Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Дороговцев, Энтропия стохастических потоков,
Матем. сб., 2010, том 201, номер 5, 17–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 05:10:58

УДК 519.216.7+519.218.6

А. А. Дороговцев

Энтропия стохастических потоков

Для множеств в гильбертовом пространстве введено понятие квадратичной энтропии. Показано, что такая энтропия конечна для множества значений стохастического потока броуновских частиц на $\mathbb{R}$. Следствием этого является, например, тот факт, что суммарное время свободного пробега в потоке Арратья для всех частиц, стартовавших из ограниченного интервала, конечно.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: стохастический поток, энтропия, броуновское движение, поток Арратья.

§ 1. Энтропия компактов в гильбертовом пространстве

Пусть H – вещественное сепарабельное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Определим квадратичную энтропию подмножеств H , которая является основным понятием этого параграфа. Нам понадобится дополнительное обозначение. Для конечной или бесконечной последовательности $\{u_n\}$ элементов H обозначим через $\{\pi u_n\}$ последовательность, в которой πu_n – это проекция u_n на ортогональное дополнение к замыканию линейной оболочки остальных членов последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Квадратичной энтропией* множества $A \subset H$ называется

$$\mathcal{H}_2(A) := \sup \sum_n \|\pi u_n\|^2,$$

где супремум берется по всем конечным и бесконечным последовательностям элементов из A .

Достаточным условием для конечности квадратичной энтропии множества является его σ_2 -ограниченность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $A \subset H$ называется σ_2 -ограниченным, если

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{h \in A} (h, e_k)^2 < +\infty, \quad (1)$$

где внешний супремум берется по всем ортонормированным базисам $\{e_k; k \geq 1\}$ в H .

Работа выполнена при частичной поддержке Україно-Российского гранта № 184–2009.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сумма в (1) меняется, вообще говоря, в зависимости от выбора базиса $\{e_k; k \geq 1\}$ и может быть конечной для одного базиса и бесконечной для другого, как показывает следующий пример.

ПРИМЕР. Разобьем множество натуральных чисел на отрезки $\{I_k; k \geq 1\}$, длины которых равны последовательным степеням двойки. Рассмотрим ортонормированный базис в H $\{e_j^k; j \in I_k, k \geq 1\}$. Пусть

$$(a_{ij}^k)_{ij \in I_k}$$

– матрица Адамара порядка 2^k , $k \geq 1$. Положим для $i \in I_k$

$$f_i^k = \frac{1}{k \cdot 2^{k/2}} \sum_{j \in I_k} a_{ij}^k e_j$$

и определим множество A как последовательность $\{f_i^k; i \in I_k, k \geq 1\}$. По определению матрицы Адамара все a_{ij}^k равны ± 1 и f_i^k ортогональны между собой при фиксированном k . Поэтому для базиса $\{e_j^k; j \in I_k, k \geq 1\}$ сумма из (1) равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{k 2^{k/2}} < +\infty.$$

В то же время для ортонормированного базиса

$$h_i^k = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{j \in I_k} a_{ij}^k e_j$$

сумма из (1) равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{k^2} = +\infty.$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Квадратичная энтропия $\mathcal{H}_2(A)$ конечна для σ_2 -ограниченных множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A σ_2 -ограничено. Обозначим через S супремум (1) для A . Рассмотрим произвольную последовательность $\{u_n\}$ элементов A . По последовательности $\{\pi u_n\}$ построим новую, полагая

$$e_n = \frac{1}{\|\pi u_n\|} \pi u_n,$$

если $\|\pi u_n\| \neq 0$, и $e_n = 0$, если $\|\pi u_n\| = 0$. Выбрасывая из последовательности $\{e_n\}$ нули, получим ортонормированную последовательность. При этом

$$\sum_n \sup_{h \in A} (h, e_n)^2 \geq \sum_n \|\pi u_n\|^2.$$

Поэтому

$$\mathcal{H}_2(A) \leq S.$$

Лемма доказана.

Простое достаточное условие σ^2 -ограниченности множества A дает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $\overline{B}$ – замкнутый единичный шар с центром в 0 в пространстве H , а Q – оператор Гильберта–Шмидта в H . Тогда $Q(\overline{B})$ является σ_2 -ограниченным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_k; k \geq 1\}$ – ортонормированный базис в H . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{h \in Q(\overline{B})} (h, e_k)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\|g\| \leq 1} (Qg, e_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\|g\| \leq 1} (g, Q^*e_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|Q^*e_k\|^2 < +\infty, \end{aligned}$$

так как Q^* также является оператором Гильберта–Шмидта.

Лемма доказана.

Очевидными свойствами σ_2 -ограниченных множеств являются следующие:

- 1) любое подмножество σ_2 -ограниченного множества также является σ_2 -ограниченным;
- 2) замыкание σ_2 -ограниченного множества является σ_2 -ограниченным;
- 3) замкнутое σ_2 -ограниченное множество является компактом.

Отметим, что не все компакты в H являются σ_2 -ограниченными. Подтверждением этому служит пример множества

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} e_n; n \geq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

σ_2 -ограниченные множества вводились в работе [1], где доказано утверждение, обратное к лемме 2. А именно, любое σ_2 -ограниченное множество содержится в некотором образе единичного шара при действии оператором Гильберта–Шмидта. В работе [2] такие множества исследовались в качестве множеств квазиинвариантности для мер на гильбертовом пространстве.

Рассмотрим примеры σ_2 -ограниченных множеств.

ЛЕММА 3. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ – компактное метрическое пространство, обладающее свойством

$$L = \sup_{\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{X}} \sum_{k=1}^n \min_{j \neq k} \rho(x_k, x_j)^\alpha < +\infty. \quad (2)$$

Здесь супремум берется по всем конечным наборам различных точек из $\mathfrak{X}$, а α – некоторое положительное число. Пусть $f: \mathfrak{X} \rightarrow H$ – функция, удовлетворяющая условию: найдется $C > 0$ такое, что для любых $x, y \in \mathfrak{X}$ верно

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq C\rho(x, y)^\alpha. \quad (3)$$

Тогда квадратичная энтропия $\mathcal{H}_2(f(\mathfrak{X}))$ конечна и

$$\mathcal{H}_2(f(\mathfrak{X})) \leq CL. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки неравенства (4) достаточно заметить, что для произвольных $y_1, \dots, y_n \in f(\mathfrak{X})$

$$\sum_{k=1}^n \|\pi y_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \|y_k - y_{j(k)}\|^2, \quad (5)$$

где $j(1), \dots, j(n)$ – произвольный набор чисел из $\{1, \dots, n\}$ такой, что $j(k) \neq k$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Определим $j(k)$ так, что

$$\rho(x_k, x_{j(k)}) = \min_{j \neq k} \rho(x_k, x_j).$$

Согласно (5) и условию леммы

$$\sum_{k=1}^n \|\pi y_k\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \rho(x_k, x_{j(k)})^\alpha \leq CL.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В том случае, когда $\mathfrak{X}$ является шаром в $\mathbb{R}^d$, показатель α не меньше d . Необходимость выполнения такого неравенства можно получить, заметив, что указанный в (2) супремум не меньше чем $N_\varepsilon \cdot \varepsilon^\alpha$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Здесь N_ε – это ε -энтропия $\mathfrak{X}$, т.е. наибольшее число точек из $\mathfrak{X}$, все попарные расстояния между которыми не меньше ε . Так как для шара N_ε растет как $\varepsilon^{1/d}$, то для конечности L необходимо, чтобы α было не меньше чем d . Неравенство $\alpha \geq d$ является также достаточным для конечности супремума в (2). Это следует из того, что не более чем N_1 слагаемых в (2) могут быть больше чем 1.

Для компактов, являющихся образами отрезков при непрерывных отображениях, можно ввести понятие квадратичной энтропии, связанное с порядком на прямой. Пусть $f: [a, b] \rightarrow H$ – непрерывная функция. Пусть

$$\lambda = \{u_0 = a < u_1 < \dots < u_n = b\}$$

– разбиение отрезка $[a, b]$. Для последовательности $\{f(u_k); k = 0, \dots, n\}$ элементов H обозначим через $\{\tilde{\pi}f(u_k); k = 0, \dots, n\}$ последовательность, в которой $\tilde{\pi}f(u_k)$ – это проекция $f(u_k)$ на ортогональное дополнение линейной оболочки предыдущих членов последовательности, а $\tilde{\pi}f(u_0) = f(u_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Квадратичной энтропией* функции $f: [a, b] \rightarrow H$ называется

$$\vec{\mathcal{H}}_2(f) := \sup \sum_{k=1}^n \|\tilde{\pi}f(u_k)\|^2,$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a, b]$.

Аналогично доказательству леммы 3 можно проверить справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow H$ удовлетворяет условию Гёльдера: найдется $C > 0$ такое, что для любых $x, y \in [a, b]$ верно

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq C|x - y|. \quad (6)$$

Тогда квадратичная энтропия $\vec{\mathcal{H}}_2(f)$ конечна и

$$\vec{\mathcal{H}}_2(f) \leq C(b - a). \quad (7)$$

§ 2. Энтропия стохастических потоков

В настоящем параграфе понятие квадратичной энтропии применяется к исследованию “сложности” вероятностного устройства стохастических потоков. Такие потоки возникают, например, при решении стохастических дифференциальных уравнений (см. [3]). Так, если $\{w(t), t \in [0, 1]\}$ – стандартный одномерный винеровский процесс, а непрерывно дифференцируемые функции a, b имеют ограниченные производные, то стохастическому уравнению Ито

$$dx(t) = a(x(t)) dt + b(x(t)) dw(t) \quad (8)$$

отвечает случайное поле

$$\{x(u, t); u \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$$

такое, что для каждого $u \in \mathbb{R}$ $x(u, \cdot)$ – решение задачи Коши для уравнения (8) с начальным условием $x(u, 0) = u$. Поле x называется *стохастическим потоком*, соответствующим (8). Такие стохастические потоки наследуют многие свойства потоков, отвечающих обычным дифференциальным уравнениям (см., например, [3]). Гораздо более обширный класс примеров стохастических потоков доставляет другой подход к их построению, связанный с трактовкой потока как совокупности траекторий взаимодействующих частиц, стартовавших из каждой точки пространства (см. [3]–[6] и имеющиеся там ссылки). При этом возможны различные способы построения стохастического потока. Здесь мы пользуемся следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Случайное поле $\{y(u, t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ называется *стохастическим потоком* броуновских частиц, если:

- 1) $y(u, \cdot)$ при каждом u является винеровским мартингалом относительно потока σ -алгебр $\sigma(y(v, s); v \in \mathbb{R}, s \leq t), t \geq 0$, начинающимся в u ;
- 2) для произвольных $u_1 \leq u_2$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$y(u_1, t) \leq y(u_2, t).$$

Характерным примером потока броуновских частиц является поток Арратья.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Стохастический поток

$$\{x(u, t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

называется *поток* *Арратья*, если для произвольных $u_1 \leq u_2$ взаимная характеристика мартингалов $x(u_1, \cdot)$ и $x(u_2, \cdot)$ имеет вид

$$\langle x(u_1, \cdot), x(u_2, \cdot) \rangle_t = (t - \tau(u_1, u_2))_+,$$

где

$$\tau(u_1, u_2) = \inf \{s \geq 0 : x(u_1, s) = x(u_2, s)\}.$$

Этот поток можно получить из потоков, отвечающих стохастическим дифференциальным уравнениям с гладкими коэффициентами, с помощью предельного перехода. Рассмотрим следующее уравнение:

$$dx_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(t) - p) W(dp, dt). \quad (9)$$

Здесь винеровский лист W – это гауссовская случайная мера с независимыми значениями на непересекающихся множествах, нулевым средним и структурной мерой Лебега, $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $x \in \mathbb{R}$, где функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\text{supp } \varphi \subset [-1, 1], \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx = 1.$$

Интеграл в (9) определяется как интеграл Ито. Подробнее об уравнениях с винеровским листом можно прочитать в [6]. При каждом $\varepsilon > 0$ уравнению (9) соответствует стохастический поток $\{x_\varepsilon(u, t); u \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$. Поток x_ε имеет следующие свойства:

1) при $u_1 \leq u_2$, $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$x_\varepsilon(u_1, t) \leq x_\varepsilon(u_2, t);$$

2) при каждом $u \in \mathbb{R}$ $x_\varepsilon(u, \cdot)$ – стандартный винеровский процесс, начинающийся в u .

Таким образом, поток x_ε описывает движение континуального семейства взаимодействующих броуновских частиц. В [7] доказано, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ случайные процессы $\{x_\varepsilon(u_1, \cdot), \dots, x_\varepsilon(u_n, \cdot)\}$ сходятся по распределению в пространстве $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ к $\{x(u_1, \cdot), \dots, x(u_n, \cdot)\}$, где $\{x(u, t); u \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$ – поток Арратья.

Как и в потоках x_ε , отдельные частицы в потоке Арратья совершают броуновское движение. При этом до момента встречи частицы движутся независимо, а затем склеиваются. Оказывается, что общее время независимого движения частиц, стартовавших из всех точек отрезка, конечно.

Нам понадобится точная формулировка этого факта.

Пусть $\lambda = \{u_0 = a < u_1 < \dots < u_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Как обычно, $|\lambda| = \max_{k=0, \dots, n-1} (u_{k+1} - u_k)$. Определим моменты остановки:

$$\tau(u_0) = 1, \quad \tau(u_k) = \inf \{t : x(u_{k-1}, t) = x(u_k, t)\} \wedge 1.$$

Справедлива следующая теорема (см. [6], [8]).

ТЕОРЕМА 1. *Существует предел в среднем*

$$\zeta = \lim_{|\lambda| \rightarrow 0+} \sum_{k=0}^n \tau(u_k).$$

Для каждого разбиения λ

$$\sum_{k=0}^n \tau(u_k) \leq \zeta.$$

Эту случайную величину ζ обозначим через

$$\int_a^b \tau(u). \quad (10)$$

Отсутствие знака дифференциала подчеркивает тот факт, что при измельчении разбиения сами времена $\tau(u_k)$ становятся в среднем малыми. Так же, как в (10), можно определить и более сложные объекты вида

$$\int_a^b \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s)) ds, \quad \int_a^b \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s)) dx(u, s).$$

С их помощью можно записать теорему Гирсанова и принцип больших уклонений для потока Арратья (см. [6], [8]).

Конечность общего времени свободного пробега в потоке Арратья соответствует тому, что на “разумном” вероятностном пространстве нельзя определить континуальное количество независимых невырожденных случайных величин. Следовательно, независимые броуновские движения, стартовавшие из каждой точки отрезка в потоке Арратья, должны “быстро” склеиться между собой. Именно это обстоятельство и является предметом исследования в настоящей работе. Цель этой статьи состоит в том, чтобы предложить характеристику стохастического потока, конечность которой отражала бы факт конечности свободного пробега для потока Арратья. При этом нужно, чтобы введенная характеристика имела смысл и для “гладких” потоков типа x_ε , в которых встречи частиц не происходят. Оказывается, что подходящим инструментом здесь является квадратическая энтропия ассоциированной с потоком совокупности случайных величин.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В потоке, удовлетворяющем определению 4, частицы склеиваются во время встречи, как и в потоке Арратья. Действительно, для $u_1 < u_2$ разность $y(u_2, \cdot) - y(u_1, \cdot)$ является неотрицательным мартингалом. Следовательно (см. [9]),

$$y(u_2, t) - y(u_1, t) = 0$$

для $t \geq \inf\{s : y(u_2, s) - y(u_1, s) = 0\}$.

Последнее обстоятельство позволяет получить оценку среднеквадратического расстояния между $y(u_1, 1)$ и $y(u_2, 1)$, не зависящую от строения потока y .

Справедлива следующая оценка.

ЛЕММА 5. Пусть y — стохастический поток, удовлетворяющий определению 4. Тогда для произвольных $u_1 \leq u_2$

$$M(y(u_1, 1) - y(u_2, 1))^2 \leq (u_1 - u_2)^2 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}(u_2 - u_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, разность $y(u_2, \cdot) - y(u_1, \cdot)$ является неотрицательным непрерывным квадратично-интегрируемым мартингалом. Поэтому согласно теореме Найта (см. [9]) существует винеровский процесс w (возможно, на расширенном вероятностном пространстве) такой, что

$$y(u_2, t) - y(u_1, t) = u_2 - u_1 + w(\langle y(u_2, \cdot) - y(u_1, \cdot) - u_2 + u_1 \rangle(t)), \quad t \geq 0.$$

Так как $y(u_1, \cdot)$ и $y(u_2, \cdot)$ являются винеровскими процессами, то

$$\langle y(u_2, \cdot) - y(u_1, \cdot) - u_2 + u_1 \rangle(1) \leq 2.$$

Кроме того, $y(u_2, \cdot) - y(u_1, \cdot)$ — неотрицательный мартингал, равный нулю после момента первого попадания в нуль. Поэтому

$$M(y(u_2, 1) - y(u_1, 1))^2 \leq M \sup_{[0, 2]} w^2(t \wedge \tau) + (u_2 - u_1)^2.$$

Здесь $\tau = \min\{t : w(t) = u_2 - u_1\}$. Используя неравенство Дуба с постоянной 2 (см. [10]), получаем окончательно

$$\begin{aligned} M(y(u_2, 1) - y(u_1, 1))^2 &\leq 2Mw^2(2 \wedge \tau) + (u_2 - u_1)^2 \\ &= 2M2 \wedge \tau + (u_2 - u_1)^2 = 2 \int_0^2 2 \int_0^{u_2 - u_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-v^2/(2t)} dv dt + (u_2 - u_1)^2 \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}}(u_2 - u_1) \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} + (u_2 - u_1)^2 = \frac{8}{\sqrt{\pi}}(u_2 - u_1) + (u_2 - u_1)^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Полученная оценка позволяет сделать вывод о конечности квадратической энтропии для стохастических потоков на $\mathbb{R}$. Для того чтобы использовать определения и утверждения из § 1, рассмотрим функции, действующие из отрезка $[0, 1]$ в множество случайных величин $\{y(u, 1); u \in [0, 1]\}$ или $\{y(u, 1) - u; u \in [0, 1]\}$.

Следствием лемм 4 и 5 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Справедливы неравенства

$$\tilde{\mathcal{H}}_2(y(\cdot, 1)) < +\infty, \quad \tilde{\mathcal{H}}_2(y(\cdot, 1) - \cdot) < +\infty.$$

Для того чтобы связать между собой конечность квадратической энтропии и конечность общего свободного пробега для потока Арратья, рассмотрим произвольное разбиение $0 = u_0 < \dots < u_n = 1$ отрезка $[0, 1]$. Заметим, что в обозначениях § 1

$$M \sum_{k=0}^n \tau(u_k) = \sum_{k=0}^n M(x(u_k, \tau(u_k)) - u_k)^2.$$

Для каждого $k = 0, \dots, n$

$$x(u_k, 1) - u_k = x(u_k, \tau(u_k)) - u_k + x(u_k, 1) - x(u_k, \tau(u_k)).$$

В силу построения моментов $\tau(u_k)$ случайная величина $x(u_k, \tau(u_k)) - u_k$ ортогональна всем случайным величинам $x(u_j, 1) - u_j$, $j = 0, \dots, k-1$, и, кроме того, случайной величине $x(u_k, 1) - x(u_k, \tau(u_k))$. Поэтому в обозначениях §2

$$M(x(u_k, \tau(u_k)) - u_k)^2 \leq M\vec{\pi}(x(u_k, 1) - u_k)^2.$$

Следовательно,

$$M \sum_{k=0}^n \tau(u_k) \leq \sum_{k=0}^n \vec{\pi}(x(u_k, 1) - u_k)^2.$$

Таким образом,

$$\sup M \sum_{k=0}^n \tau(u_k) \leq \vec{\mathcal{H}}_2(x(\cdot, 1) - \cdot).$$

Здесь супремум берется по всем возможным разбиениям отрезка $[0, 1]$. Отметим, что как раз конечность такого супремума и влечет за собой конечность общего времени свободного пробега (см. [6]). Поэтому следствием теоремы является такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Для потока Аппатъя суммарное время ζ свободного пробега всех частиц, стартовавших из $[0, 1]$, конечно и

$$M\zeta \leq \vec{\mathcal{H}}_2(x(\cdot, 1) - \cdot).$$

В заключение автор благодарит В.И. Богачева за указание на работы В.Н. Судакова о компактах в гильбертовом пространстве.

Список литературы

- [1] В.Н. Судаков, “Об одном классе компактов гильбертова пространства”, *УМН*, **18:1**, (1963), 181–187.
- [2] В.Н. Судаков, “К характеристике квазиинвариантности мер в гильбертовом пространстве”, *УМН*, **18:1**, (1963), 188–190.
- [3] С. Ватанабе, Н. Икеда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1981.
- [4] Н. Кунита, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Stud. Adv. Math., **24**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [5] R. W. R. Darling, *Constructing nonhomeomorphic stochastic flows*, Mem. Amer. Math. Soc., **70**, no. 376, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [6] А.А. Дороговцев, *Мерозначные процессы и стохастические потоки*, Ин-т математики, Киев, 2007.
- [7] А.А. Dorogovtsev, “One Brownian stochastic flow”, *Theory Stoch. Process.*, **10:3–4**, (2004), 21–25.

- [8] А. А. Дороговцев, “Стохастический интеграл по потоку Араттия”, *Докл. РАН*, **410**:2, (2006), 156–157; англ. пер.: А. А. Dorogovtsev, “Stochastic integral over the arratia flow”, *Dokl. Math.*, **74**:2, (2006), 648–649.
- [9] О. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 2002.
- [10] R. F. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 1995.

А. А. Дороговцев (А. А. Dorogovtsev)
Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: adoro@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
24.04.2009 и 28.09.2009