Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Тарасов, О единственности поднятия максимальных коммутативных подалгебр из алгебры Пуассона–Ли в обертывающую алгебру, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 155–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:12:17

УДК 519.46

А. А. Тарасов

О единственности поднятия максимальных коммутативных подалгебр из алгебры Пуассона–Ли в обертывающую алгебру

В работе доказано, что всякая обобщенная подалгебра Мищенко–Фоменко алгебры Пуассона–Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ может быть поднята до коммутативной подалгебры обертывающей алгебры не более чем одним способом.

Библиография: 8 названий.

Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная комплексная алгебра Ли, $S(\mathfrak{g})$ – ее симметрическая алгебра, $P(\mathfrak{g})$ – ее алгебра Пуассона, т.е. алгебра $S(\mathfrak{g})$, снабженная скобкой Пуассона–Ли. Элементы алгебры $P(\mathfrak{g})$ будем рассматривать как функции на $\mathfrak{g}^*$ или на $\mathfrak{g}$, отождествляя $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью инвариантного скалярного умножения $(\cdot, \cdot)$. Пусть $\{F_i \in P(\mathfrak{g}) \mid i = 1, \dots, r\}$ – алгебраически независимая система порождающих центра алгебры $P(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, $h \in \mathfrak{h}$ – регулярный элемент. Тогда элементы $\partial_h^k F_p$, $p = 1, \dots, r$, $k = 0, \dots, \deg F_p - 1$, алгебры $P(\mathfrak{g})$ алгебраически независимы и попарно коммутируют [1]. Порожденную ими подалгебру обозначим $F(h)$. Она имеет максимальную степень трансцендентности среди коммутативных подалгебр алгебры $P(\mathfrak{g})$ (см., например, [2]).

Пусть $a = a(t)$ – такой сходящийся (в окрестности нуля) степенной ряд с коэффициентами из алгебры $\mathfrak{h}$, что элемент $a(t)$ регулярен при всех достаточно малых $t \neq 0$. В [3] доказано, что $F(\mathfrak{g}, a) \equiv F(a) = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ есть свободная коммутативная подалгебра максимальной степени трансцендентности.

Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеет каноническую возрастающую фильтрацию $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} U(\mathfrak{g})^{(m)}$. Алгебра $P(\mathfrak{g})$ естественным образом отождествляется с ассоциированной градуированной алгеброй $\text{gr } U(\mathfrak{g})$, т.е. $P(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_m(\mathfrak{g})$, $P_m(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{(m)} / U(\mathfrak{g})^{(m-1)}$. Положим $P(\mathfrak{g})^{(m)} = \text{gr } U(\mathfrak{g})^{(m)} = \bigoplus_{k=0}^m P_k(\mathfrak{g})$.

Алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $P(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как алгебры Ли относительно операции коммутирования и скобки Пуассона соответственно. Алгебра $\mathfrak{g}$ канонически вкладывается в эти алгебры Ли. Образ элемента $x \in \mathfrak{g}$ в $P(\mathfrak{g})$ мы будем отождествлять с x (и обозначать той же буквой), а образ x в $U(\mathfrak{g})$ будем обозначать через $\hat{x}$. Вложение $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ с помощью отображения симметризации $\hat{\cdot}: P(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ (см. [2], [4]) продолжается до изоморфизма $\mathfrak{g}$ -модулей, при котором

$$x_1 \dots x_k \mapsto \widehat{x_1 \dots x_k} \doteq \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \hat{x}_{\sigma 1} \dots \hat{x}_{\sigma k}, \quad x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. В качестве $\mathfrak{h}$ рассмотрим подалгебру диагональных матриц в $\mathfrak{g}$. Через e_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, обозначим матричные единицы, составляющие базис алгебры $\mathfrak{g}$, и определим элементы

$$M_{i_1 \dots i_p} = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) e_{i_1 i_{\sigma(1)}} \dots e_{i_p i_{\sigma(p)}} \in P(\mathfrak{g}), \quad i_1 < \dots < i_p.$$

Суммы $F_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} M_{i_1 \dots i_p}$, $p = 1, \dots, n$, алгебраически независимы и порождают центр алгебры Ли $P(\mathfrak{g})$. Пусть $h = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$, причем $h_1, \dots, h_n$ различны. В [5] доказано, что $\widehat{F}(h) = \mathbb{C}[\widehat{\partial_h^k F_p} \mid p = 1, \dots, n, k = 0, \dots, p-1]$ – коммутативная подалгебра в $U(\mathfrak{g})$. Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Если $A \subset U(\mathfrak{g})$ – такая коммутативная подалгебра, что $\text{gr}(A) = F(h)$, то $A = \widehat{F}(h)$.*

Будем говорить, что коммутативная подалгебра $A \subset P(\mathfrak{g})$ допускает поднятие (квантование), если существует такая коммутативная подалгебра $B \subset U(\mathfrak{g})$, что $\text{gr } B = A$. В этом случае подалгебру B будем называть поднятием алгебры A .

В частности, для случая алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ поднятие $\widehat{F}(h)$ подалгебры Мищенко–Фоменко $F(h)$, при котором образующие поднимаются с помощью отображения симметризации, совпадает с поднятием, построенным в работе [6].

Аналогично работе [3] с помощью предельного перехода из подалгебр вида $\widehat{F}(h)$ можно получать другие коммутативные подалгебры в $U(\mathfrak{g})$. Уточним, что здесь понимается под предельным переходом. Рассмотрим подалгебры $\widehat{F}(a(t))$. Размерность подпространства $\widehat{F}(a(t))^{(m)} \equiv \widehat{F}(a(t)) \cap U(\mathfrak{g})^{(m)}$ не зависит от t . Коэффициенты элементов вида $\partial_{a(t)}^k F_p$, $p = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, p-1$, являются сходящимися рядами от t . Отсюда следует, что плюккеровы координаты подпространства $\widehat{F}(a(t))^{(m)}$ также являются сходящимися рядами от t , поэтому для каждого $m \geq 0$ существует предел $\widehat{F}(a)^{(m)} = \lim_{t \rightarrow 0} \widehat{F}(a(t))^{(m)}$ в соответствующем грассмано-вом многообразии. Ясно, что $\widehat{F}(a) = \bigcup_m \widehat{F}(a)^{(m)}$ – коммутативная подалгебра алгебры $U(\mathfrak{g})$, причем $\text{gr } \widehat{F}(a) = F(a)$, поскольку предельный переход перестановочен с отображением симметризации.

Если A – некоторая коммутативная подалгебра алгебры $U(\mathfrak{g})$, то $\text{gr } A$ – коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathfrak{g})$. Будем говорить, что A – подалгебра конечного типа, если алгебра $\text{gr } A$ конечно порождена. В [2] доказано, что если A – подалгебра конечного типа, то степени трансцендентности алгебр A и $\text{gr } A$ совпадают. Отсюда следует, что $\widehat{F}(a)$ имеет такую же степень трансцендентности, как и $F(a)$, и, значит, максимальную степень трансцендентности среди всех коммутативных подалгебр конечного типа алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Пусть $F(a)^{(m)} = F(a) \cap P(\mathfrak{g})^{(m)}$, $\widehat{F}(a)^{(m)} = \widehat{F}(a) \cap U(\mathfrak{g})^{(m)}$.

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

ТЕОРЕМА 2. *Если $A \subset U(\mathfrak{g})$ – такая коммутативная подалгебра, что $\text{gr}(A) = F(a)$, то $A = \widehat{F}(a)$.*

На самом деле будет доказана еще более общая

ТЕОРЕМА 3. *Если $B \subset U(\mathfrak{g})^{(m)}$ – такое коммутативное подпространство, что $\text{gr}(B) = F(a)^{(m)}$, то $B = \widehat{F}(a)^{(m)}$.*

Ясно, что теорема 1 следует из теоремы 2. При доказательстве теоремы 3 ключевую роль будет играть

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $w \in P(\mathfrak{g})$ и $\{w, F(a)^{(\deg w)}\} = 0$. Тогда $w \in F(a)$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $w \in U(\mathfrak{g})$ и $[w, \widehat{F}(a)^{(\deg w)}] = 0$. Тогда $w \in \widehat{F}(a)$.*

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи, а также за постоянное внимание к работе. Автор также признателен В.В. Шувалову за полезные обсуждения.

1. Подготовительная лемма. В [6] было дано определение абстрактной алгебры Пуассона. А именно, векторное пространство P с двумя билинейными операциями — умножением $(a, b) \mapsto ab$ и скобкой Пуассона $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ — называется *алгеброй Пуассона*, если выполнены следующие условия: умножение коммутативно и ассоциативно, скобка Пуассона антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби, умножение и скобка Пуассона связаны тождеством Лейбница

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}.$$

Определим тензорное произведение алгебр Пуассона P_1 и P_2 как тензорное произведение ассоциативных алгебр $P_1 \otimes P_2$, на котором определена скобка Пуассона по формуле

$$\{x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\} = \{x_1, y_1\} \otimes x_2 y_2 + x_1 y_1 \otimes \{x_2, y_2\}.$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ — алгебры Ли, причем $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$. Тогда

- 1) $P(\mathfrak{g}) = P(\mathfrak{g}') \otimes P(\mathfrak{g}'')$;
- 2) если наборы $\{a_\gamma \in P(\mathfrak{g}')\}_{\gamma \in \Gamma}$ и $\{b_\gamma \in P(\mathfrak{g}'')\}_{\gamma \in \Gamma}$ линейно независимы и $\{\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \otimes b_\gamma, c\} = 0$ для некоторого $c \in P(\mathfrak{g}')$, то $\{a_\gamma, c\} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$;
- 3) если $\mathfrak{g}$ (а значит, $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{g}''$) — редуктивные алгебры Ли, то $F(\mathfrak{g}, \mathbf{a}) = F(\mathfrak{g}', \pi'(\mathbf{a})) \otimes F(\mathfrak{g}'', \pi''(\mathbf{a}))$, где $\pi': \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ и $\pi'': \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}''$ — естественные проекторы.

2. Вспомогательные обозначения. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгебр $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ положим

$$P(\mathfrak{a})^{\mathfrak{b}} = \{x \in P(\mathfrak{a}) \mid \{x, \mathfrak{b}\} = 0\}.$$

Множество Δ всех корней редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ распадается в объединение $\Delta = \bigcup_{i \neq 0} \Delta_i$, где $\Delta_i = -(\Delta_{-i})$ при $i > 0$ состоит из тех положительных корней, которые разлагаются в сумму ровно i простых корней. Пусть e_α — корневой вектор, отвечающий корню $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{g}_i = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_i \rangle$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Положим $\mathfrak{g}^+ = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{C}e_-$, где $e_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_{\pm 1}} e_\alpha$. Определим проекцию $Q_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}_0$ следующим образом:

$$Q_0|_{\mathfrak{b}} = \text{Id}, \quad Q_0|_{\mathfrak{g}_i} = 0, \quad i \leq -2, \quad Q_0(e_\alpha) = \frac{1}{\text{rk } \mathfrak{g}} e_-, \quad \alpha \in \Delta_{-1}.$$

Продолжим ее до гомоморфизма $Q_0: S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{q}_0)$ симметрических алгебр.

Пусть $h_0 \in \mathfrak{h}$ — такой элемент, что $\alpha(h_0) = 1$ для любого корня $\alpha \in \Delta_1$. Отметим, что $[h_0, \mathfrak{q}_0] \subset \mathfrak{q}_0$ и проекция Q_0 перестановочна с $\text{ad}(h_0)$. В [7] показано, что

$$Q_0(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{b}}) = S(\mathfrak{q}_0)^{h_0} \equiv \{x \in S(\mathfrak{q}_0) \mid \{h_0, x\} = 0\}$$

и что ограничение $Q_0|_{F(\mathbf{a})}: F(\mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q}_0)^{h_0}$ есть изоморфизм алгебр.

Пусть $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$. Определим проекцию $Q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$ следующим образом:

$$Q|_{\mathfrak{q}} = \text{Id}, \quad Q|_{\mathfrak{g}_i} = 0, \quad i \leq -2.$$

Продолжим ее до гомоморфизма $Q: S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{q})$ симметрических алгебр. Ясно, что $Q(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{b}}) = S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}}$ и что $Q_0|_{S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}}}: S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}} \rightarrow S(\mathfrak{q}_0)^{h_0}$ есть изоморфизм алгебр. Поскольку $Q_0 = Q_0 \circ Q$, ограничение $Q|_{F(\mathbf{a})}: F(\mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}}$ есть изоморфизм алгебр.

3. Построение специального идеала и дополнительные леммы. Пусть $\mathfrak{g}'$ – редуктивная регулярная относительно $\mathfrak{h}$ подалгебра в редуктивной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ – картановская подалгебра и Δ' – система корней алгебры $\mathfrak{g}'$. Пусть $\mathfrak{h}''$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}'$ в $\mathfrak{h}$.

Пусть $I(\mathfrak{g}') = (P(\mathfrak{g})\langle\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta \setminus \Delta'\}, \mathfrak{h}''\rangle) \cap P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Очевидно, что $I(\mathfrak{g}')$ – идеал в $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

ЛЕММА 2 (об идеале). *Справедливо, что $I(\mathfrak{g}')$ – пуассонов идеал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мономом в $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ будем называть произведение элементов вида e_α , $\alpha \in \Delta$, и элементов из $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{h}''$.

Укажем явное выражение для скобки Пуассона двух мономов.

Пусть $x = x_1 \cdots x_p$, $y = y_1 \cdots y_q$. Тогда

$$\{x_1 \cdots x_p, y_1 \cdots y_q\} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \{x_i, y_j\} x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_p y_1 \cdots y_{j-1} y_{j+1} \cdots y_q.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любых мономов $x \in I(\mathfrak{g}')$ и $y \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ верно, что $\{x, y\} \in I(\mathfrak{g}')$.

Пусть $x = \prod_{i=1}^s e_{\alpha_i} \prod_{j=1}^r h_j$, $h_j \in \mathfrak{h}$, $j = 1, \dots, r$. Поскольку $x \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, то $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$. Ясно, что если все слагаемые α_i , кроме, быть может, одного, лежат в Δ' , то и оставшееся слагаемое лежит в Δ' . Отсюда получаем, что если в x есть множитель e_α с $\alpha \notin \Delta'$, то в x обязательно есть еще один множитель вида e_β с $\beta \notin \Delta'$ и, следовательно, $\{x, y\} \in I(\mathfrak{g}')$.

Если в x нет множителя вида e_α с $\alpha \notin \Delta'$, то в x обязательно есть множитель $h \in \mathfrak{h}''$. Заметим, что $[h, \mathfrak{h}] = 0$, $[h, e_\alpha] = 0$ при $\alpha \in \Delta'$, $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha \in I(\mathfrak{g}')$ при $\alpha \notin \Delta'$. Отсюда $\{x, y\} \in I(\mathfrak{g}')$. Лемма доказана.

Имеем разложение $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'} \oplus I(\mathfrak{g}')$. Пусть $\pi \equiv \pi_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'}: P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \rightarrow P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'}$ – соответствующий проектор. Из леммы 2 (об идеале) следует, что π – гомоморфизм пуассоновых алгебр. Заметим, что π сохраняет степень.

Положим $F(\mathfrak{g}', \mathfrak{a}) \equiv F(\mathfrak{g}', \pi(\mathfrak{a}))$.

ЛЕММА 3 (об инвариантах). *Справедливо, что $\pi(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) \subset P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}'}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верно, что $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ и $P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}'}$ суть центры алгебр Ли $P(\mathfrak{g})$ и $P(\mathfrak{g}')$ соответственно, а при эпиморфизме алгебр Ли центр отображается в центр.

ЛЕММА 4 (о вложении). *Справедливо, что $\pi(F(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) \subset F(\mathfrak{g}', \mathfrak{a})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку π перестановочно с предельным переходом, то достаточно доказать утверждение при $\mathfrak{a} = h \in \mathfrak{h}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Заметим, что операторы π и ∂_h перестановочны. Поэтому для любого $F \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ имеем $\pi(\partial_h^k F) = \partial_h^k(\pi(F))$. По лемме 3 (об инвариантах) $\pi(F) \in P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}'}$; следовательно, $\partial_h^k(\pi(F)) \in F(\mathfrak{g}', h)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}''$. Заметим, что $F(\mathfrak{g}, h) = F(\mathfrak{g}', h) \otimes S(\mathfrak{h}'')$. Ясно, что $\pi(F(\mathfrak{g}', h) \otimes S(\mathfrak{h}'')) = F(\mathfrak{g}', h)$.

В общем случае ясно, что $\pi_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'} = \pi_{\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}'', \mathfrak{g}'} \circ \pi_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}''}$, и утверждение леммы следует из двух специальных случаев, рассмотренных выше.

ЛЕММА 5 (о накрытии). *Если $\Delta' = \Delta \cap \mathfrak{h}'$, то $\pi(F(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) = F(\mathfrak{g}', \mathfrak{a})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы при подходящем выборе систем простых корней имеем $\Delta'_1 \subset \Delta_1$. Пусть $\mathfrak{q}'$ и Q' для $\mathfrak{g}'$ определены аналогично $\mathfrak{q}$ и Q . Ясно, что $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{g}'$, $Q' = Q|_{S(\mathfrak{g}')}$. Ограничение $Q|_{F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})}: F(\mathfrak{g}', \mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q}')^{\mathfrak{h}'}$ есть изоморфизм алгебр (см. п. 2). По лемме 4 (о вложении) $\pi(F(\mathfrak{g}, \mathbf{a})) \subset F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(\mathfrak{g}, \mathbf{a}) & \xrightarrow[\sim]{Q} & S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ F(\mathfrak{g}', \mathbf{a}) & \xrightarrow[\sim]{Q'} & S(\mathfrak{q}')^{\mathfrak{h}'} \end{array}.$$

Поскольку $\pi: S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}} \rightarrow S(\mathfrak{q}')^{\mathfrak{h}'}$ есть эпиморфизм, то и $\pi: F(\mathfrak{g}, \mathbf{a}) \rightarrow F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})$ есть эпиморфизм. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 4. Пусть $w \neq 0$ удовлетворяет условиям теоремы. Без ограничения общности можно считать, что w однороден. Будем доказывать теорему индукцией по n . Заметим, что при $\deg w \geq n-1$ получаем $w \in F(\mathbf{a})$, так как $F(\mathbf{a})$ порождается элементами степени меньшей или равной n , причем порождающая степени n лежит в центре $P(\mathfrak{g})$, и $F(\mathbf{a})$ является максимальной коммутативной подалгеброй (см. [7]). В частности, при $n=1$ утверждение теоремы очевидно.

Пусть $n > 1$ и $\deg w \leq n-2$. Пусть $w \notin F(\mathbf{a})$. Ясно, что $w \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Пусть $\mathfrak{b} = \langle e_{ij} \mid n \geq j \geq i \geq 1 \rangle$ и $\mathfrak{g}_{-1} = \langle e_{i+1,i} \mid i = 1, \dots, n-1 \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $Q(w) = 0$, так как $Q|_{F(\mathbf{a})}: F(\mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}}$ есть изоморфизм алгебр. В самом деле, если $Q(w) \neq 0$, то вместо w можно было бы рассмотреть элемент $w - (Q|_{F(\mathbf{a})})^{-1}(Q(w))$. Покажем, что тем не менее $Q(w) \neq 0$ в силу предположения индукции.

Рассмотрим произвольный моном mon_0 из записи w в виде многочлена от элементов e_{ij} . Так как $\deg w \leq n-2$ и $w \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, то существуют по крайней мере два индекса из набора $\{1, \dots, n\}$, отсутствующих во всех множителях монома. Пусть m — один из них.

Пусть $\mathfrak{g}' = \langle e_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus m \rangle$. Тогда по лемме 2 (об идеале) $I(\mathfrak{g}')$ — пуассонов идеал. Из условия теоремы и определения $\pi_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'} \equiv \pi'$ имеем $\{\pi'(w), \pi'(F(\mathbf{a})^{(\deg w)})\} = 0$. В силу леммы 5 (о накрытии) $\pi'(F(\mathfrak{g}, \mathbf{a})) = F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})$.

Пусть $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{q}'$ для $\mathfrak{g}'$ определено аналогично $\mathfrak{q}$ для $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\mathfrak{q}' = \langle \mathfrak{b}', e_{n,n-1}, \dots, e_{m+2,m+1}, e_{m+1,m-1}, e_{m-1,m-2}, \dots, e_{21} \rangle$. По предположению индукции $\pi'(w) \in F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})$. Пусть $Q': S(\mathfrak{g}') \rightarrow S(\mathfrak{q}')^{\mathfrak{h}'}$ — гомоморфизм симметрических алгебр, определенный аналогично Q . Так как $Q'|_{F(\mathfrak{g}', \mathbf{a})}: F(\mathfrak{g}', \mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q}')^{\mathfrak{h}'}$ есть изоморфизм алгебр, то $Q'(\pi'(w)) \neq 0$. Пусть mon_1 — произвольный моном из записи $Q'(\pi'(w))$ (а следовательно, и из записи $\pi'(w)$, и из записи w) в виде многочлена от элементов вида e_{ij} . Так как $\deg w \leq n-2$ и $w \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, то существует по крайней мере один индекс k из $\{1, \dots, n\} \setminus m$, отсутствующий во всех множителях монома mon_1 .

Заметим, что индекс k обладает следующим замечательным свойством: для любого множителя e_{pq} монома mon_1 верно одно из двух: либо $p < k$ и $q < k$, либо $p > k$ и $q > k$. В самом деле, рассмотрим сначала множители монома mon_1 , лежащие в $\mathfrak{g}^-$. Для каждого из них, кроме $e_{m+1,m-1}$, индексы отличаются на

единицу. При этом индекс k не входит ни в один из множителей монома. Отсюда вытекает доказываемое свойство для множителей из $\mathfrak{g}^-$. Теперь допустим, что в мономе top_1 есть такой множитель e_{pq} из $\mathfrak{g}^+$, что $p < k$ и $q > k$. Тогда, поскольку $\text{top}_1 \in P(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'}$, в top_1 должны присутствовать множители $e_{q,q-1}, \dots, e_{p+1,p}$. По крайней мере один из них содержит индекс k , чего быть не может.

Пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^1 &= \langle e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, k-1 \rangle \cong \mathfrak{gl}_{k-1}(\mathbb{C}), & \tilde{\mathfrak{g}} &= \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2, \\ \mathfrak{g}^2 &= \langle e_{ij} \mid i, j = k+1, \dots, n \rangle \cong \mathfrak{gl}_{n-k}(\mathbb{C}),\end{aligned}$$

Тогда по лемме 2 (об идеале) $I(\tilde{\mathfrak{g}})$ — пуассонов идеал. Из условия теоремы и определения $\pi_{\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}} \equiv \tilde{\pi}$ имеем $\{\tilde{\pi}(w), \tilde{\pi}(F(\mathbf{a})^{(\deg w)})\} = 0$.

В силу леммы 5 (о накрытии) $\tilde{\pi}(F(\mathbf{a})) = F(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbf{a})$. В силу леммы 1 $F(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbf{a}) \equiv F(\mathfrak{g}^1, \mathbf{a}) \otimes F(\mathfrak{g}^2, \mathbf{a})$. Покажем, что $\tilde{\pi}(w) \in F(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbf{a})$. Пусть $\tilde{\pi}(w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} b_{\gamma}$, где наборы $\{a_{\gamma} \in P(\mathfrak{g}^1)^{\mathfrak{h}}\}_{\gamma \in \Gamma}$ и $\{b_{\gamma} \in P(\mathfrak{g}^2)^{\mathfrak{h}}\}_{\gamma \in \Gamma}$ линейно независимы. В силу леммы 1 и предположения индукции получаем, что $a_{\gamma} \in F(\mathfrak{g}^1, \mathbf{a})$ и $b_{\gamma} \in F(\mathfrak{g}^2, \mathbf{a}) \forall \gamma \in \Gamma$.

Так как $Q|_{F(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbf{a})}: F(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbf{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q} \cap \tilde{\mathfrak{g}})^{\mathfrak{h} \cap \tilde{\mathfrak{g}}}$ есть изоморфизм алгебр (см. п. 2), то $Q(\tilde{\pi}(w)) \neq 0$. Поскольку $Q \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ Q$, то $\tilde{\pi}(Q(w)) \neq 0$. Отсюда $Q(w) \neq 0$. Противоречие. Теорема доказана.

5. Доказательство следствия теоремы 4. Будем рассуждать индукцией по $\deg w$. При $\deg w = 1$ утверждение следствия очевидно. Пусть $\deg w = m$. В силу теоремы 4 $\text{gr}_m w \in F(\mathbf{a})$. Пусть $w_1 \in \hat{F}(\mathbf{a})$ таков, что $\text{gr}_m w_1 = \text{gr}_m w$. Тогда $\deg(w - w_1) < m$ и $[w - w_1, \hat{F}(\mathbf{a})^{(m)}] = 0$. В силу предположения индукции $w - w_1 \in \hat{F}(\mathbf{a})$, а следовательно, $w \in \hat{F}(\mathbf{a})$.

6. Доказательство теоремы 3. Будем доказывать теорему индукцией по m . Ясно, что она верна при $m = 1$. Пусть $m > 1$. По предположению индукции $B \cap U(\mathfrak{g})^{(m-1)} = \hat{F}(\mathbf{a})^{(m-1)}$. Пусть $w \in B$, $\deg w = m$. Рассмотрим такой элемент $w_1 \in \hat{F}(\mathbf{a})^{(m)}$, что $\text{gr}_m w_1 = \text{gr}_m w$. Тогда $\deg(w - w_1) < m$. По следствию теоремы 4 $w - w_1 \in \hat{F}(\mathbf{a})^{(m-1)}$. Отсюда $w \in \hat{F}(\mathbf{a})^{(m)}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
2. Винберг Э. Б. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25.
3. Шувалов В. В. О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли // Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 4. С. 55–64.
4. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
5. Тарасов А. А. О некоторых коммутативных подалгебрах в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 115–122.
6. Nazarov M., Olshanski Gr. Bethe subalgebras in twisted yangians // Comm. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 433–506.
7. Винберг Э. Б. Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 3–62.
8. Тарасов А. А. Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 165–166.