Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 8, 103–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:31:06

УДК 517.929

В. Е. Слюсарчук

Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений

Получены условия существования решений нелинейного дифференциально-функционального уравнения

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Fx)(t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

в пространстве ограниченных на оси функций с использованием локальной линейной аппроксимации оператора F .

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: дифференциально-функциональные уравнения, обратимость нелинейных операторов.

§ 1. Функциональные пространства и c -непрерывные операторы

Пусть E – конечномерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, X и Y – произвольные банаховы пространства и $L(X, Y)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов A , действующих из пространства X в пространство Y , с нормой

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Обозначим через $C^0(\mathbb{R}, X)$ банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в X с нормой

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, X)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X,$$

а через $C^m(\mathbb{R}, X)$, где $m \in \mathbb{N}$, – банахово пространство функций $x \in C^0(\mathbb{R}, X)$, для каждой из которых $\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m} \in C^0(\mathbb{R}, X)$, с нормой

$$\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, X)} = \max \left\{ \|x\|_{C^0(\mathbb{R}, X)}, \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, X)}, \dots, \left\| \frac{d^m x}{dt^m} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, X)} \right\}.$$

Последовательность элементов $x_k \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся к элементу* $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \rightarrow \infty$, если эта последовательность ограничена и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$$

для каждого числа $T > 0$. Для такой последовательности будем использовать следующее обозначение:

$$x_k \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, E)} x, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогично, последовательность $y_k \in C^m(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся к элементу* $y \in C^m(\mathbb{R}, E)$ при $k \rightarrow \infty$ и обозначать

$$y_k \xrightarrow{\text{loc } C^m(\mathbb{R}, E)} y, \quad k \rightarrow \infty,$$

если

$$y_k \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, E)} y, \quad \frac{dy_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, E)} \frac{dy}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d^m y_k}{dt^m} \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, E)} \frac{d^m y}{dt^m},$$

$$k \rightarrow \infty.$$

Оператор $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$, называется *s-непрерывным*, если для произвольных $x \in C^i(\mathbb{R}, E)$ и $x_k \in C^i(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$x_k \xrightarrow{\text{loc } C^i(\mathbb{R}, E)} x, \quad k \rightarrow \infty,$$

выполняется соотношение

$$\mathcal{H} x_k \xrightarrow{\text{loc } C^j(\mathbb{R}, E)} \mathcal{H} x, \quad k \rightarrow \infty.$$

Назовем *s-непрерывный оператор* $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j \in \{0, \dots, m\}$, *s-вполне непрерывным*, если для каждого числа $r > 0$ функции множества

$$\bigcup_{\|x\|_{C^i(\mathbb{R}, E)} \leq r} \left\{ (\mathcal{H}x)(t), \frac{d(\mathcal{H}x)(t)}{dt}, \dots, \frac{d^j(\mathcal{H}x)(t)}{dt^j} \right\}$$

равностепенно непрерывны на каждом конечном промежутке.

Напомним, что понятия *s-непрерывного оператора* (на языке “ ε , δ ”) и *s-вполне непрерывного оператора* введены Э. Мухамадиевым (см. [1], [2]). Изучение этих понятий было продолжено в [2]–[9] и других работах. Определение *s-непрерывного оператора*, которое использует локально сходящиеся последовательности, предложено автором (см., например, [10]).

В дальнейшем также будем использовать понятие *равномерно s-непрерывного на ограниченном множестве оператора*.

Обозначим через $B^i[u, r]$ замкнутый шар в пространстве $C^i(\mathbb{R}, E)$ радиуса r с центром в точке u , т.е. множество $\{x \in C^i(\mathbb{R}, E) : \|x - u\|_{C^i(\mathbb{R}, E)} \leq r\}$.

Оператор $\mathcal{H}: C^i(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$ будем называть *равномерно s-непрерывным на ограниченном множестве* $M \subset C^i(\mathbb{R}, E)$, если для некоторого числа $d > 0$ и произвольных числа $\varepsilon > 0$ и отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существуют такие число $\delta > 0$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, что

$$\max_{a \leq t \leq b, l \in \{0, 1, \dots, j\}} \left\| \frac{d^l(\mathcal{H}x)(t)}{dt^l} - \frac{d^l(\mathcal{H}y)(t)}{dt^l} \right\|_E < \varepsilon,$$

если $x \in M$, $y \in \bigcup_{u \in M} B^i[u, d]$ и

$$\max_{\alpha \leq t \leq \beta, l \in \{0, 1, \dots, i\}} \left\| \frac{d^l x(t)}{dt^l} - \frac{d^l y(t)}{dt^l} \right\|_E < \delta.$$

Здесь $\frac{d^0 x(t)}{dt^0}$ обозначает $x(t)$.

§ 2. Постановка основной задачи

Рассмотрим нелинейные s -непрерывные дифференциально-функциональные операторы $\mathcal{L}_{F_1} : C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и $\mathcal{L}_{F_2} : C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{F_1} x)(t) &= \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (F_1 x)(t), & t \in \mathbb{R}, \\ (\mathcal{L}_{F_2} x)(t) &= \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (F_2 x)(t), & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $F_1 : C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор, а $F_2 : C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$, оператор.

Напомним, что оператор $C : X \rightarrow Y$ ограничен, если этот оператор каждое ограниченное множество отображает в ограниченное множество [11].

Целью настоящей статьи является выяснение условий, при которых множества значений $R(\mathcal{L}_{F_1})$ и $R(\mathcal{L}_{F_2})$ операторов $\mathcal{L}_{F_1}$ и $\mathcal{L}_{F_2}$ совпадают с $C^0(\mathbb{R}, E)$. Заметим, что такая задача даже для нелинейных дифференциальных уравнений – сложная проблема (см., например, [11]–[15]), которую трудно решить. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только достаточных условий, обеспечивающих выполнение соотношений

$$R(\mathcal{L}_{F_1}) = C^0(\mathbb{R}, E), \quad R(\mathcal{L}_{F_2}) = C^0(\mathbb{R}, E),$$

которые в некоторых отдельных случаях совпадают с необходимыми условиями выполнения этих соотношений.

В основе исследований операторов $\mathcal{L}_{F_1}$ и $\mathcal{L}_{F_2}$ лежит метод, использующий локальную линейную аппроксимацию операторов F_1 и F_2 .

§ 3. Формулировка основных теорем

Пусть $\mathcal{D}_1$ – множество s -вполне непрерывных элементов A_1 пространства $L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$, для каждого из которых оператор $\mathcal{L}_{A_1} : C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_{A_1} x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_1 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_{A_1}^{-1}$. Через $\mathcal{D}_2$ обозначим множество s -непрерывных элементов A_2 пространства $L(C^{m-1}(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$, для каждого из которых определенный формулой

$$(\mathcal{L}_{A_2} x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_2 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

оператор

$$\mathcal{L}_{A_2}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}$.

Основными в статье являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A_1 \in \mathcal{D}_1$, что

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_1 x - A_1 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H. \quad (3)$$

Тогда для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ уравнение

$$\mathcal{L}_{F_1} x = h \quad (4)$$

имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A_2 \in \mathcal{D}_2$, что

$$\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|F_2 x - A_2 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))}} - H. \quad (5)$$

Тогда для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ уравнение

$$\mathcal{L}_{F_2} x = h \quad (6)$$

имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$.

Эти теоремы лежат в основе метода, с помощью которого выясняются условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Мы докажем эти утверждения, используя ряд вспомогательных результатов о s -непрерывных и s -вполне непрерывных отображениях.

§ 4. Частные случаи теорем 1 и 2

Обозначим через $\mathcal{D}_3$ множество элементов $B = B(t)$ банахова пространства $C^0(\mathbb{R}, L(E, E))$, для каждого из которых оператор $\mathcal{L}_B: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_B x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + B(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_B^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, E)$. Через $\mathcal{D}_4$ обозначим множество операторов $C \in L(E, E)$, для каждого из которых спектр $\sigma(C)$ не имеет общих точек с множеством $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$. Для каждого такого оператора оператор $\mathcal{L}_C: C^1(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_C x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Cx(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_C^{-1}$ (см. [16]).

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ и $g: E \rightarrow E$ – непрерывные отображения, $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ и

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \leq r} \|f(t, x)\|_E < +\infty$$

для каждого $r > 0$.

Частными случаями теорем 1 и 2 являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $B \in \mathcal{D}_3$, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \leq r} \|f(t, x) - B(t)x\|_E \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}} - H.$$

Тогда для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ уравнение (9) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $C \in \mathcal{D}_4$, что

$$\max_{\|x\|_E \leq r} \|g(x) - Cx\|_E \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_C^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))}} - H. \quad (11)$$

Тогда для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ уравнение (10) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Заметим, что условия теорем 1–4 не обеспечивают единственность решений соответствующих уравнений, что подтверждается следующим примером уравнения.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = h(t), \quad (12)$$

где $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1), & \text{если } x \leq -1, \\ 0, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ kx, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Здесь $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Определим дифференциальный оператор $\mathcal{K}: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ равенством

$$(\mathcal{K}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + kx(t). \quad (13)$$

Этот оператор имеет непрерывный обратный $\mathcal{K}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, который можно представить в виде

$$(\mathcal{K}^{-1}y)(t) = -\frac{k}{|k|} \int_{\{s: kt < ks\}} e^{k(t-s)} y(s) ds.$$

Очевидно, что

$$\left\| \mathcal{K}^{-1} \right\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))} = \frac{1}{|k|}. \quad (14)$$

Зафиксируем произвольное число $H > 0$. Очевидно, что для каждого числа $r > 0$

$$\max_{|x| \leq r} |f(x) - kx| \leq |k| \quad (15)$$

и, следовательно, для числа

$$r = \frac{H + |k|}{|k|} \quad (16)$$

выполняется неравенство

$$\max_{|x| \leq r} |f(x) - kx| \leq \frac{r}{\|\mathcal{K}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}} - H, \quad (17)$$

аналогичное (11), которое в силу (14) и (16) совпадает с (15). Поэтому согласно теореме 2 уравнение (12) для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет хотя бы одно решение $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Таких решений может быть бесконечно много. Действительно, если $h(t) \equiv 0$, то решениями этого уравнения являются функции $x(t) \equiv c$, $c \in [0, 1]$.

§ 5. Вспомогательные утверждения о c -непрерывных операторах

Приведем ряд результатов о c -непрерывных и c -вполне непрерывных операторах, которые потребуются при доказательстве теорем 1 и 2.

Рассмотрим функции $p_{n,k} \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, и линейные непрерывные операторы $\mathcal{P}_{n,k}: C^k(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^k(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, которые определяются равенствами

$$p_{n,k}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \leq 2^n, \\ \cos^{k+1} \frac{(2^{-n}|t| - 1)\pi}{2}, & \text{если } 2^n < |t| < 2^{n+1}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 2^{n+1}, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_{n,k} = \|\mathcal{R}_{n,k}\|_{L(C^k(\mathbb{R}, E), C^k(\mathbb{R}, E))}^{-1} \mathcal{R}_{n,k}, \quad (18)$$

где

$$(\mathcal{R}_{n,k}x)(t) = p_{n,k}(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и $x \in C^k(\mathbb{R}, E)$.

Очевидно, что $\mathcal{P}_{n,k}C^l(\mathbb{R}, E) \subset C^l(\mathbb{R}, E)$, $l \in \{0, 1, \dots, k\}$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$,

$$\mathcal{P}_{n+1,k}\mathcal{P}_{n,k} = \mathcal{P}_{n,k}\mathcal{P}_{n+1,k} = \mathcal{P}_{n,k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad (19)$$

$$\|\mathcal{P}_{n,k}\|_{L(C^k(\mathbb{R}, E), C^k(\mathbb{R}, E))} = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m\}. \quad (20)$$

Операторы $\mathcal{P}_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, полезны при исследовании c -непрерывных и c -вполне непрерывных операторов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $G: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – равномерно c -непрерывное на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$, отображение. Тогда сужение $G|_{C^m(\mathbb{R}, E)}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ отображения G на $C^m(\mathbb{R}, E)$ является c -вопне непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные числа $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и ограниченное подмножество M пространства $C^m(\mathbb{R}, E)$. Используем очевидные равенства

$$\mathcal{P}_{n,1}G = \mathcal{P}_{n,1}(G - G\mathcal{P}_{k,m}) + \mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

В этих равенствах операторы $\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны. Действительно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольных $x_l \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$, $l \in \mathbb{N}$, и $x \in C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$, для которых

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_l - x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} = 0,$$

выполняется соотношение

$$\mathcal{P}_{k,m}x_l \xrightarrow{\text{loc } C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \mathcal{P}_{k,m}x, \quad l \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в силу c -непрерывности оператора G

$$G\mathcal{P}_{k,m}x_l \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, E)} G\mathcal{P}_{k,m}x, \quad l \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}x_l - \mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} = 0,$$

что означает непрерывность операторов $\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Согласно (21) имеем

$$\mathcal{P}_{n,1}GM \subset \mathcal{P}_{n,1}(G - G\mathcal{P}_{k,m})M + \mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}M, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Напомним, что для любых $A \subset C^0(\mathbb{R}, E)$ и $B \subset C^0(\mathbb{R}, E)$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

На основании теоремы Арцела [17] и определения оператора $\mathcal{P}_{n,m}$ множества $\mathcal{P}_{k,m}M$, $k \in \mathbb{N}$, предкомпактны в пространстве $C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$. Поэтому на основании непрерывности операторов $\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, и вытекающих из (19) равенств

$$\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}M = \mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}\mathcal{P}_{k+1,m}M, \quad k \in \mathbb{N},$$

множества $\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}M$, $k \in \mathbb{N}$, предкомпактны в пространстве $C^0(\mathbb{R}, E)$.

Далее выберем число k настолько большим, чтобы

$$\sup_{x \in M} \|\mathcal{P}_{n,1}(G - G\mathcal{P}_{k,m})x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} < \varepsilon. \quad (23)$$

Это можно сделать на основании ограниченности множества M и равномерной c -непрерывности $G: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$.

Итак, на основании (22) и (23) предкомпактное множество $\mathcal{P}_{n,1}G\mathcal{P}_{k,m}M$ для достаточно большого k является ε -сетью для множества $\mathcal{P}_{n,1}GM$. Отсюда и произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ вытекает предкомпактность множества $\mathcal{P}_{n,1}GM$ в пространстве $C^0(\mathbb{R}, E)$.

Следовательно, $G|_{C^m(\mathbb{R}, E)}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – s -вполне непрерывное отображение.

Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Линейный непрерывный и s -непрерывный оператор A , действующий из $C^{m-1}(\mathbb{R}, E)$ в $C^0(\mathbb{R}, E)$, является равномерно s -непрерывным на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный шар $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$. Так как оператор $A: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ непрерывный и s -непрерывный, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ и отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существуют такие число $\delta > 0$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, что

$$\max_{a \leq t \leq b} \|(Ax)(t)\|_E < \varepsilon,$$

если $\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq 3r$ и

$$\max_{l \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \alpha \leq t \leq \beta} \left\| \frac{d^l x(t)}{dt^l} \right\|_E < \delta.$$

Тогда в силу линейности оператора A

$$\max_{a \leq t \leq b} \|(Ax)(t) - (Ay)(t)\|_E < \varepsilon,$$

если $x \in B^{m-1}[0, r]$, $y \in B^{m-1}[0, 2r]$ и

$$\max_{l \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \alpha \leq t \leq \beta} \left\| \frac{d^l x(t)}{dt^l} - \frac{d^l y(t)}{dt^l} \right\|_E < \delta.$$

Следовательно, оператор $A: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ является равномерно s -непрерывным на каждом шаре $B^{m-1}[0, r]$, $r > 0$.

Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $S: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ – линейное непрерывное и s -непрерывное отображение и $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченное s -вполне непрерывное отображение. Тогда $SF: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ – s -вполне непрерывное отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные числа $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и ограниченное подмножество M пространства $C^m(\mathbb{R}, E)$.

Покажем, что оператор $\mathcal{P}_{n,m}SF: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ вполне непрерывный. В силу линейности оператора S для каждого $l \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_{n,m}SF = \mathcal{P}_{n,m}S\mathcal{P}_{l,0}F + \mathcal{P}_{n,m}S(I - \mathcal{P}_{l,0})F,$$

где $I: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – единичный оператор. Следовательно,

$$\mathcal{P}_{n,m}SFM \subset \mathcal{P}_{n,m}S\mathcal{P}_{l,0}FM + \mathcal{P}_{n,m}S(I - \mathcal{P}_{l,0})FM. \quad (24)$$

Согласно определению c -вполне непрерывного оператора оператор $\mathcal{P}_{l,0}F$, $l \in \mathbb{N}$, является вполне непрерывным. Поэтому множество $\mathcal{P}_{n,m}S\mathcal{P}_{l,0}FM$ предкомпактно для всех $l \in \mathbb{N}$.

Из ограниченности оператора F , ограниченности множества M и определения оператора $\mathcal{P}_{l,0}$ следует, что для каждого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b], x \in M} \|((I - \mathcal{P}_{l,0})Fx)(t)\|_E = 0.$$

Поэтому в силу c -непрерывности оператора S существует такое число $l_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{l \geq l_0, x \in M} \|\mathcal{P}_{n,m}S(I - \mathcal{P}_{l,0})Fx\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} < \varepsilon.$$

Из этого неравенства, произвольности выбора $\varepsilon > 0$, (24) и предкомпактности множества $\mathcal{P}_{n,m}S\mathcal{P}_{l,0}FM$ в пространстве $C^m(\mathbb{R}, E)$ следует предкомпактность в этом пространстве множества $\mathcal{P}_{n,m}SFM$.

Таким образом, оператор $\mathcal{P}_{n,m}SF: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ вполне непрерывный для каждого $n \in \mathbb{N}$, а оператор $SF: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ – c -вполне непрерывный.

Теорема 7 доказана.

Следующая теорема показывает, что для широкого класса c -непрерывных операторов обратные операторы также обладают свойством c -непрерывности.

ТЕОРЕМА 8 (см. [5]). Пусть оператор $D \in L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$ c -вполне непрерывный и оператор $\frac{d^m}{dt^m} + D: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный $(\frac{d^m}{dt^m} + D)^{-1}$. Тогда

$$\left(\frac{d^m}{dt^m} + D\right)^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$$

– c -непрерывный оператор.

Также важной для дальнейшего является следующая теорема о неподвижной точке для c -вполне непрерывного оператора.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{B}$ – замкнутый шар с центром в точке нуль в банаховом пространстве $C^p(\mathbb{R}, E)$ и $\mathfrak{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ – c -вполне непрерывный оператор. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть p – целое неотрицательное число. Для каждой ограниченной последовательности $(x_n)_{n \geq 1}$ элементов пространства $C^p(\mathbb{R}, E)$, для которой множества $\{\mathcal{P}_{\nu,p}x_n: n \in \mathbb{N}\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, предкомпактны, существуют такие строго возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и элемент $x \in C^p(\mathbb{R}, E)$, что

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc } C^p(\mathbb{R}, E)} x, \quad k \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$\|x\|_{C^p(\mathbb{R}, E)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{C^p(\mathbb{R}, E)}. \quad (26)$$

Так как в силу c -непрерывности оператора $\mathfrak{A}$ и равенства (28)

$$\begin{aligned} (x^* - \mathfrak{A}x^*) - (x_{n_l}^* - \mathfrak{A}x_{n_l}^*) &\xrightarrow{\text{loc } C^p(\mathbb{R}, E)} 0, \quad l \rightarrow \infty, \\ (x_{n_l}^* - \mathfrak{A}x_{n_l}^*) - (x_{n_l}^* - \mathcal{P}_{n_l, p} \mathfrak{A}x_{n_l}^*) &\xrightarrow{\text{loc } C^p(\mathbb{R}, E)} 0, \quad l \rightarrow \infty, \\ x_{n_l}^* - \mathcal{P}_{n_l, p} \mathfrak{A}x_{n_l}^* &= 0, \quad l \geq 1, \end{aligned}$$

то

$$x^* - \mathfrak{A}x^* = 0.$$

Теорема 9 доказана.

Из приведенных в этом параграфе утверждений вытекает, что c -непрерывные и c -вполне непрерывные операторы образуют широкий класс операторов. Так, например, операторы $\mathcal{L}_{A_1}$, $\mathcal{L}_B$, $\mathcal{L}_C$ и $\mathcal{P}_{n, k}$, которые определяются соответственно равенствами (1), (7), (8) и (18), являются c -непрерывными операторами. Примерами c -вполне непрерывных операторов являются линейные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_1}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) &\rightarrow C^{m-1}(\mathbb{R}, E), \quad A_1 \in \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{L}_B^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) &\rightarrow C^0(\mathbb{R}, E), \quad B \in \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{L}_C^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) &\rightarrow C^0(\mathbb{R}, E), \quad C \in \mathcal{D}_4, \end{aligned}$$

что на основании теоремы Арцела (см. [17]) и определения c -вполне непрерывного оператора вытекает из теоремы 8.

Заметим, что не каждый непрерывный оператор является c -непрерывным оператором и не каждый c -непрерывный оператор является непрерывным оператором. Это подтверждается следующими примерами операторов.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим непрерывный оператор $D_1: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, который определяется равенством $(D_1x)(t) = \|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, и последовательность элементов $x_n(t) = 1 - p_{n, 0}(t)$, $n \geq 1$, пространства $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Оператор D_1 не является c -непрерывным. Действительно, $x_n \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} 0$, $n \rightarrow \infty$. Однако соотношение $D_1x_n \xrightarrow{\text{loc } C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} D_10$, $n \rightarrow \infty$ не выполняется, поскольку $(D_1x_n)(t) \equiv 1$, $n \geq 1$, и $(D_10)(t) \equiv 0$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оператор $D_2: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, который определяется равенством $(D_2x)(t) = \text{arctg}(tx(t))$. Этот оператор, очевидно, является c -непрерывным. Однако, свойство непрерывности для D_2 не выполняется. Действительно, для элементов $x, x_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, где $x(t) \equiv 0$ и $x_n(t) \equiv \frac{1}{n}$, выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = 0, \quad D_2x = 0, \quad \|D_2x_n\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_2x_n - D_2x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \neq 0$. Поэтому оператор D_2 не является непрерывным в точке $x = 0$.

§ 6. Обоснование теорем 1 и 2

Сначала докажем две леммы, из которых будут вытекать теоремы 1 и 2.

ЛЕММА 2. Пусть $F_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор и для некоторых чисел $H > 0$, $r > 0$ и элемента $A_1 \in \mathcal{D}_1$ имеет место неравенство (3).

Тогда для каждого $h \in B^0[0, H]$ уравнение (4) имеет хотя бы одно решение $x \in B^m[0, r]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим уравнение (4) в виде

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_1 x)(t) = (\mathcal{W}_1 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

где $\mathcal{W}_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор, определенный равенством

$$(\mathcal{W}_1 x)(t) = (A_1 x)(t) - (F_1 x)(t) + h(t).$$

Так как определенный равенством (1) оператор $\mathcal{L}_{A_1}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}_{A_1}^{-1}$, то уравнение (29) можно представить в виде

$$x(t) = (\mathcal{L}_{A_1}^{-1} \mathcal{W}_1 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Оператор $\mathcal{L}_{A_1}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ на основании теоремы 8 s -непрерывный. Поэтому в силу теоремы 7 оператор $\mathcal{L}_{A_1}^{-1} \mathcal{W}_1: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ будет s -вполне непрерывным.

Также

$$\mathcal{L}_{A_1}^{-1} \mathcal{W}_1 B^m[0, r] \subset B^m[0, r].$$

Действительно, если $\|y\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r$ и $\|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq H$, то в силу неравенства (3)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1} \mathcal{W}_1 y\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} &\leq \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \|\mathcal{W}_1 y\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|(A_1 x)(t) - (F_1 x)(t) + h(t)\|_E \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \\ &\quad \times \left(\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|(A_1 x)(t) - (F_1 x)(t)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \right) \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \left(\frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_1}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H + \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \right) \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы 9 уравнение (30) имеет хотя бы одно решение $x^* \in B^m[0, r]$. В силу эквивалентности уравнений (30) и (29)

$$\frac{d^m x^*(t)}{dt^m} + (F_1 x^*)(t) \equiv h(t).$$

Лемма 2 доказана.

Аналогичным образом доказывается

ЛЕММА 3. Пусть $F_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный и равномерно s -непрерывный на каждом шаре $B^{m-1}[0, R]$, $R > 0$, оператор и для некоторых чисел $H > 0$, $r > 0$ и элемента $A_2 \in \mathcal{D}_2$ имеет место неравенство (5).

Тогда для каждого $h \in \mathcal{B}^0[0, H]$ уравнение (6) имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E) \cup \mathcal{B}^{m-1}[0, r]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим уравнение (6) в виде

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (A_2 x)(t) = (\mathcal{W}_2 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

где $\mathcal{W}_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный оператор, определенный равенством

$$(\mathcal{W}_2 x)(t) = (A_2 x)(t) - (F_2 x)(t) + h(t).$$

В силу теоремы 6 этот оператор является равномерно s -непрерывным на каждом шаре $B^{m-1}[0, R]$, $R > 0$. Поскольку определенный равенством (2) оператор $\mathcal{L}_{A_2}: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}$, то уравнение (31) можно представить в виде

$$x(t) = (\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2 x)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ в силу теорем 5, 6 и 8 s -непрерывный. Поэтому из теоремы 7 и s -непрерывности оператора $\mathcal{W}_2$ следует, что оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ также будет s -непрерывным.

Также

$$\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2 B^{m-1}[0, r] \subset B^{m-1}[0, r].$$

Действительно, если $\|y\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r$ и $\|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq H$, то в силу (5)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2 y\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} &\leq \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))} \|\mathcal{W}_2 y\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))} \sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|(A_2 x)(t) - (F_2 x)(t) + h(t)\|_E \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))} \\ &\quad \times \left(\sup_{\|x\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|A_2 x - F_2 x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} + \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \right) \\ &\leq \|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))} \\ &\quad \times \left(\frac{r}{\|\mathcal{L}_{A_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^{m-1}(\mathbb{R}, E))}} - H + \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \right) \leq r. \end{aligned}$$

В силу ограниченности оператора $\mathcal{W}_2: C^{m-1}(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ и непрерывности оператора $\mathcal{L}_{A_2}^{-1}: C^0(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^m(\mathbb{R}, E)$ множество $\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2 B^{m-1}[0, r]$ ограничено в пространстве $C^m(\mathbb{R}, E)$. Поэтому из теоремы Арцела следует, что оператор $\mathcal{L}_{A_2}^{-1} \mathcal{W}_2: B^{m-1}[0, r] \rightarrow B^{m-1}[0, r]$ s -вполне непрерывный.

Следовательно, согласно теореме 9 уравнение (32) имеет хотя бы одно решение $x^* \in B^{m-1}[0, r]$. Это решение является элементом пространства $C^m(\mathbb{R}, E)$,

и

$$(Kx)(t) = (k_1x_1(t), \dots, k_nx_n(t)), \quad (35)$$

выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} \leq r} \|Fx - Kx\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} \leq kr - H. \quad (36)$$

Доказывается эта теорема с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть

- 1) функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна;
- 2) $R(g) = \mathbb{R}$;
- 3) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$.

Тогда для каждого числа $H > 0$ и отрезка $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ найдутся такие числа $r_0 > 0$ и $k_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что

1) $\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r_0} |zg(x) - k_0x| \leq |k_0|r_0 - H$, причем это неравенство выполняется, если k_0 заменить произвольным числом k , для которого $|k| > |k_0|$ и $kk_0 > 0$;

2) для каждого числа $r > r_0$ существует число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которого $|k| \geq |k_0|$, $kk_0 > 0$ и $\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r} |zg(x) - kx| \leq |k|r - H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b – такое положительное число, что

$$\alpha \min_{|x| \geq b} |g(x)| \geq H \quad (37)$$

(такое число существует на основании условий леммы), и пусть

$$M = \beta \max_{|x| \leq b} |g(x)|.$$

Рассмотрим такое число $k_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которого

$$|k_0|b \geq H, \quad (38)$$

$$k_0xg(x) > 0, \quad (39)$$

если $|x| > b$. Далее выберем произвольное число $r_0 > b$, для которого

$$M + |k_0|b \leq |k_0|r_0 - H, \quad (40)$$

$$\beta|g(x)| \leq |k_0|r_0, \quad (41)$$

если $b < |x| \leq r$. Тогда если $b < |x| \leq r_0$ и $z \in [\alpha, \beta]$, то

$$|zg(x) - k_0x| = |zg(x)| - |k_0x| \leq |k_0|r_0 - H$$

(здесь учтены соотношения (37)–(39) и (41)). Если $|x| \leq b$ и $z \in [\alpha, \beta]$, то согласно (40)

$$|zg(x) - k_0x| = |zg(x)| + |k_0x| \leq M + |k_0|b \leq |k_0|r_0 - H.$$

Следовательно,

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r_0} |zg(x) - k_0x| \leq |k_0|r_0 - H. \quad (42)$$

Очевидно, что соотношения (38)–(41) выполняются, если k_0 заменить числом k , для которого $|k| > |k_0|$ и $kk_0 > 0$. Поэтому для каждого такого k выполняется неравенство

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r_0} |zg(x) - kx| \leq |k|r_0 - H,$$

аналогичное неравенству (42).

Далее докажем вторую часть утверждения леммы.

В силу соотношений (38)–(41) для каждого числа $r > r_0$ существует такое число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $|k| \geq |k_0|$, $kk_0 > 0$ и выполняются соотношения

$$|k|b \geq H, \quad kxg(x) > 0,$$

если $|x| > b$, и

$$M + |k|b \leq |k|r - H, \quad \beta|g(x)| \leq |k|r,$$

если $b < |x| \leq r$. С помощью этих соотношений аналогичным образом получаем, что

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r} |zg(x) - kx| \leq |k|r - H.$$

Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Рассмотрим произвольное число $H > 0$. На основании леммы 4 для каждого $i = \overline{1, n}$ найдутся числа $r_i > 0$ и $k_i^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которых

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbb{R}, \|x_i\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r_i, x_l \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), l = \overline{1, n}} |g_i(x_i(t))\omega_i(t, x_1(\varphi_1(t)), \dots, x_n(\varphi_n(t))) - k_i^* x_i(t)| \\ & \leq \sup_{z \in [\alpha, \beta], t \in \mathbb{R}, \|x_i\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r_i} |zg_i(x_i(t)) - k_i^* x_i(t)| \\ & \leq \max_{z \in [\alpha, \beta], \|x_i\| \leq r_i} |zg_i(x_i) - k_i^* x_i| \leq |k_i^*| r_i - H, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \inf_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x), \quad \beta = \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x).$$

Пусть

$$r = \max_{i = \overline{1, n}} r_i.$$

Согласно этой же лемме существуют числа $k > 0$ и $k_i \in \mathbb{R} \setminus (-|k_i^*|, |k_i^*|)$, $i = \overline{1, n}$, для которых $|k_1| = \dots = |k_n| = k$ и

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbb{R}, \|x_i\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r, x_l \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), l = \overline{1, n}} |g_i(x_i(t))\omega_i(t, x_1(\varphi_1(t)), \dots, x_n(\varphi_n(t))) - k_i x_i(t)| \\ & \leq \sup_{z \in [\alpha, \beta], t \in \mathbb{R}, \|x_i\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq r} |zg_i(x_i(t)) - k_i x_i(t)| \\ & \leq \max_{z \in [\alpha, \beta], \|x_i\| \leq r} |zg_i(x_i) - k_i x_i| \leq |k|r - H, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть выполнены условия теоремы 10.

Тогда для произвольных $h_1, \dots, h_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ система уравнений (33) имеет хотя бы одно решение $x_1, \dots, x_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

§ 8. Необходимые условия выполнения неравенства (11) в случае обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = h(t), \quad (45)$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция и $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Условия существования ограниченных решений этого уравнения и их свойства изучались автором в [19]–[21] и других работах. Укажем для уравнения (45) необходимые условия выполнения неравенства (11).

Используем непрерывный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_f$,

$$\mathcal{L}_f: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (\mathcal{L}_f x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)),$$

и следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 13 (см. [19]). Оператор $\mathcal{L}_f: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет непрерывный обратный оператор тогда и только тогда, когда $R(f) = \mathbb{R}$ и функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является строго монотонной.

С помощью этой теоремы и теоремы 11 легко устанавливается

ТЕОРЕМА 14. Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}_f: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет непрерывный обратный оператор.

Тогда для каждого числа $H > 0$ найдутся такие числа $r > 0$ и $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что для $f(x)$ будет выполняться неравенство (17), где $\mathcal{K}$ – оператор, который определяется равенством (13).

Действительно, в силу теоремы 13 и условий теоремы 14 функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является строго монотонной и $R(f) = \mathbb{R}$. Поэтому на основании теоремы 11 имеет место утверждение теоремы 14.

Обратное утверждение для теоремы 14 является ложным, что подтверждается примером 1.

Для некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка также применим рассмотренный в предыдущих параграфах метод локальной линейной аппроксимации нелинейных отображений.

ТЕОРЕМА 15. Пусть

- 1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция;
- 2) $xg(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$, где a – достаточно большое положительное число;
- 3) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$;
- 4) $\overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(x)}{x} \right| = k$, где $k \in (0, 1]$.

Тогда для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = h(t) \quad (46)$$

имеет хотя бы одно решение $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $H > 0$. В силу условий теоремы существует такое число $r > 0$, что

$$\max_{|x| \leq r} |g(x) + x| \leq r - H. \quad (47)$$

Это неравенство получаем аналогичным образом, как и соответствующие неравенства в лемме 4.

Определим линейный оператор $\mathcal{L}: C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ равенством

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - y(t). \quad (48)$$

Легко проверить, что этот оператор имеет непрерывный обратный $\mathcal{L}^{-1}$, который представляется в виде

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{-1}h)(t) &= -\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^t e^{s-t} h(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{t-s} h(s) ds \right), \\ \|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))} &= 1. \end{aligned} \quad (49)$$

В силу (49) неравенство (47) можно представить в виде

$$\max_{|x| \leq r} |g(x) - (-x)| \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}} - H. \quad (50)$$

Это неравенство аналогично неравенству (11). Поэтому на основании теоремы 4 для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ дифференциальное уравнение (46) имеет хотя бы одно решение $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Теорема 15 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполняются условия 1)–4) теоремы 15. Тогда для каждого числа $H > 0$ существует такое число $r > 0$, что для оператора $\mathcal{L}$, который определяется равенством (48), выполняется неравенство (50).

§ 9. Случай линейных дифференциально-функциональных уравнений

Зафиксируем произвольный s -кратно непрерывный элемент Q пространства $L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))$. Рассмотрим линейное дифференциально-функциональное уравнение

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Qx)(t) = h(t),$$

где $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, и дифференциальный оператор $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется равенством

$$(\mathcal{L}_Q x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Qx)(t).$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 16. Для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A \in \mathcal{D}_1$, что

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Qx - Ax\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H \quad (51)$$

тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}_Q$ имеет непрерывный обратный оператор.

Очевидно, что неравенство (51) равносильно неравенству

$$\|Q - A\|_{L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} \leq \frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - \frac{H}{r}. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $A \in \mathcal{D}_1$, что выполняется неравенство (51). Тогда в силу теоремы 1 для оператора $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеем

$$R(\mathcal{L}_Q) = C^0(\mathbb{R}, E). \quad (53)$$

Покажем, что

$$\ker \mathcal{L}_Q = \{0\}, \quad (54)$$

т.е. что уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} + Qx = 0 \quad (55)$$

имеет только нулевое ограниченное решение. Представим это уравнение в виде

$$\frac{d^m x}{dt^m} + Ax = (A - Q)x.$$

Так как оператор $\mathcal{L}_A: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, который определяется равенством

$$(\mathcal{L}_A x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Ax)(t),$$

имеет непрерывный обратный, то в пространстве $C^m(\mathbb{R}, E)$ уравнение (55) равносильно уравнению

$$x(t) = (\mathcal{L}_A^{-1} z)(t), \quad (56)$$

где $z = (A - Q)x$. Пусть $x^*(t)$ – ограниченное решение уравнения (56), т.е.

$$x^*(t) \equiv (\mathcal{L}_A^{-1} z^*)(t), \quad (57)$$

где $z^* = (A - Q)x^*$. На основании (52) и (57) имеем

$$\begin{aligned} \|x^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} &= \|\mathcal{L}_A^{-1} z^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq \|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \|z^*\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \\ &\leq \|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \|Q - A\|_{L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} \|x^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \\ &\leq \|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \left(\frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - \frac{H}{r} \right) \|x^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \\ &\leq \left(1 - \frac{H}{r} \|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} \right) \|x^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)}. \end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенств

$$0 \leq 1 - \frac{H}{r} \|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))} < 1$$

вытекает равенство

$$\|x^*\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} = 0,$$

т.е. соотношение (54) выполняется. Следовательно, из равенства (53) и теоремы Банаха об обратном операторе [17] вытекает, что оператор $\mathcal{L}_Q$ имеет непрерывный обратный.

Достаточность. Пусть оператор $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный. Тогда Q является элементом множества $\mathcal{D}_1$. Зафиксируем произвольное число $H > 0$ и выберем такое число $r > 0$, чтобы

$$\frac{r}{\|\mathcal{L}_Q^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H > 0.$$

Положив $A = Q$, получим неравенство (51).

Теорема 16 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный оператор тогда и только тогда, когда существует такой элемент $A \in \mathcal{D}_1$, что

$$\|Q - A\|_{L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} < \frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}}. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого элемента $A \in \mathcal{D}_1$ выполняется неравенство (58). Зафиксируем произвольное число $H > 0$. Выберем такое число $r > 0$, чтобы

$$\frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - \|Q - A\|_{L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} > \frac{H}{r}.$$

Тогда выполняется неравенство (52) и, следовательно, неравенство (51). Тогда на основании теоремы 16 оператор $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный оператор.

Наоборот, если оператор $\mathcal{L}_Q: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет непрерывный обратный оператор, то в силу теоремы 16 для каждого числа $H > 0$ существуют число $r > 0$ и элемент $A \in \mathcal{D}_1$, для которых выполняется неравенство (51) и, следовательно, неравенство (52). Из (52) вытекает (58).

Следствие 2 доказано.

§ 10. Малые на бесконечности возмущения линейных дифференциально-функциональных уравнений

Приведем еще одно утверждение, которое можно получить с помощью теоремы 1.

Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (Ax)(t) + (Fx)(t) = h(t), \quad (59)$$

где $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $A: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – линейный непрерывный s -вполне непрерывный оператор и $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор.

Частным случаем теоремы 1 является

ТЕОРЕМА 17. Пусть $A \in \mathcal{D}_1$ и

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}}. \quad (60)$$

Тогда уравнение (59) для каждой функции $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$.

Действительно, в силу условий теоремы для каждого числа $H > 0$ существует такое число $r > 0$, что выполняется соотношение

$$\sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|Fx\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}} - H,$$

аналогичное неравенству (3). Поэтому на основании теоремы 1 имеет место утверждение теоремы 17.

Приведем пример применения теоремы 17.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (\Omega x)(t)(Ax)(t) = h(t), \quad (61)$$

где $A \in \mathcal{D}_1$ и $\Omega: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор, для которого

$$\left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{\|x\|_{C^m(\mathbb{R}, E)} \leq r} \|\Omega x - 1\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \right) \|A\|_{L(C^m(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E))} < \frac{1}{\|\mathcal{L}_A^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, E), C^m(\mathbb{R}, E))}}. \quad (62)$$

Это уравнение можно представить в виде (59), где

$$(Fx)(t) = ((\Omega x)(t) - 1)(Ax)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как $F: C^m(\mathbb{R}, E) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ – ограниченный s -вполне непрерывный оператор и в силу (62) для него выполняется соотношение (60), то для каждого $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ уравнение (61) имеет хотя бы одно решение $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$.

В заключение заметим, что список приложений рассмотренного в статье метода исследования нелинейных уравнений, очевидно, не исчерпывается приведенными примерами нелинейных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений.

Список литературы

- [1] Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11:3** (1972), 269–274; англ. пер.: É. Mukhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11:3** (1972), 169–172.

- [2] Э. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460; англ. пер.: E. Mukhamadiev, “Investigations in the theory of bounded and periodic solutions of differential equations”, *Math. Notes*, **30**:3 (1981), 713–722.
- [3] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116(158)**:4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.
- [4] В. Е. Слюсарчук, “Интегральное представление c -непрерывных линейных операторов”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, **8** (1981), 35–38.
- [5] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.
- [6] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. Notes*, **42**:2 (1987), 648–651.
- [7] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c -непрерывных функционально-дифференциальных операторов”, *Укр. матем. журн.*, **41**:2 (1989), 201–205; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of uniformly c -continuous functional-differential operators”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:2 (1989), 180–183.
- [8] В. Г. Курбатов, *Линейные дифференциально-разностные уравнения*, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж, 1990.
- [9] Чан Хыу Бонг, *Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1993.
- [10] В. Е. Слюсарчук, “Слабо нелинейные возмущения импульсных систем”, *Матем. физика и нелинейная мех.*, **15**:49 (1991), 32–35.
- [11] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, V. Sh. Burd, Yu. S. Kolesov, *Nonlinear almost periodic oscillations*, Halsted Press, New York–Toronto, ON; Israel Program for Scientific Transl., Jerusalem–London, 1973.
- [12] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*, Наукова думка, Киев, 1969; англ. пер.: N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropol'skij, A. M. Samojlenko, *Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics*, Hindustan Publ., Delhi; Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [13] Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти, *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1974; пер. с нем.: R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*, Edizioni Cremonese, Rome, 1963.
- [14] Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск, 1986.
- [15] А. И. Перов, И. Д. Коструб, “Метод направляющих функций в задаче о нелинейных почти-периодических колебаниях”, *Вестник ВГУ. Сер. физика, матем.*, **1** (2002), 163–171.
- [16] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec'kii,

- M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [17] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 6-е изд., Наука, М., 1986; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [18] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: L. Nirenberg, *Topic in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., New York, 1974.
- [19] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *Неліній. коливання*, **2**:4 (1999), 523–539.
- [20] В. Е. Слюсарчук, “Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *УМН*, **54**:4 (1999), 181–182; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Conditions for the existence of bounded solutions of non-linear differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **54**:4 (1999), 852–853.
- [21] V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations”, *Acta Appl. Math.*, **65**:1–3 (2001), 333–341.

В. Е. Слюсарчук (V. E. Slyusarchuk)
Национальный университет водного хозяйства
и природопользования, г. Ровно, Украина
E-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Поступила в редакцию
20.03.2009