97**:1–3, (1987), 53–59.
- [23] B. C. Berndt, *Ramanujan’s notebooks. Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [24] N. J. Hitchin, N. S. Manton, M. K. Murray, “Symmetric monopoles”, *Nonlinearity*, **8**:5, (1995), 661–692.
- [25] D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Appl. Math. Sci., **80**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [26] E. Goursat, “Sur l’équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), **10**, (1881), 3–142.

- [27] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [28] J. I. Hutchinson, “On a class of automorphic functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **3**:1, (1902), 1–11.
- [29] H. Burkhardt, “Ueber die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen”, *Math. Ann.*, **42**:2, (1893), 185–214.
- [30] V. Z. Enolski, T. Grava, “Singular Z_N -curves and the Riemann–Hilbert problem”, *Int. Math. Res. Not.*, **32**, (2004), 1619–1683; arXiv:math-ph/0306050.
- [31] H. H. Martens, “On the reduction of abelian integrals and a problem of H. Hopf”, *Curves, Jacobians, and abelian varieties* (Amherst, MA, 1990), *Contemp. Math.*, **136**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 287–296.
- [32] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii, “Reduction of Abelian functions and algebraically integrable systems. I”, *J. Math. Sci. (New York)*, **106**:6, (2001), 3395–3486.
- [33] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii, “Reduction of Abelian functions and algebraically integrable systems. II”, *J. Math. Sci. (New York)*, **108**:3, (2002), 295–374.
- [34] H. H. Martens, “A footnote to the Poincaré complete reducibility theorem”, *Publ. Mat.*, **36**:1, (1992), 111–129.
- [35] J. Igusa, *Theta functions*, **194**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [36] D. Mumford, *Tata lectures on theta*, *Progr. Math.*, **28**, **43**, v. 1, 2, Birkhäuser, Boston, 1983, 1984.

Г. У. Браден (H. W. Braden)

University of Edinburg, UK

E-mail: hwb@ed.ac.uk

Поступила в редакцию

19.03.2009

В. З. Энольский (V. Z. Enolski)

Институт магнетизма НАН Украины, г. Киев

E-mail: vze@ma.hw.ac.uk