Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Авербух, Равновесие по Нэшу в дифференциальных играх и конструкции метода программных итераций, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 5, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:30:35

УДК 517.978.2

Ю. В. Авербух

Равновесие по Нэшу в дифференциальных играх и конструкции метода программных итераций

Работа посвящена исследованию неантагонистических дифференциальных игр. Изучается множество выигрышей в ситуации равновесия по Нэшу. Показано, что множество выигрышей в ситуации равновесия по Нэшу совпадает с множеством значений согласованных функций, являющихся неподвижными точками оператора программного поглощения. Приведено условие согласованности функций в терминах слабой инвариантности графика функций относительно некоторого дифференциального включения.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: дифференциальные игры, равновесие по Нэшу, метод программных итераций.

§ 1. Введение

Дифференциальные игры двух лиц подразделяются на антагонистические (игры с нулевой суммой) и неантагонистические (с ненулевой суммой). Построение строгой математической теории антагонистических дифференциальных игр стало возможно благодаря позиционной формализации, предложенной Н. Н. Красовским (см. [1], [2]). На основе этой формализации Н. Н. Красовский и А. И. Субботин установили фундаментальную теорему об альтернативе (см. [1]). Построение решения конкретных антагонистических дифференциальных игр может быть проведено при помощи метода программных итераций, предложенного А. Г. Ченцовым (см. [3]–[5]). В основе этого метода лежит понятие оператора программного поглощения.

При исследовании неантагонистических дифференциальных игр двух лиц большую роль играет понятие равновесия. Известно несколько различных понятий равновесия (см. [6]). Настоящая работа посвящена исследованию равновесия по Нэшу (см. [7], [8]) в неантагонистической игре двух лиц. Мы рассматриваем игру в позиционной формализации, предложенной Н. Н. Красовским. Исследованию неантагонистических позиционных дифференциальных игр посвящен целый ряд работ (в частности, работы [6], [9]–[13]). А. Ф. Клейменовым построен вариант позиционной формализации Н. Н. Красовского для неантагонистических дифференциальных игр (см. [6]). Известно, что множество равновесий по Нэшу непусто (см. [6], [10]). Также множество выигрышей в ситуации равновесия по Нэшу может быть охарактеризовано при помощи цен вспомогательных дифференциальных игр и программных движений (см. [6], [13]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00436-а), Программы Президента РФ поддержки молодых ученых (грант № МК-7320.2010.1) и Программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Достаточные условия равновесия по Нэшу даются в терминах решения вспомогательной системы уравнений в частных производных (см. [9]).

Настоящая работа посвящена характеристике выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу в терминах метода программных итераций. Показано, что множество всех выигрышей совпадает с множеством значений согласованных функций, являющихся неподвижными точками оператора программного поглощения. Выписано условие согласованности в терминах слабой инвариантности графика пары функций относительно некоторого дифференциального включения. Установлено, что пара функций, являющаяся решением вспомогательной системы уравнений первого порядка, удовлетворяет найденным условиям. Также рассмотрен пример вычисления множества выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу.

§ 2. Формулировка основного результата

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (2.1)$$

Считаем, что u – управление первого игрока, v – управление второго игрока. Предполагается, что игроки имеют целью максимизировать значения терминальных функционалов платы, а именно, первый игрок стремится максимизировать значение $I_1(x(\cdot)) = \sigma_1(x(\vartheta_0))$, второй игрок стремится максимизировать значение функционала $I_2(x(\cdot)) = \sigma_2(x(\vartheta_0))$.

Накладываются стандартные предположения на динамику системы. Предполагается, что P и Q – компакты в некоторых конечномерных евклидовых пространствах, а функция f непрерывна, липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет по ней условию подлинейного роста. Функционалы платы σ_1 и σ_2 считаются непрерывными.

Ниже будет широко использоваться следующее определение. Пусть $\{x_l(\cdot)\}_{l=1}^\infty$ – последовательность непрерывных функций времени со значениями в $\mathbb{R}^n$, причем каждая функция $x_l(\cdot)$ определена на промежутке $[t_l, \vartheta_0]$. Будем говорить, что последовательность $\{x_l(\cdot)\}_{l=1}^\infty$ *сходится в смысле траекторий* к функции $x(\cdot) \in C[t_*, \vartheta_0]$, если

$$\sup_{t \geq \max\{t_l, t_*\}} \|x_l(t) - x(t)\| \rightarrow 0, \quad t_l \rightarrow t_* \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Это определение будет применяться к сходимости траекторий управляемых систем в случае, когда множество траекторий равномерно ограничено и равномерно непрерывно.

Неантагонистические дифференциальные игры рассматриваются в позиционной формализации (см. [6]). Определение позиционных стратегий восходит к варианту позиционной формализации Н. Н. Красовского для антагонистических игр (см. [2]). *Стратегией первого игрока* называется пара $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, где $u(t, x, \varepsilon)$ – произвольная функция позиции и параметра точности ε со значениями в P , а $\beta_1(\varepsilon)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогично, *стратегией второго игрока* называется пара $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$, где $v(t, x, \varepsilon)$ – произвольная функция со значениями в Q , а функция $\beta_2(\varepsilon)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Используются как пошаговые движения, так и их пределы – конструктивные движения. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция. Предполагается, что выбраны и зафиксированы число $\varepsilon_1 > 0$ и разбиение $\Delta_1 = \{t_i\}_{i=1}^m$ отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ мелкости, меньшей $\beta_1(\varepsilon_1)$. Управление первого игрока при пошаговом движении предполагается постоянным на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ и равным $u(t_i, x[t_i], \varepsilon_1)$. Аналогично, управление второго игрока определяется тройкой: стратегия второго игрока, параметр ε_2 и разбиение отрезка управления Δ_2 мелкости, не большей $\beta_2(\varepsilon_2)$. Также управление второго игрока постоянно между элементами разбиения Δ_2 . В результате получается движение $x[t, t_*, x_*; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V, \varepsilon_2, \Delta_2]$.

Пару законов управления игроков называют *согласованной*, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; соответствующие движения будем называть *согласованными*. Множество всех пошаговых согласованных движений, порожденных стратегиями U и V при фиксированном параметре точности ε , обозначим через $X^c(t_*, x_*; U, V, \varepsilon)$. Множество $X^c(t_*, x_*; U, V, \varepsilon)$ состоит из всех движений $x[t, t_*, x_*; U, \varepsilon, \Delta_1; V, \varepsilon, \Delta_2]$, у которых разбиения Δ_1 и Δ_2 имеют мелкость, не большую ε .

Определим порожденные парой стратегий (U, V) конструктивные движения, выходящие из позиции (t_*, x_*) . *Конструктивным движением* называется любое движение $x[\cdot]$, для которого существует последовательность пошаговых движений $\{x[\cdot, t^k, x^k; U, \varepsilon_1^k, \Delta_1^k; V, \varepsilon_k^k, \Delta_2^k]\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к $x[\cdot]$ в смысле траекторий при условии $(t^k, x^k) \rightarrow (t_*, x_*)$ при $k \rightarrow \infty$. Обозначим порожденный стратегиями U и V пучок конструктивных движений, выходящих из позиции (t_*, x_*) , через $X(t_*, x_*, U, V)$. Рассматриваемое определение конструктивных движений предложено в [6]; в теории антагонистических игр при определении конструктивных движений рассматриваются равномерные пределы пошаговых движений с одним и тем же начальным моментом (см. [1]).

Следуя [6], выделим множество предельных движений при использовании лишь согласованных пошаговых движений; обозначим его $X^c(t_*, x_*, U, V)$.

В настоящей работе используется следующее определение равновесного по Нэшу решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция. Пара стратегий первого и второго игроков U^N и V^N образует *равновесное по Нэшу решение игры* в позиции (t_*, x_*) , если для любых стратегий U и V выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \max\{\sigma_1(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, V^N)\} \\ & \leq \min\{\sigma_1(x^c[\vartheta_0]) : x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N)\}, \\ & \max\{\sigma_2(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U^N, V)\} \\ & \leq \min\{\sigma_2(x^c[\vartheta_0]) : x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N)\}. \end{aligned}$$

Как видно из определения, переход к несогласованным движениям не должен давать одному из игроков выигрыш. Рассматриваемое условие равновесия по Нэшу является более слабым по сравнению с определениями из [6], [10]. В упомянутых работах пара стратегий образует равновесие по Нэшу, если отклонение одного из игроков в любой момент от выбранной стратегии не дает ему увеличения выигрыша. Также в целом ряде работ (например, в [11]–[13]) равновесие по Нэшу для неантагонистических дифференциальных игр рассматривается в классе кусочно программных стратегий. В этом случае вводится понятие ε -равновесия.

Пару стратегий, образующих равновесное по Нэшу решение в смысле данного определения, будем называть N -*решением*. Если стратегии U^N и V^N образуют N -решение, то пара $(\sigma_1(x^c[\cdot]), \sigma_2(x^c[\cdot]))$ не зависит от выбора движения $x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N)$. Пару выигрышей игроков $(\sigma_1(x^c[\cdot]), \sigma_2(x^c[\cdot]))$ при $x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N)$ будем называть N -*выигрышем*. Можно рассмотреть многозначное отображение, которое каждой позиции (t_*, x_*) ставит в соответствие множество всех N -выигрышей. Обозначим это множество через $\mathcal{N}(t_*, x_*)$.

В [6], [10] доказано, что множество N -решений непусто при выполнении условия седловой точки в маленькой игре, т.е. в случае, когда для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $x, s \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Доказательство этого утверждения основано на рассмотрении вспомогательных антагонистических игр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда условие седловой точки в маленькой игре не выполнено, можно рассматривать понятие равновесия по Нэшу как в классе смешанных стратегий, так и в классе пар контрстратегия–стратегия (см. [6]).

Мы будем рассматривать равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий. Переход к смешанным стратегиям гарантирует не только выполнение условия седловой точки в маленькой игре, но и выпуклость векторгамм при фиксированной позиции и управлении одного из игроков. Вместо исходной системы (2.1) рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int_P \int_Q f(t, x, u, v) \nu(dv) \mu(du), \\ t &\in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \text{rpm}(P), \quad \nu \in \text{rpm}(Q), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где μ – обобщенное управление первого игрока, ν – обобщенное управление второго игрока, $\text{rpm}(P)$, $\text{rpm}(Q)$ – множества регулярных вероятностных мер на P и Q соответственно (множества P и Q оснащаются борелевскими σ -алгебрами). В этом случае множества $\text{rpm}(P)$ и $\text{rpm}(Q)$, ограничивающие управления, наделяются $*$ -слабой топологией, в которой они, как известно, компактны. Для системы (2.2) выполнено условие седловой точки в маленькой игре, более того, выпуклы вектограммы при фиксированной позиции и управлении одного из игроков. Также правая часть системы (2.2) непрерывна, удовлетворяет условиям подлинейного роста по x и локальной липшицевости по фазовой переменной.

Если исходная система удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, то множества N -выигрышей в исходной и в релаксированной системе (2.2) совпадают. Это свойство следует из того, что множество равновесий по Нэшу определяется ценами вспомогательных антагонистических игр (см. [6], [13]), которые в этом случае не изменяются при переходе к смешанным стратегиям (см. [1]). Также множества $\text{rpm}(P)$ и $\text{rpm}(Q)$ могут быть “заменены” $(n+1)$ -мерными симплексами (см. [14; § III.2]).

Поэтому, при необходимости заменяя систему (2.1) на систему (2.2), мы можем считать, что:

- выполнено условие седловой точки в маленькой игре;

- для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$ множество $\{f(t, x, u, v) : u \in P\}$ выпукло;
- для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ множество $\{f(t, x, u, v) : v \in Q\}$ выпукло.

Рассмотрим две вспомогательные антагонистические игры Γ_1 и Γ_2 . В игре Γ_1 первый игрок стремится максимизировать значение $\sigma_1(x[\vartheta_0])$, а второй игрок ему противодействует. В игре Γ_2 второй игрок стремится максимизировать значение $\sigma_2(x[\vartheta_0])$, а первый игрок ему противодействует. Для каждой из игр рассмотрим операторы программного поглощения, определенные на множестве непрерывных функций $C([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$. Для i -й игры оператор программного поглощения обозначим через A_i . Операторы программного поглощения были предложены в работах А. Г. Ченцова. Используемые операторы программного поглощения аналогичны построенным в работах [4], [5].

Обозначим множество всех измеримых функций из $[t_0, \vartheta_0]$ в P через $\mathcal{U}$, множество всех измеримых функций из $[t_0, \vartheta_0]$ в Q – через $\mathcal{V}$. Решение уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u(t), v(t)),$$

проходящее через позицию (t_*, x_*) , обозначим через $x(\cdot, t_*, x_*, u, v)$. Для сокращения записи будем ассоциировать каждый элемент $u \in P$ с постоянной функцией $\tilde{u}(t) = u$ для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$. Аналогично, каждый элемент $v \in Q$ можно рассматривать как постоянное управление.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу выпуклости вектограмм $\{f(t, x, u_*, v) : v \in Q\}$ и $\{f(t, x, u, v_*) : u \in P\}$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $u_* \in P$, $v_* \in Q$ компактны множества $\{x(\tau, t, x, u_*, v) : v \in \mathcal{V}\}$ и $\{x(\tau, t, x, u, v_*) : u \in \mathcal{U}\}$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\tau \in [t, \vartheta_0]$, $u_* \in P$, $v_* \in Q$ (см. [15]).

Если $c(t, x) \in C([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned} A_1[c](t, x) &\triangleq \max_{u \in P} \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \min_{v \in \mathcal{V}} c(\tau, x(\tau, t, x, u, v)), \\ A_2[c](t, x) &\triangleq \max_{v \in Q} \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \min_{u \in \mathcal{U}} c(\tau, x(\tau, t, x, u, v)). \end{aligned}$$

В силу замечания 2 определения операторов A_1 и A_2 корректны.

Для всех $c \in C([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ верны неравенства

$$A_i[c](t, x) \geq c(t, x). \quad (2.3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} A_1[c](t, x) &= \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} c(\tau, x(\tau, t, x, u, v)) \\ &\geq \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} c(t, x(t, t, x, u, v)) = c(t, x). \end{aligned}$$

Неравенство (2.3) при $i = 2$ устанавливается аналогично.

ТЕОРЕМА 1. Множество N -выигрышей в позиции (t_*, x_*) совпадает с множеством $\{(c_1(\cdot, \cdot), c_2(\cdot, \cdot))\}$, где пары непрерывных функций позиции $(c_1(\cdot, \cdot), c_2(\cdot, \cdot))$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(C1) \quad c_1(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_1(\cdot), \quad c_2(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_2(\cdot);$$

(C2) $A_1[c_1] = c_1$, $A_2[c_2] = c_2$;

(C3) *существует решение дифференциального включения*

$$\dot{y} \in \mathcal{F}(t, y) \triangleq \text{co}\{f(t, y, u, v) : u \in P, v \in Q\}, \quad y(t_*) = x_*, \quad (2.4)$$

такое, что $c_i(t, y(t)) = c_i(t_*, x_*)$ для $t \in [t_*, \vartheta_0]$.

Доказательство этой теоремы дается в § 5. Предварительно в § 4 для каждого N -выигрыша будет построена пара вспомогательных последовательностей функций и установлены свойства, показывающие, что пределы последовательностей непрерывны, удовлетворяют условиям (C1)–(C3) и вдоль каждой траектории, порожденной равновесными стратегиями, пара значений предельных функций равна N -выигрышу.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пара функций, удовлетворяющая в точке (t_*, x_*) условиям (C1)–(C3), конструктивно определяет некоторое N -решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (C2) эквивалентно тому, что функция c_1 является верхним минимаксным решением уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + H_1(t, x, \nabla c) = 0,$$

а функция c_2 является верхним минимаксным решением уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + H_2(t, x, \nabla c) = 0.$$

Здесь функция H_1 определена формулой

$$H_1(t, x, s) \triangleq \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle,$$

а функция H_2 определена формулой

$$H_2(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Эквивалентные друг другу формулировки определения верхнего минимаксного решения даны в [16].

Сформулируем необходимое и достаточное условие выполнения условия (C3) в позиции (t_*, x_*) .

ТЕОРЕМА 2. *Условие (C3) выполняется в позиции (t_*, x_*) тогда и только тогда, когда существует замкнутое множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, содержащее (t_*, x_*) , такое, что график сужения функции (c_1, c_2) на множество E*

$$\text{gr}(c_1, c_2; E) \triangleq \{(t, x, c_1(t, x), c_2(t, x)) : (t, x) \in E\}$$

слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^*(t, x) \triangleq \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} f(t, x, u, v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : u \in P, v \in Q \right\}. \quad (2.5)$$

Справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ. Условие (C3) выполняется в позиции (t_*, x_*) тогда и только тогда, когда существует замкнутое множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, содержащее (t_*, x_*) , такое, что для всех $(t, x, z_1, z_2) \in \text{gr}(c_1, c_2)$

$$[\text{co}D_t(\text{gr}(c_1, c_2; E))(t, x, z_1, z_2)] \cap \mathcal{F}^*(t, x) \neq \emptyset.$$

Здесь $D_t(\text{gr}(c_1, c_2; E))(t, x, z_1, z_2)$ – правосторонняя производная множества $\text{gr}(c_1, c_2; E)$ для (t, x, z_1, z_2) (см. [17]):

$$D_t(\text{gr}(c_1, c_2; E))(t, x, z_1, z_2) = \left\{ (g, \zeta_1, \zeta_2) : \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{d((x + \delta g, z_1 + \delta \zeta_1, z_2 + \delta \zeta_2), \text{gr}(c_1, c_2; E; t))}{\delta} = 0 \right\},$$

символ d обозначает евклидово расстояние в $\mathbb{R}^{n+2}$, а $\text{gr}(c_1, c_2; E; t)$ есть сечение множества $\text{gr}(c_1, c_2; E)$:

$$\text{gr}(c_1, c_2; E; t) \triangleq \{(x, z_1, z_2) : (t, x, z_1, z_2) \in \text{gr}(c_1, c_2; E)\}.$$

Доказательство теоремы 2 и схема доказательства следствия будут даны в § 5.

Полученный результат можно сравнить с классическим методом нахождения равновесия по Нэшу, основанным на решении системы уравнений типа Гамильтона–Якоби. Известны (см. [9]) следующие условия, при которых пара функций доставляет некоторый выигрыш в ситуации равновесия по Нэшу. Пусть функции $\gamma_1, \gamma_2: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы, функции $\hat{u}: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$, $\hat{v}: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow Q$ непрерывны, причем выполнены следующие условия:

$$\gamma_i(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot), \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \gamma_i(t, x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma_i(t, x)}{\partial x}, f(t, x, \hat{u}(t, x), \hat{v}(t, x)) \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x)}{\partial x}, f(t, x, \hat{u}(t, x), \hat{v}(t, x)) \right\rangle = \max_{u \in P} \left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u, \hat{v}(t, x)) \right\rangle, \quad (2.8)$$

$$\left\langle \frac{\partial \gamma_2(t, x)}{\partial x}, f(t, x, \hat{u}(t, x), \hat{v}(t, x)) \right\rangle = \max_{v \in P} \left\langle \frac{\partial \gamma_2(t, x)}{\partial x}, f(t, x, \hat{u}(t, x), v) \right\rangle. \quad (2.9)$$

Тогда (см. [9]) для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$(\gamma_1(t, x), \gamma_2(t, x)) \in \mathcal{N}(t, x).$$

Следующее утверждение показывает, что предложенный в настоящей работе способ исследования множества N -выигрышей (см. теорему 1) обобщает метод вспомогательной системы уравнений первого порядка, кратко изложенный выше.

ТЕОРЕМА 3. Пусть непрерывно дифференцируемые функции γ_i , $i = 1, 2$, и непрерывные функции $\hat{u}$, $\hat{v}$ удовлетворяют условиям (2.6)–(2.9). Тогда пара функций (γ_1, γ_2) удовлетворяет условиям (C1)–(C3), причем последнее условие верно для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Доказательство этой теоремы также будет дано в § 5.

§ 3. Пример

Рассмотрим один пример, иллюстрирующий применение теоремы 1. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (3.1)$$

при $t \in [0, 1]$, $u, v \in [-1, 1]$. Функционалы выигрыша определим следующими формулами: $\sigma_1(x, y) \triangleq -|x - y|$, $\sigma_2(x, y) \triangleq y$. Напомним, что игроки стремятся максимизировать значения своего выигрыша.

Для того чтобы найти многозначную функцию $\mathcal{N}: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, найдем значения вспомогательных отображений $\mathcal{S}_i: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i(t, x_*, y_*) \\ \triangleq \{c_i(t, x_*, y_*): A_i[c_i] = c_i, c_i(1, \cdot, \cdot) = \sigma_i(\cdot, \cdot), c_i(t, x_*, y_*) \leq c_i^+(t, x_*, y_*)\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$c_i^+(t, x, y) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}} \sigma_i\left(x + \int_t^{\vartheta_0} u(\xi) d\xi, y + \int_t^{\vartheta_0} v(\xi) d\xi\right).$$

Множество $\mathcal{S}_i(t, x_*, y_*)$ – множество, ограничивающее значения выигрышей при N -решении. Ясно, что

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) \subset \mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) \times \mathcal{S}_2(t, x_*, y_*). \quad (3.2)$$

Начнем с вычисления $\mathcal{S}_2$. Заметим, что если $A_2[c_2] = c_2$ и $c_2(1, \cdot, \cdot) = \sigma_2(\cdot, \cdot)$, то c_2 является u -стабильной функцией в игре Γ_2 (в ней первый игрок стремится минимизировать значение $\sigma_2(x, y)$, второй игрок стремится максимизировать это значение). Известно (см. [16]), что значение всякой u -стабильной функции не меньше значения функции цены. Функция цены в этой игре легко вычисляется и равна

$$c^\diamond(t, x_*, y_*) = y_* + (1 - t).$$

Также $c_2^+(t, x_*, y_*) = y_* + (1 - t)$. Следовательно, только функция $c_2(t, x_*, y_*) = y_* + (1 - t)$ удовлетворяет условиям $A_2[c_2] = c_2$, $c_2(1, \cdot, \cdot) = \sigma_2(\cdot, \cdot)$. Отсюда получаем

$$\mathcal{S}_2(t, x_*, y_*) = \{y_* + (1 - t)\}. \quad (3.3)$$

Перейдем к вычислению $\mathcal{S}_1$. Как и в предыдущем случае, имеем, что если $A_1[c_1] = c_1$ и $c_1(1, \cdot, \cdot) = \sigma_1(\cdot, \cdot)$, то $c_1^\diamond(t, x_*, y_*) \leq c_1(t, x_*, y_*) \leq c_1^+(t, x, y)$; здесь $c_1^\diamond(t, x_*, y_*)$ – цена антагонистической дифференциальной игры Γ_1 , в которой первый игрок стремится максимизировать значение σ_1 в последний момент. Благодаря методу программных итераций получаем, что

$$c_1^\diamond(t, x_*, y_*) = -|x_* - y_*|.$$

Имеет место равенство

$$c_1^+(t, x_*, y_*) = \min\{-|x_* - y_*| + 2(1 - t), 0\}.$$

Покажем, что

$$\mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) = [c_1^\diamond(t, x_*, y_*), c_1^+(t, x_*, y_*)]. \quad (3.4)$$

Для $\beta \in [0, c_1^+(1, x_*, y_*) - c_1^\diamond(1, x_*, y_*)]$ определим функцию c_1^β по формуле

$$c_1^\beta(t, x_*, y_*) = -|x_* - y_*| + \beta(1 - t).$$

Функция c_1^β удовлетворяет условиям $A_1[c_1^\beta] = c_1^\beta$, $c_1^\beta(1, \cdot, \cdot) = \sigma_1(\cdot, \cdot)$. Также $c_1^\beta(t, x_*, y_*) \in \mathcal{S}_1(t, x_*, y_*)$ при $\beta \in [0, c_1^+(1, x_*, y_*) - c_1^\diamond(1, x_*, y_*)]$. Таким образом, равенство (3.4) доказано. Обозначим $c_2(t, x_*, y_*) \triangleq y_* + (1 - t)$. Ранее было показано, что $\mathcal{S}_2(t, x_*, y_*) = \{c_2(t, x_*, y_*)\}$.

Теперь перейдем к вычислению $\mathcal{N}(t, x_*, y_*)$. Для этого воспользуемся условиями теоремы 1. Покажем, что для $x_* \leq y_*$

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) = \{(c_1^0(t, x_*, y_*), c_2(t, x_*, y_*))\} = \{(-|x_* - y_*|, y_* + (1 - t))\}, \quad (3.5)$$

а для $x_* > y_*$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t, x_*, y_*) &= \{(c_1^\beta(t, x_*, y_*), c_2(t, x_*, y_*)) : \beta \in [0, c_1^+(1, x_*, y_*) - c_1^\diamond(1, x_*, y_*)]\} \\ &= [-|x_* - y_*|, \min\{-|x_* - y_*| + 2(1 - t), 0\}] \times \{y_* + (1 - t)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу линейности правой части системы (3.1) и выпуклости ограничений любое решение включения (2.4) порождается парой управлений $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Как следует из формулы для оператора A_2 , значение функции c_2 не изменяется вдоль траектории, порожденной парой управлений (u, v) , только если $v = 1$.

Рассмотрим два случая.

1) $x_* \leq y_*$. В этом случае при любом управлении $u, v \equiv 1$ имеем

$$\sigma_1(x(1, t, x_*, y_*, u, v), y(1, t, x_*, y_*, u, v)) = -\left|x_* + \int_t^1 u(\xi) d\xi - y_* - (1 - t)\right|.$$

Поскольку $|u(\xi)| \leq 1$ для всех $\xi \in [t, 1]$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \sigma_1(x(1, t, x_*, y_*, u, v), y(1, t, x_*, y_*, u, v)) \\ = -|x_* - y_*| - \left|\int_t^1 u(\xi) d\xi - (1 - t)\right| \leq -|x_* - y_*|. \end{aligned}$$

И равенство имеет место только при $u(\xi)$, равном 1 почти всюду на $[t, 1]$. Таким образом, с учетом формулы для $\mathcal{S}_1(t, x_*, y_*)$ и представления множества $\mathcal{N}(t, x_*, y_*)$ заключаем, что для $x_* \leq y_*$ верно представление (3.5).

2) $x_* > y_*$. В этом случае необходимо показать, что пара функций (c_1^β, c_2) удовлетворяет условию (СЗ) в (t, x_*, y_*) для $\beta \in [0, c_1^+(t, x_*, y_*) - c_1^\diamond(t, x_*, y_*)]$. Положим $u \equiv 1 - \beta$, $v \equiv 1$. Тогда для $\tau \geq t$

$$\begin{aligned} c_1^\beta(\tau, x(\tau, t, x_*, y_*, u, v), y(\tau, t, x_*, y_*, u, v)) \\ = -|x(\tau, t, x_*, y_*, u, v) - y(1, t, x_*, y_*, u, v)| + \beta(1 - \tau) \\ = -|x_* + (1 - \beta)(\tau - t) - y_* - (\tau - t)| + \beta(1 - \tau) \\ = -|x_* - y_* - \beta(\tau - t)| + \beta(1 - \tau). \end{aligned}$$

Получаем $\beta \in [0, \gamma]$, где γ – максимальный элемент отрезка $[0, 2]$ такой, что $-|x_* - y_*| + \gamma(1 - t) \leq 0$. Поскольку

$$x_* - y_* > 0, \quad \beta(\tau - t) \leq \beta(1 - t) \leq \gamma(1 - t) \leq x_* - y_*,$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} c_1^\beta(\tau, x(\tau, t, x_*, y_*, u, v), y(\tau, t, x_*, y_*, u, v)) &= -(x_* - y_* - \beta(\tau - t)) + \beta(1 - \tau) \\ &\leq -(x_* - y_*) + \beta(1 - t) = -|x_* - y_*| + \beta(1 - t) = c_1^\beta(t, x_*, y_*). \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$[c_1^\diamond(t, x_*, y_*), c_1^+(t, x_*, y_*)] \times \{y_* + (1 - t)\} \subset \mathcal{N}(t, x_*, y_*).$$

В силу вложения (3.2) и формул (3.3), (3.4) получаем, что для $x_* > y_*$ множество N -выигрышей определяется формулой (3.6).

Проведем сравнение полученного результата с тем, который можно получить на основе вспомогательной системы уравнений в частных производных (см. [9]). Для данной задачи система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \hat{u}(t, x, y) + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \hat{v}(t, x, y) = 0, \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \hat{u}(t, x, y) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \hat{v}(t, x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь величины $\hat{u}(t, x, y)$ и $\hat{v}(t, x, y)$ определяются из условий

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \hat{u}(t, x, y) = \max_{u \in P} \left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} u \right], \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \hat{v}(t, x, y) = \max_{u \in P} \left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} v \right].$$

Как указано в теореме 3, все решения описанной системы уравнений удовлетворяют свойствам (C1)–(C3). Как было показано выше, условиям (C1) и (C2) для второго игрока удовлетворяет единственная функция $\gamma_2(t, x, y) = c_2(t, x, y) = y + (1 - t)$. Отсюда получаем, что $\hat{v}(t, x, y) \equiv 1$. Следовательно, система (3.7) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \left| \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right| + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} = 0. \quad (3.8)$$

Получаем, что кусочно гладкая функция γ_1 , задаваемая формулой

$$\gamma_1(t, x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y, \\ -x + y + 2(1 - t), & x > y, \quad -x + y + 2(1 - t) < 0, \\ 0, & x > y, \quad -x + y + 2(1 - t) \geq 0, \end{cases}$$

является минимаксным решением уравнения (3.8). В самом деле, в областях гладкости уравнение (3.8) выполняется в классическом смысле. А на поверхностях разрыва производных $\{(t, x, y) : x = y\}$, $\{(t, x, y) : -x + y + 2(1 - t) = 0\}$ предельные частные производные удовлетворяют уравнению (3.8). В силу положительной однородности этого уравнения и структуры суб- и супердифференциалов получаем, что γ_1 удовлетворяет определениям (U4) и (L4) из [16],

т.е. является одновременно верхним и нижним минимаксным решением. В силу того, что минимаксное решение единственно, а любое классическое решение является минимаксным, классического решения системы уравнений (3.7) не существует. В то же время из выражения для $\mathcal{N}(t, x, y)$ получаем $(\gamma_1(t, x, y), \gamma_2(t, x, y)) \in \mathcal{N}(t, x, y)$.

Как видно, метод, основанный на системах уравнений типа Гамильтона–Якоби, в данном случае обеспечил лишь одно из бесконечного множества равновесий по Нэшу. В то же время найденное равновесие по Нэшу в некотором смысле максимально:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t, x, y) &= \max\{J_1 \in \mathbb{R} : \exists J_2 \in \mathbb{R} : (J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t, x, y)\}, \\ \{\gamma_2(t, x, y)\} &= \{J_2 \in \mathbb{R} : (J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t, x, y)\}.\end{aligned}$$

§ 4. Последовательности функций, построенные по методу программных итераций

Выберем и зафиксируем пару (J_1, J_2) – некоторый N -выигрыш в позиции (t_*, x_*) . Эта пара является выигрышем при N -решении (U^N, V^N) . Для доказательства необходимости в теореме 1 требуется доказать существование непрерывных функций $c_1, c_2 : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (C1)–(C3), таких, что $J_1 = c_1(t_*, x_*)$, $J_2 = c_2(t_*, x_*)$. В § 5 будет указан явный метод построения этой пары функций. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные построения. Положим

$$\begin{aligned}c_1^*(t, x) &\triangleq \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} \sigma_1(x(\vartheta_0, t, x, u, v)), \\ c_2^*(t, x) &\triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in \mathcal{U}} \sigma_2(x(\vartheta_0, t, x, u, v)).\end{aligned}$$

Функции c_1^* и c_2^* определены корректно (см. замечание 2).

Также введем функции программного максимума

$$c_i^+(t, x) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}} \sigma_i(x(\vartheta_0, t, x, u, v)).$$

Функции c_i^* и c_i^+ непрерывны. Имеем

$$c_i^*(t, x) \leq c_i^+(t, x), \quad i = 1, 2, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Определим последовательности функций $\{c_i^k\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2$, следующим образом. Положим

$$c_i^0(t, x) \triangleq \max\{c_i^*(t, x), \min\{J_i, c_i^+(t, x)\}\}. \quad (4.2)$$

Последующие элементы последовательности определим итерационно:

$$c_i^{k+1} \triangleq A_i[c_i^k].$$

Отметим некоторые свойства построенных последовательностей.

Как следует из (2.3), $c_i^{k+1}(t, x) \geq c_i^k(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Из непрерывности функций c_i^* , c_i^+ , определения (4.2) и свойств операторов A_i следует, что функции c_i^k непрерывны, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 1. Для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2$ справедливо равенство

$$c_i^k(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся проверкой леммы в случае $i = 1$. Случай $i = 2$ рассматривается аналогично. Из определения оператора A_1 следует, что $A_1[c](\vartheta_0, x) = c(\vartheta_0, x)$ для всех $c \in C([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому достаточно доказать, что $c_1^0(\vartheta_0, x) = \sigma_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Из (4.2) следует, что

$$c_1^0(\vartheta_0, x) = \max\{\sigma_1(x), \min\{J_1, \sigma_1(x)\}\}.$$

Возможны два случая: $J_1 < \sigma_1(x)$ и $J_1 \geq \sigma_1(x)$. В первом случае $c_1^0(\vartheta_0, x) = \max\{\sigma_1(x), J_1\} = \sigma_1(x)$, во втором случае $c_1^0(\vartheta_0, x) = \max\{\sigma_1(x), \sigma_1(x)\} = \sigma_1(x)$. Лемма доказана.

Рассмотрим множество позиций, которые лежат на согласованных конструктивных движениях, порожденных парой стратегий (U^N, V^N) :

$$D \triangleq \{(t, x^c[t]) : x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N), t \in [t_*, \vartheta_0]\}. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 2. Для всех $(t_\sharp, x_\sharp) \in D$ справедливо равенство

$$c_i^k(t_\sharp, x_\sharp) = J_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся проверкой леммы при $i = 1$. Прежде чем мы перейдем к доказательству, нам потребуется ряд дополнительных построений.

Пусть $t', t'' \in [t_0, \vartheta_0]$, $t'' \geq t'$, $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$. Рассмотрим стратегию $U = (u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon))$, $u(t, x, \varepsilon) \equiv u$. Пусть Δ – разбиение отрезка $[t', t'']$ мелкости, не большей некоторого $\varepsilon > 0$. При произвольных $\varepsilon_1 > 0$ и разбиении Δ_1 отрезка $[t', t'']$ рассмотрим движения $x[\cdot, t'y; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V^N, \varepsilon, \Delta]$. Заметим, что при реализации этого движения управление первого игрока тождественно равно u . Кусочно постоянную реализацию управления второго игрока обозначим через $v_{t', y, u, \Delta}$. По построению,

$$x[t, t', y; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V^N, \varepsilon, \Delta] = x(t, t', y, u, v_{t', y, u, \Delta}) \quad \forall t \in [t', t''].$$

Пусть теперь r – некоторое натуральное число, $(\theta^r, x^r) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$,

$$c_1^r(\theta^r, x^r) = \max_{u \in P} \max_{\tau \in [\theta^r, \vartheta_0]} \min_{v \in \mathcal{V}} c_1^{r-1}(\tau, x(\tau, \theta^r, x^r, u, v)). \quad (4.4)$$

Пусть u^r , θ^{r-1} – пара элементов, на которых достигается максимум, $\theta^{r-1} \in [\theta^r, \vartheta_0]$, а $\{x_l^r\}_{l=1}^\infty$ – некоторая последовательность, сходящаяся к x^r . Пусть $\{\Delta_l^r\}_{l=1}^\infty$ – последовательность разбиений отрезка $[\theta^r, \theta^{r-1}]$, мелкость которых не превосходит ε_l . Мы предполагаем, что последовательность $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$ сходится к 0. В силу выпуклости $\{f(t, x, u, v) : v \in Q\}$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $u \in P$ можно выделить подпоследовательность последовательности $\{v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r}\}_{l=1}^\infty$, слабо сходящуюся к некоторому управлению второго игрока¹. Обозначим это

¹Имеет место слабая сходимостъ подпоследовательности функционалов на $C([t_0, \vartheta_0] \times Q)$, соответствующих действию управлениям $v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r}$, к некоторому функционалу на $C([t_0, \vartheta_0] \times Q)$. В силу выпуклости $\{f(t, x, u, v) : v \in Q\}$ действие этого функционала совпадает с действием некоторого управления $v \in \mathcal{V}$.

предельное управление через $v^r \in \mathcal{V}$. Без ограничения общности можно считать, что сама последовательность $\{v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r}\}_{l=1}^\infty$ сходится к v^r . Тогда $x(\cdot, \theta^r, x_l^r, u^r, v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r})$ сходится при $l \rightarrow \infty$ к $x(\cdot, \theta^r, x^r, u^r, v^r)$ равномерно на отрезке $[\theta^r, \theta^{r-1}]$. Обозначим

$$x_l^{r-1} \triangleq x(\theta^{r-1}, \theta^r, x_l^r, u^r, v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r}), \quad x^{r-1} \triangleq x(\theta^{r-1}, \theta^r, x^r, u^r, v^r). \quad (4.5)$$

В силу (4.4) и выбора величин u^r, θ^r, v^r имеем

$$c_1^r(\theta^r, x^r) \leq c_1^{r-1}(\theta^{r-1}, x^{r-1}). \quad (4.6)$$

Проведем аналогичную процедуру для функции c_1^* . Выберем $(\theta^0, x^0) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. По определению функции c_1^*

$$c^*(\theta^0, x^0) = \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} \sigma_1(x(\vartheta_0, \theta^0, x^0, u, v)).$$

Пусть u^0 – элемент, на котором достигается максимум в выражении для $c^0(\theta^0, x^0)$. Пусть также $\{x_l^0\} \subset \mathbb{R}^n$ – последовательность, сходящаяся к элементу x^0 . Рассмотрим последовательность $\{\Delta_l^0\}_{l=1}^\infty$ разбиений отрезка $[\theta^0, \vartheta_0]$, мелкость которых не превосходит ε_l , а $\varepsilon_l \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\{v_{\theta^0, x_l^0, u^0, \Delta_l^0}\}_{l=1}^\infty$ сходится к некоторому управлению второго игрока $v^0 \in \mathcal{V}$. Тогда $x(\cdot, \theta^0, x_l^0, u^0, v_{\theta^0, x_l^0, u^0, \Delta_l^0})$ сходится к $x(\cdot, \theta^0, x^0, u^0, v^0)$ равномерно на $[\theta^0, \vartheta_0]$. Обозначим

$$x^{-1} \triangleq x(\vartheta_0, \theta^0, x^0, u^0, v^0). \quad (4.7)$$

В силу выбора $u^0 \in P$ и $v^0 \in \mathcal{V}$ получаем, что

$$c_1^*(\theta^0, x^0) \leq \sigma_1(x^{-1}). \quad (4.8)$$

Также для удобства обозначений положим $\theta^{-1} \triangleq \vartheta_0$.

Ограничимся теперь позициями $(\theta^k, x^k) \in D$. По определению множества D существует последовательность пошаговых движений

$$\{x[\cdot, t_l, x_l; U^N, \varepsilon_l, \Delta_{1,l}^*; V^N, \varepsilon_l, \Delta_{2,l}^*]\}_{l=1}^\infty$$

такая, что $x[\theta^k, t_l, x_l; U^N, \varepsilon_l, \Delta_{1,l}^*; V^N, \varepsilon_l, \Delta_{2,l}^*] \rightarrow x^k$, а $t_l \rightarrow t_*, x_l \rightarrow x_*, \varepsilon_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Определим последовательность начальных точек $\{x_l^k\}_{l=1}^\infty$, положив

$$x_l^k \triangleq x[\theta^k, t_l, x_l; U^N, \varepsilon_l, \Delta_{1,l}^*; V^N, \varepsilon_l, \Delta_{2,l}^*].$$

Применим последовательно процедуру, описанную выше, при $r = k, k-1, \dots, 0$. В случае $r = 0$ применяем ее к функции c_1^* . В результате мы построим набор управлений $u^k, u^{k-1}, \dots, u^1, u^0 \in P$, набор моментов $\theta^{k-1}, \dots, \theta^{-1}, \theta^j \leq \theta^{j-1}$, набор последовательностей разбиений $\{\Delta_l^k\}, \{\Delta_l^{k-1}\}, \dots, \{\Delta_l^1\}, \{\Delta_l^0\}$, набор соответствующих управлений второго игрока $\{v_l^k\}, \{v_l^{k-1}\}, \dots, \{v_l^1\}, \{v_l^0\} \subset \mathcal{V}$, а также набор предельных управлений второго игрока $v^k, v^{k-1}, \dots, v^1, v^0 \in \mathcal{V}$. Последовательность $\{v_l^j\}_{l=1}^\infty$ слабо сходится к v^j для всех $j \in 0, \dots, k$. Также определены формулой (4.5) наборы последовательностей $\{x_l^{k-1}\}_{l=1}^\infty, \dots, \{x_l^{-1}\}_{l=1}^\infty$ и набор $x^{k-1}, \dots, x^{-1}$.

Из (4.6) следует, что

$$c_1^k(\theta^k, x^k) \leq c_1^{k-1}(\theta^{k-1}, x^{k-1}) \leq \dots \leq c_1^0(\theta^0, x^0). \quad (4.9)$$

Возможны три случая.

- 1) $c_1^*(\theta^0, x^0) \leq \min\{J_1, c_1^+(\theta^0, x^0)\}$, $J_1 \leq c_1^+(\theta^0, x^0)$. В этом случае получаем $c_1^0(\theta^0, x^0) = J_1$. Следовательно (см. (4.9)),

$$c_1^k(\theta^k, x^k) \leq J_1.$$

- 2) $c_1^*(\theta^0, x^0) \leq \min\{J_1, c_1^+(\theta_0, x_0)\}$, $J_1 \geq c_1^+(\theta_0, x_0)$. В этом случае получаем

$$c_1^k(\theta^k, x^k) \leq c_1^0(\theta^0, x^0) = c_1^+(\theta_0, x_0) \leq J_1.$$

- 3) $c_1^*(\theta^0, x^0) \geq \min\{J_1, c_1^+(\theta_0, x_0)\}$. В этом случае получаем

$$c_1^0(\theta^0, x^0) = c_1^*(\theta^0, x^0). \quad (4.10)$$

Рассмотрим случай 3) более подробно. Пусть $U^N = (u^N(t, x, \varepsilon), \beta_1^N(\varepsilon))$. Рассмотрим стратегию $U^\natural = (u(t, x, \varepsilon), \beta_1^N(\varepsilon))$, для которой $u(t, x, \varepsilon) = u^N(t, x, \varepsilon)$ при $t < \theta^k$, $u(t, x, \varepsilon) = u^r$ при $t \in [\theta^r, \theta^{r-1})$. Для $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$ положим

$$\Delta_{i,l} \triangleq \Delta_{i,l}^* \cup \Delta_l^k \cup \Delta_l^{k-1} \cup \dots \cup \Delta_l^0,$$

$$v_l(t) \triangleq v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r}(t) \quad \text{для } t \in [\theta^r, \theta^{r-1}).$$

При $t < \theta^k$ положим $v_l(t)$ равной пошаговой реализации управления второго игрока при условии, что игроки используют стратегии U^N , V^N и разбиения $\Delta_{1,l}^*$ и $\Delta_{2,l}^*$. Аналогично, для $t < \theta^k$ значения $u_l(t)$ полагаем совпадающими со значениями, получающимися при пошаговой реализации управления первого игрока при условии, что игроки используют стратегии U^N , V^N и разбиения $\Delta_{1,l}^*$, $\Delta_{2,l}^*$. При $t \in [\theta^r, \theta^{r-1})$ управление $u_l(t)$ положим равным u^r .

Также определим $u_\natural(t) \triangleq u^r$, $v(t) \triangleq v^r(t)$, $t \in [\theta^r, \theta^{r-1})$. Таким образом, $u_\natural(t) = u_l(t)$ при $t \in [\theta^k, \vartheta_0]$.

Имеем

$$x(t, t_l, x_l, u_l, v_l) = x(t, \theta^r, x_l^r, u^r, v_l^r), \quad t \in [\theta^r, \theta^{r-1}],$$

$$x(t, \theta^k, x^k, u_\natural, v) = x(t, \theta^r, x^r, u^r, v^r), \quad t \in [\theta^r, \theta^{r-1}].$$

В силу этих равенств и равенства

$$\{x(\cdot, \theta^r, x_l^r, u^r, v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r})\} = \{x(\cdot, \theta^r, x_l^r, u^r, v_l^r)\}$$

для всех $l, r \in \mathbb{N}$, так как $\{x(\cdot, \theta^r, x_l^r, u^r, v_{\theta^r, x_l^r, u^r, \Delta_l^r})\}_{l=1}^\infty$ сходится равномерно к $x(\cdot, \theta^r, x^r, u^r, v^r)$, получаем, что последовательность $\{x(\cdot, t_l, x_l, u_l, v_l)\}_{l=1}^\infty$ сходится в смысле траекторий к $x(\cdot, \theta^k, x^k, u_\natural, v)$. Кроме того, для $t \in [\theta^k, \vartheta_0]$

$$x(t, t_l, x_l, u_l, v_l) = x[t, t_l, x_l; U^\natural, \varepsilon_l, \Delta_{1,l}; V^N; \varepsilon_l, \Delta_{2,l}].$$

В самом деле, по построению управления u_l и v_l являются пошаговыми реализациями управлений первого и второго игроков соответственно при использовании ими стратегий $U^\natural$, V^N и разбиений $\Delta_{1,l}$, $\Delta_{2,l}$.

Следовательно, если $x^\natural[\cdot] \in X(t_*, x_*, U^\natural, V^N)$ есть предел в смысле траекторий пошаговых движений $x[\cdot, t_l, x_l; U^\natural, \varepsilon_l, \Delta_{1,l}; V^N, \varepsilon_l, \Delta_{2,l}]$, то

$$x(t, \theta^k, x^k, u_\natural, v) = x^\natural[t], \quad t \in [\theta^k, \vartheta_0]. \quad (4.11)$$

Из (4.7)–(4.10) следует

$$c_1^k(\theta^k, x^k) \leq \sigma_1(x(\vartheta_0, \theta^k, x^k, u_{\natural}, v)).$$

В силу (4.11), свойства $x^{\natural}[\cdot] \in X(t_*, x_*, U^{\natural}, V^N)$ и определения равновесия по Нэшу заключаем, что $\sigma_1(x(\vartheta_0, \theta^k, u_{\natural}, v)) \leq J_1$.

Объединяя рассмотренные случаи 1)–3), получаем, что $c_1^k(\theta^k, x^k) \leq J_1$ для всех $(\theta^k, x^k) \in D$.

Обратное неравенство следует из того, что

$$c_1^k(\theta^k, x^k) \geq c_1^0(\theta^k, x^k) \geq \min\{J_1, c_1^+(\theta^k, x^k)\},$$

а $J_1 \leq c_1^+(\theta^k, x^k)$ для $(\theta^k, x^k) \in D$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ последовательности $\{c_i^k(t, x)\}_{k=0}^{\infty}$ ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим это при $i = 1$ (рассуждения для $i = 2$ аналогичны). В самом деле, покажем, что

$$c_1^k(t, x) \leq c_1^+(t, x). \quad (4.12)$$

Для $k = 0$ неравенство (см. (4.1) и (4.2)) очевидно. Пусть оно верно для некоторого числа k ; докажем его для $k + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} c_1^{k+1}(t, x) &= \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} c_1^k(\tau, x(\tau, t, x, u, v)) \\ &\leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \max_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} c_1^k(\tau, x(\tau, t, x, u, v)) \\ &\leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \sup_{u_* \in \mathcal{U}, v_* \in \mathcal{V}} c_1^+(\tau, x(\tau, t, x, u_*, v_*)) \\ &= \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \sup_{u_* \in \mathcal{U}, v_* \in \mathcal{V}} \sup_{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}} \sigma_1(x(\vartheta_0, \tau, x(\tau, t, x, u_*, v_*), u, v)) \\ &= \sup_{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}} \sigma_1(x(\vartheta_0, t, x, u, v)) = c_1^+(t, x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Ниже будет широко использоваться следующая оценка.

Для каждого компакта $E \subset \mathbb{R}^n$ существует функция $\eta(\delta, \zeta)$ такая, что для всех $(t', x'), (t'', x'') \in [t_0, \vartheta_0] \times E$ таких, что $|t' - t''| \leq \delta$, $\|x' - x''\| \leq \zeta$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, выполнено неравенство

$$\|x(t, t', x', u, v) - x(t, t'', x'', u, v)\| \leq \eta(\delta, \zeta) \quad \forall t \geq \sup\{t', t''\}, \quad (4.13)$$

причем $\eta(\delta, \zeta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$.

В самом деле, обозначим $x_1(t) \triangleq x(t, t', x', u, v)$, $x_2(t) \triangleq x(t, t'', x'', u, v)$. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – множество достижимых точек из $[t_0, \vartheta_0] \times E$. В силу условия подлинейного роста G – компакт. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} &\|x_1(t) - x_2(t)\| \\ &= \left\| x' - x'' + \int_{t'}^t f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi)) d\xi - \int_{t''}^t f(\xi, x_2(\xi), u(\xi), v(\xi)) d\xi \right\|. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что $t' \leq t''$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|x' - x''\| + \int_{t'}^{t''} \|f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi))\| d\xi \\ &\quad + \int_{t''}^t \|f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi)) - f(\xi, x_2(\xi), u(\xi), v(\xi))\| d\xi. \end{aligned}$$

Пусть

$$C = \max\{\|f(\xi, x, u, v)\| : \xi \in [t_0, \vartheta_0], x \in G, u \in P, v \in Q\}. \quad (4.14)$$

В силу компактности G величина C конечна. Пусть также L – константа Липшица функции f по фазовой переменной на $[t_0, \vartheta_0] \times G \times P \times Q$. Имеем

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|x' - x''\| + C\|t' - t''\| + L \int_{t''}^t \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| d\xi \\ &\leq \zeta + C\delta + L \int_{t''}^t \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием неравенства Гронуолла получаем

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq (\zeta + C\delta) \exp(L(t - t_0)).$$

Положим $\eta(\delta, \zeta) \triangleq (\zeta + C\delta) \exp(L(\vartheta_0 - t_0))$.

Пусть задана последовательность функций позиции со значениями на вещественной оси $\{g^k\}_{k=1}^\infty$. Будем говорить, что последовательность функций $\{g^k\}_{k=1}^\infty$ *локально равностепенно непрерывна*, если для каждого компакта $K \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ последовательность сужений функций g^k на K равностепенно непрерывна.

ЛЕММА 4. *Для каждого $i = 1, 2$ последовательности функций $\{c_i^j\}_{j=1}^\infty$ локально равностепенно непрерывны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму только для $i = 1$. Мы докажем несколько более общее утверждение. А именно, пусть $g^0 \in C([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$, $g^j \triangleq A_1^j[g^0]$. В этом случае функции $\{g^j\}$ локально равностепенно непрерывны.

Пусть E – некоторое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Через G обозначим множество позиций, достижимых в прямом времени из $[t_0, \vartheta_0] \times E$. Пусть C определено формулой (4.14).

Выберем и зафиксируем какое-то $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим две позиции (t, x) , $(\theta, y) \in [t_0, \vartheta_0] \times B$. Обозначим $\tau_k \triangleq \tau$, $x_k \triangleq x$. По определению функции g^k имеем

$$g^k(\tau_k, x_k) - g^k(\theta, y) = \max_{\tau \in [\tau_k, \vartheta_0]} \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} g^{k-1}(\tau, x(\tau, \tau_k, x, u, v)) - g^k(\theta, y).$$

Пусть $\tau_{k-1} \in [\tau_k, \vartheta_0]$, $u_{k-1} \in P$ – максимизирующие элементы в выражении для $g^k(\tau_k, x_k)$, $v_{k-1} \in \mathcal{V}$ – минимизирующий элемент.

Возможно, что $\tau_{k-1} < \theta$. Тогда обозначим $x_{k-1} \triangleq x(\tau_{k-1}, \tau_k, x_k, u_{k-1}, v_{k-1})$. Выполнено неравенство

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq C(\tau_{k-1} - \tau_k). \quad (4.15)$$

Поскольку $g^k(\theta, y) \geq g^{k-1}(\theta, y)$, в случае $\tau_{k-1} < \theta$ также имеем

$$g^k(\tau_k, x_k) - g^k(\theta, y) \leq g^{k-1}(\tau_{k-1}, x_{k-1}) - g^{k-1}(\theta, y). \quad (4.16)$$

Аналогичные рассуждения можно применить для оценки $g^{k-1}(\tau_{k-1}, x_{k-1}) - g^{k-1}(\theta, y)$. Мы получим моменты τ_{k-2} и u_{k-2} , на которых достигается максимум и соответствующее минимизирующее управление v_{k-2} . Также возможно, что $\tau_{k-2} < \theta$. Тогда мы получим неравенство, аналогичное неравенству (4.16).

Обозначим через r наибольший номер такой, что $\tau_{r-1} \geq \theta$, $r \in 1, \dots, k$. Если такого номера не существует, то будем считать, что $r = 0$.

Из выбора числа r , а также оценок (4.15) и (4.16) получаем

$$\|x_r - x\| \leq C(\tau_r - t), \quad \tau_r \in [t, \theta], \quad (4.17)$$

$$g^k(t, x) - g^k(\theta, y) \leq g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y). \quad (4.18)$$

Рассмотрим вначале случай $r = 0$. Тогда (4.18) влечет

$$g^k(t, x) - g^k(\theta, y) \leq g^0(\tau_0, x_r) - g^0(\theta, y) \leq \varkappa(\max\{\theta - t, \|y - x_0\|\}).$$

Здесь $\varkappa$ обозначает модуль непрерывности функции g^0 в области G :

$$\varkappa(\delta) = \max\{|g^0(t', x') - g^0(t'', x'')| : (t', x'), (t'', x'') \in G, |t' - t''|, \|x' - x''\| \leq \delta\}. \quad (4.19)$$

Из оценки (4.17) получаем

$$\begin{aligned} g^k(t, x) - g^k(\theta, y) &\leq \varkappa(\max\{\theta - \tau_0, \|y - x_r\|\}) \\ &\leq \varkappa(\max\{|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|\}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Рассмотрим теперь случай $r > 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y) &= \max_{\tau \in [\tau_r, \theta_0]} \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} g^{r-1}(\tau, x(\tau, \tau_r, x_r, u, v)) \\ &\quad - \max_{\tau \in [\theta, \theta_0]} \max_{u \in P} \min_{v \in \mathcal{V}} g^{r-1}(\tau, x(\tau, \theta, y, u, v)). \end{aligned}$$

Пусть τ_{r-1} , u_{r-1} — максимизирующие элементы в выражении для $g^r(\tau_r, x_r)$. Тогда

$$\begin{aligned} g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y) &\leq \min_{v \in \mathcal{V}} g^{r-1}(\tau_{r-1}, x(\tau_{r-1}, \tau_r, x_r, u_{r-1}, v)) \\ &\quad - \min_{v \in \mathcal{V}} g^{r-1}(\tau_{r-1}, x(\tau_{r-1}, \theta, y, u_{r-1}, v)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Пусть v_{r-1}^* — элемент, на котором достигается минимум для функции $g^{r-1}(\tau_{r-1}, x(\tau_{r-1}, \theta, y, u_{r-1}, v))$. Оценка сверху (4.21) дает

$$\begin{aligned} g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y) &\leq g^{r-1}(\tau_{r-1}, x(\tau_{r-1}, \tau_r, x_r, u_{r-1}, v_{r-1}^*)) - g^{r-1}(\tau_{r-1}, x(\tau_{r-1}, \theta, y, u_{r-1}, v_{r-1}^*)). \end{aligned}$$

Обозначим $x_{r-1} \triangleq x(\tau_{r-1}, \tau_r, x_r, u_{r-1}, v_{r-1}^*)$, $y_{r-1} = x(\tau_{r-1}, \theta, y, u_{r-1}, v_{r-1}^*)$.

Доказано, что

$$g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y) \leq g^{r-1}(\tau_{r-1}, x_{r-1}) - g^r(\tau_{r-1}, y_{r-1}).$$

Если $r - 1 \neq 0$, то аналогичным способом можно найти моменты $\tau_{r-2}, \dots, \tau_0$, управления $u_{r-2}, \dots, u_0 \in P$, $v_{r-2}^*, \dots, v_0^* \in \mathcal{V}$ и точки $x_{r-2}, \dots, x_0$, $y_{r-2}, \dots, y_0$ такие, что

$$\begin{aligned} g^r(\tau_r, x_r) - g^r(\theta, y) &\leq g^{r-1}(\tau_{r-1}, x_{r-1}) - g^{r-1}(\tau_{r-1}, y_{r-1}) \\ &\leq g^{r-2}(\tau_{r-2}, x_{r-2}) - g^{r-2}(\tau_{r-2}, y_{r-2}) \leq \dots \leq g^0(\tau_0, x_0) - g^0(\tau_0, y_0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Определим управления $u \in \mathcal{U}$ и $v \in \mathcal{V}$ по следующим правилам: $u(\xi) = u_{j-1}$, $v(\xi) = v_{j-1}^*(t)$ для $\xi \in [\tau_j, \tau_{j-1}]$, $j = 0, \dots, r-1$; $u(t) = u_{r-1}$, $v(\xi) = v_{r-1}^*(t)$ для $\xi \in [\min\{\theta, \tau_r\}, \tau_{r-1}]$. Тогда

$$x_0 = x(\tau_0, \tau_r, x_r, u, v), \quad y_0 = x(\tau_0, \theta, y, u, v).$$

Из (4.13) следует, что

$$\|x(\xi, t', x', u, v) - x(\xi, t'', x'', u, v)\| \leq \eta(\delta, \zeta) \quad \forall \xi \geq \max\{t', t''\} \quad (4.23)$$

равномерно по всем $(t', x'), (t'', x'') \in G$, $|t' - t''|, \|x' - x''\| \leq \zeta$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$. Оценим $\|x_r - y\|$ и $|\tau_r - \theta|$. По построению τ_r имеем, что $\tau_r \in [\tau_k, \theta]$. Также

$$\|x_r - x_k\| \leq C(\tau_k - \tau_r), \quad x_k = x, \quad \tau_k = \theta.$$

Следовательно,

$$\|x_r - y\| \leq \|x_k - y\| + C|\tau_k - t| = \|x - y\| + C|\theta - t|.$$

Отсюда

$$\|x_0 - y_0\| \leq \eta(|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|).$$

Тогда

$$g^0(\tau_0, x_0) - g^0(\tau_0, y_0) \leq \kappa(\eta(|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|)).$$

Учитывая оценки (4.18) и (4.22), заключаем, что когда $r \neq 0$,

$$g^k(t, x) - g^k(\theta, y) \leq \kappa(\eta(|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|)).$$

С учетом оценки, полученной для случая $r = 0$ (см. (4.20)), заключаем, что

$$\begin{aligned} g^k(t, x) - g^k(\theta, y) \\ \leq \kappa(\max\{|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|, \eta(|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|)\}). \end{aligned}$$

Меняя местами (t, x) и (θ, y) , после аналогичных построений получаем

$$\begin{aligned} |g^k(t, x) - g^k(\theta, y)| \\ \leq \kappa(\max\{|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|, \eta(|\theta - t|, \|x - y\| + C|\theta - t|)\}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Как видно, оценка (4.24) не зависит от номера k и выбора позиций (t, x) и (θ, y) , а зависит лишь от области E и чисел $|t - \theta|$, $\|x - y\|$.

§ 5. Представление множества N -решений

В этом параграфе мы докажем теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Необходимость.* Положим

$$c_i(t, x) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} c_i^k(t, x).$$

Этот предел существует в силу монотонности последовательности и ограниченности $\{c_i^k(t, x)\}$ (см. лемму 3). Функции c_i непрерывны в силу леммы 4. В силу леммы 1 условие (C1) выполнено. Условие (C2) выполнено в силу построения $c_i(t, x)$.

Докажем, что выполнено условие (C3). Пусть $x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N)$. По построению функций c_i и лемме 2 для всех $\xi \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем $c_i(\xi, x^c[\xi]) = c_i(t_*, x_*) = J_i$. Заметим, что если $x^c[\cdot]$ – некоторое пошаговое движение, порожденное парой стратегий (U^N, V^N) , то $x^c[\cdot]$ является решением включения (2.4)

$$\dot{y} \in \mathcal{F}(t, y).$$

В силу выпуклости $\mathcal{F}(t, y)$ любой предел решений этого дифференциального включения также будет решением, следовательно, в силу определения конструктивного движения $x^c[\cdot]$ является решением включения (2.4).

Достаточность. Пусть c_1, c_2 удовлетворяют условиям (C1)–(C3). Положим $J_i \triangleq c_i(t_*, x_*)$. Докажем, что существуют стратегии U^* и V^* , образующие равновесие по Нэшу, такие, что $\sigma_i(x^c[\vartheta_0]) = J_i$ для всех $x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^*, V^*)$.

Обозначим множество всех позиций, которые достижимы из множества

$$\{(t, x) : |t - t_*| \leq 1, \|x - x_*\| \leq 1\},$$

через G . Множество G также компактно. Пусть C определено формулой (4.14).

Пусть $s(\cdot)$ – некоторое решение дифференциального включения (2.4) такое, что вдоль этого решения функции c_1 и c_2 постоянны. Зафиксируем пару постоянных управлений $u_0 \in P, v_0 \in Q$.

Выберем $\varepsilon > 0$; можно считать, что $\varepsilon < 1$. Положим $\theta_j \triangleq t_0 + j\varepsilon$ для неотрицательных j таких, что $t_0 + j\varepsilon < \vartheta_0$. Общее количество таких номеров j обозначим через m . Также $\theta_m \triangleq \vartheta_0$. Моменты $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ образуют разбиение отрезка $[t_0, \vartheta_0]$. Его мелкость равна ε . Из метода экстремального сдвига (см. [18]) следует, что можно выбрать постоянные на $[\theta_j, \theta_{j+1})$ функции u_ε и v_ε такие, что при $t \in [t_*, \vartheta_0]$ справедлива оценка

$$\|s(\xi) - x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon)\| \leq \alpha(\varepsilon). \quad (5.1)$$

Здесь $\alpha(\varepsilon)$ неотрицательна, непрерывна и удовлетворяет условию $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $(u_0, v_0) \in P \times Q$ – пара управлений, реализующих управление игроков на полуинтервале $[\theta_0, \theta_1)$: $u_\varepsilon(t) = u_0, v_\varepsilon(t) = v_0$ для $t \in [\theta_0, \theta_1)$. Будем считать, что $u_\varepsilon(t) = u_0, v_\varepsilon(t) = v_0$ для $t < t_*$. Продлим движение $s(\cdot)$ на весь отрезок $[t_0, \vartheta_0]$, положив $s(t) \triangleq x(t, t_*, x_*, u_0, v_0)$ для $t \leq t_*$. Как видно, оценка (5.1) выполняется и при $t < t_*$.

Рассмотрим вспомогательные позиционные стратегии $\bar{U} = (\bar{u}(t, x, \varepsilon), \bar{\beta}_1(\varepsilon))$, $\bar{V} = (\bar{v}(t, x, \varepsilon), \bar{\beta}_2(\varepsilon))$, определенные по правилу

$$\bar{u}(t, x, \varepsilon) = u_\varepsilon(t), \quad \bar{v}(t, x, \varepsilon) = v_\varepsilon(t), \quad \bar{\beta}_1(\varepsilon) = \bar{\beta}_2(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

Пусть $(t_{\natural}, x_{\natural})$ достаточно близко к (t_*, x_*) , а именно $|t_{\natural} - t_*| \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_{\natural}\| \leq \varepsilon$. Пусть также $\Delta_1 = \{\tau'_l\}_{l=0}^{b_1}$ и $\Delta_2 = \{\tau''_l\}_{l=0}^{b_2}$ — разбиения отрезка $[t_{\natural}, \vartheta_0]$, удовлетворяющие условиям $\tau'_l - \tau'_{l-1} \leq \varepsilon^2$, $\tau''_l - \tau''_{l-1} \leq \varepsilon^2$. Рассмотрим реализовавшиеся управления $u^{\natural}, v^{\natural}$ при пошаговом движении, выходящем из позиции $(t_{\natural}, x_{\natural})$ и порожденном стратегиями $\bar{U}$ и $\bar{V}$ и разбиениями Δ_1 и Δ_2 . Имеем

$$\begin{aligned} & \|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_{\natural}, x_{\natural}, u^{\natural}, v^{\natural})\| \\ & \leq \|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| \\ & \quad + \|x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural}) - x(\xi, t_{\natural}, x_{\natural}, u^{\natural}, v^{\natural})\|. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части данного неравенства. Управления u_{ε} и $u^{\natural}$ могут различаться только на полуинтервалах вида $[\theta_j, \theta_j + \varepsilon^2]$. Аналогично на этих же полуинтервалах могут различаться управления v_{ε} и $v^{\natural}$. Для всех j имеем

$$\begin{aligned} & \|x(\theta_j + \varepsilon^2, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\theta_j + \varepsilon^2, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| \\ & \leq \|x(\theta_j, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\theta_j, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| + 2C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

В силу выбора $u^{\natural}$ и $v^{\natural}$ имеем

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| = 0 \quad \forall \xi \in [\theta_0, \theta_1].$$

Пользуясь методами, аналогичными использованным для доказательства оценки (4.13), получаем

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| \leq 2C\varepsilon^2 \exp L(\xi - \theta_1) \quad \forall \xi \in [\theta_1, \theta_2].$$

Продолжая эти рассуждения и огрубляя при необходимости неравенства, заключаем, что

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| \leq 2mC\varepsilon^2 \exp L(\xi - t_*) \quad \forall \xi \in [\vartheta_0, t].$$

Также $m\varepsilon \leq (\vartheta_0 - t_0)$. Следовательно,

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural})\| \leq 2C\varepsilon(\vartheta_0 - t_0) \exp L(\xi - t_*) \quad \forall \xi \in [\vartheta_0, t].$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (5.2) может быть оценено непосредственно при помощи оценки (4.13). А именно

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u^{\natural}, v^{\natural}) - x(\xi, t_{\natural}, x_{\natural}, u^{\natural}, v^{\natural})\| \leq \eta(\varepsilon, \varepsilon).$$

Обозначим

$$\phi^*(\varepsilon) \triangleq 2C\varepsilon(\vartheta_0 - t_0) \exp L(\xi - t_*) + \eta(\varepsilon, \varepsilon).$$

Функция $\phi^*(\varepsilon)$ стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x(\xi, t_{\natural}, x_{\natural}, u^{\natural}, v^{\natural})\| \leq \phi^*(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что для всех $x^c[\cdot] \in X^c(t_{\natural}, x_{\natural}; \bar{U}, \bar{V}, \varepsilon)$ при $|t_* - t_{\natural}| \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_{\natural}\| \leq \varepsilon$ выполнено неравенство $\|x(\xi, t_*, x_*, u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) - x^c[\xi]\| \leq \phi^*(\varepsilon)$. Отсюда и из (5.1) следует, что для всех $x^c[\cdot] \in X^c(t_{\natural}, x_{\natural}; \bar{U}, \bar{V}, \varepsilon)$

$$\|s(t) - x^c[t]\| \leq \phi(\varepsilon) \triangleq \alpha(\varepsilon) + \phi^*(\varepsilon). \quad (5.3)$$

Для каждого $i = 1, 2$ рассмотрим множества Лебега

$$W_i \triangleq \{(t, x) \in G : c_i(t, x) \leq J_i\}.$$

Множества W_i стабильны во вспомогательных играх Γ_1 и Γ_2 . А именно, пусть $(t, x) \in W_1$. Тогда для любого управления $u \in P$ существует управление $v \in \mathcal{V}$ такое, что $(\xi, x(\xi, t, x, u, v)) \in W_1$ для всех $\xi \in [t, \vartheta_0]$. Аналогичное будет справедливо и для W_2 , если поменять местами u и v . Также множества W_i , $i = 1, 2$, компактны, поскольку они замкнуты и содержатся в компакте G .

Определим экстремальные стратегии: к множеству W_1 – стратегию $V_e(t, x)$, к множеству W_2 – стратегию $U_e(t, x)$. А именно, пусть z_i – ближайший к x элемент множества $\{w : (t, x) \in W_i\}$ для $i = 1, 2$. Положим $V_e(t, x) \triangleq v_*$, $U_e(t, x) \triangleq u_*$, где $u_* \in P$ и $v_* \in Q$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \max_{v \in Q} \langle z_2 - x, f(t, x, u_*, v) \rangle &= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle z_2 - x, f(t, x, u, v) \rangle, \\ \max_{u \in P} \langle z_1 - x, f(t, x, u, v_*) \rangle &= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle z_1 - x, f(t, x, u, v) \rangle. \end{aligned}$$

Построим теперь пару стратегий и докажем, что эта пара образует N -решение $U^* = (u^*(t, x, \varepsilon), \beta_1^*(\varepsilon))$. Определим $U^* = (v^*(t, x, \varepsilon), \beta_2^*(\varepsilon))$ как стратегии наказания (см. [10]):

$$\begin{aligned} u^*(t, x, \varepsilon) &= \begin{cases} \bar{u}(t, x, \varepsilon), & \|s(t) - x\| \leq \phi(\varepsilon), \\ U_e(t, x), & \|s(t) - x\| > \phi(\varepsilon), \end{cases} \\ v^*(t, x, \varepsilon) &= \begin{cases} \bar{v}(t, x, \varepsilon), & \|s(t) - x\| \leq \phi(\varepsilon), \\ V_e(t, x), & \|s(t) - x\| > \phi(\varepsilon), \end{cases} \\ \beta_1^*(\varepsilon) &= \beta_2^*(\varepsilon) = \bar{\beta}_1(\varepsilon) = \bar{\beta}_2(\varepsilon) = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Докажем, что пара (U^*, V^*) образует N -решение.

Вначале докажем, что $\sigma_i(x_*[\vartheta_0]) = J_i$ для $x_*[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^*, V^*)$. Для этого докажем, что для любого $\varepsilon > 0$, всех $(t_\sharp, x_\sharp)$ таких, что $|t_* - t_\sharp| \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_\sharp\| \leq \varepsilon$, а также для всех разбиений Δ_1 и Δ_2 отрезка $[t_\sharp, \vartheta_0]$, мелкость которых не превосходит $\bar{\beta}_1(\varepsilon) = \varepsilon^2$, выполняется равенство

$$x[\xi, t_\sharp, x_\sharp; U^*, \varepsilon, \Delta_1; V^*, \varepsilon, \Delta_2] = x[\xi, t_\sharp, x_\sharp; \bar{U}, \varepsilon, \Delta_1; \bar{V}, \varepsilon, \Delta_2] \quad (5.4)$$

при $\xi \in [t_0, \vartheta_0]$. В силу определения стратегий U^* и V^* для любого $\varepsilon > 0$ справедливо $\beta_i(\varepsilon) = \bar{\beta}_i(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Также для всех (t, x) таких, что $\|s(t) - x\| \leq \phi(\varepsilon)$, справедливы равенства

$$u^*(t, x, \varepsilon) = \bar{u}(t, x, \varepsilon), \quad v^*(t, x, \varepsilon) = \bar{v}(t, x, \varepsilon).$$

Пусть $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r\} = \Delta_1 \cup \Delta_2$; можно считать, что $\xi_{j-1} < \xi_j$. Моменты ξ_i – это моменты переключения управлений, между ними управления постоянны. Поэтому равенство (5.4) верно при $\xi = \xi_0$. Поскольку

$$\|s(\xi_0) - x_\sharp\| \leq \|s(t_\sharp) - s(t_*)\| + \|x_* - x_\sharp\| \leq \eta(\varepsilon^2, 0) + \varepsilon \leq \phi(\varepsilon),$$

то в силу совпадения управлений на полуинтервале $[\xi_0, \xi_1)$ равенство (5.4) верно для $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$. Пусть равенство (5.4) выполняется при $\xi \in [\xi_0, \xi_j]$. Без ограничения общности предположим, что ξ_j – момент коррекции управления первого

игрока. Из (5.3) следует, что для $x_j = x[\xi_j, t_*, x_*; U^*, \varepsilon, \Delta_1; V^*, \varepsilon, \Delta_2]$ выполнено равенство $u^*(\xi_j, x_j, \varepsilon) = \bar{u}(\xi_j, x_j, \varepsilon)$. Также на полуинтервале $[\xi_j, \xi_{j+1})$ совпадают и управления второго игрока, порожденные стратегиями V^* и $\bar{V}$. Следовательно, равенство (5.4) выполняется и на отрезке $[\xi_j, \xi_{j+1}]$. Фактически нами доказано, что равенство (5.4) выполняется для всех $\xi \in [t_*, \vartheta_0]$. Отсюда и из оценки (5.3) следует, что для всех $\xi \in [t_{\natural}, \vartheta_0]$

$$\|x[\xi, t_{\natural}, x_{\natural}; U^*, \varepsilon, \Delta_1; V^*, \varepsilon, \Delta_2] - s(\xi)\| \leq \phi(\varepsilon).$$

Тогда для всех $(t_{\natural}, x_{\natural}) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|t_{\natural} - t_*| \leq \varepsilon$, $\|x_{\natural} - x_*\| \leq \varepsilon$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\sigma_i(x[\vartheta_0, t_{\natural}, x_{\natural}; U^*, \varepsilon, \Delta_1; V^*, \varepsilon, \Delta_2]) - J_i\| \\ & \leq \|\sigma_i(x[\vartheta_0, t_{\natural}, x_{\natural}; U^*, \varepsilon, \Delta_1; V^*, \varepsilon, \Delta_2]) - \sigma_i(s(\vartheta_0))\| \leq \delta_i(\phi(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Здесь $\delta_i(\cdot)$ – модуль непрерывности функции σ_i на сечении множества G при $t = \vartheta_0$. В силу непрерывности σ_i имеем $\delta_i(\zeta) \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$. Следовательно, для каждого $x[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^*, V^*)$ выполнено равенство $\sigma_i(x[\vartheta_0]) = J_i$.

Пусть U – некоторая позиционная стратегия; докажем, что для всех $x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, V^*)$

$$\sigma_1(x[t]) \leq J_1.$$

Зафиксируем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и позицию $(\tau, y) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что $|\tau - t_*|$ и $\|y - x_*\|$ не превосходят ε_2 , а $\varepsilon_2 \leq 1$. Рассмотрим некоторое пошаговое движение $z[\cdot] = x[\cdot, \tau, y; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V^*, \varepsilon_2, \Delta_2]$. Имеем $z[t] \in G$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Также $s(t) \in G$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$.

Если $\|z[\vartheta_0] - s(\vartheta_0)\| \leq \phi(\varepsilon_2)$, то

$$\sigma_1(z[\vartheta_0]) - J_1 = \sigma_1(z[\vartheta_0]) - \sigma_1(s(\vartheta_0)) \leq \delta_1(\phi(\varepsilon_2)). \quad (5.5)$$

Пусть теперь $\|z[\vartheta_0] - s(\vartheta_0)\| > \phi(\varepsilon_2)$. Обозначим через $\widehat{\xi}$ наибольший момент $\xi \in [\tau, \vartheta_0]$ такой, что $\|z[\xi] - s(\xi)\| \leq \phi(\varepsilon_2)$. Поскольку $\|z[\tau] - z[t_*]\| \leq C|\tau - t_*|$, $\|s(\tau) - s(t_*)\| \leq C|\tau - t_*|$, а

$$\begin{aligned} \|z[\tau] - s(\tau)\| & \leq \|z[t_*] - s(t_*)\| + \|z[\tau] - z(t_*)\| + \|s(\tau) - s(t_*)\| \\ & \leq \varepsilon_2 + 2C\varepsilon_2 < \phi(\varepsilon_2), \end{aligned}$$

такое $\widehat{\xi}$ существует. Рассмотрим определяющие движение $z[\cdot]$ разбиения $\Delta_2 = \{\xi_j\}_{j=0}^{\nu}$ отрезка $[\tau, \vartheta_0]$. Существует наименьший номер l такой, что $\xi_l > \widehat{\xi}$. По условию $\xi_l - \widehat{\xi} \leq \beta_2(\varepsilon_2)$. Тогда

$$\|z[\xi_l] - z[\widehat{\xi}]\| \leq C\beta_2(\varepsilon_2), \quad \|s(\xi_l) - s(\widehat{\xi})\| \leq C\beta_2(\varepsilon_2).$$

Рассмотрим оставшуюся часть траектории $z[t]$ при $t \in [\xi_l, \vartheta_0]$. По лемме Н. Н. Красовского и А. И. Субботина об оценке расстояния при пошаговом движении (см. [1; формула (15.1)]) расстояние от пошагового движения $z[t]$ до сечения стабильного множества W_1 (обозначим эту величину через $\rho(t)$) удовлетворяет неравенству

$$\rho^2(t) \leq \lambda(\rho^2(\xi_l) + \varphi(\beta_2(\varepsilon_2))),$$

где λ – некоторая константа, φ – равномерный модуль непрерывности функции f по t на множестве $G \times P \times Q$, а $\varphi(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. По определению W_1 имеем $(t, s(t)) \in W_1$. Тогда, оценивая сверху величину $\rho^2(\xi_l)$, получаем

$$\begin{aligned} \rho^2(t) &\leq \lambda(\|z[\xi_l] - s(\xi_l)\|^2 + \varphi(\beta_2(\varepsilon_2))) \\ &\leq \lambda(\|z[\widehat{\xi}] - s(\widehat{\xi})\| + 2C\beta_2(\varepsilon_2))^2 + \varphi(\beta_2(\varepsilon_2))) \\ &\leq \lambda[(\phi(\varepsilon_2) + 2C\beta_2(\varepsilon_2))^2 + \varphi(\beta_2(\varepsilon_2))]. \end{aligned}$$

Поскольку W_1 компактно, существует $w \in W_1 \subset G$ такое, что

$$\rho(\vartheta_0) = \|z[\vartheta_0] - w\|.$$

Имеем

$$\|z[\vartheta_0] - w\| \leq \psi(\varepsilon_2) \triangleq \sqrt{\lambda}[(\phi(\varepsilon_2) + C\beta_2(\varepsilon_2))^2 + \varphi(\beta_2(\varepsilon_2))]^{1/2}.$$

Также $\psi(\varepsilon_2) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Отсюда в силу того, что $\sigma_1(w) \leq J_1$, получаем

$$\sigma_1(z[\vartheta_0]) - J_1 \leq \sigma_1(z[\vartheta_0]) - \sigma_1(w) \leq \delta_1(\psi(\varepsilon_2)). \quad (5.6)$$

Объединяя (5.5) и (5.6), получаем

$$\sigma_1(z[\vartheta_0]) - J_1 \leq \delta_1(\psi(\varepsilon_2)).$$

Отсюда в силу определения множества $X(t_*, x_*, U, V^*)$ заключаем, что для каждого конструктивного движения $x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, V^*)$ справедливо неравенство

$$\sigma_1(x[\vartheta_0]) \leq J_1.$$

Аналогично можно показать, что для любой стратегии второго игрока V и любого движения $x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U^*, V)$ выполнено неравенство

$$\sigma_2(x[\vartheta_0]) \leq J_2.$$

Таким образом, в силу того, что на согласованных движениях, порожденных стратегиями U^* и V^* , выигрыш i -го составляет величину J_i , а отклонение одного из игроков не ведет к увеличению выигрыша, пара стратегий (U^*, V^*) образует равновесие по Нэшу с N -выигрышем (J_1, J_2) .

Теперь мы докажем теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства необходимости достаточно выбрать $E = \{(t, x(t)) : t \in [t_*, \vartheta_0]\}$, где $x(t)$ – решение включения (2.4), удовлетворяющее условию $c_i(t, x(t)) = c_i(t_*, x_*)$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$, $i = 1, 2$.

Далее обратимся к достаточному для (СЗ) условию. Пусть $(\tau, y) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$; обозначим через $\text{Sol}(\tau, y)$ множество решений дифференциального включения (2.4), удовлетворяющих условию $x(\tau) = y$. Отметим, что в силу условия подлинейного роста на функцию f решения дифференциального включения (2.4) продолжимы на весь отрезок $[t_0, \vartheta_0]$.

Пусть E – замкнутое множество в $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $(t_*, x_*) \in E$. Поскольку нас интересует выполнение условия (СЗ) в позиции (t_*, x_*) , мы, уменьшая при необходимости множество E , можем считать, что $c_i(\tau, y) = c_i(t_*, x_*)$ для всех

$(\tau, y) \in E$. Тогда условие слабой инвариантности множества $\text{gr}(c_1, c_2; E)$ относительно дифференциального включения (2.5) эквивалентно тому, что для всех $(\tau, y) \in E$ существуют момент $\theta > \tau$ и $x(\cdot) \in \text{Sol}(\tau, y)$ такие, что для всех $t \in [\tau, \theta]$ выполнено условие

$$(t, x(t)) \in E, \quad c_i(t, x(t)) = c_i(t_*, x_*), \quad i = 1, 2. \quad (5.7)$$

Покажем, что из этого условия следует условие (C3). Предположим, что оно не выполняется; тогда для любого $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ условие $c_i(t, x(t)) = c_i(t_*, x_*)$ нарушается при некотором $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Как следствие, для каждого $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ условие (5.7) нарушается при некотором $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Обозначим через θ_* супремум таких θ , что условие (5.7) выполняется для некоторого $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ при $t \in [t_*, \theta]$. В силу выпуклости $\mathcal{F}(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ существует такое движение $x_*(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$, что условие (5.7) выполняется при всех $t \in [t_*, \theta_*]$. Поскольку условие (5.7) и для $x_*(\cdot)$ нарушается при некотором $t \in [t_*, \vartheta_0]$, имеем $\theta_* < \vartheta_0$.

Положим $y_* \triangleq x_*(\theta_*)$. В силу замкнутости E имеем $(\theta_*, y_*) \in E$. Следовательно, существуют момент $\theta^* > \theta_*$ и $y(\cdot) \in \text{Sol}(\theta_*, y_*)$ такие, что условие (5.7) выполнено для $t \in [\theta_*, \theta^*]$. Положим

$$x_0(t) = \begin{cases} x_*(t), & t \in [t_*, \theta_*], \\ y(t), & t \in [\theta_*, \theta^*]. \end{cases}$$

По построению $x_0(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$, также для $x_0(\cdot)$ выполнено условие (5.7) при $t \in [t_*, \theta^*]$. Это противоречит построению θ_* . Наличие противоречия доказывает, что в рассматриваемом случае условие (C3) выполнено.

Доказательство следствия (см. § 2) получается непосредственно из работы [17], где указано необходимое и достаточное условие слабой инвариантности множества относительно дифференциального включения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Вначале докажем, что γ_i удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Достаточно рассмотреть случай $i = 1$ (доказательство для $i = 2$ аналогично). Краевое условие выполняется по предположению теоремы. Покажем, что $A_1[\gamma_1] = \gamma_1$. Для этого выберем произвольным образом $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $u_* \in P$, $\tau > t$ и покажем, что существует $v \in \mathcal{V}$ со свойством

$$\gamma_1(t_*, x_*) \geq \gamma_1(\tau, x(\tau, t_*, x_*, u_*, v)), \quad \tau \in [t_*, \vartheta_0].$$

Для этого рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u_*, \hat{v}(t, x)), \quad t_* = x_*.$$

По известным теоремам существования решения при условии Каратеодори у этой задачи существует хотя бы одно решение. Выберем произвольное решение $x_*(\cdot)$, определенное на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$; положим $v_*(t) \triangleq \hat{v}(t, x_*(t))$. Тогда

$$\dot{x}_*(t) = f(t, x_*(t), u_*, v_*(t)), \quad x_*(t) = x_*.$$

Найдем изменение γ_1 вдоль $x_*(\cdot)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1(t, x_*(t))}{dt} &= \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial x}, \dot{x}_*(t) \right\rangle \\ &= \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial x}, f(t, x_*, u_*, \hat{v}(t, x_*(t))) \right\rangle. \end{aligned}$$

Воспользуемся выражениями (2.7) и (2.8). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1(t, x_*(t))}{dt} = & - \left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial x}, f(t, x_*, \hat{u}(t, x_*(t)), \hat{v}(t, x_*(t))) \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial \gamma_1(t, x_*(t))}{\partial x}, f(t, x_*, u_*, \hat{v}(t, x_*(t))) \right\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_1[\gamma_1] = \gamma_1$.

Пусть $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$; докажем, что для (γ_1, γ_2) выполняется условие (СЗ). Для этого рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \hat{u}(t, x), \hat{v}(t, x)), \quad x(t_*) = x_*.$$

По теоремам существования и продолжимости решений дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям Каратеодори, получаем, что множество решений этой задачи не пусто. Пусть $x_\diamond(\cdot)$ – решение этой задачи, определенное на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Положим

$$u_\diamond(t) \triangleq \hat{u}(t, x_\diamond(t)), \quad v_\diamond(t) \triangleq \hat{v}(t, x_\diamond(t)).$$

Тогда

$$\dot{x}_\diamond(t) = f(t, x_\diamond(t), u_\diamond(t), v_\diamond(t)), \quad x_\diamond(t_*) = x_*.$$

Найдем изменение γ_i вдоль $x_\diamond(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i(t, x_\diamond(t))}{dt} &= \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial x}, \dot{x}_\diamond(t) \right\rangle \\ &= \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial x}, f(t, x_*, \hat{u}(t, x_\diamond(t)), \hat{v}(t, x_\diamond(t))) \right\rangle. \end{aligned}$$

Воспользуемся условием (2.7). Тогда, продолжая предыдущее равенство, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i(t, x_\diamond(t))}{dt} = & - \left\langle \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial x}, f(t, x_*, \hat{u}(t, x_\diamond(t)), \hat{v}(t, x_\diamond(t))) \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial \gamma_i(t, x_\diamond(t))}{\partial x}, f(t, x_*, \hat{u}(t, x_\diamond(t)), \hat{v}(t, x_\diamond(t))) \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вдоль $x_\diamond(\cdot)$ значения $c_i(t_*, x_*)$ для $i = 1, 2$ сохраняются. Также $x_\diamond(t) = x(t, t_*, x_*, u_\diamond(t), v_\diamond(t))$ является решением включения (2.4). Отсюда заключаем, что для (γ_1, γ_2) условие (СЗ) выполняется в позиции (t_*, x_*) .

Список литературы

- [1] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974; англ. пер.: N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Game-theoretical control problems*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] Н. Н. Красовский, *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата*, Наука, М., 1985.

- [3] А. Г. Ченцов, “О структуре одной игровой задачи сближения”, *Докл. АН СССР*, **224**:6 (1975), 1272–1275; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On the structure of a game problem of convergence”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:5 (1976), 1404–1408.
- [4] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения в заданный момент времени”, *Матем. сб.*, **99(141)**:3 (1976), 394–420; англ. пер.: A. G. Čencov, “On a game problem of converging at a given instant of time”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.
- [5] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, Наука, М., 1981.
- [6] А. Ф. Клейменов, *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры*, Наука, Екатеринбург, 1993.
- [7] J. F. Nash, jr., “Equilibrium points in n -person games”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36**:1 (1950), 48–49.
- [8] J. Nash, “Non-cooperative games”, *Ann. of Math.* (2), **54**:2 (1951), 286–295.
- [9] T. Basar, G. J. Olsder, *Dynamic noncooperative game theory*, Academic Press, London–New York, 1995.
- [10] А. Ф. Кононенко, “О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх”, *Докл. АН СССР*, **231**:2 (1976), 285–288; англ. пер.: A. F. Kononenko, “On equilibrium positional strategies in nonantagonistic differential games”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:6 (1976), 1557–1560.
- [11] А. Ф. Кононенко, Ю. Е. Чистяков, “О равновесных позиционных стратегиях в дифференциальных играх многих лиц”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1053–1056; англ. пер.: A. F. Kononenko, Yu. E. Chistyakov, “On equilibrium positional strategies in n -person differential games”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 514–517.
- [12] Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов, *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*, Изд-во Томск. ун-та, Томск, 1985.
- [13] С. В. Чистяков, “О бескоалиционных дифференциальных играх”, *Докл. АН СССР*, **259**:5 (1981), 1052–1055; англ. пер.: Yu. E. Chistyakov, “On coalition-free differential games”, *Soviet Math. Dokl.*, **24**:1 (1981), 166–169.
- [14] Р. В. Гамкредидзе, *Основы оптимального управления*, Изд-во Тбилис. ун-та, Тбилиси, 1977; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, *Principles of optimal control theory*, Plenum Press, New York–London, 1978.
- [15] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: J. Warga, *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York–London, 1972.
- [16] А. И. Субботин, *Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации*, РХД, Ижевск, 2003.
- [17] H. G. Guseinov, A. I. Subbotin, V. N. Ushakov, “Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control”, *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, **14**:3 (1985), 155–167.
- [18] Н. Н. Красовский, “Дифференциальная игра сближения-уклонения. I”, *Изв. АН СССР. Техн. киберн.*, 1973, № 2, 3–18; англ. пер.: N. N. Krasovskiy, “A differential game of approach and evasion. I”, *Engng. Cybernetics*, **11**:2 (1973), 189–203.

Ю. В. Авербух (Yu. V. Averboukh)
 Институт математики и механики УрО РАН,
 г. Екатеринбург
 E-mail: ayv@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
 07.04.2009 и 18.11.2010