Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, Некоторые признаки существования
полного дифференциала в точке, *Матем. сб.*, 2010,
том 201, номер 8, 45–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:35:44

УДК 517.51

В. М. Миклюков

Некоторые признаки существования полного дифференциала в точке

Найдены условия существования полного дифференциала в точке (в том числе граничной) функций с обобщенными производными, принадлежащими некоторым весовым классам.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: полный дифференциал, функции с обобщенными производными.

§ 1. Основные результаты

1.1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция. Говорят, что функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет в точке $a \in D$ *полный дифференциал*, если существует постоянная $C = (C_1, \dots, C_n)$ такая, что

$$f(x) - f(a) = \langle C, x - a \rangle + o(|x - a|), \quad x \rightarrow a, \quad x \in D. \quad (1)$$

Известно, что функция f имеет полный дифференциал в точке $a \in D$, если в окрестности a существуют частные производные $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, являющиеся непрерывными в точке a . При этом имеются примеры, показывающие, что непрерывность частных производных в точке a не является необходимым условием существования в ней полного дифференциала.

1.2. В случае, когда $a \in \partial D$ – кратная точка границы, выполнение соотношения (1) может зависеть от направления подхода к точке a с той или иной стороны D и, таким образом, определение полного дифференциала нуждается в уточнении.

Определим концы области D , исходя из аналогии с теорией простых концов Каратеодори (см., например, [1; § 3]).

Для произвольного множества $U \subset D$ положим $[U] = \bar{U} \setminus \partial D$, где $\bar{U}$ есть замыкание U в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\{U_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – семейство подобластей $U_k \subset D$ со следующими свойствами:

- (i) $[U_{k+1}] \subset U_k$, $k = 1, 2, \dots$;
- (ii) $\bigcap_{k=1}^{\infty} [U_k] = \emptyset$.

Произвольную последовательность $\{U_k\}$ с указанными свойствами назовем *цепью* в области D .

Пусть $\{U'_k\}$, $\{U''_k\}$ – две цепи подобластей в D . Говорят, что *цепь* U'_k *содержится в цепи* $\{U''_k\}$, если для каждого $m \geq 1$ найдется номер $k(m)$ такой, что при всех $k > k(m)$ выполнено $U'_k \subset U''_m$. Две цепи, каждая из которых содержится в другой, называются *эквивалентными*. Классы эквивалентности ξ цепей будем называть *концами области* D .

Чтобы определить конец ξ , достаточно задать хотя бы один представитель в классе эквивалентности. Если конец ξ определяется цепью $\{U_k\}$, то мы будем писать $\xi \asymp \{U_k\}$.

Телом конца $\xi \asymp \{U_k\}$ называется множество

$$|\xi| = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{U}_k.$$

Ясно, что это множество не зависит от выбора цепи подобластей $\{U_k\}$.

Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность точек $x_m \in D$, не имеющая точек накопления в D . Такие последовательности далее будем называть *расходящимися* в D .

Пусть $a_\xi \in |\xi|$ – произвольная точка. Расходящаяся в D последовательность точек $x_k \in D$ сходится к точке a_ξ в топологии ξ , если $x_k \rightarrow a_\xi$ (в топологии $\mathbb{R}^n$) и для некоторой (а, следовательно, произвольной) цепи $\{U_k\} \in \xi$ выполнено условие: для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдется целое $m(k)$ такое, что $x_m \in U_k$ при любом $m > m(k)$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, ξ – конец D , $a_\xi \in |\xi|$ – точка. Будем говорить, что *подобласть D' области D примыкает к точке a_ξ* , если $a_\xi \in \partial D'$ и всякая последовательность точек $x_k \in D'$, сходящаяся к a_ξ в топологии $\mathbb{R}^n$, сходится к этой точке в топологии ξ . Будем говорить, что для функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет место соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a_\xi} f(x) = A,$$

если $f(x_k) \rightarrow A$ при $x_k \rightarrow a_\xi$ вдоль любой последовательности точек $x_k \in D$, сходящейся к a_ξ в топологии ξ . Величину A будем обозначать в этом случае символом $f(a_\xi)$.

Предположим, что функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ и точка a_ξ таковы, что $f(a_\xi)$ существует. Будем говорить, что f имеет *полный дифференциал в граничной точке a_ξ* , если найдется постоянная $C = (C_1, \dots, C_n)$, для которой

$$f(x) - f(a_\xi) = \langle C, x - a_\xi \rangle + o(|x - a_\xi|), \quad x \rightarrow a_\xi, \quad x \in D. \quad (2)$$

Как и в случае внутренней точки, будем называть величину

$$df(a_\xi) = \langle C, x - a_\xi \rangle$$

дифференциалом f в точке a_ξ .

1.3. В случае, когда $a = a_\xi$ – граничная точка области, дифференциал $df(a_\xi)$ может быть не единственным.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 2$ и $\eta(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta'(t) > 0 \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

Предположим, что D есть область с нулевым углом на границе,

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\eta(x_2) < x_1 < \eta(x_2), \quad x_2 > 0\}$$

и $a = (0, 0)$ – граничная точка D .

Функция $f(x_1, x_2) = x_2: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет в точке $(0, 0)$ в качестве дифференциала величину

$$df(0, 0) = C_1 dx_1 + dx_2,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$f(x_1, x_2) - f(0, 0) - (C_1 x_1 + x_2) = -C_1 x_1.$$

Поэтому при всех $(x_1, x_2) \in D$ выполнено

$$|f(x_1, x_2) - f(0, 0) - (C_1 x_1 + x_2)| = |C_1 x_1| \leq |C_1| \eta(x_2).$$

Но так как $\eta(0) = \eta'(0) = 0$, то

$$\lim_{\substack{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0) \\ (x_1, x_2) \in D}} \frac{\eta(x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0,$$

и мы получаем, что

$$|f(x_1, x_2) - f(0, 0) - (C_1 x_1 + x_2)| = o\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

при $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$, $(x_1, x_2) \in D$.

ПРИМЕР 2. Укажем область с аналогичными свойствами в случае $n = 3$. Пусть $\eta(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывно дифференцируемая функция со свойствами (3). Рассмотрим область с гребнем нулевого раствора на границе

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\eta(x_2) < x_1 < \eta(x_2), x_2 > 0\}.$$

Точка $a = (0, 0, 0)$ является граничной точкой D . Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3) = x_2: D \rightarrow \mathbb{R}^1$. Как и выше, устанавливается, что величина

$$df(0, 0, 0) = C_1 dx_1 + dx_2,$$

где C_1 – произвольная постоянная, является дифференциалом f в точке $(0, 0, 0)$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, ξ – конец D и $a_\xi \in |\xi|$ – некоторая точка. Символом $\text{cont}_{\overline{D}} a_\xi$ обозначим контингенцию множества $\overline{D}$ в a_ξ .

Определим контингенцию области D в точке a_ξ . С небольшими изменениями мы следуем определению контингенции множества в точке, приводимому в [2; § 2, гл. IX]. Главное отличие состоит в необходимости учета топологии конца ξ при подходе к точке a_ξ .

Пусть l – луч, выходящий из точки a_ξ и содержащий последовательность точек $x_k \in D$, сходящуюся к a_ξ в топологии ξ при $k \rightarrow \infty$. Назовем l *полукасательной области D в точке a_ξ* .

Будем говорить, что *последовательность полукасательных l_k области D в точке a_ξ сходится к лучу l , выходящему из a_ξ* , если соответствующая последовательность единичных направляющих векторов лучей l_k сходится (в смысле $\mathbb{R}^n$) к единичному направляющему вектору луча l . Соответствующим образом определяются окрестности лучей.

Совокупность всевозможных лучей $l \in \text{cont}_{\overline{D}} a_\xi$, предельных для множества полукасательных в a_ξ области D , будем называть *контингенцией области D в точке a_ξ* и обозначать через $\text{cont}_D a_\xi$.

Будем говорить, что *контингенция $\text{cont}_D a_\xi$ содержит k линейно независимых лучей*, если существуют лучи $l_1, \dots, l_k \in \text{cont}_D a_\xi$, направляющие векторы которых линейно независимы.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, ξ – конец D и $a_\xi \in |\xi|$ – некоторая точка. Если контингенция $\text{cont}_D a_\xi$ содержит n линейно независимых направлений, то дифференциал $df(a_\xi)$ определяется единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют линейно независимые лучи $l_1, \dots, l_n \in \text{cont}_{\overline{D}} a_\xi$. Рассматривая достаточно малые их окрестности, найдем n полукасательных области D в точке a_ξ с линейно независимыми единичными направляющими векторами

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \\ e_2 &= (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n}), \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}). \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, предположим, что $a_\xi = (0, \dots, 0)$. Если существует дифференциал $df(a_\xi)$, то в силу (2) для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ при достаточно малых $t > 0$ таких, что точки te_k суть точки D , выполнено

$$f(te_k) - f(0) = \langle C, te_k \rangle + o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Отсюда находим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(te_k) - f(0)}{t} = \langle C, e_k \rangle.$$

Предел в левой части данного соотношения существует. Обозначая его через β_k , приходим к следующей системе соотношений:

$$\begin{aligned} C_1 \alpha_{11} + C_2 \alpha_{12} + \dots + C_n \alpha_{1n} &= \beta_1, \\ C_1 \alpha_{21} + C_2 \alpha_{22} + \dots + C_n \alpha_{2n} &= \beta_2, \\ &\dots\dots\dots \\ C_1 \alpha_{n1} + C_2 \alpha_{n2} + \dots + C_n \alpha_{nn} &= \beta_n. \end{aligned}$$

Так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, то определитель $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. Отсюда следует, что постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ определяются указанной системой уравнений единственным образом, что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что если дифференциал $df(a_\xi) = \sum_{i=1}^n C_i dx_i$ существует и контингенция $\text{cont}_D a_\xi$ содержит луч, то вдоль этого луча функция f может быть продолжена по непрерывности и существует соответствующая производная по направлению. Наличие в контингенции k , $1 \leq k \leq n$, линейно независимых лучей влечет k различных линейных соотношений для определения постоянных C_i , $i = 1, \dots, n$.

1.4. Напомним определение класса ACL_σ^p . Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Зафиксируем i , $1 \leq i \leq n$, и обозначим через D_i^* ортогональную проекцию D на гиперплоскость $x_i = 0$. Для произвольной локально суммируемой в D функции f положим

$$\begin{aligned} f_i^*(x'_i, t, x''_i) &\equiv f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ x'_i &= (x_1, \dots, x_{i-1}), \quad x''_i = (x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$D_i(x'_i, x''_i) \equiv \{(x'_i, t, x''_i) \in \mathbb{R}^n : (x'_i, 0, x''_i) \in D_i^*\}.$$

Непрерывная функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях* (или кратко, ACL), если для любого $i = 1, \dots, n$ сужения $f_i^*(x'_i, t, x''_i)$ суть абсолютно непрерывны (по переменной t) внутри совокупности линейных интервалов $D \cap D_i(x'_i, x''_i)$ для $\mathcal{H}^{n-1}$ -почти всех точек $(x'_i, 0, x''_i) \in D_i^*$. (Здесь и ниже символ $d\mathcal{H}^p$ означает элемент p -мерной меры Хаусдорфа.)

Всякая ACL -функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производные $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, почти всюду в D . Символ

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

обозначает формальный градиент f в точках, где все частные производные существуют. В точках, где вектор ∇f не определен, условимся считать, что $\partial f / \partial x_i = +\infty$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\sigma_i: D \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n$, – определенные почти всюду в D , измеримые в смысле Лебега неотрицательные функции, пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $p \geq 1$ – постоянная. Функциональный класс $\text{ACL}_\sigma^p(D)$ определяется как множество функций класса ACL в D , для которых

$$\int_D \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right]^{p/2} d\mathcal{H}^n < \infty.$$

В случае, когда весовые функции $\sigma_i \equiv 1$, $i = 1, \dots, n$, имеем известный функциональный класс $\text{ACL}^p(D)$, совпадающий с множеством непрерывных функций соболевского класса $W_p^1(D)$ (см. [3; теоремы 5.6.2, 5.6.3]).

Положим

$$A_{p,\sigma}(x, \xi) = \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \xi_i^2 \right]^{p/2}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

1.5. Пусть y и a – произвольная пара точек такая, что $y \in D$ и a либо внутренняя точка D , либо $a = a_\xi \in |\xi|$, где ξ – некоторый конец области $D \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что простая жорданова дуга γ , заданная параметризацией $x(\tau): [0, 1) \rightarrow D$, ведет из точки y в точку a , если $x(0) = y$,

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} x(\tau) = a, \quad a \in D,$$

и существует последовательность $\tau_k \rightarrow 1$, вдоль которой

$$\lim_{\tau_k \rightarrow 1} x(\tau_k) = a_\xi, \quad a \in |\xi|.$$

Наша цель – выяснить условия, при которых функция $f \in \text{ACL}_\sigma^p(D)$ имеет полный дифференциал

$$df(a) = \langle C, dx \rangle, \quad C = (C_1, \dots, C_n).$$

Нетрудно видеть, что дифференциал $df(a)$ существует тогда и только тогда, когда функция

$$\varphi(x) = f(x) - \langle C, x - a \rangle$$

дифференцируема в точке a и $d\varphi(a) = 0$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, в котором $C = (0, \dots, 0)$.

Обозначим через $\Gamma(y, a; D)$ множество всевозможных локально спрямляемых, простых жордановых дуг $\gamma \subset D$, ведущих из точки y в точку a . Определим (p, σ) -модуль семейства $\Gamma(y, a; D)$ следующим образом:

$$\text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; D) = \inf_p \frac{\int_D A_{p,\sigma}(x, \nabla \rho) d\mathcal{H}^n}{\inf_{\gamma \in \Gamma(y,a)} \left(\int_\gamma |\nabla \rho(x)| |dx| \right)^p}, \quad (4)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям $\rho \in \text{ACL}_\sigma^p(D)$ таким, что $\rho(a) = 0$, $\nabla \rho(a) = 0$ и

$$\int_D A_{p,\sigma}(x, \nabla \rho) d\mathcal{H}^n < \infty. \quad (5)$$

Зафиксируем произвольно непрерывную вектор-функцию $\nu: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $1 \leq m < \infty$. Положим $B^\nu(a, r) = \{x \in D : |\nu(x) - \nu(a)| < r\}$ и обозначим через $B_D^\nu(a, r)$ компоненту связности множества $B^\nu(a, r)$, содержащую точку a в случае, когда a – внутренняя точка D , и примыкающую к a в случае, когда $a \in |\xi|$.

При $\nu(x) \equiv x$ мы будем использовать обозначения $B(a, r)$ и $B_D(a, r)$ соответственно.

Следующее утверждение является ключевым в настоящей работе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, ξ – ее конец и $C = (C_1, \dots, C_n)$ – постоянная. Предположим, что:

- (i) функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ такова, что функция $\varphi(x) = f(x) - \langle C, x - a \rangle$ принадлежит классу $\text{ACL}_\sigma^p(D)$, $p \geq 1$;
- (ii) в окрестности точки a , внутренней либо принадлежащей телу $|\xi|$, выполнено

$$\frac{\int_{B_D^\nu(a, |y-a|)} A_{p,\sigma}(x, \nabla f - C) d\mathcal{H}^n}{|y-a|^p \text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; B_D^\nu(a, |y-a|))} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow a, \quad y \in D. \quad (6)$$

Тогда f имеет полный дифференциал в точке a , причем $df(a) = \langle C, dx \rangle$. При этом в случае, когда a – внутренняя точка D , можно положить $C = \nabla f(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varphi(x) = f(x) - \langle C, x - a \rangle.$$

Имеем

$$\varphi(a) = f(a), \quad \nabla \varphi(x) = \nabla f(x) - C.$$

Выберем в (4) функцию $\rho(x) = \varphi(x) - f(a)$. Так как $\varphi \in \text{ACL}_\sigma^p(D)$, то данная функция обладает свойством (5). Находим

$$\text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; B_D^\nu(a, |y - a|)) \leq \frac{\int_{B_D^\nu(a, |y - a|)} A_{p,\sigma}(x, \nabla \varphi) d\mathcal{H}^n}{\inf_{\gamma \in \Gamma(y, a; B_D^\nu(a, |y - a|))} \left(\int_\gamma |\nabla \varphi(x)| |dx| \right)^p}. \quad (7)$$

Если γ — дуга семейства $\Gamma(y, a; B_D^\nu(a, |y - a|))$, то

$$|f(y) - f(a) - \langle C, y - a \rangle| = |\varphi(y) - \varphi(a)| = \left| \int_\gamma \langle \nabla \varphi, dx \rangle \right| \leq \int_\gamma |\nabla \varphi(x)| |dx|.$$

Таким образом, в силу (7) для произвольной точки $y \in D$ имеем

$$|f(y) - f(a) - \langle C, y - a \rangle|^p \leq \frac{\int_{B_D^\nu(a, |y - a|)} A_{p,\sigma}(x, \nabla f - C) d\mathcal{H}^n}{\text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; B_D^\nu(a, |y - a|))}. \quad (8)$$

В силу (8) предположение (6) гарантирует выполнение (1) (соответственно (2)) и тем самым существование полного дифференциала в точке a .

§ 2. Оценки модуля $\text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; B_D^\nu(a, r))$

2.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область и $\nu: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Обозначим $B_D^\nu(a, r) = U^\nu$. Имеем

$$\text{mod}_{p,\sigma; U^\nu} \Gamma(y, a) = \inf_\rho \frac{\int_{U^\nu} \left[\sum_{m=1}^n \sigma_m(x) \rho_{x_m}^2(x) \right]^{p/2} d\mathcal{H}^n}{\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma |\nabla \rho| |dx| \right)^p}.$$

Положим

$$\sigma_+(x) = \max\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)\}, \quad \sigma_-(x) = \min\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)\}.$$

Таким образом,

$$\inf_\rho \frac{\int_{U^\nu} \sigma_-^{p/2} |\nabla \rho|^p d\mathcal{H}^n}{\left(\inf_{\gamma \in \Gamma(y, a; U^\nu)} \int_\gamma |\nabla \rho| |dx| \right)^p} \leq \text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; U). \quad (9)$$

Пусть $\mu(x)$ – произвольная функция, допустимая при вычислении точной нижней грани в левой части (10) при $\Gamma = \Gamma(y, a; U)$. Так как $\Gamma^* \subset \Gamma(y, a; U)$, то для любой $\gamma \in \Gamma^*$ выполнено

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{\gamma} \mu(x) |dx| = \int_{\gamma} \mu(x) \frac{|J(x, \varphi)|^{1/p} \sigma_-^{1/2}}{|J(x, \varphi)|^{1/p} \sigma_-^{1/2}} |dx| \\ &\leq \left(\int_{\gamma} \frac{\sigma_-^{p/2}}{|J(x, \varphi)|} \mu^p(x) |dx| \right)^{1/p} \left(\int_{\gamma} \frac{|J(x, \varphi)|^{1/(p-1)}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}} |dx| \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\varphi(U)} \frac{d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}}{\left(\int_{\varphi^{-1}(\tau)} \frac{|J(x, \varphi)|^{1/(p-1)}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}} |dx| \right)^{p-1}} \leq \int_{\varphi(U)} d\tau \int_{\varphi^{-1}(\tau)} \sigma_-^{p/2} \mu^p(x) \frac{|dx|}{|J(x, \varphi)|}.$$

Пользуясь соотношением (12), получаем

$$\int_{\varphi(U)} d\tau \int_{\varphi^{-1}(\tau)} \sigma_-^{p/2} \mu^p(x) \frac{|dx|}{|J(x, \varphi)|} = \int_U \sigma_-^{p/2} \mu^p(x) d\mathcal{H}^n,$$

и на основании (10) приходим к следующему утверждению

ЛЕММА 2. *В описанных выше предположениях имеет место оценка*

$$\int_{\varphi(U^\nu)} \frac{d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}}{\left(\int_{\varphi^{-1}(\tau)} \frac{|J(x, \varphi)|^{1/(p-1)}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}} |dx| \right)^{p-1}} \leq \text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; U^\nu). \quad (14)$$

§ 3. Дифференциал во внутренней точке

3.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $y, a \in \overline{D}$ – произвольная пара точек. Пусть $L = L(y, a)$ – прямолинейный отрезок, соединяющий y и a . Обозначим через $\Pi = \Pi(y, a)$ гиперплоскость, проходящую через середину $c = (y+a)/2$ отрезка L ортогонально L .

Фиксируем произвольно открытый $(n-1)$ -мерный куб $Q(c, R)$ в Π со стороной $R > 0$ и одной из вершин в точке c . Пусть $K(y, R)$, $K(a, R)$ – открытые пирамиды в $\mathbb{R}^n$ с общим основанием $Q(c, R)$ и вершинами в точках y, a . Рассмотрим область

$$V(y, a; R) = K(y, R) \cup K(a, R) \cup Q(c, R).$$

Оценим модуль $\text{mod}_{p,\sigma} \Gamma(y, a; V(y, a; R))$. Предположим, что $V(y, a; R) \subset D$. Введем в $\mathbb{R}^n$ декартову прямоугольную систему координат $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ с плюсом в точке c так, что

$$y = (0, \dots, 0, -h), \quad a = (0, \dots, 0, h), \quad h = \frac{|y - a|}{2},$$

$$\Pi(y, a) = \{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) : \tau_n = 0\}$$

и стороны $(n-1)$ -мерного куба $Q(c, R)$ параллельны осям координат.

Области $K(y, R)$ и $K(a, R)$ в системе координат $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ описываются следующим образом:

$$K(y; R) = \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_n) : -h < \tau_n < 0, 0 < \frac{\tau_i}{h + \tau_n} < \frac{R}{h}, i = 1, \dots, n-1 \right\},$$

$$K(a; R) = \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_n) : 0 < \tau_n < h, 0 < \frac{\tau_i}{h - \tau_n} < \frac{R}{h}, i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

В качестве вектор-функции (11) выбираем вектор-функцию

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : \tau \in V(y, a; R) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (15)$$

так, что

$$\varphi_i = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\tau_i}{h + \tau_n} & \text{при } \tau \in K(y, R), \\ \operatorname{arctg} \frac{\tau_i}{h} & \text{при } \tau \in Q(c, R), \\ \operatorname{arctg} \frac{\tau_i}{h - \tau_n} & \text{при } \tau \in K(a, R), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

Легко проверяется, что данная функция непрерывно дифференцируема на $K(y, R) \cup K(a, R)$ и удовлетворяет условию Липшица в области $V(y, a; R)$. При этом образом области $V(y, a; R)$ является $(n-1)$ -мерный куб:

$$\varphi(V(y, a; R)) = O_n(\alpha), \quad O_n(\alpha) \equiv \overbrace{(0, \alpha) \times \dots \times (0, \alpha)}^{n-1}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{h}.$$

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n) \in K(y, R)$. Обозначим через θ_i угол, образуемый прямой, проходящей через точки

$$t_n = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, \tau_n), \quad t_i = (0, \dots, 0, \tau_i, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

с вектором $\vec{y}\vec{a}$. Так как $0 < \tau_i < R$, то θ_i может быть выбран так, что $0 < \theta_i < \alpha$ при всех $i = 1, \dots, n-1$.

Положим

$$l_i = \sqrt{(h + \tau_n)^2 + \tau_i^2} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

В случае $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n) \in K(a, R)$ вводимые обозначения аналогичны следующим: θ_i – угол, образованный прямой, проходящей через точки t_n и t_i , с вектором $\vec{y}\vec{a}$, а

$$l_i = \sqrt{(h - \tau_n)^2 + \tau_i^2} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

ЛЕММА 3. *Существует постоянная β_n такая, что при $|\operatorname{tg} \alpha| < \beta_n$ вектор-функция φ , определяемая соотношениями (15), (16), удовлетворяет условию (13) в каждой точке $\tau \in V(y, a; R) \setminus \Pi(y, a)$,*

$$|J(\tau, \varphi)| = \frac{|\Delta_n(\theta)|^{1/2}}{l_1 \dots l_{n-1}}, \quad (17)$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ и

$$\Delta_n(\theta) = \det \begin{vmatrix} 1 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \dots & \sin \theta_1 \sin \theta_{n-1} \\ \sin \theta_2 \sin \theta_1 & 1 & \dots & \sin \theta_2 \sin \theta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \theta_{n-1} \sin \theta_1 & \sin \theta_{n-1} \sin \theta_2 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

При этом можно положить

$$\beta_2 = \beta_3 = \infty, \quad \beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3^{1/2} - 1}},$$

а в качестве β_n при $n \geq 5$ взять

$$\beta_n = \frac{1}{[(n-1)! - 2]^{1/2}}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждой точке $\tau \in K(y, R) \cup K(a, R)$ мы имеем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_j} = 0, \quad j \neq i, n.$$

В точках $\tau \in K(y, R)$ получаем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_i} = \frac{h + \tau_n}{(h + \tau_n)^2 + \tau_i^2}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_n} = \frac{-\tau_i}{(h + \tau_n)^2 + \tau_i^2}, \quad i \neq n,$$

а в точках $\tau \in K(a, R)$ –

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_i} = \frac{h + \tau_n}{(h - \tau_n)^2 + \tau_i^2}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_n} = \frac{\tau_i}{(h - \tau_n)^2 + \tau_i^2}, \quad i \neq n.$$

Нетрудно видеть, что

$$\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{(h + \tau_n)^2 + \tau_i^2} + \frac{(1 - \delta_{ij})\tau_i \tau_j}{[(h + \tau_n)^2 + \tau_i^2][(h + \tau_n)^2 + \tau_j^2]}, \quad \tau \in K(y, R),$$

$$\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{(h - \tau_n)^2 + \tau_i^2} + \frac{(1 - \delta_{ij})\tau_i \tau_j}{[(h - \tau_n)^2 + \tau_i^2][(h - \tau_n)^2 + \tau_j^2]}, \quad \tau \in K(a, R),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Имеем

$$\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{l_{ij}^2} + (1 - \delta_{ij}) \frac{\sin \theta_i \sin \theta_j}{l_i l_j},$$

$$\det \begin{vmatrix} \langle \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_{n-1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \nabla \varphi_{n-1}, \nabla \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \nabla \varphi_{n-1}, \nabla \varphi_{n-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{l_1 l_2} & \dots & \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_{n-1}}{l_1 l_{n-1}} \\ \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_1}{l_2 l_1} & 1 & \dots & \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_{n-1}}{l_2 l_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sin \theta_{n-1} \sin \theta_1}{l_{n-1} l_1} & \frac{\sin \theta_{n-1} \sin \theta_2}{l_{n-1} l_2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_n(\theta)}{l_1^2 \dots l_{n-1}^2}.$$

(19)

В случае $n = 2$ имеем $\Delta_2(\theta) = 1$ и при $\beta_2 = \infty$ выполнение (13) очевидным образом следует из соотношения (19).

Если $n = 3$, то $\Delta_3(\theta) = 1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \geq 0$, что непосредственно влечет выполнение (13) при $\beta_3 = \infty$.

Пусть $n = 4$. Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_4(\theta) &= 1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 + 2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \\ &\geq 1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \geq 1 - 3 \max_{i=1,2,3} |\sin \theta_i|^4. \end{aligned} \quad (20)$$

Если точка $\tau \in V(y, a; R) \setminus \Pi(y, a)$, то либо $\tau \in K(y; R)$, либо $\tau \in K(a; R)$. В первом случае

$$0 \leq \alpha < \arctg \beta_4 = \arctg \frac{1}{\sqrt{3^{1/2} - 1}},$$

а потому

$$0 \leq \theta_i < \arctg \frac{1}{\sqrt{3^{1/2} - 1}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Следовательно,

$$0 \leq \sin \theta_i < \frac{1}{3^{1/4}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

На основании соотношения (20) заключаем, что $\Delta_4(\theta) > 0$. Это гарантирует наличие свойства (13).

В случае, когда $\tau \in K(a; R)$, рассуждения аналогичны.

Предположим теперь, что $n \geq 5$. Так как определитель $\Delta_n(\theta)$ можно записать в виде суммы $(n-1)!$ членов вида

$$(-1)^r \sin^{r_1} \theta_1 \cdots \sin^{r_{n-1}} \theta_{n-1}, \quad r = 1, 2, \quad 0 \leq r_i \leq n-1,$$

то

$$\Delta_n(\theta) > 1 - [(n-1)! - 1] \left(\max_{i=1, \dots, n-1} |\sin \theta_i| \right)^2. \quad (21)$$

При $\tau \in K(y; R)$ выполнено

$$0 \leq \alpha < \beta_n, \quad 0 \leq \theta_i < \arctg \beta_n \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Отсюда

$$0 \leq \sin \theta_i < \frac{\beta_n}{\sqrt{1 + \beta_n^2}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Пользуясь (21), находим

$$\Delta_n(\theta) > 1 - [(n-1)! - 1] \frac{\beta_n^2}{1 + \beta_n^2} = \frac{1 - [(n-1)! - 2]\beta_n^2}{1 + \beta_n^2}.$$

Выбирая здесь β_n , как и в (18), заключаем, что $\Delta_n(\theta) > 0$, и (13) доказано.

В случае $\tau \in K(a; R)$ рассуждения аналогичны.

3.2. Положим

$$E_\xi = \{\tau \in V(y, a; R) : \varphi(y) = \xi\}, \quad \xi \in O_n(\alpha),$$

и заметим, что $E_\xi \cap K(y, R)$ является отрезком прямой, выходящей из точки y и образующей углы ξ_i с осями $O\tau_i$, а $E_\xi \cap K(a, R)$ является отрезком прямой, выходящей из точки a под углами ξ_i к осям $O\tau_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Соотношение (14) в данном случае имеет вид

$$\int_{O_n(\alpha)} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{(I_{\sigma_-}(y; \xi) + I_{\sigma_-}(a; \xi))^{p-1}} \leq \text{mod}_{p, \sigma} \Gamma(y, a; V(y, a; R)), \quad (22)$$

где

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad h = |y - a|, \quad \sigma_-(x) = \min\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)\},$$

$$I_{\sigma_-}(y; \xi) = \int_{E_\xi \cap K(y, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} \frac{\sqrt{d\tau_1^2 + \cdots + d\tau_n^2}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}},$$

$$I_{\sigma_-}(a; \xi) = \int_{E_\xi \cap K(a, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} \frac{\sqrt{d\tau_1^2 + \cdots + d\tau_n^2}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}}$$

и $J(\tau, \varphi)$ определяется соотношением (17).

Итак, пусть a – внутренняя точка области D . Положим $R = h\beta_n$. При y , достаточно близких к a , множество $V(y, a; R)$ содержится в D при любом выборе куба $Q(c, R)$ в гиперплоскости $\Pi(y, a)$. Введем величину

$$\Phi_n(y, a) = \sup \int_{O_n(\alpha_n)} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{(I_{\sigma_-}(y; \xi) + I_{\sigma_-}(a; \xi))^{p-1}},$$

где $\alpha_n = \text{arctg } \beta_n$ и точная верхняя грань берется по всевозможным $(n-1)$ -мерным кубам $Q(c, |y - a|)$.

Пользуясь оценками (6) и (22), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in \text{ACL}_\sigma^p(D)$ – функция и $a \in D$ – точка такая, что

$$\frac{\int_{B(a, |y-a|)} A_{p, \sigma}(x, \nabla f(x) - \nabla f(a)) dx_1 \cdots dx_n}{|y - a|^p \Phi_n(y, a)} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow a.$$

Тогда f имеет в точке $a \in D$ полный дифференциал.

3.3. Предположим, что $p > n$ и $\sigma_- \equiv 1$. Зафиксируем точки $a \in D$ и $y \in D$ так, чтобы шар $B(a, |y - a|) \subset D$. Как и выше, введем координаты $\tau_1, \dots, \tau_n$, в которых

$$y = (0, \dots, 0, -h), \quad a = (0, \dots, 0, h).$$

Полагая $R = h\beta_n$, фиксируем множество $V(y, a; R) \subset D$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in O_n(\alpha_n)$ – произвольная точка. Как и выше, определяем углы θ_i , $i = 1, \dots, n$.

Длина λ отрезка $E_\xi \cap \overline{K(y, R)}$ определяется из соотношения

$$\lambda \cos \theta_n = -h.$$

В параметрическом виде отрезок $E_\xi \cap \overline{K(y, R)}$ может быть записан в виде

$$\tau(t) = t(\tau(1) - \tau(0)) + \tau(0), \quad t \in [0, 1],$$

где

$$\tau(0) = (0, \dots, 0, -h), \quad \tau(1) = \lambda(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |d\tau(t)| &= \lambda(\cos^2 \theta_1 + \dots + \cos^2 \theta_{n-1})^{1/2} |dt| = \lambda \sqrt{1 - \cos^2 \theta_n} |dt| \\ &= \lambda \sin \theta_n |dt| = -h \operatorname{tg} \theta_n |dt|, \\ I_{\sigma_-}(y; \xi) &= \int_{E_\xi \cap K(y, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} |d\tau| = h \int_0^1 |J(\tau(t), \varphi)|^{1/(p-1)} |\operatorname{tg} \theta_n| |dt| \\ &\geq h \operatorname{tg} \alpha_n \int_0^1 |J(\tau(t), \varphi)|^{1/(p-1)} |dt|. \end{aligned} \tag{23}$$

Пользуясь соотношениями (17) и (23), находим

$$\begin{aligned} I_{\sigma_-}(y; \xi) &= \int_{E_\xi \cap K(y, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} |d\tau| \\ &\geq h \operatorname{tg} \alpha_n \Delta_n^{1/(p-1)}(\xi) \int_0^1 \frac{|dt|}{\prod_{i=1}^{n-1} ((h + \tau_n(t))^2 + \tau_i^2(t))^{1/(2(p-1))}} \\ &\geq h^{(p-n)/(p-1)} \beta_n \Delta_n^{1/(p-1)}(\xi). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$I_{\sigma_-}(a; \xi) \geq h^{(p-n)/(p-1)} \beta_n \Delta_n^{1/(p-1)}(\xi)$$

и мы приходим к оценке

$$I_{\sigma_-}(y; \xi) + I_{\sigma_-}(a; \xi) \geq h^{(p-n)/(p-1)} \beta_n \Delta_n^{1/(p-1)}(\xi).$$

Отсюда

$$\int_{O_n(\alpha_n)} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{(I_{\sigma_-}(y; \xi) + I_{\sigma_-}(a; \xi))^{p-1}} \geq h^{n-p} \beta_n^{1-p} \int_{O_n(\alpha_n)} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{\Delta_n(\xi)}$$

и на основании теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $f \in \operatorname{ACL}^p(D)$ – функция, $p > n$. Тогда если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{B(a, r)} |\nabla f(x) - \nabla f(a)|^p dx_1 \cdots dx_n = 0, \tag{24}$$

то f имеет в точке $a \in D$ полный дифференциал.

3.4. Для доказательства другого следствия нам потребуется следующее утверждение, непосредственно вытекающее из известной леммы Картана–Альфорса (см., например, [7; гл. I, раздел 11] или [8; § 2, гл. VIII]).

ЛЕММА 4. Пусть μ – неотрицательная счетно-аддитивная функция, определенная для всякого $\mathcal{H}^n$ -измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, такая, что $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Пусть $h(r)$, $0 \leq r < \infty$, – неубывающая функция со следующими свойствами: $h(0) = 0$ и $h(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда всюду в $\mathbb{R}^n$ за возможным исключением множества нулевой h -меры Хаусдорфа выполнено

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{h(r)} < \infty.$$

Предположим, что для некоторого $p > n$ и некоторой неотрицательной измеримой по Лебегу функции σ выполняется

$$\int_D \sigma(x) |\nabla f(x)|^p dx_1 \cdots dx_n < \infty. \quad (25)$$

Фиксируем $p' \in (n, p)$. В силу неравенства Гёльдера для каждой точки $y \in D$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^n} \int_{B(y, r)} |\nabla f(x)|^p dx_1 \cdots dx_n \\ & \leq \left(\frac{1}{r^\alpha} \int_{B(y, r)} \sigma(x) |\nabla f(x)|^p dx_1 \cdots dx_n \right)^{p'/p} \left(\frac{1}{r^q} \int_{B(y, r)} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\sigma^{p'/(p-p')}(x)} \right)^{(p-p')/p}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $0 < \alpha < n$ – произвольная постоянная и $q = (np - \alpha p')/(p - p')$.

Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, функция $f \in \text{ACL}^p(D)$ обладает свойством (25) и $E \subset D$ – измеримое множество такое, что в каждой точке $y \in E$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^q} \int_{B(y, r)} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\sigma^{p'/(p-p')}(x)} = 0. \quad (27)$$

Тогда всюду на E за возможным исключением множества нулевой α -меры Хаусдорфа функция f имеет полный дифференциал, причем в каждой такой точке $df = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу леммы 4 найдется множество $E' \subset E$ нулевой α -меры такое, что для любого $y \in E \setminus E'$ при достаточно малых $r > 0$ первый из сомножителей в правой части (26) ограничен. Условие (27) влечет тогда выполнение (24) с $\nabla f(y) = 0$ в точках $y \in E \setminus E'$. В силу следствия 1 существует полный дифференциал $df(y) = 0$ всюду на множестве $E \setminus E'$.

§ 4. Дифференциал в граничной точке

4.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, ξ – конец D и $a_\xi \in |\xi|$ – точка. Как и выше, пусть $L = L(y, a_\xi)$ – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $y \in D$ и $a_\xi \in \partial D$, $\Pi = \Pi(y, a_\xi)$ – гиперплоскость, проходящая через середину $s = (y + a_\xi)/2$ отрезка L ортогонально L . Подчеркнем, что здесь в отличие от

случая, когда $a = a_\xi$ – внутренняя точка, отрезок $L(y, a_\xi)$ может не лежать целиком в области D .

Зададим произвольно $R_2 > R_1 > 0$ и рассмотрим открытые $(n-1)$ -мерные кубы $Q(c, R_1)$ и $Q(c, R_2)$ в Π с одной из вершин в точке c и сторонами длин R_1, R_2 соответственно. При этом предполагается, что стороны куба $Q(c, R_2)$, выходящие из точки c , являются продолжениями соответствующих сторон куба $Q(c, R_1)$.

Пусть $K(y, R_i), K(a_\xi, R_i)$ – открытые пирамиды в $\mathbb{R}^n$ с общими основаниями $Q(c, R_i)$ и вершинами в точках y, a_ξ . Положим

$$V(y, a_\xi; R_i) = K(y, R_i) \cup K(a_\xi, R_i) \cup Q(c, R_i), \quad i = 1, 2.$$

К рассматриваемому случаю удобно добавить случай $R_1 = 0$ и положить $V(y, a_\xi; R_1) = \emptyset$.

Будем говорить, что *граничная точка a_ξ является (k_1, k_2) -достижимой при $k_2 > k_1 \geq 0$* , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что компонента связности $U_\varepsilon(a_\xi)$ множества $\{x \in D : |x - a_\xi| < \varepsilon\}$, примыкающая к a_ξ , обладает следующим свойством: для любой точки $y \in U_\varepsilon(a_\xi)$ хотя бы одна из областей

$$V(y, a_\xi; k_2 |y - a_\xi|) \setminus \overline{V(y, a_\xi; k_1 |y - a_\xi|)}$$

полностью содержится в $U_{r(y)}(a_\xi)$, где

$$r(y) = |y - a_\xi| \sqrt{\frac{1}{4} + k_2^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве примера отметим, что граничные точки выпуклых областей в $\mathbb{R}^n$ являются (k_1, k_2) -достижимыми с $k_2 = 1/2$ и $k_1 = 0$. Граничные точки внешности шара являются (k_1, k_2) -достижимыми с произвольными $k_2 > 1/2$ и $k_1 > 0$. Обладают ли таким свойством точки на границе внешности произвольного выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$, нам неизвестно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть, что (k_1, k_2) -достижимость точки a_ξ гарантирует, что контингент $\text{cont}_D a_\xi$ содержит n линейно независимых направлений.

Предположим, что точка a_ξ является (k_1, k_2) -достижимой. Как и выше в п. 3.1, введем координатную систему $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ и определим вектор-функцию (11), положив

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : V(y, a_\xi; R_2) \setminus \overline{V(y, a_\xi; R_1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} \arctg \frac{\tau_i}{h + \tau_n} & \text{при } \tau \in K(y, R_2) \setminus K(y, R_1), \\ \arctg \frac{\tau_i}{h} & \text{при } \tau \in Q(c, R_2) \setminus Q(c, R_1), \\ \arctg \frac{\tau_i}{h - \tau_n} & \text{при } \tau \in K(a_\xi, R_2) \setminus K(a_\xi, R_1), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Образом области $V(y, a_\xi; R_2) \setminus \overline{V(y, a_\xi, R_1)}$ при отображении φ является множество

$$O_n(k_1, k_2) = \overbrace{(\alpha'_1, \alpha'_2) \times \cdots \times (\alpha'_1, \alpha'_2)}^{n-1}, \quad \alpha'_i = \arctg k'_i, \quad i = 1, 2.$$

Определим величину $\Phi_n(y, a_\xi)$, положив

$$\begin{aligned} \Phi_n(y, a_\xi) &= \int_{O_n(k_1, k_2)} \frac{d\eta_1 \cdots d\eta_{n-1}}{(I_{\sigma_-}(y, \eta) + I_{\sigma_-}(a_\xi, \eta))^{p-1}}, \\ I_{\sigma_-}(y; \eta) &= \int_{E_\eta \cap K(y, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} \frac{\sqrt{d\tau_1^2 + \cdots + d\tau_n^2}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}}, \\ I_{\sigma_-}(a_\xi; \eta) &= \int_{E_\eta \cap K(a_\xi, R)} |J(\tau, \varphi)|^{1/(p-1)} \frac{\sqrt{d\tau_1^2 + \cdots + d\tau_n^2}}{\sigma_-^{p/(2(p-1))}}. \end{aligned}$$

Здесь $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in O_n(k_1, k_2)$, величина $J(\tau, \varphi)$ задается формулой (17) и

$$E_\eta = \{\tau \in V(y, a_\xi; R_2) \setminus \overline{V(y, a_\xi, R_1)} : \varphi(y) = \eta\}, \quad \eta \in O_n(k_1, k_2).$$

4.2. При сделанных выше предположениях, в точности как и выше, устанавливается

ТЕОРЕМА 4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in \text{ACL}_\sigma^p(D)$ – функция и $a_\xi \in \partial D - (k_1, k_2)$ -достижимая точка, $0 \leq k_1 < k_2 < \beta_n$, такая, что для некоторой постоянной $C = (C_1, \dots, C_n)$ выполнено условие

$$\int_D A_{p,\sigma}(x, \nabla f(x) - C) dx_1 \cdots dx_n < \infty.$$

Пусть, кроме того,

$$\frac{\int_{U_{r(y)}(a_\xi)} A_{p,\sigma}(x, \nabla f(x) - C) dx_1 \cdots dx_n}{|y - a_\xi|^p \Phi_n(y, a_\xi)} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow a_\xi, \quad y \in D.$$

Тогда f имеет в точке a_ξ полный дифференциал $df = \langle C, dx \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $a_\xi \in \partial D - (k_1, k_2)$ -достижимая точка, $0 \leq k_1 < k_2 < \beta_n$, и $f \in \text{ACL}^p(D)$ – функция, $p > n$. Пусть для некоторой постоянной $C = (C_1, \dots, C_n)$ выполнено условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^n} \int_{U_\rho(a_\xi)} |\nabla f(x) - C|^p dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Тогда f имеет в точке a_ξ полный дифференциал $df = \langle C, dx \rangle$.

Так как каждая из граничных точек полупространства является (k_1, k_2) -достижимой с $k_2 = 1/2$, $k_1 = 0$, то, рассуждая как и при доказательстве следствия 2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – полупространство и $f \in \text{ACL}_\sigma^p(P)$. Предположим, что весовая функция σ в каждой точке $y \in \partial P$ обладает свойством

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^q} \int_{B(y, \rho) \cap P} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\sigma^{p'/(p-p')}(x)} = 0,$$

где

$$n < p' < p, \quad q = \frac{(n-1)p - \alpha p'}{p - p'}, \quad 0 < \alpha \leq n-1.$$

Тогда всюду на границе ∂P за возможным исключением множества нулевой α -меры Хаусдорфа функция f имеет полный дифференциал, причем в каждой такой точке $df = 0$.

Автор признателен С. К. Водопьянову и К. В. Сторожуку за полезные обсуждения, а также А. А. Клячину и А. Н. Кондрашову, прочитавшим рукопись статьи и сделавшим ряд полезных замечаний.

Список литературы

- [1] Г. Д. Суворов, *Семейства плоских топологических отображений*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1965.
- [2] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Studies in advanced Mathematics, Stechert, New York, 1937.
- [3] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function spaces*, Noordhoff, Leyden, 1977.
- [4] Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, “Соотношение между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем семейства разделяющих поверхностей”, *Дальневосточный математический сборник*, **2** (1996), 72–80.
- [5] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [6] Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Научная книга, Новосибирск, 2002; пер. с англ.: L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton–New York–London–Tokyo, 1992.
- [7] J. Lelong-Ferrand, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*, Gauthier, Paris, 1955.
- [8] Г. Д. Суворов, *Обобщенный “принцип длины и площади” в теории отображений*, Наукова Думка, Киев, 1985.

В. М. Миклюков (V. M. Miklyukov)
Волгоградский государственный университет
E-mail: miklyuk@mail.ru

Поступила в редакцию
13.03.2009