Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Дегтярев, О разрешимости первой начально-краевой задачи для параболических и вырождающихся параболических уравнений в областях с конической точкой, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 67–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:38:02

УДК 517.954+517.956.8+517.956.4

С. П. Дегтярев

О разрешимости первой начально-краевой задачи для параболических и вырождающихся параболических уравнений в областях с конической точкой

На основании одного известного подхода изучается первая начально-краевая задача для параболических и вырождающихся параболических уравнений второго порядка в области с конической или угловой точкой в весовых классах гладких или суммируемых функций. В терминах угловой меры телесного угла и показателя веса сформулированы достаточные условия существования единственного решения и наличия коэрцитивных оценок решения. Показано также, что если указанные условия не выполняются, то параболическая задача обладает свойствами эллиптической, т.е. может иметь ненулевое ядро или быть неразрешимой, причем в последнем случае она не является даже фредгольмовой. Рассмотрены параболическое уравнение и уравнение с вырождением или особенностью в конической точке.

Библиография: 49 названий.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нерегулярная область, коэрцитивные оценки, спектральные свойства.

§ 1. Введение

Как хорошо известно, в настоящее время достигнут значительный прогресс в изучении эллиптических задач в областях с нерегулярной границей в различных весовых классах функций (см. [1]–[15] и имеющуюся там библиографию).

При этом изучению параболических задач в областях с особенностями посвящено заметно меньшее количество работ. Среди таких работ, содержащих точные оценки решения в весовых классах гладких функций (основной предмет нашего интереса в настоящей статье), отметим работы [16]–[24], которые тем не менее не содержат рассмотрение произвольной конической точки. Заметим, что в классах суммируемых функций точные оценки решений параболической задачи в области с особенностью содержатся в [19] и [25]–[27], причем в [25] рассмотрен двугранный угол, а более общие особенности области рассмотрены в работах [26], [27] (при этом в [26] для уравнения теплопроводности в области с особенностью произвольной коразмерности получены коэрцитивные оценки решения и в весовых классах Гёльдера при некотором ограничении на данные задачи).

Отметим также работы [28]–[33], где исследовались свойства решений параболической задачи в области с особенностью в классах гладких функций.

В работе [34] при рассмотрении параболической задачи в плоском угле использованы не весовые пространства, а пространства Гёльдера с отрицательными показателями.

Задачи, в постановке которых к особенности границы области добавляется особенность или вырождение самого эллиптического или параболического уравнения в особых точках границы, изучались в основном в эллиптическом случае (см. [13]–[15]). Отметим также работу [35], где получены точные коэрцитивные оценки решения в весовых классах Гёльдера. Работы, в которых получены коэрцитивные оценки решения в параболическом случае для вырождающихся в особой точке границы уравнений, автору вообще не известны. Кроме работы [36], где использованы весовые пространства суммируемых функций.

Существо проблемы заключается в том, что в большинстве перечисленных выше работ ключевым моментом в изучении задачи являлось рассмотрение модельных задач в сингулярной точке, т.е. простейших задач, составляющих суть проблемы и рассматриваемых для простейшего уравнения в характерной простейшей области с угловой или иной особенностью (например, в бесконечном конусе или угле). При этом обычно для таких задач каким либо методом (например, с помощью интегральных преобразований) строится более или менее явное решение. В случае же задачи, которая соединяет в себе вырождение или особенность уравнения и нерегулярность области, даже простейшая модельная задача (например в плоском угле) становится чрезвычайно сложной для исследования (тем более, если целью является получение точных коэрцитивных оценок решения). Более того, как известно, в параболическом случае, в отличие от эллиптического случая (когда при заданном угле модельная задача однозначно разрешима при всех значениях показателя веса, за исключением счетного числа значений), даже простейшая параболическая модельная задача не является однозначно разрешимой (и, вообще говоря, даже фредгольмовой) при всех значениях показателя веса, выходящих за пределы определенного интервала, определяемого углом в конической точке. Такой эффект для параболической задачи в весовых классах суммируемых функций был обнаружен в работе [37], а в классах гладких функций – в работах [16], [25] (где в случае двугранного угла было показано, что для разрешимости параболической задачи в весовых пространствах функций при показателе веса, выходящем за определенный интервал, необходимо выполнение ряда условий на правую часть уравнения и граничные данные), а также в работах [17]–[19].

В то же время существует и иной подход к задачам с особенностью на границе или в уравнении, содержащийся еще в работе [1] (метод колец В. А. Кондратьева), а также в работах [2]–[4] при изучении эллиптических уравнений. Суть его состоит в том, что, как подсказывает сам факт использования весовых классов, необходимо проконтролировать решение не в самой особой точке, а в любой сколь угодно малой ее окрестности. Более того, в указанных работах [2]–[4] применялось сглаживание границы вблизи особой точки, которое и мы используем ниже в данной работе.

В работах [16], [26] для получения оценок решения в весовых классах Гёльдера применялись масштабированные локальные оценки старшей нормы решения

через данные задачи и младшую норму решения, что и составляет основу используемого в данной работе подхода.

Далее, в работе [38], в постановке, где нет особенности границы области, а есть вырождение уравнения на границе, использовались нормы решения, построенные по сколь угодно малым шарам, касающимся границы, с центрами, близкими к поверхности вырождения, но не лежащими на ней (впрочем, эти нормы были видоизменены в [39]). В работе [40] также был применен этот подход: автором этой работы исследована задача Коши во всем пространстве для неравномерно параболического уравнения, причем решение рассматривалось сколь угодно близким к точке, где нарушалась параболичность. Данный подход применялся ранее также и автором в работе [41]. Отметим, что во всех перечисленных случаях естественным образом возникают весовые классы функций. Но при наличии угловой точки у границы области, как это хорошо известно, именно весовые классы отражают существо поведения решения в такой точке.

Настоящая работа является продолжением и развитием работы [41]. Ее целью является, с одной стороны, получение на основе упомянутого подхода (без рассмотрения соответствующих модельных задач в самой особой точке) результатов о разрешимости параболических краевых задач в весовых классах гладких функций, а также получение точных коэргитивных оценок решения при определенных ограничениях на параметры задачи.

§ 2. Равномерно параболическое уравнение в области с конической точкой на границе

2.1. Постановка задачи и основной результат. В этом параграфе мы используем обозначения и определения работы [41].

Пусть $T > 0$, $t \in [0, T]$, и пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^N$, причем начало координат – точка $O \equiv \{0\} \in \partial\Omega$, $\Omega_T \equiv \Omega \times [0, T]$. Для простоты и определенности мы предполагаем область Ω ограниченной. Пусть вне точки O граница $\partial\Omega$ представляет собой гладкую поверхность класса $H^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. (Определение стандартных классов Гёльдера H^l и $H^{l, l/2}$ см., например, в [42].) В окрестности самой же точки O область Ω представляет собой коническую область следующего вида. Пусть d – односвязная область в пространстве переменных $x' = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ с границей класса $H^{2+\alpha}$. Пусть, далее, для $r_0 > 0$ $e(x_1)$ – строго монотонная (для простоты) функция класса $H^{2+\alpha}([0, r_0])$ такая, что $e(0) = 0$, $e(x_1)/x_1 \rightarrow k > 0$ при $x_1 \rightarrow 0$, $e'(x_1) \geq \nu > 0$. Для $x_1 \in [0, r_0]$ обозначим через

$$d(x_1) = e(x_1)d = \{e(x_1)x' : x' \in d\}$$

сжатие области d в $1/e(x_1)$ раз. Обозначим через

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x') : x_1 \in (0, r_0), x' \in d(x_1)\}$$

область конического вида с вершиной в точке O (отметим, что при $e(x_1) \equiv kx_1$, $k > 0$, область Ω_0 представляет собой обычный прямой конус с телесным углом,

определяемым областью d). Обозначим также $\Omega^1 = \Omega \setminus \Omega_0$. Таким образом, мы предполагаем, что $\Omega \cap \{|x| < r_0\} = \Omega_0$.

Определим, далее, те весовые пространства Гёльдера, в которых мы будем рассматривать данные задачи и ее решение. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$, $r = r(x) = |x|$. Через $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)$ будем обозначать пространство функций $u(x, t)$, определенных в $\bar{\Omega}_T$ при $\gamma \leq 0$ и в $\bar{\Omega}_T \setminus \{O\}$ при $\gamma > 0$ с конечной нормой

$$\begin{aligned} |u|_{\gamma, \Omega_T}^{(2+\alpha)} &\equiv |r^\gamma u|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma+1} Du|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma+2} D^2 u|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma+2} u_t|_{\Omega_T}^{(0)} \\ &\quad + \langle r^{\gamma+2+\alpha} Du \rangle_{t, \Omega_T}^{((1+\alpha)/2)} + \langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \rangle_{x, \Omega_T}^{(\alpha)} + \langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \rangle_{t, \Omega_T}^{(\alpha/2)} \\ &\quad + \langle r^{\gamma+2+\alpha} u_t \rangle_{x, \Omega_T}^{(\alpha)} + \langle r^{\gamma+2+\alpha} u_t \rangle_{t, \Omega_T}^{(\alpha/2)}, \end{aligned}$$

где $|v|_{\Omega_T}^{(0)} = \max_{\bar{\Omega}_T} |v(x, t)|$, а угловые скобки означают соответствующие весовые константы Гёльдера; например, для $a \in \mathbb{R}$ весовая константа Гёльдера по x есть

$$\langle r^a v \rangle_{x, \Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x, t), (\bar{x}, t) \in \bar{\Omega}_T} (\min\{r(x)^a, r(\bar{x})^a\}) \frac{|v(x, t) - v(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\alpha},$$

и аналогично для весовой константы Гёльдера по t .

Точно так же определяется пространство $H_\gamma^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ функций, зависящих только от x с нормой

$$|u|_{\gamma, \Omega}^{(2+\alpha)} \equiv |r^\gamma u|_{\Omega}^{(0)} + |r^{\gamma+1} Du|_{\Omega}^{(0)} + |r^{\gamma+2} D^2 u|_{\Omega}^{(0)} + \langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \rangle_{x, \Omega}^{(\alpha)}.$$

Определим также пространство $H_\gamma^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$ функций $f(x, t)$ с конечной нормой

$$|f|_{\gamma, \Omega_T}^{(\alpha)} \equiv |r^\gamma f|_{\Omega_T}^{(0)} + \langle r^{\gamma+\alpha} f \rangle_{x, \Omega_T}^{(\alpha)} + \langle r^{\gamma+\alpha} f \rangle_{t, \Omega_T}^{(\alpha/2)}.$$

Отметим, что для введенных пространств функций, как и для обычных невесовых пространств, справедливы следующие интерполяционные неравенства (в нашем случае $0 < l' < l \leq 2 + \alpha$):

$$|u|_{\gamma, \Omega_T}^{(l')} \leq \varepsilon |u|_{\gamma, \Omega_T}^{(l)} + C_\varepsilon |r^\gamma u|_{\Omega_T}^{(0)}, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное, а C_ε – некоторая константа, зависящая от ε . Доказательство неравенств (2.1) см., например, в [40].

Договоримся также обозначать одним символом C или ν , μ все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных параметров задачи.

Рассмотрим в области Ω_T следующую первую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x, t)$ (ради простоты краевое условие Дирихле на $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ будем предполагать нулевым):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u &= f(x, t), \\ (x, t) &\in \Omega_T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

где $a_{ij} \in H_0^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $b_i \in H_1^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $c \in H_2^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, f и u_0 – заданные функции,

$$\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|_{0, \Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^N |b_i|_{1, \Omega_T}^{(\alpha)} + |c|_{2, \Omega_T}^{(\alpha)} \leq \mu_1, \quad (2.5)$$

причем для $\xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено

$$\nu_1 \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \nu_1^{-1} \xi^2. \quad (2.6)$$

Для того чтобы сформулировать теорему этого параграфа, дадим следующее определение величины, характеризующей размер телесного угла конической области в точке O . Пусть $\rho < r_0$, и пусть $\Omega_\rho = \Omega \cap \{x : |x| < \rho\} \subset \Omega_0$. Пусть, далее, $(r(x), \omega_1(x), \dots, \omega_{N-1}(x))$ – сферические координаты в Ω_ρ , и пусть T_ρ – область изменения этих координат при $x \in \Omega_\rho$. В силу определения Ω_ρ T_ρ представляет собой ограниченную область в $\mathbb{R}^N$, расположенную в слое $\{0 < r < \rho\}$ (если Ω_ρ – прямой конус, то T_ρ представляет собой прямой цилиндр с поперечным сечением, определяемым телесным углом конуса). Пусть еще $\mathcal{P}_\rho$ – множество всех пар параллельных плоскостей (P_1, P_2) в пространстве $\mathbb{R}^N$ переменных (r, ω) , параллельных оси Or и таких, что область T_ρ лежит между плоскостями P_1 и P_2 . Пусть, наконец,

$$\theta_\rho = \inf_{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_\rho} \text{dist}(P_1, P_2). \quad (2.7)$$

Определим величину

$$\theta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \theta_\rho, \quad (2.8)$$

причем указанный предел всегда существует, так как θ_ρ не возрастает. Нетрудно видеть, что если Ω_ρ представляет собой прямой конус и соответственно T_ρ – прямой цилиндр, то $\theta = \theta_\rho$ не зависит от ρ и представляет собой наименьший возможный диаметр сечения этого цилиндра – области изменения полярных переменных $(\omega_1, \dots, \omega_{N-1})$. Если же Ω_ρ – угол на плоскости, то $\theta = \theta_\rho$ есть просто величина этого угла.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены указанные выше условия на область Ω , условия (2.5), (2.6) на коэффициенты уравнения (2.2) и на множестве $(\partial\Omega \setminus \{O\}) \times \{t = 0\}$ выполнены условия согласования до первого порядка включительно. Тогда существует такая константа $\nu_2 = \nu(N)\nu_1^2 > 0$, где $\nu(N)$ зависит только от N , что для любого показателя веса γ , удовлетворяющего условию

$$\gamma^2 + \mu_1^2 < \frac{\nu_2}{\theta^2}, \quad (2.9)$$

задача (2.2)–(2.4) имеет единственное решение из класса $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ для любой правой части $f(x, t) \in H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ и любых начальных данных $u_0(x) \in H_\gamma^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, причем справедлива оценка

$$|u|_{\gamma, \Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{\gamma, \Omega}^{(2+\alpha)}), \quad (2.10)$$

где константа C зависит только от γ , α , области Ω , коэффициентов уравнения и величины T .

Отметим, что условие (2.9) является существенным и не может быть отброшено. В случае двугранного угла это было показано в [16], [25], а в случае произвольной конической точки – в [37], [17]–[19]. При этом в [19] (см. также [20]) были построены ненулевые решения общей однородной параболической задачи в области с конической точкой, подтверждающие существенность условия (2.9), и получена асимптотика возможных решений. Для полноты изложения мы рассмотрим простейшую ситуацию для уравнения теплопроводности в прямом конусе. А именно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть Ω_0 – прямой конус, а в уравнении (2.2) $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = c = 0$, т.е. уравнение (2.2) – уравнение теплопроводности. Тогда:

(i) существуют такие константы $\nu_3 > 0$, $\mu_3 > 0$, что при значениях показателя веса γ , удовлетворяющих условию

$$\gamma > \mu_3 + \frac{\nu_3}{\theta}, \quad (2.11)$$

однородная задача (2.2)–(2.4) с $f \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$ имеет ненулевое решение из класса $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, следовательно, оценка (2.10) невозможна;

(ii) существуют такие константы $\nu_4 > 0$, $\mu_4 > 0$, что при значениях показателя веса γ , удовлетворяющих условию

$$\gamma < -\mu_4 - \frac{\nu_4}{\theta}, \quad (2.12)$$

задача (2.2)–(2.4) не имеет, вообще говоря, решения из рассматриваемого пространства $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ при произвольной правой части f из пространства $H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$; более того, задача (2.2)–(2.4) не является фредгольмовой в этих пространствах при выполнении условия (2.12).

Следующие пункты этого параграфа посвящены доказательству теоремы 2.1 и предложения 2.2.

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Отметим, что общая схема доказательства теоремы содержится в доказательстве теоремы 1.1 из [41], где, однако, не вводился параметр θ и вместо условия (2.9) было использовано другое условие, хотя и имеющее тот же смысл. Здесь мы воспроизводим эту схему доказательства применительно к нашему случаю.

Заметим, что, не ограничивая общности, мы можем считать $u_0(x) \equiv 0$, так как общий случай сводится к указанному простой заменой неизвестной функции $v = u - u_0$; причем для получающейся в уравнении для v правой части $\tilde{f}$ в силу свойств коэффициентов уравнения (2.2) и функции u_0 справедлива оценка

$$|\tilde{f}|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} \leq C(|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{\gamma, \Omega}^{(2+\alpha)}). \quad (2.13)$$

Мы определим сейчас некоторую последовательность начально-краевых задач в гладких областях, приближающих задачу (2.2)–(2.4).

Пусть для $n \geq 1$

$$D_n = \Omega \setminus (\Omega_0 \cap \{x_1 \leq r_n = 4^{-n}r_0\})$$

– область Ω с отрезанной окрестностью точки O . Продолжим получившийся гладкий участок границы $\partial\Omega$, т.е. поверхность $\partial D_n \setminus \{x_1 = r_n\}$, до некоторой поверхности класса $H^{2+\alpha}$, ограничивающей односвязную область Ω_n . Нетрудно видеть, что такое продолжение может быть выполнено таким образом, чтобы продолженный кусок поверхности, который мы обозначим σ_n , лежал в области $r_{n+1} \leq x_1 \leq r_n$ и чтобы вся сглаженная поверхность конуса $\partial\Omega_n \setminus \partial D_n$ задавалась уравнением $x_1 = g_n(x')$, $x' \in d(r_0)$, с гладкой функцией $g_n(x')$, $|Dg_n| \leq C$, $|D^2g_n| \leq C/r_n$. Возможность такого продолжения следует из строгой монотонности функции $e(x_1)$ и по существу может быть сведена к продолжению функции одной переменной $e(x_1)$ с множества $[r_n, r_0]$ на множество $[r_{n+1}, r_n]$ до функции, равной нулю при $x_1 = r_{n+1}$ и имеющей в этой точке бесконечную производную (вертикальную касательную) достаточно высокого порядка, следующим образом. Пусть $h(x_1)$ – строго монотонно возрастающая ($h'(x_1) \geq \nu > 0$) достаточно гладкая при $x_1 > r_{n+1} = r_n/4$ функция, определенная на $[r_{n+1}, r_n]$ и такая, что $h(x_1) \equiv e(x_1)$ при $x_1 \in [\theta_3 r_n, r_n]$ (где $\theta_3 \in (0, 1)$, θ_3 достаточно близко к единице), $h(r_{n+1}) = 0$ и $h'(x_1)$ имеет в точке $x_1 = r_{n+1}$ бесконечность достаточно высокого порядка. Кроме того, мы предполагаем функцию h построенной таким образом, что при $\theta_2 r_n \leq x_1 \leq r_n$, где $1/4 < \theta_2 < \theta_3$, выполнено $\nu \leq e(x_1)/h(x_1) \leq C$. Область

$$\omega_n \equiv \bigcup_{x_1 \in [r_{n+1}, r_n]} (x_1, h(x_1)d)$$

представляет собой гладкую область с гладкой границей

$$\sigma_n \equiv \partial\omega_n \cap \{x_1 < r_n\} = \bigcup_{x_1 \in [r_{n+1}, r_n]} (x_1, h(x_1)\partial d),$$

которая также может быть представлена в виде $x_1 = g(x')$, $x' \in d_n \equiv e(r_n)d$, с некоторой гладкой функцией $g(x')$. Положим, таким образом, $\Omega_n = D_n \cup \omega_n$, причем Ω_n представляет собой сглаженную в окрестности точки O область Ω .

Нетрудно проверить непосредственно, что граница $\partial\Omega_n$ области Ω_n обладает тем свойством, что существует такое $\nu > 0$, что для любой точки $x_0 \in \Omega_n$ участок границы $\Sigma_{n,x_0} = \partial\Omega_n \cap \{|x - x_0| < \nu|x_0|\}$ после растяжения его в $1/|x_0|$ раз, т.е. поверхность $\frac{1}{|x_0|}\Sigma_{n,x_0} \equiv \{y \in \mathbb{R}^N : |x_0|y \in \Sigma_{n,x_0}\}$, принадлежит классу $H^{2+\alpha}$ в смысле определения из [42; гл. 4] равномерно по n и по x_0 .

Продолжим еще функцию $f(x, t)$ с $D_{n-1,T} = D_{n-1} \times [0, T]$ на всю область $\Omega_{n,T} = \Omega_n \times [0, T]$ до функции $f_n(x, t)$ следующим образом. Пусть $\chi(x_1)$ – гладкая функция такая, что $\chi \equiv 1$ при $x_1 \geq 3$ и $\chi \equiv 0$ при $x_1 \leq 1$. Положим $f_n = \chi(x_1/r_n)f(x, t)$. Таким образом, $f_n(x, t) \equiv 0$ при $x \in \Omega_n \setminus D_n$, и нетрудно проверить, что для такой функции $f_n(x, t)$ справедлива оценка

$$|f_n|_{\gamma+2, \Omega_{n,T}}^{(\alpha)} \leq C(|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)}).$$

Кроме того, в силу построения функции f_n выполнены условия согласования до первого порядка включительно для следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + c(x, t) u_n &= f_n(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_{n,T}, \\ u_n(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega_n \times [0, T]; \quad u_n(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как хорошо известно (см., например, [42]), задача (2.14) имеет единственное решение из класса $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_{n,T})$. Мы покажем, что справедлива следующая оценка.

ЛЕММА 2.3. *Для решения задачи (2.14) справедливо неравенство*

$$|u_n|_{\gamma, \Omega_{n,T}}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} + |r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}), \quad (2.15)$$

где константа C не зависит от n и f_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известных локальных оценок

$$|u_n|_{\Omega_T^1}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{D_{1,T}}^{(\alpha)} + |u_n|_{D_{1,T}}^{(0)}),$$

или, так как на $D_1 \supset \Omega^1$ справедливо $r_0/4 \leq r \leq C$,

$$|u_n|_{\gamma, \Omega_T^1}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} + |r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}).$$

Поэтому для доказательства (2.15) достаточно рассмотреть только область $G_{n,T} = \Omega_{0,T} \cap \Omega_{n,T}$, где $\Omega_{0,T} = \Omega_0 \times [0, T]$, учитывая, что в этой области величины x_1 и r эквивалентны, т.е.

$$\nu \leq \frac{x_1}{r} \leq 1. \quad (2.16)$$

Пусть λ достаточно мало и фиксировано, и пусть $(x_0, t_0) \in G_{n,T}$. Обозначим $r = |x_0|$ и рассмотрим цилиндр

$$\tilde{q}_\lambda(x_0, t_0) = \{(x, t) : |x - x_0| < \lambda r, t_0 - \lambda^2 r^2 < t < t_0 + \lambda^2 r^2\}. \quad (2.17)$$

В зависимости от расположения точки (x_0, t_0) мы имеем различные расположения цилиндра $\tilde{q}_\lambda(x_0, t_0)$ относительно $\partial G_{n,T}$. Если шар $|x - x_0| < \lambda r$ в определении $\tilde{q}_\lambda(x_0, t_0)$ находится от $\partial\Omega_n$ на расстоянии, не меньшем λr , то положим

$$q_\lambda(x_0, t_0) = \tilde{q}_\lambda(x_0, t_0) \cap \{t \geq 0\}.$$

В противном случае положим

$$q_\lambda(x_0, t_0) = \tilde{q}_{4\lambda}(\bar{x}_0, t_0) \cap \Omega_T \cap \{t \geq 0\},$$

где $\bar{x}_0$ — точка на $\partial\Omega_n$, ближайшая к x_0 . Мы предполагаем (хотя это и не является принципиально важным и делается для простоты), что $\lambda < 1/8$ выбрано настолько малым, что в этом втором случае $q_\lambda(x_0, t_0)$ содержит только одну

связную компоненту поверхности $\partial\Omega$, которая задается функцией соответствующей гладкости в локальных координатах с центром в точке $\bar{x}_0$. Такой выбор λ возможен равномерно по n , так как поверхности $\partial\Omega_n \cap \{r/2 < |x| < 2r\}$ при замене $x = ry$ в переменных y имеют, как нетрудно проверить исходя из определения Ω_n , ограниченную равномерно по r кривизну и вообще ограниченную равномерно по r $H^{2+\alpha}$ -норму.

Рассмотрим сужение задачи (2.14) и ее решения u_n на множество $q_\lambda(x_0, t_0)$. Перейдем в задаче (2.14) на этом множестве от переменных (x, t) к переменным (y, τ) в соответствии с соотношениями

$$x = x_0 + ry \quad (x = \bar{x}_0 + ry), \quad t = t_0 + r^2\tau, \quad (2.18)$$

обозначая все функции после замены переменных теми же символами. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^N r b_i \frac{\partial u_n}{\partial y_i} + r^2 c(y, \tau) u_n = r^2 f(y, \tau), \quad (2.19)$$

а область $q_\lambda(x_0, t_0)$ перейдет в область Q_λ , которая либо является цилиндром $Q_\lambda = \{|y| < \lambda, -\tau_0 < \tau < \lambda^2\}$, где $0 \leq \tau_0 \leq \lambda^2$, либо является частью указанного цилиндра, отсекаемой поверхностью, являющейся образом при указанном преобразовании поверхности $\partial\Omega_n \times [0, T]$ и имеющей равномерно ограниченную по r и n $H^{2+\alpha}$ -норму (как отмечено выше), причем на этой поверхности выполнено граничное условие $u_n = 0$.

Кроме того, нетрудно проверить, что в силу наших предположений о коэффициентах уравнения (2.2) коэффициенты уравнения (2.19) имеют $H^{\alpha, \alpha/2}$ -нормы, равномерно ограниченные по r и n .

В силу хорошо известных локальных оценок решения (см. [42]) справедлива оценка (напомним, что мы считаем начальное условие в задаче (2.14) нулевым)

$$|u_n(y, \tau)|_{Q_{\lambda/2}}^{(2+\alpha)} \leq C |f(y, \tau)|_{Q_\lambda}^{(\alpha)} + C |u(y, \tau)|_{Q_\lambda}^{(0)}. \quad (2.20)$$

Выполняя в этом неравенстве обратную замену переменных $(y, \tau) \rightarrow (x, t)$ и умножая обе части получающегося соотношения на r^γ , видим, что так как при $\lambda < 1/8$ величины $|x|$ и $|x_0|$ эквивалентны на $q_\lambda(x_0, t_0)$, справедливо

$$|u_n(x, t)|_{\gamma, q_{\lambda/2}(x_0, t_0)}^{(2+\alpha)} \leq C |f(x, t)|_{\gamma+2, q_\lambda(x_0, t_0)}^{(\alpha)} + C ||x|^\gamma u(x, t)|_{q_\lambda(x_0, t_0)}^{(0)}, \quad (2.21)$$

где константа C не зависит ни от n , ни от (x_0, t_0) .

Поскольку (x_0, t_0) – произвольная точка из $\Omega_{n,T}$, то беря супремум по всем рассматриваемым точкам (x_0, t_0) , мы получаем оценку (2.15), но только с тем ограничением, что в определении норм определенных выше весовых пространств Гёльдера выполнено $|x - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{2} r(x)$ и $|t - \bar{t}| \leq (\frac{\lambda}{2})^2 r^2(x)$ (мы, не ограничивая общности, считаем $r(\bar{x}) \leq r(x)$). Чтобы снять это ограничение, заметим, что если, например, $|x - \bar{x}| > \frac{\lambda}{2} r(x)$, то для константы Гёльдера производной u_{nx_i}

$$r(\bar{x})^{\gamma+1+\alpha} \frac{|u_{nx_i}(x, t) - u_{n\bar{x}_i}(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\alpha} \leq C r(x)^{\gamma+1} |u_{nx_i}(x, t)| + C r(\bar{x})^{\gamma+1} |u_{n\bar{x}_i}(\bar{x}, t)|.$$

Воспользовавшись теперь интерполяционным неравенством (2.1), получаем, что для произвольно малого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{G_{n,T}} r(x)^{\gamma+1} |u_{nx_i}(x, t)| \leq \varepsilon |u|_{\gamma, G_{n,T}}^{(2+\alpha)} + C_\varepsilon |r^\gamma u|_{G_{n,T}}^{(0)}.$$

То есть отсюда и из (2.21) вытекает неравенство (2.15) со слагаемым $\varepsilon |u|_{\gamma, \Omega_n}^{(2+\alpha)}$ в правой части. Выбирая $\varepsilon < 1/2$ достаточно малым и перенося это слагаемое в левую часть, получаем неравенство (2.15). Лемма 2.3 доказана.

Пока что мы не использовали ограничения теоремы 2.1 на соотношение параметров γ и θ , мы используем их ниже при оценке величины $|r^\gamma u|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнено условие (2.9) теоремы 2.1 с достаточно малым $\nu_2 > 0$ (величина ν_2 будет выбрана в ходе доказательства этой леммы). Пусть, далее, $0 < \rho < r_0$ фиксировано и выбрано настолько малым, что условие (2.9) выполнено с заменой θ на θ_ρ , а n настолько велико, что $r_n < \rho$. Обозначим $\Omega_{\rho,T}^1 \equiv \Omega_T \cap \{|x| > \rho\}$. Тогда

$$|r^\gamma u|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} \leq C |r^{\gamma+2} f|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} + CT |u|_{\gamma, \Omega_{\rho,T}^1}^{(2+\alpha)}. \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что на множестве

$$(x, t) \in \Omega_{\rho,T}^1 \equiv \Omega_T \cap \{|x| > \rho\},$$

где $\rho \leq r(x) \leq C$, эта оценка очевидна, так как $|u(x, t)| \leq T |u_t(x, t)|_{\Omega_{1,\rho,T}}^{(0)}$ в силу нулевых начальных условий. Поэтому рассмотрим только множество $(x, t) \in \Omega_{n,\rho,T} = \Omega_{n,T} \setminus \Omega_{\rho,T}^1$.

Для того чтобы получить оценку на этом множестве, перейдем в этой области, как сделано в [1], к полярным координатам $(r = |x|, \omega_1, \dots, \omega_{N-1})$ с центром в точке O и, кроме того, как и в [1], выполним замену переменной r на ω_0 в соответствии с равенством $r = e^{-\omega_0}$. При этом, как хорошо известно (см. [1]), уравнение в (2.14) после деления обеих его частей на $e^{2\omega_0}$ примет вид

$$e^{-2\omega_0} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{b}_i \frac{\partial u_n}{\partial \omega_i} + \tilde{c} u_n = f e^{-2\omega_0}. \quad (2.23)$$

В силу наших предположений о коэффициентах исходного уравнения коэффициенты $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ и $\tilde{c}$ ограничены, причем

$$\nu \xi^2 \leq \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j \leq \nu^{-1} \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.24)$$

При этом область $\Omega_{n,\rho} = \Omega_n \cap \{|x| < \rho\}$ перейдет в трубчатую область T_n (в цилиндр при $e(x_1) \equiv kx_1$) с осью $O\omega_0$, ограниченную слева поверхностью $\omega_0 = -\ln \rho$, а справа – некоторой другой поверхностью. Поскольку мы оцениваем функцию $v = r^\gamma u_n$, или, в новых переменных $v = e^{-\gamma\omega_0} u_n$, то произведем

в уравнении (2.23) замену неизвестной функции $u_n = ve^{\gamma\omega_0}$, после чего оно примет вид

$$e^{-2\omega_0} \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{b}_i(\gamma) \frac{\partial v}{\partial \omega_i} + \tilde{c}(\gamma)v = fe^{-(2+\gamma)\omega_0} \equiv \tilde{f} \quad (2.25)$$

с нулевым начальным условием и нулевым граничным условием, кроме условий на поверхности $\{\omega_0 = -\ln \rho\}$, причем

$$\tilde{c} = -\tilde{a}_{00}\gamma^2 - \tilde{b}_0\gamma + \tilde{c}.$$

Отметим, что в силу определения θ_ρ существует такой вектор вида $(0, \omega_1^{(0)}, \dots, \omega_{N-1}^{(0)})$, в направлении которого диаметр области T_n не превосходит θ_ρ . Не ограничивая общности, будем считать, что это направление совпадает с направлением оси $O\omega_1$, т.е. в области T_n выполнено $|\omega_1| \leq \theta_\rho$. Для оценки $\max |v|$ применим стандартную замену неизвестной функции (см., например, [43], [44]) $v = (2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho})w$. При этом после подстановки v в уравнение (2.25) для w получаем уравнение

$$e^{-2\omega_0} \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{b}_i(\gamma) \frac{\partial w}{\partial \omega_i} + \tilde{c}(\gamma)w = \tilde{f}, \quad (2.26)$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}/(2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho})$,

$$\tilde{c}(\gamma, \theta_\rho) = -\tilde{a}_{00}\gamma^2 - \gamma\tilde{b}_0 + \tilde{c} - \frac{1}{\theta_\rho} \frac{\tilde{b}_1 e^{-\omega_1/\theta_\rho}}{2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho}} + \frac{\tilde{a}_{11}}{\theta_\rho^2} \frac{e^{-\omega_1/\theta_\rho}}{2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho}}.$$

Нетрудно видеть, что в уравнении (2.26) для $\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \theta_\rho)$ справедлива оценка

$$\tilde{c}(\gamma, \theta_\rho) \geq \nu(N)\nu_1 \left[\frac{1}{\theta_\rho^2} - C(N)(\gamma^2 + \mu_1^2)\nu_1^{-2} \right].$$

Поэтому при выполнении условия

$$\gamma^2 + \mu_1^2 < \frac{\nu_1^2}{C(N)} \frac{1}{\theta_\rho^2} \equiv \frac{\nu_2}{\theta_\rho^2}$$

в уравнении (2.26) коэффициент $\tilde{c}$ больше нуля и, следовательно, в силу принципа максимума

$$|w| \leq C(\gamma, \mu_1, \theta_\rho) \left(|fe^{-(2+\gamma)\omega_0}|_{T_n \times [0, T]}^{(0)} + \max_{\{\omega_0 = -\ln \rho\} \times [0, T]} |u_n| \right),$$

откуда в силу определения функций w и v следует, что

$$|r^\gamma u|_{\Omega_{n, \rho, T}}^{(0)} \leq C|r^{\gamma+2}f|_{\Omega_{n, T}}^{(0)} + CT|u|_{\gamma, \Omega_{\rho, T}^1}^{(2+\alpha)}. \quad (2.27)$$

Последнее неравенство в силу вышесказанного доказывает лемму 2.4.

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Из лемм 2.3 и 2.4 вытекает, что справедлива оценка

$$|u_n|_{\gamma, \Omega_n}^{(2+\alpha)} \leq C|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)} + CT|u|_{\gamma, \Omega_{n,T}}^{(2+\alpha)}, \quad (2.28)$$

откуда при достаточно малом $T \leq T_0$ следует, что

$$|u_n|_{\gamma, D_{n-1,T}}^{(2+\alpha)} \leq C|f|_{\gamma+2, \Omega_T}^{(\alpha)}, \quad (2.29)$$

причем величина T_0 не зависит, очевидно, от нормы функции f . Двигаясь вверх по оси Ot по шагам величины $T_0/2$, как это сделано в [42], получаем оценку (2.29) для любого $T > 0$ с константой, зависящей, вообще говоря, от T .

Таким образом, из оценки (2.29) следует, что на любом компакте $D_{k,T}$ последовательность $\{u_n\}$, $n \geq k+1$, ограничена в пространстве $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{D}_{k,T})$ и, следовательно, компактна в пространстве $H^{2+\alpha', (2+\alpha')/2}(\overline{D}_{k,T})$ с любым $\alpha' < \alpha$. Используя диагональный процесс, мы можем из последовательности $\{u_n\}$ выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $H^{2+\alpha', (2+\alpha')/2}$ на любом компакте $\overline{D}_{k,T}$, причем предельная функция, как легко видеть, определена на всей области Ω_T , принадлежит пространству $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ на каждом $\overline{D}_{k,T}$, удовлетворяет уравнению (2.2), начальным и граничным условиям. Таким образом, построенная предельная функция дает решение задачи (2.2)–(2.4) и удовлетворяет, как легко видеть в силу (2.29), оценке (2.10).

Что же касается самой точки O , то при $\gamma > 0$ начальные данные и правая часть уравнения в задаче (2.2)–(2.4), а соответственно, и решение этой задачи могут иметь особенность в этой точке. С другой стороны, при $\gamma < 0$ решение равно нулю в точке O , следовательно, граничные условия выполняются и в этой точке. По поводу возможной асимптотики решения в конической точке см. работы [17], [18].

Единственность полученного решения следует из принципа максимума, примененного к разности решений. При этом в однородной задаче во всей исходной области Ω_T для разности двух решений необходимо произвести все те же самые замены переменных и неизвестных функций, приводящие к уравнению (2.26). Функция w , определенная в неограниченной в направлении оси $O\omega_0$ области, будет, кроме однородного уравнения, удовлетворять нулевым граничным и начальным условиям. Кроме того, в силу принадлежности решений соответствующему классу функция w будет ограниченной на бесконечности (при $\omega_0 \rightarrow +\infty$). Принцип максимума при этом применяется более или менее стандартным образом для сравнения такой функции w на областях $\{|\omega_0| \leq R\}$ ($R = R_\varepsilon > 0$ достаточно велико) с барьером вида $W_\varepsilon = \varepsilon(1 + \omega_0^2)^\delta$, где $\delta > 0$ фиксировано и достаточно мало, а $\varepsilon > 0$ произвольно мало (см., например, [35]).

Тем самым, теорема 2.1 доказана.

2.3. Доказательство утверждения (i) предложения 2.2. Пусть в этом пункте наша исходная область Ω – это прямой бесконечный конус с вершиной в точке O , вырезающий на единичной сфере область S_Ω . Отметим, что в этом случае параметр $\theta_\rho = \theta$ не зависит от ρ и определяется телесным углом конуса. Пусть, далее, уравнение (2.2) представляет собой простейшее уравнение

теплопроводности, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f. \quad (2.30)$$

Мы найдем для этого случая ненулевые решения задачи (2.30), (2.3), (2.4) при $f \equiv 0$ и $u_0 \equiv 0$, т.е. ненулевые решения однородной задачи. Однородное уравнение (2.30) в полярных координатах (r, ω) , $r > 0$, $\omega \in S_\Omega$, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Delta_S u = 0, \quad (2.31)$$

где Δ_S – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере. При этом в полярных координатах условие (2.3) имеет вид

$$u = 0, \quad \omega \in \partial S_\Omega. \quad (2.32)$$

Решение уравнения (2.31) найдем в виде

$$w(x, t) = w(r, \omega, t) = t^{-m} h\left(\frac{r^2}{t}\right) \Phi(\omega) \equiv v(r, t) \Phi(\omega), \quad (2.33)$$

где $m = \text{const}$, h и Φ – некоторые функции. Стандартный прием разделения переменных показывает, что для того чтобы функция w была решением задачи (2.31), (2.32), необходимо, чтобы функция $\Phi(\omega)$ была собственной функцией задачи Дирихле для оператора Δ_S в области S_Ω . Обозначим через Φ_k k -ю собственную функцию указанной задачи, соответствующую k -му собственному значению, т.е. для $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta_S \Phi_k = -\lambda_k \Phi_k, \quad \Phi_k|_{\partial S_\Omega} = 0, \quad \lambda_k > 0, \quad (2.34)$$

где, как хорошо известно, λ_k возрастают по k и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. При этом функция $v(r, t)$ из (2.33) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\lambda_k}{r^2} v = 0. \quad (2.35)$$

Подставляя в это уравнение выражение для функции $v = t^{-m} h(r^2/t)$ и обозначая $\xi = r^2/t$, получаем для $h(\xi)$ уравнение

$$h''(\xi) + \frac{N}{2\xi} h'(\xi) + \frac{1}{4} h'(\xi) + \frac{m}{4\xi} - \frac{\lambda_k}{4\xi^2} h = 0.$$

Производя замену неизвестной функции

$$h(\xi) = g(\xi) e^{-m\xi/(2N)},$$

для функции $g(\xi)$, выбирая $m = N/4$, получаем уравнение

$$g''(\xi) + \frac{N}{2\xi} g'(\xi) - \left(\left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{\beta_k^2}{\xi^2} \right) g(\xi) = 0,$$

где обозначено $\beta_k^2 = \lambda_k/4$. Данное уравнение является разновидностью уравнения Бесселя и хорошо известно (см., например, [45; формула 8.491, п. 6]). Его линейно независимыми решениями, убывающими к нулю при $\xi \rightarrow +\infty$ и растущими на бесконечности, являются функции

$$g(\xi) = \xi^{-(N/4-1/2)} K_{\nu_k} \left(\frac{\xi}{8} \right), \quad \bar{g}(\xi) = \xi^{-(N/4-1/2)} I_{\nu_k} \left(\frac{\xi}{8} \right),$$

где

$$\nu_k = \sqrt{\beta_k^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_k + \left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2}, \quad (2.36)$$

а $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ – стандартные функции Бесселя мнимого аргумента. Таким образом, для $k = 1, 2, \dots$ искомая функция $w(x, t)$, которую мы обозначим $w_k(x, t)$, есть

$$w_k(x, t) = t^{-N/4} \left(\frac{r^2}{t} \right)^{-(N/4-1/2)} e^{-r^2/8t} K_{\nu_k} \left(\frac{r^2}{(8t)} \right) \Phi_k(\omega), \quad (2.37)$$

где ν_k определено в (2.36). Обозначим также для дальнейшего

$$\bar{w}_k(x, t) = t^{-N/4} \left(\frac{r^2}{t} \right)^{-(N/4-1/2)} e^{-r^2/8t} I_{\nu_k} \left(\frac{r^2}{(8t)} \right) \Phi_k(\omega). \quad (2.38)$$

Отметим теперь, что при нецелом ν асимптотика функции $K_\nu(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ и при $\xi \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$K_\nu(\xi) \sim C \begin{cases} \xi^{-\nu}, & \xi \rightarrow 0, \\ \xi^{-1/2} e^{-\xi}, & \xi \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.39)$$

а при целом ν асимптотика функции $K_\nu(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ сколь угодно близка к указанной в (2.39). В силу этого нетрудно проверить, что для $r > 0$ выполнено $w_k(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и, кроме того, функция $w_k(x, t)$ является гладкой при $t = 0$ для $r > 0$. Следовательно, функция $w_k(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в Ω_T и нулевым условиям (2.3), (2.4). Кроме того, нетрудно проверить непосредственно, что при

$$\gamma \geq \gamma_k^* = N - 1 + 2\nu_k = N - 1 + \sqrt{\lambda_k + \left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2}$$

функция $w_k(x, t) \in H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)$ является ненулевым решением однородной задачи (2.2)–(2.4) из указанного класса. Следовательно, при всех $\gamma \geq \gamma_1^* = N - 1 + \sqrt{\lambda_1 + (N/2 - 1)^2}$ однородная задача (2.2)–(2.4) имеет по крайней мере одно ненулевое решение из соответствующего класса, и поэтому оценка (2.10) невозможна. Заметим теперь, что наименьшее собственное число λ_1 задачи (2.34) определяется формой и размерами области S_Ω . При этом если область S_Ω имеет, например, форму круга диаметра θ , то $\lambda_1 \sim C/\theta$. Поэтому

для такого случая $\gamma_1^* \sim C(N) + C/\theta$, причем θ и есть тот параметр, который используется в теореме 2.1.

Наиболее простой вид функция $w_k(x, t)$ и параметр γ_1^* имеют в случае угла на плоскости раствора θ , т.е. когда $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : r(x) > 0, 0 < \varphi(x) < \theta\}$. В этом случае

$$w_k(x, t) = t^{-1/2} e^{-r^2/(8t)} K_{\nu_k} \left(\frac{r^2}{8t} \right) \sin \left(k \frac{\pi}{\theta} \varphi \right),$$

где $\nu_k = k\pi/(2\theta)$, и, следовательно,

$$\gamma_k^* = 1 + \frac{k\pi}{\theta}. \quad (2.40)$$

Таким образом, в случае плоского угла раствора θ при $\gamma > \gamma_1^* = 1 + \pi/\theta$ однородная задача (2.2)–(2.4) имеет ненулевое решение в классе $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$.

То обстоятельство, что в наших примерах область Ω не ограничена, несущественно, так как по каждому найденному решению w_k в неограниченной области мы можем построить нетривиальное решение однородной задачи (2.2)–(2.4) в ограниченной области. Пусть $r_0 > 0$, и пусть функция $\eta(z) \in C^\infty([0, +\infty))$ такова, что $\eta \equiv 1$ при $0 \leq z \leq r_0$, $\eta \equiv 0$ при $z \geq 2r_0$, $\Omega_{r_0} = \Omega \cap \{|x| < 2r_0\}$. Тогда функция $v_k = w_k \eta(r)$ удовлетворяет в $\Omega_{r_0, T}$ однородным условиям (2.3), (2.4) и уравнению

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} - \Delta v_k = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \equiv f_k(x, t). \quad (2.41)$$

Так как производные от функции $\eta(r(x))$ отличны от нуля только при $r_0 \leq r \leq 2r_0$, то f_k принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega}_{r_0, T})$ и имеет носитель в области $\{r_0 \leq |x| \leq 2r_0\} \times [0, T]$; таким образом, $f_k \in H_{-\delta+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_{r_0, T})$ при любом $\delta > 0$. Если $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, а θ достаточно мало, то δ и θ удовлетворяют условию (2.9) утверждения теоремы 2.1. Следовательно, задача (2.41), (2.3), (2.4) с нулевыми начальными данными имеет единственное решение $v_k \in H_{-\delta}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_{r_0, T})$, причем так как для такого решения $|v_k| \leq r^\delta$ при $r \rightarrow 0$, то функция v_k не совпадает с $w_k \eta$. Поэтому функция

$$U_k = w_k \eta - v_k \quad (2.42)$$

дает нетривиальное решение из соответствующего класса однородной задачи (2.2)–(2.4) в ограниченной области при $\gamma > \gamma_k^*$.

Этим мы завершаем доказательство утверждения (i) предложения 2.2.

2.4. Доказательство утверждения (ii) предложения 2.2. В этом пункте мы предполагаем область Ω плоским углом с раствором угла $\theta = \theta_m = \pi/m$, $m = 2, 3, \dots$, т.е.

$$\Omega = \Omega_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < r(x) < +\infty, 0 < \varphi(x) < \theta_m\}.$$

Выбор таких углов связан с возможностью явного построения функции Грина соответствующей задачи. Пусть для начала $\Omega = \Omega_2$ – внутренность прямого угла, представляющего собой первый октант на плоскости. Пусть также уравнение (2.2) является простейшим уравнением теплопроводности, $u_0 \equiv 0$, а правая часть $f(x, t)$ в (2.2) достаточно гладкая и имеет компактный в Ω_T носитель, находящийся на положительном расстоянии от угловой точки и вообще от границы $\partial\Omega \times [0, T]$. В этом случае, очевидно, $f \in H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$ при любом $\gamma < 0$. В рассматриваемом нами сейчас случае решение задачи (2.2)–(2.4) легко может быть получено в явном виде ($\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$):

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G_2(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2.43)$$

где функция Грина $G_2(x, \xi, t)$ задачи (2.2)–(2.4), как хорошо известно, строится методом отражения и есть

$$\begin{aligned} G_2(x, \xi, t) &= Ct^{-1} \left[\exp \left\{ -\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}{4t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}{4t} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ -\frac{(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}{4t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}{4t} \right\} \right] \\ &= Ct^{-1} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x_1 \xi_1}{t} \right\} \right] \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x_2 \xi_2}{t} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Важно отметить, что любое решение задачи (2.2)–(2.4) для уравнения теплопроводности из какого-либо класса $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ с отрицательным γ единственно, что следует непосредственно из принципа максимума, так как такие решения непрерывны в точке O и растут не быстрее $r^{-\gamma}$ на бесконечности. Таким образом, любые два решения u_1 и u_2 из классов $H_{\gamma_1}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ и $H_{\gamma_2}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ соответственно совпадают, так как их разность непрерывна в нуле и не растет быстрее степени r на бесконечности. Более того, в силу тех же аргументов все такие решения совпадают с единственным в силу принципа максимума непрерывным в $\bar{\Omega}_T$ решением, имеющим не более чем степенной порядок на бесконечности. Следовательно, ни в каком классе $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)$ с отрицательным γ не может существовать решение, отличное от $u^{(2)}$ из (2.43).

Пусть теперь точка x находится возле угловой точки O (возле нуля) и на положительном расстоянии от носителя f , на котором в силу нашего предположения $0 < \nu \leq |\xi| \leq \nu^{-1}$. Тогда при $x \rightarrow 0$ имеем асимптотику

$$\left[1 - \exp \left\{ -\frac{x_i \xi_i}{t} \right\} \right] \sim \frac{x_i \xi_i}{t},$$

и, следовательно, при $x \rightarrow 0$ решение $u^{(2)}$ из (2.43) имеет асимптотику

$$u^{(2)}(x, t) \sim A_2(t) x_1 x_2 + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.44)$$

где

$$A_2(t) = C \int_0^t (t - \tau)^{-3} \int_{\text{supp}(f)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4(t - \tau)} \right\} \xi_1 \xi_2 f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.45)$$

Таким образом, из (2.44) и (2.45) следует, что если $A_2(t)$ не равно нулю тождественно, то $u^{(2)} \sim Cr^2$ при $x \rightarrow 0$, и поэтому решение $u^{(2)}$ не может принадлежать никакому пространству $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ при $\gamma < -2$, хотя правая часть в (2.2) принадлежит $H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ при любом отрицательном γ . Следовательно, если A_2 не равно нулю тождественно, то задача (2.2)–(2.4) не разрешима в классе $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с выбранной правой частью при $\gamma < -2$. Таким образом, для разрешимости задачи (2.2)–(2.4) в классе $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с $\gamma < -2$ необходимо выполнение условия $A_2(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т.е.

$$\int_0^t (t-\tau)^{-3} \int_{\text{supp}(f)} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right\} \xi_1 \xi_2 f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.46)$$

Аналогичная ситуация имеет место и в случае угла $\theta = \theta = \pi/n$. В этом случае методом отражения также может быть построена функция Грина $G_n(x, \xi, t)$, и непрерывное решение задачи (2.2)–(2.4) с уравнением теплопроводности может быть представлено в виде

$$u^{(n)}(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G_n(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.47)$$

При этом, как показывают непосредственные вычисления, при $x \rightarrow 0$ решение $u^{(n)}(x, t)$ имеет асимптотику

$$u^{(n)}(x, t) \sim A_n(t) \text{Im}(z^n) + \mathcal{O}(r^{n+1}), \quad (2.48)$$

где $\text{Im}(z^n)$ – мнимая часть z^n , $z = x_1 + ix_2$, а коэффициент $A_n(t)$ имеет вид

$$A_n(t) = C \int_0^t (t-\tau)^{-n-1} \int_{\text{supp}(f)} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right\} \text{Im}(w^n) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2.49)$$

$w = \xi_1 + i\xi_2$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (2.2)–(2.4) в классе $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с $\gamma < -n = -\pi/\theta_n$ является условие

$$\int_0^t (t-\tau)^{-n-1} \int_{\text{supp}(f)} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right\} \text{Im}(w^n) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.50)$$

Значит, задача (2.2)–(2.4) не всегда разрешима в классе $H_\gamma^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с $\gamma < -\pi/\theta_n$.

Кроме того, так как условие (2.50) должно быть выполнено при всех $t \in [0, T]$, то (2.50) не сводится, как нетрудно видеть, к конечному числу условий, поэтому задача (2.2)–(2.4) в указанных классах при $\gamma < -\pi/\theta_n$ не является фредгольмовой.

Заметим также, что бесконечность области в рассмотренных примерах не имеет значения, так как функция вида $u^{(n)}\eta(r)$ (где $\eta \equiv 1$ в окрестности нуля, $\eta \equiv 0$ при $r > 1$) имеет ту же асимптотику при $x = 0$, что и функция $u^{(n)}$, являясь при этом решением задачи (2.2)–(2.4) в ограниченной области с правой частью $\tilde{f}(x, t) \in C_0^\infty(\Omega_T)$ такого же типа, как и функция f , т.е. $\tilde{f} \in H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ при любом $\gamma < 0$. Более того, условия разрешимости

задачи (2.2)–(2.4) в ограниченной области с правой частью $\tilde{f}$ в пространстве $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с $\gamma < -\pi/\theta_n$ остаются теми же условиями (2.46), (2.50). Эти условия выражены, правда, не в терминах функции $\tilde{f}$, а в терминах функции f , связанной с функцией $\tilde{f}$, но это не отменяет того факта, что (2.46), (2.50) не сводятся к конечному числу условий на $\tilde{f}$.

Отметим, наконец, что угол на плоскости вида $\theta_n = \pi/n$ был выбран потому, что в этом случае удастся явным образом выписать условия (2.46), (2.50). Пусть Ω – произвольный прямой конус, а $\overline{w}_k(x, t)$ – функция, определенная в (2.38). Пусть, далее, $\eta(r)$ такая же, как и выше, а $\zeta(t)$ – гладкая функция, не равная нулю только в окрестности некоторой точки $t_0 > 0$. Тогда функция $u = \overline{w}_k(x, t)\eta(r)\zeta(t)$ является решением задачи (2.2)–(2.4) для уравнения теплопроводности с нулевыми начальными данными и с некоторой правой частью f . При этом в силу свойств функций Бесселя $I_{\nu}(z)$ правая часть f имеет асимптотику при $x = 0$ вида $f \sim r^{\overline{\gamma}_k}$, где

$$\overline{\gamma}_k = \sqrt{\lambda_k + \left(\frac{N}{2} - 1\right)^2} - \left(\frac{N}{2} - 1\right).$$

Следовательно, как можно проверить непосредственно, $f \in H_{\beta_k+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ с $\beta_k = -\overline{\gamma}_k - 2$. Однако единственным решением рассматриваемой задачи в классах $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ с отрицательными γ в силу принципа максимума является рассматриваемая функция $u = \overline{w}_k(x, t)\eta(r)\zeta(t)$. При этом, как нетрудно видеть, функция u имеет ту же асимптотику при $x = 0$, что и сама правая часть f , и, следовательно, u не является решением из $H_{\beta_k}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$. Таким образом, при $\gamma < -\overline{\gamma}_1 = -[\sqrt{\lambda_1 + (N/2 - 1)^2} - (N/2 - 1)]$ задача (2.2)–(2.4), вообще говоря, не разрешима в рассматриваемых пространствах.

Этим мы завершаем доказательство предложения 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Пользуясь результатами п. 2.3, можно показать, что задача (2.2)–(2.4) может не быть фредгольмовой не только при больших отрицательных показателях веса γ , но и при положительных γ . Действительно, пусть $\gamma > 0$ фиксировано, а $d > 0$ достаточно велико, так что показатель $-(d - \gamma)$ удовлетворяет условию (2.12) для заданной области и уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу (2.2)–(2.4) с $u_0 \equiv 0$ и уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sum_{i=1}^N \frac{2dx_i}{|x|^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{d(N + d - 2)}{|x|^2} u = f,$$

где правая часть f есть $H_{\gamma+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, а коэффициенты, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Это уравнение подобрано так, что при замене неизвестной функции $v = |x|^d u$ оно переходит в уравнение теплопроводности для функции v с правой частью $g = |x|^d f$, принадлежащей пространству $H_{-(d-\gamma)+2}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$. При этом, очевидно, разрешимость задачи для функции u в классе $H_{\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ эквивалентна разрешимости задачи для функции v в классе $H_{-(d-\gamma)}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$. Однако задача для функции v не является, как мы видели, фредгольмовой.

§ 3. Параболическое уравнение с вырождением или особенностью в конической точке

Сохраним в этом параграфе все те же обозначения, что и в § 2.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. В области Ω_T рассмотрим задачу вида (2.2)–(2.4), где уравнение (2.2) заменено вырождающимся уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} - r^a \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^N b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T. \quad (3.1)$$

Мы предполагаем, что для коэффициентов уравнения (3.1) конечными являются следующие нормы:

$$\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|_{a,0,\Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^N |b_i|_{a,-a+1,\Omega_T}^{(\alpha)} + |c|_{a,-a+2,\Omega_T}^{(\alpha)} \leq \mu_1, \quad (3.2)$$

где мы использовали обозначение

$$|v|_{a,\gamma,\Omega_T}^{(\alpha)} \equiv |r^\gamma v|_{\Omega_T}^{(0)} + \langle r^{\gamma+\alpha} v \rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle r^{\gamma+\alpha(2-a)/2} v \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)}, \quad (3.3)$$

причем пространство функций с конечной нормой (3.3) мы будем обозначать $H_{a,\gamma}^\alpha(\bar{\Omega}_T)$. Мы предполагаем также выполненным условие (2.6).

Частный случай такой задачи при $a = 2$, когда Ω есть угол на плоскости и уравнение является простейшим, т.е. $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = 0$, $c = 0$, был рассмотрен в [36] в некоторых классах суммируемых функций с применением операторных методов.

Определим нормы решений, адекватные рассматриваемой задаче (3.1), (2.3), (2.4). Обозначим через $H_{a,\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)$ пространство функций $u(x,t)$ с конечной нормой

$$\begin{aligned} |u|_{a,\gamma,\Omega_T}^{(2+\alpha)} &\equiv |r^\gamma u|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma+1} Du|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma+2} D^2 u|_{\Omega_T}^{(0)} + |r^{\gamma-a+2} u_t|_{\Omega_T}^{(0)} \\ &+ \langle r^{\gamma+1+(1+\alpha)(2-a)/2} Du \rangle_{t,\Omega_T}^{(1+\alpha)/2} + \langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} \\ &+ \langle r^{\gamma+2+\alpha(2-a)/2} D^2 u \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} + \langle r^{\gamma+\alpha-a+2} u_t \rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle r^{\gamma-a+2+\alpha(2-a)/2} u_t \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} \end{aligned}$$

и аналогично определим норму $|u|_{a,\gamma,\Omega}^{(2+\alpha)}$ для функций, не зависящих от t ; без соответствующих слагаемых, зависящих от t , она, как легко видеть, совпадает с нормой $|u|_{\gamma,\Omega}^{(2+\alpha)}$.

Следующая теорема показывает, что свойства задачи (3.1), (2.3), (2.4) существенно зависят от показателя вырождения (особенности) a , причем при $a < 2$ задача наследует спектральные свойства параболической задачи (2.2)–(2.4), тогда как при $a \geq 2$ задача теряет спектральные свойства и ведет себя подобно обычной параболической задаче в гладкой области (см. замечание 3.2 по поводу случая $a > 2$ в неограниченной области).

ТЕОРЕМА 3.1. (i) Пусть $a \geq 2$. Тогда при любом значении веса $\gamma \in \mathbb{R}$, при любом значении параметра θ (любом телесном угле конуса) и при любых

функциях $u_0 \in H_\gamma^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in H_{a,\gamma+2-a}^\alpha(\overline{\Omega}_T)$ задача (3.1), (2.3), (2.4) имеет единственное решение из пространства $H_{a,\gamma}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, причем справедлива оценка

$$|u|_{a,\gamma,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{a,\gamma+2-a,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{\gamma,\Omega}^{(2+\alpha)}) \quad (3.4)$$

с константой C , не зависящей от u_0 и f .

Если же $a < 2$, то справедливы следующие утверждения.

(ii) Существуют такие положительные константы μ_5 , ν_5 , что при выполнении условия

$$\gamma^2 + \mu_5 \leq \frac{\nu_5}{\theta^2} \quad (3.5)$$

задача (3.1), (2.3), (2.4) имеет единственное решение из рассматриваемого пространства $H_{a,\gamma}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ при любых функциях $u_0 \in H_\gamma^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in H_{a,\gamma+2-a}^\alpha(\overline{\Omega}_T)$, причем справедлива оценка (3.4) с константой C , не зависящей от u_0 и f . При этом условие (3.5) не может быть отброшено.

(iii) Существуют такие положительные константы μ_6 , ν_6 , что при выполнении условия

$$\gamma > \mu_6 + \frac{\nu_6}{\theta} \quad (3.6)$$

однородная задача (3.1), (2.3), (2.4) имеет нетривиальные решения из пространства $H_{a,\gamma}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, и, следовательно, оценка (3.4) невозможна.

(iv) Существуют такие положительные константы μ_7 , ν_7 , что при выполнении условия

$$\gamma < -\mu_7 - \frac{\nu_7}{\theta} \quad (3.7)$$

задача (3.1), (2.3), (2.4) не имеет, вообще говоря, решения из рассматриваемого пространства $H_{a,\gamma}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$ при произвольных функциях $u_0 \in H_\gamma^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in H_{a,\gamma+2-a}^\alpha(\overline{\Omega}_T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы не будем приводить подробные рассуждения, так как они практически полностью повторяют доказательство теоремы 2.1. Считая, как и в теореме 2.1, без ограничения общности начальные данные нулевыми, отметим лишь два главных отличия, вытекающих из самого вида уравнения (3.1).

Во-первых, при получении оценок (2.15) в новых нормах в качестве малых цилиндров $\tilde{q}_\lambda(x_0, t_0)$ для $(x_0, t_0) \in \Omega_{n,T}$ нужно брать цилиндры с другим масштабом по переменной t , а именно ($r = |x_0|$)

$$\tilde{q}_\lambda(x_0, t_0) = \{(x, t) : |x - x_0| \leq \lambda r, |t - t_0| \leq \lambda^2 r^{2-a}\},$$

при этом $q_\lambda(x_0, t_0)$ определяются точно так же, как в теореме 2.1. Соответствующая замена переменных, переводящая области $q_\lambda(x_0, t_0)$ в области стандартных размеров, имеет вид

$$x = x_0 + ry, \quad t = t_0 + r^{2-a}\tau.$$

Нетрудно видеть, что при такой замене переменных и после деления обеих частей уравнения на r^{a-2} уравнение (3.1) переходит в стандартное параболическое уравнение, допускающее стандартные локальные оценки. Дословно повторяя соответствующие рассуждения теоремы 2.1, мы получаем при любом значении параметра a оценку

$$|u_n|_{a,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2+\alpha)} \leq C(|f|_{a,\gamma+2-a,\Omega_T}^{(\alpha)} + |r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}) \quad (3.8)$$

с константой C , не зависящей от f и n .

При этом при $a < 2$ оценка младшего слагаемого $|r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}$ в (3.8) проводится точно так же, как в доказательстве утверждения (i) теоремы 2.1 с использованием эллиптической части уравнения, что приводит к ограничению (3.5). В случае же $a \geq 2$ оценка младшей нормы $|r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}$ может быть получена проще, что составляет второе отличие от теоремы 2.1. Фактически в случае $a \geq 2$ может быть получена более сильная оценка

$$|r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} \leq C|r^\gamma f|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}. \quad (3.9)$$

Отметим, что такая оценка является более сильной именно при $a \geq 2$, так как при этом условии

$$|r^\gamma f|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} \leq C|r^{\gamma-a+2}f|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} \leq C|f|_{a,\gamma+2-a,\Omega_T}^{(\alpha)}. \quad (3.10)$$

А именно, в случае $a \geq 2$ при переходе в уравнении (3.1) к полярным координатам и замене $r = e^{-\omega_0}$, в отличие от уравнения (2.23), не следует делить обе части уравнения на $e^{(2-a)\omega_0}$ (как это необходимо делать в случае $a < 2$). При этом уравнение (3.1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - e^{-(a-2)\omega_0} \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{b}_i \frac{\partial u_n}{\partial \omega_i} + \tilde{c} u_n = f,$$

причем в силу условий на коэффициенты уравнения (3.1) и условия $a \geq 2$ матрица $\{\tilde{a}_{ij}\}$ удовлетворяет условию эллиптичности, а коэффициенты $\tilde{b}_i$ и $\tilde{c}$ ограничены, так как

$$|b_i| \leq C|b_i|_{a,-a+1}^{(\alpha)} e^{-(a-1)\omega_0} \leq C, \quad |c| \leq C|c|_{a,-a+2}^{(\alpha)} e^{-(a-2)\omega_0} \leq C.$$

Обозначая, как и в доказательстве теоремы 2.1, $v = u_n e^{-\gamma\omega_0}$, для v получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - e^{-(a-2)\omega_0} \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\tilde{b}}_i(\gamma) \frac{\partial v}{\partial \omega_i} + \tilde{\tilde{c}}(\gamma) v = f e^{-\gamma\omega_0},$$

где коэффициент $\tilde{\tilde{c}}(\gamma)$ ограничен, $\tilde{\tilde{c}}(\gamma) \leq C_0 = C_0(\mu_1, \gamma)$. Последнее обстоятельство позволяет с помощью стандартной замены неизвестной функции $v = w e^{Mt}$ с $M > C_0 + 1$ сделать коэффициент при v положительным и, таким образом, из принципа максимума получить оценку $|w| \leq C|f e^{-\gamma\omega_0}|$ и, тем самым, оценку $|r^\gamma u_n|_{\Omega_{n,T}}^{(0)} \leq C|r^\gamma f|_{\Omega_{n,T}}^{(0)}$.

Этим завершается доказательство утверждений (i) и (ii) теоремы 3.1.

Что касается утверждения (iii) теоремы 3.1, то, как и в п. 2.3 при доказательстве предложения 2.2, если $a < 2$, Ω – бесконечный конус, а уравнение (2.2) представляет собой уравнение теплопроводности, то решениями однородной задачи (3.1), (2.3), (2.4) являются функции (они находятся в точности по той же схеме, что и в п. 2.2)

$$w_{a,k}(x, t) = t^{-(N-a)/(2(2-a))} \left(\frac{r^{2-a}}{t} \right)^{-(N-a)/(2(2-a))} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(2-a)^2} \frac{r^{2-a}}{t} \right\} K_{\nu_k} \left(\frac{1}{2(2-a)^2} \frac{r^{2-a}}{t} \right) \Phi_k(\omega), \quad (3.11)$$

где ν_k и Φ_k имеют тот же смысл, что и в п. 2.2. При этом

$$\nu_k = \frac{1}{2-a} \sqrt{\lambda_k + \frac{(N-2)^2}{4}},$$

где λ_k – собственные числа задачи (2.34), так что в плоском случае угла раствора θ

$$\nu_k = \frac{1}{2-a} \frac{k\pi}{\theta}.$$

Отметим также, что, как и выше, уравнению (3.1) и граничному условию (2.3) удовлетворяют также функции

$$\bar{w}_{a,k}(x, t) = t^{-(N-a)/(2(2-a))} \left(\frac{r^{2-a}}{t} \right)^{-(N-a)/(2(2-a))} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4(2-a)} \frac{r^{2-a}}{t} \right\} I_{\nu_k} \left(\frac{1}{4(2-a)} \frac{r^{2-a}}{t} \right) \Phi_k(\omega). \quad (3.12)$$

Таким образом, при $a < 2$, как и в случае невырождающегося уравнения, при значениях показателя веса $\gamma > N - (a+2)/2 + \sqrt{\lambda_1 + (N-2)^2/4}$ ($\gamma > (2-a)/2 + \pi/\theta$ в плоском случае) однородная задача (3.1), (2.3), (2.4) имеет ненулевые решения в классе $H_{a,\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ и, следовательно, оценка (3.4) невозможна. При этом нетривиальное решение однородной задачи в ограниченной области строится по функции $w_{a,k}$ в точности так же, как это было сделано в п. 2.3 для невырожденного уравнения, что завершает доказательство утверждения (iii) теоремы 3.1.

Наконец, утверждение (iv) теоремы 3.1 доказывается, как и в конце п. 2.4 для невырожденного уравнения, рассмотрением функций вида $u = u_k = \bar{w}_{a,k}\eta(r)\zeta(t)$, где функции $\eta(r)$ и $\zeta(t)$ те же самые, что и в п. 2.4. Причем в точности так же, как и выше, нетрудно проверить, что такие функции u_k , являясь единственным непрерывным решением рассматриваемой задачи, не принадлежат классу $H_{a,\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ с $\gamma = \bar{\gamma}_{a,k} = a - 2 - \sqrt{\lambda_k + (N-2)^2/4} + (N-2)/2$, хотя правая часть получающегося уравнения принадлежит соответствующему классу $H_{a,\bar{\gamma}_{a,k}-a+2}^{\alpha, \alpha/2}$.

Этим мы завершаем доказательство теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Требование ограниченности области Ω в утверждении (i) теоремы 3.1 является существенным. Это требование было существенно использовано в доказательстве, так как функция $e^{-(a-2)\omega_0}$ является ограниченной только при $\omega_0 \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow 0$), а кроме того, неравенство (3.10) справедливо только для ограниченной области. Более того, как можно проверить, при $a > 2$ функции $w_{a,k}$ являются решениями однородной задачи (3.1), (2.3), (2.4) в бесконечном конусе из класса $H_{a,\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ с $\gamma < (N-2)/2 - \sqrt{\lambda_k + (N-2)^2/4} < 0$ при $2 < a \leq N$ и с $\gamma < N - (a+2)/2 - \sqrt{\lambda_k + (N-2)^2/4} < 0$ при $a > N$. Однако по этим решениям нельзя построить нетривиальные решения однородной задачи в ограниченной области, как это было сделано в п. 2.3, так как любое решение из класса $H_{a,\gamma}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ с отрицательным γ единственно, и приведенная в п. 2.3 конструкция приведет к тривиальному решению. Мы не останавливаемся подробно на свойствах задачи (3.1), (2.3), (2.4) с $a > 2$ в неограниченной области.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В работе [41] было рассмотрен случай уравнения с вырождением не только в точке O , но и на всей границе нерегулярной области Ω . Такая задача возникает при изучении задачи со свободной границей для квазилинейного вырождающегося уравнения фильтрации, выраженного в терминах давления, и после линеаризации этого уравнения на финитных начальных данных имеет вид (см. [46], [47])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi(x, t) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u = f(x, t), \quad (3.13)$$

$$(x, t) \in \Omega_T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.14)$$

где заданная функция $\varphi(x, t) > 0$ при $(x, t) \in \Omega_T$ и имеет нуль первого порядка на всей границе $\partial\Omega$ при $t \in [0, T]$, а коэффициенты уравнения (3.13) достаточно регулярны и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Отметим, что характерной особенностью вырождающейся задачи (3.13), (3.14) является то, что она рассматривается при таких условиях на коэффициенты b_i (унаследованных от задачи фильтрации), что при поиске решения в классе достаточно гладких классов решений граничные условия на $\partial\Omega$ отсутствуют (см. условия Фикеры в [48]).

Используя тот же подход, что и выше, и опираясь на результаты работ [39], [46], [47], такую задачу также можно исследовать в весовых классах гладких функций (см. [41]).

§ 4. О задаче (2.2)–(2.4) в пространствах Соболева

Задача (2.2)–(2.4) была рассмотрена в весовых пространствах гладких функций, и ее свойства в этих пространствах описаны в теореме 2.1. В весовых пространствах суммируемых функций задача (2.2)–(2.4) в области с конической

точкой была изучена ранее в [19], [26], [27], а задача в двугранном угле изучена в [25]. Цель этого параграфа – продемонстрировать применимость схемы доказательства теоремы 2.1 к случаю весовых пространств суммируемых функций. При этом приведенная ниже теорема 4.1 менее точна, чем в [19], [26], [27].

Определим параболические весовые пространства В. А. Кондратьева $W_{2,\gamma}^2(\Omega)$, аналогичные эллиптическим, введенным в [1]. В параболическом случае такие пространства вводились в [16] и использовались в [25]–[27]. Для $\gamma \in \mathbb{R}$ под пространством $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ будем понимать замыкание гладких в $\overline{\Omega}_T$ функций $u(x, t)$ в норме

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\gamma,\Omega_T}^{(2,1)} &= \int_{\Omega_T} r^{2\gamma-N} u^2 dx dt + \int_{\Omega_T} r^{2\gamma+2-N} |D_x u|^2 dx dt \\ &+ \int_{\Omega_T} r^{2\gamma+4-N} |D_x^2 u|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} r^{2\gamma+4-N} |D_t u|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Определим также пространство $L_{2,\gamma}(\Omega_T)$ как замыкание гладких функций в норме

$$\|u\|_{2,\gamma,\Omega_T} = \int_{\Omega_T} r^{2\gamma-N} u^2 dx dt. \quad (4.2)$$

В пространствах $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ и $L_{2,\gamma}(\Omega_T)$ задача (2.2)–(2.4) рассматривается аналогично тому, как это было сделано в § 2, на основании результатов, например, [42; гл. 4] о локальных свойствах решений в пространствах Соболева. При этом мы предполагаем большую весовую гладкость коэффициентов a_{ij} уравнения (2.2), а именно мы требуем выполнения неравенства

$$\sum_{i,j,k=1}^N \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right|_{1,\Omega_T}^{(0)} \leq \mu_1. \quad (4.3)$$

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, отметим, что, как следует из результатов, например, [49; гл. 6], пространством следов при $t = 0$ функций из $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ является пространство $W_{2,\gamma}^1(\Omega)$, норму в котором мы обозначаем $\|u\|_{2,\gamma,\Omega}^{(1)}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, а также условие (4.3). Тогда существуют положительные константы μ_8, ν_8 такие, что при выполнении условия

$$\gamma^2 + \mu_8 < \frac{\nu_8}{\theta^2} \quad (4.4)$$

задача (2.2)–(2.4) имеет единственное решение из класса $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ при любых $u_0 \in W_{2,\gamma}^1(\Omega)$, $f \in L_{2,\gamma+2}(\Omega_T)$, причем справедлива оценка

$$\|u\|_{2,\gamma,\Omega_T}^{(2,1)} \leq C(\|u_0\|_{2,\gamma,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T}) \quad (4.5)$$

с константой C , не зависящей от u_0 и f .

При этом условие (4.4) не может быть отброшено, так как существуют положительные константы $\mu_9, \nu_9, \mu_{10}, \nu_{10}$ такие, что при $\gamma > \mu_9 + \nu_9/\theta$ однородная задача (2.2)–(2.4) имеет нетривиальные решения в классе $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$,

и, следовательно, оценка (4.5) невозможна, а при $\gamma < -\mu_{10} - \nu_{10}/\theta$ задача (2.2)–(2.4), вообще говоря, не разрешима в классах $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$, $L_{2,\gamma}(\Omega_T)$, $W_{2,\gamma}^1(\Omega)$ и не является в этих классах фредгольмовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1, то мы отметим только отличия от доказательства теоремы 2.1; как и выше, не ограничивая общности, считаем, что $u_0 \equiv 0$.

Во-первых, совершенно аналогично оценке (2.15) на основании результатов [42] для приближений u_n может быть получена оценка

$$\|u_n\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2,1)} \leq C(\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + \|u_n\|_{2,\gamma,\Omega}), \quad (4.6)$$

причем отличие оценки (4.6) от (2.15) состоит в том, что вместо младшей нормы $|u_n|_{\gamma,\Omega_{n,T}}^{(0)}$ в правой части (4.6) присутствует норма функций u_n в пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega_{n,T})$.

Далее, аналогично лемме 2.4 при выполнении (4.4) может быть получена оценка

$$\|u_n\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}} \leq C(\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + (\varepsilon + C_\varepsilon T^{1/2})\|u_n\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2,1)}) \quad (4.7)$$

с произвольным малым $\varepsilon > 0$. Для этого выберем и зафиксируем достаточно малое $\rho > 0$ так же, как это было сделано в лемме 2.4, чтобы θ_ρ удовлетворяло (4.4), и представим функцию u_n в виде $u_n = \zeta(|x|/\rho)u_n + (1 - \zeta(|x|/\rho))u_n \equiv u_n^{(1)} + u_n^{(2)}$, где $\zeta(s)$ – гладкая функция такая, что $\zeta(s) \equiv 1$ при $0 \leq s \leq 1/2$ и $\zeta(s) \equiv 0$ при $1 \leq s$. При этом функции $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$ удовлетворяют задачам с нулевыми граничными и начальными данными в областях $\Omega_{n,\rho,T} = \Omega_{n,T} \cap \Omega_{\rho,T}$ и $Q_{\rho,T} \supset \Omega_T \setminus \Omega_{n,\rho/2,T}$ соответственно (область $Q_{\rho,T}$ можно считать областью с гладкой границей) и с правыми частями уравнений соответственно f_1 и f_2 . При этом, так как производные функции $\zeta(|x|/\rho)$ отличны от нуля только при $\rho/2 < |x| < \rho$, для функций f_i , $i = 1, 2$, справедлива оценка (мы обозначили $E_{\rho,T} \equiv (\Omega \cap \{\rho/2 < |x| < \rho\}) \times (0, T)$)

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}} &\leq C(\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + \|D_x u_n\|_{2,E_{\rho,T}} + \|u_n\|_{2,E_{\rho,T}}) \\ &\leq C\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + \varepsilon\|u_n\|_{2,\gamma,E_{\rho,T}}^{(2,1)} + C_\varepsilon\|u_n\|_{2,E_{\rho,T}} \\ &\leq C\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + \varepsilon\|u_n\|_{2,\gamma,E_{\rho,T}}^{(2,1)} + C_\varepsilon T^{1/2} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{2,E_{\rho,T}}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

здесь мы воспользовались известным интерполяционным неравенством для оценки $\|D_x u_n\|_{2,E_{\rho,T}}$ и неравенством $\|u_n\|_{2,E_{\rho,T}} \leq CT^{1/2}\|\partial u_n/\partial t\|_{2,E_{\rho,T}}$, справедливым в силу того, что $u_n(x, 0) = 0$. Так как в гладкой области $Q_{\rho,T}$ при фиксированном ρ выполнено $|x| \sim C$, то для функции $u_n^{(2)}$ в силу (4.8) справедлива оценка (см. [42])

$$\|u_n^{(2)}\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2,1)} \leq C\|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T} + (\varepsilon + C_\varepsilon T^{1/2})\|u_n\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2,1)},$$

и поэтому достаточно рассмотреть только функцию $u_n^{(1)}$ в области $\Omega_{n,\rho,T}$.

Для оценки младшей нормы $\|u_n^{(1)}\|_{2,\gamma,\Omega_{n,\rho,T}}$ мы применяем все те же замены переменных, что и в п. 2.2, в результате чего приходим к уравнению (2.26) для

функции w_n (которая связана с функцией $u_n^{(1)}$ соотношениями $v_n = r^\gamma u_n^{(1)} = u_n^{(1)} e^{-\gamma\omega_0}$, $v_n = (2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho})w_n$):

$$e^{-2\omega_0} \frac{\partial w_n}{\partial t} - \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{\tilde{a}}_{ij} \frac{\partial^2 w_n}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\tilde{b}}_i(\gamma) \frac{\partial w_n}{\partial \omega_i} + \tilde{\tilde{c}}(\gamma) w_n = F \equiv \frac{f_1 e^{-(\gamma+2)\omega_0}}{2 - e^{-\omega_1/\theta_\rho}}, \quad (4.9)$$

$$(\omega, t) \in Q_{n,T} = T_n \times (0, T),$$

причем в этом уравнении (в частности, в силу (4.3)) выполнено

$$\left| \frac{\partial \tilde{\tilde{a}}_{ij}}{\partial \omega_k} \right| \leq C\mu_1, \quad \tilde{\tilde{c}} \geq \nu \left[\frac{\bar{\nu}}{\theta_\rho^2} - (\gamma^2 + \bar{\mu}) \right] \quad (4.10)$$

с некоторыми константами $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$. В силу того, что мера $r^{-N} dx$ по Ω в (4.1), (4.2) соответствует при произведенных заменах переменных мере $d\omega$ по T_n , достаточно получить оценку

$$\|w_n\|_{2,Q_{n,T}}^2 = \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega dt \leq C \|F\|_{2,Q_{n,T}}^2 = C \int_{Q_{n,T}} F^2 d\omega dt.$$

Такую оценку можно получить стандартным образом. Умножая уравнение (4.9) на w_n и интегрируя по частям по $Q_{n,T}$, в силу нулевых начальных и граничных условий получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{T_n} e^{-2\omega_0} w_n^2(\omega, T) d\omega + \int_{Q_{n,T}} \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{\tilde{a}}_{ij} \frac{\partial w_n}{\partial \omega_i} \frac{\partial w_n}{\partial \omega_j} d\omega dt + \int_{Q_{n,T}} \tilde{\tilde{c}} w_n^2 d\omega dt \\ &= \int_{Q_{n,T}} F w_n d\omega dt - \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{Q_{n,T}} \frac{\partial \tilde{\tilde{a}}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial w_n}{\partial \omega_j} w_n d\omega dt + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{Q_{n,T}} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{\partial w_n}{\partial \omega_i} w_n d\omega dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Пользуясь первым из неравенств (4.10) и ограниченностью $|\tilde{\tilde{b}}_i|$, интегралы в правой части (4.11) оценим по неравенству Юнга с малым $\varepsilon > 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{n,T}} F w_n d\omega dt \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega dt + C_\varepsilon \int_{Q_{n,T}} F^2 d\omega dt, \\ & \left| \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{Q_{n,T}} \frac{\partial \tilde{\tilde{a}}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial w_n}{\partial \omega_j} w_n d\omega dt \right| + \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{Q_{n,T}} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{\partial w_n}{\partial \omega_i} w_n d\omega dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{n,T}} |D_\omega w_n|^2 d\omega dt + C_\varepsilon(\mu_1) \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega dt. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу полученных неравенств, учитывая эллиптичность матрицы $\{\tilde{\tilde{a}}_{ij}\}$ и второе неравенство (4.10), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{T_n} e^{-2\omega_0} w_n^2(\omega, T) d\omega + \nu \int_{Q_{n,T}} |D_\omega w_n|^2 d\omega dt + \nu \left[\frac{\bar{\nu}}{\theta_\rho^2} - (\gamma^2 + \bar{\mu}) \right] \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega dt \\ & \leq C \int_{Q_{n,T}} F^2 d\omega dt + \varepsilon \int_{Q_{n,T}} |D_\omega w_n|^2 d\omega dt + C_\varepsilon(\mu_1) \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega dt. \end{aligned}$$

Выбирая в последнем неравенстве ε достаточно малым, переносим слагаемое с ε и последнее слагаемое справа в левую часть (4.11) и учитывая положительность первого и второго интегралов в левой части последнего неравенства, получим

$$\nu \left[\frac{\bar{\nu}}{\theta_\rho^2} - \left(\gamma^2 + \bar{\mu} + \frac{C_\varepsilon(\mu_1)}{\nu} \right) \right] \int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega d\tau \leq C \int_{Q_{n,T}} F^2 d\omega dt. \quad (4.12)$$

Таким образом, если выполнено условие (4.4) с $\nu_8 = \bar{\nu}$, $\mu_8 = \bar{\mu} + C_\varepsilon(\mu_1)/\nu$, то из (4.12) следует оценка

$$\int_{Q_{n,T}} w_n^2 d\omega d\tau \leq C \int_{Q_{n,T}} F^2 d\omega dt,$$

а следовательно, и оценка (4.7). Аналогично доказательству теоремы 2.1, выбирая в (4.7) сначала ε , а затем T достаточно малыми и двигаясь по шагам вверх по оси Ot , получаем в результате оценку

$$\|u_n\|_{2,\gamma,\Omega_{n,T}}^{(2.1)} \leq C \|f\|_{2,\gamma+2,\Omega_T}. \quad (4.13)$$

Используя теперь, как и в доказательстве теоремы 2.1, диагональный процесс, мы можем выделить из последовательности $\{u_n\}$ подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_{2,\text{loc}}^{2,1}(\Omega_T)$ на каждом компакте $D_{k,T} \subset \Omega_T$ к некоторой функции $u \in W_{2,\text{loc}}^{2,1}(\Omega_T)$, причем в силу (4.13) предельная функция u принадлежит $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ и для нее справедлива оценка (4.5). Если теперь $\eta(x,t) \in C_0^\infty(\Omega_T)$, $\text{supp}(\eta) \subset \Omega_{k,T}$, то, выбирая $n > k$ и переходя к пределу в линейном функционале на $W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_{k,T})$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{k,T}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + cu_n - f \right) \eta dx dt \\ &\equiv \int_{\Omega_{k,T}} (Lu_n - f) \eta dx dt \rightarrow \int_{\Omega_{k,T}} (Lu - f) \eta dx dt, \end{aligned}$$

видим, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Это доказывает первую часть теоремы 4.1.

Доказательство второй части теоремы получается по существу рассмотрением решений однородной задачи, построенных в [19], или переносится из пп. 2.3, 2.4, так как приведенные там оценки и примеры полностью переносятся и на случай пространств $W_{2,\gamma}^{2,1}$ с очевидными сдвигами для определения констант ν_i , μ_i , $i = 9, 10$, в формулировке теоремы 4.1.

На этом мы завершаем доказательство теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Так же, как это было сделано в замечании 2.5, можно показать, что задача (2.2)–(2.4) не всегда является фредгольмовой и в пространствах $W_{2,\gamma}^{2,1}$ с большим положительным γ . Более того, если уравнение (2.2) представляет собой уравнение теплопроводности, то задача (2.2)–(2.4) не является фредгольмовой в пространствах $W_{2,\delta_k}^{2,1}$ с показателями $\delta_k = 2\nu_k + N/2 - 1$, где ν_k определены в (2.36). Идея доказательства этого факта идентична по существу

идее доказательства отсутствия фредгольмовости соответствующей эллиптической задачи в [8]. Пусть U_k – функция из (2.42), удовлетворяющая однородной задаче (2.2)–(2.4). Можно проверить непосредственно, что $U_k \in W_{2,\gamma}^{2,1}(\Omega_T)$ при $\gamma > \delta_k$, но U_k не принадлежит пространству $W_{2,\delta_k}^{2,1}(\Omega_T)$. Пусть $\eta(s)$ – гладкая функция такая, что $\eta \equiv 0$ при $0 \leq s \leq 1$ и $\eta \equiv 1$ при $2 \leq s$, и пусть для $n = 0, 1, \dots$ $r_n > 0$, $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность функций $v_n = \eta(|x|/r_n)U_k = \eta_n U_k$, удовлетворяющих нулевым начальным и граничным условиям в Ω , причем

$$\|v_n\|_{2,\delta_k}^{(2,1)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

В то же время функции v_n удовлетворяют задаче (2.2)–(2.4) с уравнением теплопроводности и правыми частями уравнения

$$f_n = \sum_{i=1}^N 2\eta_{nx_i} U_{kx_i} + U_k \Delta \eta_n,$$

и нетрудно проверить, что в силу определения η_n и U_k

$$\|f_n\|_{2,\delta_k+2} \leq C \quad (4.15)$$

равномерно по n . Предположим, что ядро оператора L задачи (2.2)–(2.4) с нулевыми начальными и граничными данными в пространстве $W_{2,\delta_k}^{2,1}(\Omega_T)$ конечномерно. Тогда $W_{2,\delta_k}^{2,1}(\Omega_T) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_0$ – ядро оператора L . Таким образом, справедливо однозначное представление $v_n = u_n + \sum_{i=1}^l C_n^{(i)} K_i$, где l – размерность ядра $\mathcal{H}_0$, $\{K_i\}$ – базис в ядре, а $C_n = (C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \dots, C_n^{(l)})$ – вектор некоторых постоянных. Утверждается, что $\|u_n\|_{2,\delta_k,\Omega_T}^{(2,1)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, предположив противное, мы в силу (4.14) должны иметь $|C_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но на любом цилиндре $Q_\varepsilon = (\Omega \cap \{|x| \geq \varepsilon\}) \times (0, T)$ выполнено $\|v_n\|_{2,\delta_k,Q_\varepsilon}^{(2,1)} \leq C_\varepsilon$, а также $\|u_n\|_{2,\delta_k,Q_\varepsilon}^{(2,1)} \leq C$ по предположению. Тогда, обозначая $a_n = \{a_n^{(i)}\} = \{C_n^{(i)} / |C_n|\}$, получаем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^l a_n^{(i)} K_i \right\|_{2,\delta_k,Q_\varepsilon}^{(2,1)} \leq \frac{\|u_n\|_{2,\delta_k,Q_\varepsilon}^{(2,1)} + \|v_n\|_{2,\delta_k,Q_\varepsilon}^{(2,1)}}{|C_n|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $|a_n| = 1$, то, переходя к подпоследовательности, получаем вектор a_ε такой, что $\sum_{i=1}^l a_\varepsilon^{(i)} K_i \equiv 0$ в Q_ε . Устремляя ε к нулю и снова переходя к подпоследовательности, получаем вектор a такой, что $|a| = 1$ и $\sum_{i=1}^l a^{(i)} K_i \equiv 0$ в Ω_T , что противоречит линейной независимости функций K_i .

Таким образом, сделанное нами предположение о конечномерности ядра влечет $\|u_n\|_{2,\delta_k,\Omega_T}^{(2,1)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда в силу (4.15) образ оператора L задачи (2.2)–(2.4) не может быть замкнутым подпространством пространства $L_{2,\delta_k+2}(\Omega_T)$, так как это противоречило бы теореме Банаха об обратном операторе. Следовательно, в указанных пространствах оператор L не может быть фредгольмовым.

Список литературы

- [1] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **16** (1967), 227–313.
- [2] V. Maz’ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. I, Oper. Theory Adv. Appl., **111**, Basel, Birkhäuser, 2000.
- [3] V. Maz’ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. II, Oper. Theory Adv. Appl., **112**, Basel, Birkhäuser, 2000.
- [4] V. G. Maz’ya, R. Mahnke, “Asymptotics of the solution of a boundary integral equation under a small perturbation of a corner”, *Z. Anal. Anwendungen*, **11**:2 (1992), 173–182.
- [5] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **81**:1 (1978), 25–82.
- [6] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки функций Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:5 (1978), 1064–1082; англ. пер.: V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskii, “Estimates of Green’s functions and Schauder estimates for solutions of elliptic boundary problems in a dihedral angle”, *Siberian Math. J.*, **19**:5 (1978), 752–764.
- [7] В. Зайончковский, В. А. Солонников, “О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами на границе”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, т. 15, Записки науч. сем. ЛОМИ, **127**, Наука, Л., 1983, 7–48; англ. пер.: V. Zaionchkovskii, V. A. Solonnikov, “Neumann problem for second-order elliptic equations in domains with edges on the boundary”, *J. Soviet Math.*, **27**:2 (1984), 2561–2586.
- [8] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [9] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [10] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, J. Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, Math. Surveys Monogr., **85**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [11] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, “Исследование задачи для уравнения Лапласа с краевым условием специального вида в плоском угле”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, т. 21, Записки науч. сем. ЛОМИ, **182**, Наука, Л., 1990, 149–167; англ. пер.: V. A. Solonnikov, E. V. Frolova, “Investigation of a problem for the Laplace equation with a boundary condition of a special form in a plane angle”, *J. Soviet Math.*, **62**:3 (1991), 2819–2831.
- [12] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monogr. Stud. Math., **24**, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [13] M. Bochniak, M. Borsuk, “Dirichlet problem for linear elliptic equations degenerating at a conical boundary point”, *Analysis (Munich)*, **23**:3 (2003), 225–248.
- [14] M. Borsuk, V. Kondratiev, *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*, North-Holland Math. Library, **69**, Elsevier, Amsterdam, 2006.

- [15] М. В. Борсук, “Вырождающиеся эллиптические краевые задачи второго порядка в негладких областях”, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **13**, РУДН, М., 2005, 3–137; англ. пер.: M. Borsuk, “Degenerate elliptic boundary-value problems of second order in nonsmooth domains”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:5 (2007), 6071–6212.
- [16] В. А. Солонников, “О разрешимости классических начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в двугранном угле”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, т. 16, Записки науч. сем. ЛОМИ, **138**, Наука, Л., 1984, 146–180; англ. пер.: V. A. Solonnikov, “Solvability of the classical initial-boundary-value problems for the heat-conduction equation in a dihedral angle”, *J. Soviet Math.*, **32**:5 (1986), 526–546.
- [17] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, “Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с коническими точками. I”, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 2, 38–46; англ. пер.: V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, “Characteristics of solutions of first boundary value problem for thermal conductivity equation in domains with conic points. I”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **31**:2 (1987), 61–74.
- [18] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, “Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с коническими точками. II”, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 3, 37–44; англ. пер.: V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, “Characteristics of solutions of first boundary value problem for thermal conductivity equation in domains with conic points. II”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **31**:3 (1987), 49–57.
- [19] В. А. Козлов, “О коэффициентах в асимптотике решений начально-краевых параболических задач в областях с конической точкой”, *Сиб. матем. журн.*, **29**:2 (1988), 75–89; англ. пер.: V. A. Kozlov, “Coefficients in the asymptotic solutions of the Cauchy boundary-value parabolic problems in domains with a conical point”, *Siberian Math. J.*, **29**:2 (1988), 222–233.
- [20] В. А. Козлов, “Асимптотика при $t \rightarrow 0$ решений уравнения теплопроводности в области с конической точкой”, *Матем. сб.*, **136**(178):3(7) (1988), 384–395; англ. пер.: V. A. Kozlov, “Asymptotics as $t \rightarrow 0$ of solutions of the heat equation in a domain with a conical point”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 383–395.
- [21] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, “О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее приложении к параболическим задачам”, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 213–241; англ. пер.: V. A. Solonnikov, E. V. Frolova, “On a problem with the third boundary condition for the Laplace equation in a plane angle, and its applications to parabolic problems”, *Leningrad Math. J.*, **2**:4 (1991), 891–916.
- [22] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, “On the oblique derivative problem in an infinite angle”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **7**:2 (1996), 299–325.
- [23] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, “О нестационарной задаче в двугранном угле. II”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, т. 22, Записки науч. сем. ЛОМИ, **188**, Наука, Л., 1991, 178–185; англ. пер.: V. A. Solonnikov, E. V. Frolova, “On a certain nonstationary problem in a dihedral angle. II”, *J. Math. Sci.*, **70**:3 (1994), 1841–1846.
- [24] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, “Existence and regularity results for oblique derivative problems for heat equations in an angle”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **128**:1 (1998), 47–79.
- [25] V. A. Solonnikov, “ L_p -estimates for solutions of the heat equation in a dihedral angle”, *Rend. Mat. Appl. (7)*, **21**:1–4 (2001), 1–15.
- [26] А. И. Назаров, “ L_p -оценки решения задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в клине с ребром произвольной коразмерности”, *Проблемы матем. анализа*, **22** (2001), 126–159; англ. пер.: A. I. Nazarov, “ L_p -estimates for a solution to the Dirichlet problem and to the Neumann problem for the heat equation

- in a wedge with edge of arbitrary codimension”, *J. Math. Sci. (New York)*, **106**:3 (2001), 2989–3014.
- [27] А. И. Назаров, “Задача Дирихле для квазилинейных параболических уравнений в областях с гладкими замкнутыми ребрами”, *Тр. С.-Петерб. МО*, **9** (2001), 120–147; англ. пер.: A. I. Nazarov, “Dirichlet problem for quasilinear parabolic equations in domains with smooth closed edges”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **209**:3 (2003), 115–141.
- [28] A. Azzam, E. Kreyszig, “On solutions of parabolic equations in regions with edges”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **22**:2 (1980), 219–230.
- [29] A. Azzam, E. Kreyszig, “On parabolic equations in n space variables and their solutions in regions with edges”, *Hokkaido Math. J.*, **9**:2 (1980), 140–154.
- [30] A. Azzam, E. Kreyszig, “Smoothness of solutions of parabolic equations in regions with edges”, *Nagoya Math. J.*, **84** (1981), 159–168.
- [31] A. Azzam, “On mixed boundary value problems for parabolic equations in singular domains”, *Osaka J. Math.*, **22**:4 (1985), 691–696.
- [32] A. Azzam, “On the behavior of solutions of elliptic and parabolic equations at a crack”, *Hokkaido Math. J.*, **19**:2 (1990), 339–344.
- [33] В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров, “О решениях уравнения теплопроводности в областях с особенностями”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 163–179; англ. пер.: V. N. Aref'ev, L. A. Bagirov, “Solutions of the heat equation in domains with singularities”, *Math. Notes*, **64**:2 (1998), 139–153.
- [34] D. Guidetti, “The mixed Cauchy–Dirichlet problem for the heat equation in a plane angle in spaces of Hölder-continuous functions”, *Adv. Differential Equations*, **6**:8 (2001), 897–930.
- [35] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, “Об одной граничной задаче для сильно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в угловой области”, *Укр. матем. журн.*, **59**:7 (2007), 867–883; англ. пер.: B. V. Bazalii, S. P. Degtyarev, “On one boundary-value problem for a strongly degenerate second-order elliptic equation in an angular domain”, *Ukrainian Math. J.*, **59**:7 (2007), 955–975.
- [36] A. Venni, “Maximal regularity for a singular parabolic problem”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **52**:1 (1994), 87–101.
- [37] Чан Зуй Хо, Г. И. Эскин, “Краевые задачи для параболических систем псевдодифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **198**:1 (1971), 50–53; англ. пер.: Can Zui Ho, G. I. Eskin, “Boundary value problems for parabolic systems of pseudodifferential equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 739–743.
- [38] S. Shmarev, *Differentiability and analyticity of solutions and interfaces in multidimensional reaction-diffusion equation*, Universidad de Oviedo, Departamento de Matemáticas, 2001.
- [39] S. I. Shmarev, “Interfaces in multidimensional diffusion equations with absorption terms”, *Nonlinear Anal.*, **53**:6 (2003), 791–828.
- [40] І. Д. Пукальський, “Задача Коші для нерівномірно параболических рівнянь з виродженням”, *Укр. матем. журн.*, **55**:11 (2003), 1520–1529; англ. пер.: I. D. Pukal's'kyi, “Cauchy problem for nonuniformly parabolic equations with degeneracy”, *Ukrainian Math. J.*, **55**:11 (2003), 1828–1840.
- [41] С. П. Дегтярев, “О разрешимости первой начально-краевой задачи для вырождающихся параболических уравнений в областях с нерегулярной границей”, *Укр. матем. вест.*, **5**:1 (2008), 59–82.
- [42] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

- [43] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [44] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
- [45] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1963; англ. пер. 4-го изд.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York–London–Toronto, ON, 1980.
- [46] P. Daskalopoulos, R. Hamilton, “Regularity of the free boundary for the porous medium equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **11**:4 (1998), 899–965.
- [47] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, “Регулярность решения многомерной задачи со свободной границей для уравнения пористой среды”, *Матем. тр.*, **5**:2 (2002), 38–91; англ. пер.: B. V. Bazaliy, N. V. Krasnoshchok, “Regularity of a solution to the multi-dimensional free boundary problem for the porous medium equation”, *Siberian Adv. Math.*, **13**:3 (2003), 1–53.
- [48] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. 1969, ВИНТИ, М., 1971.
- [49] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.

С. П. Дегтярев (S. P. Degtyarev)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: spdegt@yahoo.com

Поступила в редакцию

08.04.2009 и 25.11.2009